دانشگاه شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

مطالعه شرایطی که تحت آن حلقه‌های برگشت‌پذیر و دیوراست یکسانند

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

دانشجو

سلیمه عزتی گلایی

۱۳۹۳

سایه‌های پدر و مادرم را گرم‌ترین سایه‌های جهان بر سرم می‌دانم.

تقدیم به آن‌ها و همه کسانی که این چنین‌اند:

مهربان و بی‌ادعا

سپاس گزاری...

با سپاس از خدا که همواره مبهوت حکمتش بوده و هستم.
اکنون که با عنایت پروردگار تدوین و نگارش این پایان‌نامه پایان یافته، لازم و شایسته است که از زحمات استاد عزیزم جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی به خاطر زحمات بی‌دریغ ایشان در طول مدت تحصیل و همچنین آن‌چه از ایشان آموخته‌ام، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم.
همچنین از خانواده عزیزم به خصوص پدر و مادرم که در طول زندگی همواره مشوق و پشتیان من بودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.
از دوستان عزیزم که می‌توانم نامشان را در سینه حک کنم و ذهنم تکرارگر روزهای شیرینی است که در کنار هم سپری کردیم صمیمانه سپاسگذاری می‌کنم.

سلیمه عزتی گلابی
۱۳۹۳

تعهدنامه

اینجانب **سلیمه عزتی گلمایی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **مطالعه شرایطی که تحت آن حلقه‌های برگشت‌پذیر و دیوراست یکسانند** ، تحت راهنمایی **دکتر ابراهیم هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ University of Shahrood “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سلیمه عزتی گلمایی
۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به معرفی تعاریف و مثال‌هایی از حلقه‌های جابجایی و ناجابجایی می‌پردازیم. سپس حلقه‌های مک‌کوی را معرفی کرده و مثال‌هایی را که دارای این خاصیت هستند، بیان می‌کنیم. از آنجا که حلقه‌های برگشت‌پذیر، دیوراست و آرمنداریز در نظریه حلقه‌ها بسیار اهمیت دارند و ثابت شده است که این حلقه‌ها ارتباطی به یکدیگر ندارند، در این پایان‌نامه شرایطی را مطالعه می‌کنیم که تحت آن این حلقه‌ها یکسان هستند. بنابراین حلقه‌های شبه آرمنداریز راست را تعریف می‌کنیم و مثال‌هایی از حلقه‌های غیرآرمنداریزی که دارای این خاصیت هستند بیان می‌کنیم و با ارائه مثالی نشان می‌دهیم که حلقه‌های شبه آرمنداریز و قویا مک‌کوی یکسان نیستند. در نهایت نشان می‌دهیم اگر حلقه R منظم باشد، حلقه R شبه آرمنداریز راست است اگر و تنها اگر R قویا مک‌کوی باشد اگر و تنها اگر R آبلی باشد. همچنین نشان می‌دهیم حلقه R شبه آرمنداریز راست است اگر و تنها اگر حلقه چندجمله‌ای ها روی R چنین باشد اگر و تنها اگر حلقه کسرهای کلاسیک روی R شبه آرمنداریز باشد.
کلمات کلیدی: حلقه مک‌کوی، حلقه آرمنداریز، ایده‌آل، حلقه برگشت‌پذیر، حلقه دیوراست.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

حلقه‌های برگشت‌پذیر برای اولین بار به‌طور جدی در سال ۱۹۹۵ توسط کوهن معرفی شدند. پیش از او نیز کرمپا[۱] و نی‌وی‌چرزال[۲] نماد $C_۰$ و همچنین آندرسون[۳] و کامیلو[۴] [۳]لفظ $ZC_۲$ را برای حلقه‌هایی که به زبان امروزی برگشت‌پذیر هستند، بکاربرده بودند. کوهن نشان داد که حلقه R دامنه است اگر و فقط اگر اول و برگشت‌پذیر باشد.
پس از معرفی کوتاه،کار جدی در این زمینه اکثرا به دست چند ریاضی‌دان کره جنوبی که کار اصلی آن‌ها در حیطه حلقه‌های متقارن و حلقه‌های نیم‌جابجایی و آرمنداریز بوده، انجام گرفته است.
حلقه‌های متقارن و نیم‌جابجایی توسط لمبک معرفی شدند. اندرسون و کامیلو با هم و کرمپا و نی‌وی‌چرزال نیز با هم مستقل از لمبک روی حلقه‌های متقارن کار کردند.
اندرسون و کامیلو لفظ $ZC_۳$ را برای حلقه‌های متقارن بکار بردند. حلقه‌های مک‌کوی[۵] و قویا مک‌کوی راست (چپ) نیز برای اولین بار توسط نیلسن[۶] معرفی شدند. نیلسن همچنین ثابت کرد که حلقه‌های برگشت‌پذیر قویا مک‌کوی راست هستند.
حلقه‌های آرمنداریز نیز برای اولین بار توسط چاوو[۷] در[۱۷] مورد بررسی جدی قرار گرفتند. به این دلیل آن‌ها را آرمنداریز نامیدند که اولین بار آرمنداریز در [۴] حلقه‌هایی را بیان کرد که دارای خاصیت آرمنداریز هستند. همچنین این سوال را مطرح کردند که آیا آرمنداریز بودن R و $R[x]$ با هم معادلند که اندرسون و کامیلو به این سوال پاسخ مثبت دادند. در این پایان‌نامه حلقه‌های دیوراست نیز معرفی

[۱] Krempa
[۲] Niewieczerzal
[۳] Anderson
[۴] Camillo
[۵] Mccoy
[۶] Nielson
[۷] Chhawchharia

می‌شوند که در آن‌ها هر ایده‌آل راست، دوطرفه است و ثابت می‌شود که این حلقه‌ها آبلی بوده و دارای ویژگی مک‌کوی راست و آرمنداریز هستند.
حال به معرفی مفاهیم و تعاریفی که در این پایان‌نامه استفاده شده‌اند، می‌پردازیم.

۲.۱ تعاریف و مثال‌ها

در تمام پایان‌نامه R نمایانگر یک حلقه شرکت‌پذیر و یکدار است.

تعریف ۱.۲.۱. حلقه ناصفر R را ساده می‌نامیم هرگاه $\{0\}$ و R تنها ایده‌آل‌های آن باشند. بنابراین اگر R ساده باشد و $0 \neq a \in R$، آنگاه عناصر $c_i, b_i \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $\sum_{i=1}^{n} b_i a c_i = 1$.

تعریف ۲.۲.۱. عنصر $a \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر چپ می‌نامیم هرگاه عنصر ناصفر $b \in R$ وجود داشته باشد که $ab = 0$. متناظراً مقسوم‌علیه صفر راست تعریف می‌شود و اگر $a \in R$ هم مقسوم‌علیه صفر چپ و هم مقسوم‌علیه صفر راست باشد، آن را مقسوم‌علیه صفر می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. حلقه R را دامنه می‌نامیم هرگاه هیچ مقسوم‌علیه صفر راست و چپ ناصفر نداشته باشد و هرگاه دامنه R جابجایی باشد آن را دامنه صحیح یا حوزه صحیح می‌نامیم و عنصر x از حلقه R را که مقسوم‌علیه صفر نباشد، منظم می‌گوییم.

تعریف ۴.۲.۱. عنصر $a \in R$ را یک عنصر پوچ‌توان گوییم هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به‌طوری‌که $a^n = 0$.

مجموعه عناصر پوچ‌توان R را با $\mathrm{nil}(R)$ نمایش می‌دهیم.
واضح است که هر عنصر پوچ‌توان در حلقه R، یک مقسوم‌علیه صفر است همچنین $0 \in R$ عنصری پوچ‌توان است.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید $a \in R$، a را یک عنصر خودتوان نامند هرگاه $a^2 = a$. عنصر خودتوان a را نابدیهی گوییم هرگاه $a \neq 0$ و $a \neq 1$.
واضح است که در هر حلقه، صفر تنها عنصر پوچ‌توان است که خودتوان نیز است.
در حلقه R اگر e خودتوان نابدیهی باشد چون $e(1-e) = 0$ پس e یک مقسوم‌علیه صفر است.

تعریف ۶.۲.۱. ایده‌آل I از حلقه R را پوچ گوییم هرگاه تمام عناصر I پوچ توان باشند.

مثال ۷.۲.۱. $\mathrm{nil}(R)$ یک ایده‌آل پوچ از حلقه جابجایی R است.

تعریف ۸.۲.۱. مجموع تمام ایده‌آل‌های پوچ را رادیکال پوچ می‌گوییم و با $N(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. حلقه R را تقلیل‌یافته گوییم هرگاه صفر تنها عنصر پوچ‌توان آن باشد.
حلقه جابجایی R تقلیل‌یافته است، اگر رادیکال پوچ آن برابر صفر باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. ایده‌ال Q از حلقه R را نیم اول می‌نامیم هرگاه A ایده‌الی از R باشد و $A^2 \subseteq Q$ آنگاه $A \subseteq Q$.

تعریف ۱.۲.۱۱. حلقه Rرا اول (نیم‌اول) می‌نامیم هرگاه $\{0\}$ ایده‌ال اول (نیم‌اول) آن باشد.

تعریف ۱.۲.۱۲. حلقه R نیم‌جابجایی نامیده می‌شود هرگاه $a, b \in R$ و $ab = 0$، آنگاه $aRb = 0$.

تعریف ۱.۲.۱۳. عنصر a از حلقه R را وارون‌پذیر گوییم هرگاه عضوی مانند b از R موجود باشد که $ba = ab = 1$. مجموعه عناصر وارون‌پذیر R را با $U(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۴. حلقه Rرا فون نیومن منظم گوییم، هرگاه برای هر $x \in R$ عنصر $y \in R$ موجود باشد که $x = xyx$.
واضح است که هر حلقه فون نیومن منظم جابجایی، تقلیل‌یافته است. زیرا اگر $y \in R$ و $y^2 = 0$، آنگاه چون R فون نیومن منظم است $b \in R$ وجود دارد که $y = yby$ و چون حلقه جابجایی است $y = by^2$، که نتیجه می‌شود $y = 0$. بنابراین R حلقه‌ای تقلیل‌یافته است.
در این پایان‌نامه حلقه فون نیومن منظم را به اختصار منظم می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۵. حلقه R را آبلی گوییم اگر تمام اعضای خودتوان آن مرکزی باشند.

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنید K یک حلقه باشد و $\{x_i | i \in I\}$ مجموعه‌ای از متغیرهای آزاد تعویض‌ناپذیر روی K باشد (اگر $i \neq j$، آنگاه $x_ix_j \neq x_jx_i$ و برای هر $k \in K$، $kx_i = x_ik$). K-حلقه آزاد تولیدشده به وسیله $\{x_i | i \in I\}$ را با علامت $R = K\langle x_i, i \in I\rangle$ نشان می‌دهیم. عناصر این حلقه، چندجمله‌ای‌هایی براساس متغیرهای تعویض‌ناپذیر $\{x_i | i \in I\}$ با ضرایبی از K هستند.
این حلقه، با حلقه چندجمله‌ای‌های $K[x_i\,;\, i \in I]$ تفاوت دارد. در حلقه چندجمله‌ای‌ها متغیرها با هم جابجا می‌شوند.

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنید K یک حلقه جابجایی یکدار باشد، Kـجبر (جبر روی K) A حلقه‌ای است که:
الف.$(A, +)$ یک K ـمدول یکانی است.
ب. به‌ازای هر $k \in K$ و $a, b \in A$، $k(ab) = (ka)b = a(kb)$.

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنید α یک درون‌ریختی از حلقه K باشد، تابع جمعی $\delta : K \longrightarrow K$ را یک تابع αـمشتق می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in K$، $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$.

تعریف ۱.۲.۱۹. یک مجموعه جزیی مرتب A مجموعه مستقیم نامیده می‌شود اگر برای هر $\alpha, \beta \in A$ ، $\gamma \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\beta \leq \gamma$ و $\alpha \leq \gamma$.

تعریف ۱.۲.۲۰. فرض کنید C یک کاتگوری باشد. یک سیستم مستقیم از C، از مجموعه مستقیم A و مجموعه $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ از C و مورفیسم‌های $l_{\alpha\beta} : X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ (برای هر $\alpha \leq \beta$) تشکیل شده به‌طوری‌که:
الف. برای هر $\alpha \in A$، $l_{\alpha\alpha} = id_{X_\alpha}$.
ب. برای $\alpha \leq \beta \leq \gamma$، $l_{\beta\gamma} o l_{\alpha\beta} = l_{\alpha\gamma}$.

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنید C یک کاتگوری و $(A, \{X_\alpha\}, \{l_{\alpha\beta}\})$ یک سیستم مستقیم در C باشد. $X \in ob(C)$ حد مستقیم سیستم فوق است اگر برای $\alpha \in A$ مورفیسم $l_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$ با ویژگی‌های زیر وجود داشته باشد.

الف. برای هر $\alpha \leq \beta$ نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[d, "l_{\alpha\beta}"'] \arrow[dr, "l_\alpha"] & \\ X_\beta \arrow[r, "l_\beta"'] & X \end{tikzcd}$$

ب. برای هر $Y \in ob(C)$ و مورفیسم $\varphi_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y$ داده شده برای $\alpha \leq \beta$ نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[d, "\varphi_{\alpha\beta}"'] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"] & \\ X_\beta \arrow[r, "\varphi_\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

و مورفیسم منحصر به‌فرد $\varphi : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای همه $\alpha \in A$ نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "l_\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

می‌توان نشان داد که اگر حد مستقیم وجود داشته باشد در حد یکریختی منحصر به‌فرد است و آن را با $\lim_{\rightarrow} X_\alpha$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲۲.۲.۱. فرض کنید α یک درون‌ریختی و δ یک تابع α-مشتق از حلقه K باشد. حلقه چندجمله‌ای‌های اریب روی K را با $K[x; \alpha, \delta]$ نشان می‌دهیم و عناصر آن چندجمله‌ای‌هایی به صورت

$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ هستند که $n \geq 0$ و $a_i \in k$.
عمل جمع روی $K[x;\alpha,\delta]$ به‌طور طبیعی و عمل ضرب طوری تعریف می‌شود که برای هر $a \in K$،

$$xa = \alpha(a)x + \delta(a)$$

اگر α تابع همانی باشد، آن‌گاه $K[x;\alpha,\delta]$ را با $K[x;\delta]$ نشان می‌دهیم و آن را حلقه چندجمله‌ای‌های مشتق روی K می‌نامیم.
هرگاه $\delta = 0$ باشد، به‌جای $K[x;\alpha,\delta]$ از $K[x;\alpha]$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۳.۲.۱. فرض کنید R و S دوحلقه و M یک (R,S)–دو مدول باشند، یعنی M یک R مدول چپ و S مدول راست است که برای هر $r \in R$ ، $s \in S$ و $m \in M$ داریم:

$$(rm)s = r(ms),$$

قرار می‌دهیم:

$$A = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \middle| r \in R,\, m \in M,\, s \in S \right\}$$

می‌توان نشان داد که A با دو عمل جمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها یک حلقه تشکیل می‌دهد. گاهی A را با علامت $R \oplus M \oplus S$ نیز نشان می‌دهیم. اگر $R = S$ و M یک (R,R)ـدو مدول باشد آن‌گاه $\left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \middle| r \in R,\ m \in M, \right\}$ را توسیع بدیهی R به وسیله M می‌نامیم و با $T(R,M)$ نشان می‌دهیم. هر عضو از $T(R,M)$ را می‌توان با (r,m) نیز نشان داد. بنابراین عمل ضرب برای هر $(r_1,m_1),(r_2,m_2) \in T(R,M)$ با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$(r_1,m_1)(r_2,m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2)$$

۳.۱ قضایا و لم‌های مقدماتی

لم ۱.۳.۱. ([۱۶]،لم ۱) فرض کنید R یک حلقه نیم‌جابجایی باشد و $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ دو عضو از $R[x]$ باشند. اگر $f(x)g(x) = 0$ آنگاه برای تمام $i \in \{0,\cdots,m\}$، $a_i b_0^{i+1} = 0$.

برهان. ضریب x^i از معادله $f(x)g(x) = 0$ نتیجه می‌دهد که برای هر $i \in \{0,\cdots,m\}$،

$$\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = 0, \quad (*)_i$$

برای $i = 0$ داریم $a_0 b_0 = 0$.
حال فرض کنید برای تمام $j < k$، $a_j b_0^{j+1} = 0$ به ویژه $a_j b_0^k = 0$. بنابراین با توجه به نیم‌جابجایی بودن برای تمام $j < k$، $a_j b_{k-j} b_0^k = 0$. با بکار بردن $(*)_k$ و ضرب از راست آن در b_0^k نتیجه می‌گیریم:

$$0 = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} b_0^k = a_k b_0^{k+1},$$

□

لم ۲.۳.۱. ([۵]،لم ۵.۴) فرض کنید R یک حلقه نیم‌جابجایی باشد و $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i\in R[x]$، اگر $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\in R[x]$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(x)g(x)=0$ آنگاه
$$a_0^{n+1}g(x)=0,\ a_m^{n+1}g(x)=0.$$

برهان. ابتدا $f^*(x)=x^mf(x^{-1})$ و $g^*(x)=x^ng(x^{-1})$ در نظر می‌گیریم، با جابه‌جا شدن ضرایب چندجمله‌ای‌ها معادله $f^*(x)g^*(x)=0$ بدست می‌آید. برای تکمیل لم کافی است ثابت کنیم $a_0^{n+1}g(x)=0$ زیرا به‌طور متقارن $a_m^{n+1}g^*(x)=0$ که معادل است با اینکه $a_m^{n+1}g(x)=0$.
واضح است $a_0b_0=0$، به استقرا فرض می‌کنیم برای هر $l<j$، $a_0^{l+1}b_l=0$، در معادله $f(x)g(x)=0$ ضریب جمله jام برابر است با
$$\sum_{i=0}^{j}a_jb_{j-i}=0,$$
که اگر از چپ آن را با a_0^j ضرب کنیم داریم:
$$0=\sum_{i=0}^{j}a_0^ja_ib_{j-i}=a_0^{j+1}b_j+\sum_{i=1}^{j}a_0^ja_ib_{j-i}=a_0^{j+1}b_j.$$
در نتیجه
$$a_0^{j+1}b_j=0.$$
بنابراین برای هر n، $a_0^{n+1}g(x)=0$ و بطور متقارن $a_m^{n+1}g^*(x)=0$ و درنتیجه $a_m^{n+1}g(x)=0$. □

قضیه ۳.۳.۱. ([۶]،قضیه ۱۸.۲) فرض کنید J یک ایده‌آل دوطرفه از حلقه منظم R باشد و $f_1,f_2\cdots$ یک دنباله متناهی یا نامتناهی از عناصر خودتوان متعامد در $\frac{R}{J}$ باشد.
در این‌صورت عناصر خودتوان متعامد $e_1,e_2,\dots\in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $\bar{e}_n=f_n$ و اگر برای برخی از kها، $f_0+\cdots+f_k=1$ آنگاه می‌توان e_nهایی انتخاب کرد که
$$e_1+\cdots+e_k=1.$$

قضیه ۴.۳.۱. ([۶]،قضیه ۳.۱) اگر e عضو خودتوان حلقه نیم اول R باشد، آنگاه روابط زیر معادلند.

آ. e مرکزی است.

ب. e با هر عنصر خودتوان در R جابجا می‌شود.

پ. eR ایده‌آل دوطرفه R است.

ت. Re ایده‌آل دوطرفه R است.

ث. $(1-e)Re=0$.

ج. $eR(1-e)=0$.

گزاره ۵.۳.۱. ([۶]،قضیه ۳.۲) برای هر حلقه منظم R روابط زیر معادلند:

آ. R آبلی است.

ب. برای هر ایده‌آل اول P از R، $\frac{R}{P}$ یک حلقه تقسیم است.

پ. R عضو پوچ‌توان ناصفر ندارد.

ت. تمام ایده‌آل‌های راست (چپ) R دو طرفه هستند.

ج. هر ایده‌آل راست (چپ) R شامل عضو خودتوان ناصفر مرکزی است.

برهان. ب $\Longleftarrow$ آ،

بنابر (۳.۳.۱) همه عناصر خودتوان حلقه اول $\frac{R}{P}$ از خودتوان‌های R می‌آیند، بنابراین همه آنها مرکزی و صفر و یک تنها خودتوان‌های $\frac{R}{P}$ هستند. درنتیجه به‌ازای هر عضو ناصفر $x \in \frac{R}{P}$،

$$x(\frac{R}{P}) = (\frac{R}{P})x = \frac{R}{P},$$

در نتیجه $\frac{R}{P}$ حلقه تقسیم است.

پ $\Longleftarrow$ ب، از آن‌جا که R نیم اول است، از ب نتیجه می‌شود که R با حاصل‌ضرب حلقه‌های تقسیم ایزومورفیسم است و لذا عضو ناصفر پوچ‌توان ندارد.

آ $\Longleftarrow$ پ، اگر $e \in R$ خودتوان باشد، هر عضو $(۱-e)Re$ پوچ‌توان است. بنابراین $(۱-e)Re = ۰$ و بنا بر (۴.۳.۱) e مرکزی است.

ت $\Longleftarrow$ آ، هر ایده‌آل راست اول از R توسط یک خودتوان مرکزی تولید می‌شود و لذا دو طرفه است. در نتیجه همه ایده‌آل‌های راست R دو طرفه هستند.

آ $\Longleftarrow$ ت، از (۴.۳.۱) نتیجه می‌شود.

ج $\Longleftarrow$ آ، واضح است.

آ $\Longleftarrow$ ج، فرض کنید $e \in R$ خودتوان بوده و J ایده‌آل راست تولید شده توسط خودتوان‌های مرکزی R باشد که در eR قرار دارند. توجه کنید که J ایده‌آل دوطرفه است. با توجه به ج می‌بینیم که $J \leq_e eR$ و لذا $\frac{eR}{J}$ تک عضوی است. به ازای هر $x \in R$، $xJ \leq J \leq eR$ و $(۱-e)xJ = ۰$. درنتیجه $(۱-e)xeR$ تصویر همریخت $\frac{eR}{J}$ است و لذا تک عضوی می‌باشد. چون R_R تک عضوی نیست، نتیجه می‌گیریم $(۱-e)xeR = ۰$. بنابراین $(۱-e)Re = ۰$ و طبق (۴.۳.۱) e مرکزی است. □

فصل ۲

شرط مک‌کوی روی حلقه‌های ناجابجایی

این فصل برگرفته از مرجع [۹] می‌باشد و شامل دو بخش است که در آن به معرفی حلقه‌های برگشت‌پذیر، مک‌کوی، دیوراست، اورراست و نیم‌جابجایی می‌پردازیم و قضایا و نتایجی را در مورد این مفاهیم بیان و اثبات می‌کنیم.
در بخش اول به بیان تعاریف و نتایجی در مورد حلقه‌های ذکر شده می‌پردازیم و در بخش دوم، کلاسی از حلقه‌های مک‌کوی راست را بسط می‌دهیم.

۱.۲ شرط مک‌کوی در حلقه‌های برگشت‌پذیر و دیوراست

در این فصل هر حلقه، شرکت پذیر و یکدار است مگر اینکه خلاف آن ذکر شود. برای حلقه R داده شده، $r_R(-)$ $(l_R(-))$ برای نمایش پوچساز راست (چپ) در R استفاده می‌شود. اگر s مجموعه تک عضوی باشد $(s = \{a\})$ آن‌گاه پوچساز راست (چپ) آن را به صورت $r_R(a)$ $(l_R(a))$ نمایش می‌دهیم.
مک کوی در سال ۱۹۵۷ ثابت کرد که اگر یک چندجمله‌ای، ایده‌الی از چند جمله‌ای های روی حلقه را پوچ کند آن‌گاه در پایه حلقه، پوچساز ناصفر دارد. به عنوان یک نمونه خاص، مک کوی در سال ۱۹۴۲ نشان داد که اگر دو چند جمله‌ای در حلقه جابجایی یکدیگر را پوچ کنند آن‌گاه هر چند جمله‌ای یک پوچساز غیرصفر روی پایه حلقه دارد.
نتایج زیر در سال ۱۹۵۷ توسط مک کوی ثابت شدند.

قضیه ۱.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه و A یک ایده‌ال راست حلقه $S = R[x_۱, \cdots, x_k]$ باشد اگر $r_S(A) \neq ۰$ آن‌گاه $r_R(A) \neq ۰$.

برهان. فرض کنید $r_S(A) \neq ۰$.
قضیه را برای حالت $k = ۱$ ثابت می‌کنیم. قرار دهید $S = R[x]$. اگر $A = ۰$، حکم بدیهی است.
فرض کنید $A \neq ۰$ و $g(x) = \sum_{j=۰}^{m} b_j x^j \neq ۰$ در $r_S(A)$ با کمترین درجه بوده و $b_m \neq ۰$ باشد،

اگر $m = 0$ آنگاه

$$m = 0 \Longrightarrow g(x) = b_0,\ b_0 \neq 0 \Longrightarrow Ab_0 = 0 \Longrightarrow r_R(A) \neq 0,$$

و حکم برقرار است. فرض کنید $m \geqslant 1$.
اگر داشته باشیم $Ab_m = 0$ حکم برقرار است، در غیر این صورت $0 \neq f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in A$ وجود دارد به طوری که $f(x)b_m \neq 0$. پس برای بعضی $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ داریم $a_i g(x) \neq 0$.
فرض کنید p بزرگ‌ترین اندیسی باشد که $a_p g(x) \neq 0$. از این‌که $f(x)g(x) = 0$ داریم $a_p b_m = 0$ و بنابراین درجه $a_p g(x)$ از m کمتر است. چون A یک ایده‌آل راست از S است لذا $A\left(a_p g(x)\right) = (Aa_p)g(x) = 0$ و در نتیجه $0 \neq a_p g(x) \in r_S(A)$ که یک تناقض است.
با استفاده از استقرا می‌توان برای حالت $k \geqslant 2$ نیز انجام داد. □

با استفاده از قضیه قبل نتیجه می‌شود زمانی که R یک حلقه جابجایی و $f(x) \in R[x]$ مقسوم علیه صفر باشد $0 \neq c \in R$وجود دارد که $f(x)c = 0$.

نتیجه ۲.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد و $f(x)g(x) = 0$ به طوری که $0 \neq f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $0 \neq g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ عناصری در $R[x]$ هستند.
در این صورت $\{a_{t_1}, \cdots, a_{t_n}\} \subseteq \{a_0, \cdots, a_n\}$ و $b_t \in \{b_0, \cdots, b_m\}$ وجود دارند به طوری که
$b_t\left(a_{t_1} \cdots a_{t_n}\right) \neq 0, f(x)b_t\left(a_{t_1} \cdots a_{t_h}\right) = 0$

برهان. در برهان قضیه ۱.۱.۲ اگر قرار دهیم $A = R[x]f(x)$، حکم ثابت می‌شود. □

گزاره ۳.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه و A یک ایده‌ال راست در $R[x]$ باشد و $0 \neq g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$. فرض کنید $a_{t_1}, \cdots, a_{t_s}$و b_t وجود نداشته باشد که $s \leqslant m$و $t \in \{0, 1, \cdots, m\}$ به‌طوری که a_{tv}یک ضریب $cf_0 \neq f_v(x) \in A$ است (برای $v = 1, \cdots, s$) و

$$\left(a_{ts} \cdots a_{t1}\right) b_t \neq 0, \quad A\left(\left(a_{ts} \cdots a_{t1}\right) b_t\right) = 0$$

در اینصورت $g(x)$ مشمول در $r_{R[x]}(A)$ نیست.

برهان. از قضیه ۱.۱.۲ بدست می‌آید. □

نتیجه ۴.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد و $0 \neq f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $0 \neq g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ عناصری از $R[x]$ باشند. فرض کنید که $\{a_{t1}, \cdots, a_{th}\} \subseteq \{a_0, \cdots, a_h\}$ و $b_t \in \{b_0, \cdots, b_m\}$ وجود نداشته باشد به طوری که

$$b_t\left(a_{t1} \cdots a_{th}\right) \neq 0, f(x)b_t\left(a_{t1} \cdots a_{tn}\right) = 0$$

در اینصورت $g(x)$ مشمول در $r_{R[x]}f(x)$ نیست.

مثال ۵.۱.۲. فرض کنید $\mathbb{Z}_3$ حلقه اعداد صحیح به پیمانه ۳ باشد و $S = \mathbb{Z}_3[x, y]$. فرض کنید I یک ایده‌ال از S باشد که توسط y^3 و x^2y^2 و x^3 تولید شده باشد و $R = \dfrac{S}{I}$، برای $h \in S$ ، عنصر $h + I$

را با h نمایش می‌دهیم و $R[t]$ را حلقه چندجمله‌ای روی R در نظر می‌گیریم.
اگر $f(t) = x + yt$ و $g(t) = x^۲ + ۲xyt + y^۲t^۲$، آنگاه:

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &= (x + yt)(x^۲ + ۲xyt + y^۲t^۲) \\ &= x^۳ + ۳x^۲yt + ۳xy^۲t^۲ + y^۳t^۳ = ۰ \end{aligned}$$

با استفاده از روش برهان قضیه ۲.۱.۱ می‌توانیم عناصر $y(۲xy)$ و $xy^۲$ را در R بیابیم به طوری که

$$f(t)(y(۲xy)) = ۰, \quad f(t)(yg(t)) = ۰, \quad \text{اما } yg(t) \neq ۰$$

و

$$\big(f(t)y^۲)g(t)\big) = ۰, \quad (xy^۲)g(t) = ۰, \quad \text{اما } f(t)y^۲ \neq ۰.$$

فرض کنید R یک حلقه دلخواه باشد. با توجه به نتیجه ۲.۱.۴ می‌توانیم شرط‌های $(\star)$ و $(\star\star)$ را چنین تعریف کنیم.
فرض کنید $f(x) = \sum_{i=۰}^{n} a_i x^i \neq ۰$ و $g(x) = \sum_{j=۰}^{m} b_j x^j \neq ۰$ عناصری از $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = ۰$.
گوییم R در شرط $(\star)$ صدق می‌کند هرگاه $\{a_{t_۱}, \cdots, a_{t_n}\} \subseteq \{a_۰, \cdots, a_n\}$ و $b_t \in \{b_۰, \cdots, b_m\}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$f(x)b_t(a_{t_۱} \cdots a_{t_h}) = ۰, \quad b_t(a_{t_۱} \cdots a_{t_h}) \neq ۰,$$

و در شرط $(\star\star)$ صدق می‌کند هرگاه

$$f(x)(a_{t_۱} \cdots a_{t_h})b_t = ۰, \quad (a_{t_۱} \cdots a_{t_h})b_t \neq ۰.$$

تعریف ۲.۱.۶. حلقه R برگشت پذیر نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a, b \in R$، $ab = ۰$ نتیجه دهد که $ba = ۰$. آندرسون و کامیلو اولین بار این تعریف را تحت عنوان حلقه‌هایی که مقسوم‌علیه‌های صفر آن با یکدیگر جابجا می‌شوند مطرح نمودند و این حلقه‌ها را به حلقه‌هایی که در شرط $ZC_۲$ صدق می‌کنند نمایش دادند.
فرض کنیم $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد. درجه آن را با علامت $\deg(f(x))$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲.۱.۷. الف. فرض کنید R یک حلقه برگشت پذیر باشد و $g(x) = \sum_{j=۰}^{n} b_j x^j$ و $f(x) = \sum_{i=۰}^{m} a_i x^i$ چندجمله‌ای های ناصفر روی Rباشند که $f(x)g(x) = ۰$. در این صورت

$$r = a_۰^{l_۰} a_۱^{l_۱} \cdots a_t^{l_t} \in R \; (k = ۰, \cdots, t \text{ برای } l_k \geqslant ۰, t \leqslant m)$$

وجود دارد که $g(x)r \neq ۰$ و برای تمام i, j ها داریم $a_i b_j r = ۰$.
ب. حلقه‌های برگشت پذیر در شرط $(\star)$صدق می‌کنند.

برهان. الف. فرض کنید $b_۰$، b_m، $a_۰$، a_m ناصفر باشند. اگر $degf(x) = ۰$ آنگاه برای تمام $j \in \{۰, \cdots, n\}$، $f(x)b_j = ۰$.
فرض کنید $degf(x) \geqslant ۱$. اگر $a_۰g(x) = ۰$ آنگاه چون R برگشت پذیر است پس $g(x)a_۰ = ۰$.

فرض کنید $a_0 g(x) \neq 0$ در این صورت با استفاده از لم (۲.۳.۱) می‌توان $l_0 \geqslant 0$ انتخاب کرد به طوری که $a_0^{l_0+1} g(x) = 0$ و $a_0^{l_0} g(x) \neq 0$. بنابراین$a_0 g(x) a_0^{l_0} = 0$ (به عبارت دیگر برای هر j داریم $a_0 b_j a_0^{l_0} = 0$) و چون R برگشت پذیر است پس $g(x) a_0^{l_0} \neq 0$.
قرار می‌دهیم $g_1(x) = g(x) a_0^{l_0}$ در این صورت $f(x) g_1(x) = 0$ که $g_1(x) \neq 0$، داریم:

$$\begin{aligned} 0 = f(x) g_1(x) &= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m)\, g(x) a_0^{l_0} \\ &= (a_1 x + \cdots + a_m x^m)\, g(x) a_0^{l_0} \end{aligned}$$

حال همین فرایند را برای حالتی که $a_1 g_1(x)$ صفر باشد یا نباشد تکرار می‌کنیم که در این صورت $l_1 \geqslant 0$ وجود دارد به طوری که $a_1 g_1(x) a_1^{l_1} = 0$،
(به عبارت دیگر برای هر j، $a_1 b_j a_0^{l_0} a_1^{l_1} = 0$ و $g_1(x) a_1^{l_1} \neq 0$).
محاسبات را ادامه داده و به تعداد متناهی بار مراحل را تکرار می‌کنیم. در نهایت $t \leqslant m$ و $l_t \geqslant 0$ به دست می‌آید به طوری که برای $s = t, \cdots, m$

$$a_s g(x) \left(a_0^{l_0} a_1^{l_1} \cdots a_t^{l_t}\right) = 0$$

و

$$g(x) \left(a_0^{l_0} a_1^{l_1} \cdots a_t^{l_t}\right) \neq 0$$

با توجه به این که برای $i = 0, 1, \cdots, m$

$$a_i g(x) \left(a_0^{l_0} a_1^{l_1} \cdots a_t^{l_t}\right) = 0$$

اگر $r = a_0^{l_0} a_1^{l_1} \cdots a_t^{l_t}$، آنگاه برای هر i و j داریم $a_i b_j r = 0$.
ب. فرض کنید R یک حلقه برگشت پذیر باشد، روش برهان قضیه۱.۱.۲را به کار می‌بریم.
فرض کنید $fg = 0$ که $0 \neq f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, 0 \neq g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$.
می‌توان فرض نمود که $a_n \neq 0$ و $b_m \neq 0$. اگر $f b_m = 0$ آنگاه نتیجه حاصل است. فرض کنید $f b_m \neq 0$. در این صورت برای برخی $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ داریم $a_i g \neq 0$. فرض کنید p بزرگترین اندیسی باشد که $a_p g \neq 0$. در این صورت از آن‌جا که $fg = 0$ نتیجه می‌شود $a_p b_m = 0$. چون R برگشت پذیر است پس $b_m a_p = 0$ و $g a_p \neq 0$.
از این رو $g a_p$ چندجمله‌ای ناصفر است که درجه آن کمتر از m است. همچنین داریم $f(g a_p) = 0$.
در ادامه از $g a_p$ به جای g استفاده می‌کنیم با ادامه این روند عناصر $a_{t_1}, \cdots, a_{t_h}$ و b_t به‌دست می‌آید به‌طوری‌که $t_1 = p$ و $t \in \{0, \cdots, m\}$ به‌طوری‌که

$$\{a_{t_1}, \cdots, a_{t_h}\} \subseteq \{a_0, \cdots, a_n\},$$

$0 \neq b_t \left(a_{t_1} \cdots a_{t_h}\right)$ ضریب پیشرو $g \left(a_{t_1} \cdots a_{t_h}\right)$ است و

$$f\left(b_t \left(a_{t_1} \cdots a_{t_h}\right)\right) = 0.$$

چون R برگشت پذیر است پس برای $k \in \{2, \cdots, h\}$ داریم

$$\deg\left(g(a_{t_1} \cdots a_{t_k})\right) = \deg\, a_{t_k} g\left(a_{t_1} \cdots a_{t_{k-1}}\right),$$

بنابراین حلقه‌های برگشت پذیر در شرط $(\star)$ صدق می‌کنند. $\square$

تعریف ۸.۱.۲. حلقه R را متقارن می‌گوییم هرگاه برای هر $r, s, t \in R$،

$$rst = 0 \Longrightarrow rts = 0.$$

قضیه ۹.۱.۲. حلقه R متقارن است اگر و فقط اگر برای هر n عضو $r_1, r_2, \cdots, r_n$ از R و هر جایگشت $\sigma\colon \{1, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, \cdots, n\}$ داشته باشیم:

$$r_1 \cdots r_n = 0 \Longrightarrow r_{\sigma(1)} r_{\sigma(2)} \cdots r_{\sigma(n)} = 0.$$

برهان. $\Longrightarrow$

به ازای $n = 3$ برای هر سه عضو r_1, r_2, r_3 از R داریم:

$$r_1 r_2 r_3 = 0 \Longrightarrow r_1 r_3 r_2 = 0,$$

پس R حلقه متقارن است.

$\Longleftarrow$

به ازای $n = 1$ واضح است. به ازای $n = 2$ برای هر $r_1, r_2 \in R$ داریم:

$$r_1 r_2 = 0 \Longrightarrow 1.r_1 r_2 = 0 \Longrightarrow 1.r_2 r_1 = 0 \Longrightarrow (r_2 r_1 = 0, r_1 r_2 = 0).$$

بنابراین برای $n = 2$ برقرار است.

فرض کنید برای تمام اعداد کمتر یا مساوی با n برقرار باشد، ثابت می‌کنیم به ازای $n + 1$ هم حکم برقرار است.

برای هر $r_1, \cdots, r_{n+1}$ که $r_1 \cdots r_{n+1} = 0$ و هر جایگشت

$$\sigma\colon \{1, \cdots, n+1\} \longrightarrow \{1, \cdots, n+1\},$$

داریم :

$$\sigma(1) = 1 \text{ یا } 1 < \sigma(1) \leq n \text{ یا } \sigma(1) = n + 1$$

اگر $\sigma(1) = 1$ آنگاه

$$r_1 \cdots r_{n+1} = 0 \Longrightarrow r_{\sigma(1)} r_2 \cdots r_{n+1} = 0$$

پس می‌توان $r_1 \cdots r_{n+1}$ را به گونه‌ای ضرب کرد که در این ضرب $r_{\sigma(1)}$ اولین ضریب باشد و حاصل صفر شود.

اگر $1 < \sigma(1) \leq n$ آنگاه

$$r_1 \cdots r_{n+1} = r_1 \cdots r_{\sigma(1)-1} \left(\prod_{i=\sigma(1)}^{n+1} r_i \right) = 0$$

پس طبق فرض استقرا

$$\left(\prod_{i=\sigma(1)}^{n+1} r_i \right) r_1 \cdots r_{\sigma(1)-1} = 0$$

پس می‌توان $r_1 \cdots r_{n+1}$ به ترتیبی در هم ضرب کرد که اولین ضریب $\sigma(1)$ باشد و حاصل دوباره صفر شود.

اگر $\sigma(1) = n + 1$ آنگاه

$$r_1 \cdots r_{n+1} = 0 \Longrightarrow \left(\prod_{i=1}^{n-1} r_i\right)(r_n r_{n+1}) = 0$$

پس طبق فرض استقرا $\left(\prod_{i=1}^{n-1} r_i\right)(r_n r_{n+1}) = 0$ پس $r_n \left(r_{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} r_i\right)$ پس طبق فرض استقرا $\left(r_{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} r_i\right) r_n = 0$ لذا در این حالت هم می‌توان $r_1, \cdots, r_{n+1}$ را به ترتیب در هم ضرب کرد که $r_{\sigma(1)}$ اولین ضریب باشد و حاصل دوباره صفر شود.

بنابراین همواره می‌توان $r_1, \cdots, r_{n+1}$ را به ترتیبی در هم ضرب کرد که $r_{\sigma(1)}$ اولین ضرب شود و حاصل صفر شود. درنتیجه عبارت جدید را می‌توان به طریق مشابه طوری مرتب کرد که اولین و دومین ضرب به ترتیب $r_{\sigma(1)}$ و $r_{\sigma(2)}$ باشند و حاصل دوباره صفر شود. با تکرار این روند

$$r_{\sigma(1)} r_{\sigma(2)} \cdots r_{\sigma(n+1)} = 0$$

و حکم ثابت است. □

قضیه ۱۰.۱.۲. حلقه‌های جابجایی متقارن هستند.

برهان. فرض کنید R حلقه جابجایی و $r, s, t \in R$ باشند در این صورت داریم:

$$rst = rts$$

بنابراین اگر $rst = 0$ باشد نتیجه می‌شود که $rts = 0$. □

قضیه ۱۱.۱.۲. حلقه‌های متقارن برگشت‌پذیر هستند.

برهان. فرض کنید R حلقه متقارن و $a, b \in R$ باشند. در این صورت داریم:

$$ab = 0 \Longrightarrow 1.a.b = 0 \Longrightarrow 1.b.a = 0 \Longrightarrow ba = 0.$$

بنابراین R برگشت‌پذیر است. □

قضیه ۱۲.۱.۲. حلقه‌های تقلیل‌یافته متقارن هستند.

برهان. برای هر $a, b \in R$ داریم

$$ab = 0 \Longrightarrow (ba)^2 = b(ab)a = 0 \Longrightarrow ba = 0.$$

حال فرض کنید برای هر $a, b, c \in R$، $abc = 0$.

از این‌که $a(bc) = 0$ نتیجه می‌شود $bca = (bc)a = 0$ و $(ab)c = 0$ نتیجه می‌دهد $cab = c(ab) = 0$ و بنابراین داریم:

$$abc = 0 \Longrightarrow a(bcb) = 0 \Longrightarrow (bcb)a = 0 \Longrightarrow b(cbac) = 0$$
$$\Longrightarrow (cbac)b = 0 \Longrightarrow (cba)^2 = cbacba = 0.$$

چون R تقلیل‌یافته است $cba = 0$ و درنتیجه

$$c(ba) = 0 \Longrightarrow bac = (ba)c = 0$$

و

$$(cb)a = \circ \implies acb = a(cb) = \circ.$$

□

گزاره ۱۳.۱.۲. حلقه‌های متقارن در شرط $(\star)$ و $(\star\star)$ صدق می‌کنند.

برهان. حلقه‌های متقارن برگشت پذیرند و لذا بنابر قضیه ۱.۱.۲ نتیجه حاصل است.
با استفاده از خاصیت تقارنی حلقه R می‌توانیم شرط $(\star\star)$ را از برهان قضیه ۱.۱.۲ به‌دست آوریم.
□

تبصره ۱۴.۱.۲. عکس قضیه ۷.۱.۲ و گزاره ۱۳.۱.۲ لزوما برقرار نیست.
فرض کنید T یک حلقه تقلیل یافته باشد و

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \circ & a & d \\ \circ & \circ & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in T \right\} \tag{۱.۲}$$

زیر حلقه‌ای از حلقه ماتریس‌های ۳×۳ روی T باشد.
فرض کنید $f(x)g(x) = \circ$ که $\circ \neq f(x) = \sum_{i=\circ}^{n} a_i x^i$ و $\circ \neq g(x) = \sum_{j=\circ}^{m} b_j x^j$ عناصری از $R[x]$ هستند. پس برای هر $b_j \neq \circ$ به‌دست می‌آوریم $f(x)b_j = \circ$. بنابراین R در شرط $(\star)$ و $(\star\star)$ صدق می‌کند اما برگشت پذیر نیست (بنابراین متقارن نیست) زیرا

$$\begin{pmatrix} \circ & ۱ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & ۱ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \circ,$$

و

$$\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & ۱ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} = \circ.$$

قضیه ۱۵.۱.۲. حلقه‌های برگشت پذیر آبلی هستند.

برهان. فرض کنید R یک حلقه برگشت‌پذیر باشد و $a = re$ و $b = (۱ - e)$ که $r \in R$ می‌باشد.

$$re(۱-e) = \circ \implies (۱-e)re = \circ \implies re = ere, \tag{۲.۲}$$

$$(۱-e)er = \circ \implies er(۱-e) = \circ \implies er = ere. \tag{۳.۲}$$

از (۲.۲) و (۳.۲) داریم: $er = re$

□

گزاره ۱۶.۱.۲. الف. حلقه‌هایی که در شرط $(\star)$ صدق می‌کنند آبلی هستند.

ب. حلقه‌هایی که در شرط $(\star\star)$ صدق می‌کنند آبلی هستند.

برهان. الف. فرض کنید R حلقه‌ای باشد که در شرط $(\star)$ صدق کند و $e^۲ = e \in R$. (فرض خلف) فرض کنید که $r \in R$ وجود داشته باشد که $er(۱-e) \neq ۰$.
چندجمله‌ای‌های $g(x) = (۱-e) - er(۱-e)x$ و $f(x) = e + er(۱-e)x$ از $R[x]$ را در نظر بگیرید داریم

$$f(x)g(x) = (e + er(۱-e)x)((۱-e) - er(۱-e)x))$$
$$= e(۱-e) - e^۲r(۱-e)x + er(۱-e)^۲x + e^۲r^۲(۱-e)^۲x^۲$$
$$= e - e^۲ - e^۲rx + e^۳rx + erx - ۲e^۲rx + e^۳rx + e^۲r^۲x^۲ - ۲e^۳r^۲x^۲ + e^۴r^۲x^۲ = ۰$$

توجه داریم که برای تمام ضرایب a_i از $f(x)$ و b_t از $g(x)$، $f(x)b_t \neq ۰$ و $b_ta_i = ۰$. چون R در شرط $(\star)$ صدق می‌کند این یک تناقض است و بنابراین $er(۱-e) = ۰$ و درنتیجه برای هر $r \in R$ داریم $er = ere$. با تعویض جاهای e و $۱-e$ برای تمام r ها به‌دست می‌آید $re = ere$ و بنابراین R آبلی است.

ب. فرض کنید R حلقه‌ای باشد که در شرط $(\star\star)$ صدق کند و $e^۲ = e \in R$. (فرض خلف) فرض کنید $r \in R$ وجود داشته باشد که $er(۱-e) \neq ۰$. چندجمله‌ای‌های $f(x) = e + er(۱-e)x$ و $g(x) = (۱-e) - er(۱-e)x$ را در $R[x]$ درنظر بگیرید واضح است که $f(x)g(x) = ۰$ و $(er(۱-e))\, g(x) = er(۱-e) \neq ۰$ و $eg(x) = -er(۱-e)x \neq ۰$. چون R در شرط $(\star\star)$ صدق می‌کند و $deg\ g(x) = ۱$، داریم:

$$f(x)\,(eg(x)) = ۰$$

یا

$$f(x)\,(er(۱-e))\,g(x) = ۰$$

بنابراین $er(۱-e) = ۰$ که یک تناقض است. درنتیجه برای هر $r \in R$، $er = ere$ و با تعویض جای e و $۱-e$ برای هر $r \in R$ به‌دست می‌آید $re = ere$، پس R آبلی است.

□

تعریف ۱۷.۱.۲. حلقه R را مک کوی راست می‌نامیم هرگاه $f(x)g(x) = ۰$ نتیجه دهد $f(x)r = ۰$، که r یک عنصر ناصفر از R است. حلقه مک کوی چپ نیز مشابها تعریف می‌شود.
اگر یک حلقه هم مک کوی راست و هم مک کوی چپ باشد آن را حلقه مک کوی می‌نامیم. اولین بار نیلسن حلقه‌های مک‌کوی راست و مک‌کوی چپ را تعریف نمود.

حلقه R قویا مک کوی راست نامیده می‌شود هر گاه $f(x)g(x) = ۰$ نتیجه دهد $f(x)r = ۰$، که r عنصری ناصفر از ایده‌آل راست تولیدشده توسط ضرایب $g(x)$ است. حلقه قویا مک‌کوی چپ متناظرا تعریف می‌شود. واضح است که حلقه‌هایی که در شرط $(\star)$ صدق می‌کنند قویا مک کوی راست هستند ولی عکس آن لزوما برقرار نیست (با توجه به مثال که در ادامه مطرح می‌شود).
حلقه‌ای که هم قویا مک کوی راست و هم قویا مک کوی چپ باشد حلقه قویا مک کوی نامیده می‌شود.
با توجه به قضیه ۷.۱.۲ حلقه‌های برگشت پذیر قویا مک کوی هستند.

تعریف ۱۸.۱.۲. حلقه‌ای که هر ایده‌ال راست آن دو طرفه باشد حلقه دیو راست[1] نامیده می‌شود. به سادگی بررسی می‌شود که حلقه های دیو راست آبلی هستند. زیرا اگر e یک خودتوان باشد آنگاه eR یک ایده‌آل راست و لذا یک ایده‌آل است. اگر $r \in R$، آنگاه $re \in eR$ و لذا $t \in R$ است که $re = et$.
اگر طرفین را در e از چپ ضرب کنیم داریم:

$$ere = eet = et = re.$$

همچنین اگر $r \in R$ آنگاه $er \in Re$ و لذا $t \in R$ است که $er = te$. اگر طرفین را در e از راست ضرب کنیم داریم:

$$ere = tee = te = er.$$

و در نتیجه $er = re$.

قضیه ۱۹.۱.۲. حلقه‌های دیو راست قویا مک کوی راست هستند.

برهان. فرض کنید R یک حلقه دیو راست باشد، برای هر چند جمله‌ای $p(x) \in R[x]$ فرض کنید $I_{p(x)}$ ایده‌ال راست تولیده شده توسط تمام ضرایب $p(x)$ باشد. فرض کنید چندجمله‌ای های $f(x), g(x) \in R[x]$ داده شده باشند به طوری که $f(x)g(x) = 0$ و $g(x) \neq 0$. با استقرا روی درجه $f(x)$ نشان می‌دهیم اعضای غیرصفر در $I_{g(x)}$ وجود دارند که پوچساز راست $f(x)$ هستند. قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \ \ g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$$

که طبق فرض $b_0 \neq 0$. ابتدا فرض کنید $\deg f(x) = 0$ در این صورت $f(x) = a_0$ وبنابراین

$$a_0(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) = 0, \quad a_0 b_0 = 0,$$

و درنتیجه $f(x)b_0 = 0$ و بنابراین حکم برقرار است.
حال فرض کنید که $degf(x) > 0$ باشد.

حالت اول: فرض کنید $a_0 g(x) = 0$ که این نتیجه می‌دهد $a_0 I_{g(x)} = 0$. حال قرار می‌دهیم $f_1(x) = \left(f(x) - a_0\right)/x$
و درنتیجه $f_1(x)g(x) = 0$. چون

$$f_1(x)g(x) = (a_1 + a_2 x + \cdots + a_{m-1} x^{m-1})(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) = 0,$$

اما $degf_1(x) < degf(x)$ و بنابراین $0 \neq b \in I_{g(x)}$ وجود دارد که $f_1(x)b = 0$ و در نتیجه $f(x)b = 0$.

حالت دوم: فرض کنید $a_0 g(x) \neq 0$ و j کوچکترین عدد باشد که $a_0 b_j \neq 0$. بنابر (۲.۳.۱) عدد $n > 0$ وجود دارد که $a_0^n b_j \neq 0 = a_0^{n+1} b_j$. چون R دیو راست است $r \in R$ وجود دارد که $a_0^n b_j = b_j r$.
اگر فرض کنید $g_1(x) = g(x)r$ واضح است که $0 \neq I_{g_1(x)} \subseteq I_{g(x)}$ و $f(x)g_1(x) = 0$. در نتیجه می‌توانیم بدون کاسته شدن از کلیت مساله $g(x)$ را با $g_1(x)$ جایگزین کنیم. با این ساختار

[1] Right duo ring

$a_\circ$ ضریب j از $g_\backslash(x)$ را پوچ می‌کند. با تکرار این فرایند به تعداد متناهی بار به حالت اول برمی‌گردیم و بنابراین حکم ثابت است.

□

بنابراین حلقه‌های دیو راست، مک کوی راست هستند اما حلقه‌های مک کوی راستی وجود دارند که برگشت پذیر و دیو راست نیستند که در ادامه در مثال (۲۱.۱.۲) و قضیه (۶.۲.۲) بیان می‌شود.
حلقه‌های قویا مک کوی راست به وضوح مک کوی راست هستند اما عکس آن لزوما برقرار نیست.

مثال ۲۰.۱.۲. الف. فرض کنید T یک جبر آزاد تولیدشده توسط متغیرهای ناجابه‌جایی d_1 و $d_\circ$ و c_1 و $c_\circ$ روی F_2 باشد که F_2 یک میدان از مرتبه ۲ است. قرار می‌دهیم $R=\dfrac{T}{J}$ که J ایده‌الی از T است که توسط

$$c_\circ d_\circ,\ c_\circ d_1+c_1d_\circ,\ c_1d_1,\ d_id_j(\circ\leq i,j\leq 1),\ d_ic_j(\circ\leq i,j\leq 1),$$

تولید شده باشد.
فرض کنید $P(x)=\sum_{i=\circ}^{m}a_ix^i$ و $Q(x)=\sum_{i=\circ}^{n}b_ix^i$ دو چندجمله‌ای ناصفر باشند به‌طوری‌که $P(x)Q(x)=\circ$.

فرض کنید b_i ها شامل عبارت صفر باشند و $degP(x)=\circ$ و $a_\circ\neq\circ$ در این‌صورت از $P(x)Q(x)=\circ$ داریم $a_\circ Q(x)=\circ$. فرض کنید b_iها شامل عبارت ناصفر باشند و $degP(x)>\circ$ و k کوچکترین عددی باشد که $b_k\neq\circ$ و برای هر $a_i\neq\circ$ مجموع عبارات ناصفر کمتر از a_i را با a'_i نشان دهید و برای هر $a_i=\circ$ قرار دهید $a'_i=\circ$.
فرض کنید a'_j کوچکترین عضو در مجموعه $\{a'_\circ,a'_1,\cdots,a'_m\}$ باشد. چون $P(x)\neq\circ$ پس a'_j وجود دارد. ضریب درجه $(j+k)$ام از معادله $P(x)Q(x)=\circ$ برابر است با:

$$\sum_{(r,s):r+s=j+k}a_rb_s=\circ$$

با توجه به ساختار J عبارت‌های از هر درجه ثابت در معادله فوق باید صفر شود. اما j و k به عنوان کوچکترین درجه انتخاب شدند برای مثال $p'_j.1\neq\circ$ که تناقض است. بنابراین R مک‌کوی چپ است.
چندجمله‌ای‌های $f(x)=c_\circ+c_1x$ و $g(x)=d_\circ+d_1x$ را در نظر بگیرید واضح است که $f(x)g(x)=\circ$ اما $r\in Rc_\circ+Rc_1$ $(s\in d_\circ R+d_1R)$ ناصفر وجود ندارد به طوری که $rg(x)=\circ$ $(f(x)s=\circ)$. بنابراین R قویا مک‌کوی چپ (راست) نیست.

ب. فرض کنید K یک میدان و $R=K\left\langle a_i,b_i,c_i,d_i\middle| i\in\mathbb{N}\right\rangle$ جبر آزاد روی K باشد. فرض کنید $I_\circ$ را ایده‌ال تولید شده توسط روابط $\sum_{i=\circ}^{n}b_id_{n-i}=\circ,\sum_{i=\circ}^{n}(a_id_{n-i}+b_ic_{n-i})=\circ$ و $\sum_{i=\circ}^{n}a_ic_{n-i}=\circ$ باشد و $R_\circ=\dfrac{R}{I_\circ}$. تصویر هر متغیر در $R_\circ$ را با خودش یکسان درنظر می‌گیریم.

فرض کنیدF_0 مجموعه تمام زیرمجموعه‌های متناهی از مجهول‌ها در R_0 باشد، برای هر مجموعه $S_0 \in F_0$ دو متغیر جدید x_{S_0} و y_{S_0} به R_0 اضافه کنید و فرض کنید I_1 ایده‌ال تولید شده توسط روابط $x_{S_0}s = sy_{S_0} = 0, \forall s \in S_0$ و $x_{S_0}a_i = x_{S_0}b_i = c_iy_{S_0} = d_iy_{S_0} = 0$. پس به‌دست می‌آوریم:

$$R_1 = K\left\langle a_i, b_i, c_i, d_i, x_{S_0}, y_{S_0} \middle| i \in \mathbb{N}, S_0 \in F_0 \right\rangle / \bigcup_{i=0}^{1} I_i$$

از میان این ساختار دو زنجیر افزایشی

$$\begin{cases} R_0 \subset R_1 \subset \cdots \subset R_n \subset R_{n+1} \subset \cdots \\ \quad I_0 \subset \cdots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \cdots \end{cases}$$

را به‌دست می‌آوریم کهI_i ایده‌الی از R_i است. توجه داریم که

$$R_{n+1} = K\left\langle a_i, b_i, c_i, d_i, x_{Sj}, y_{Sj} \middle| i \in \mathbb{N}, j = 0, \ldots, n, S_j \in F_j \right\rangle / \bigcup_{i=0}^{n+1} I_i$$

قرار دهید $R = \bigcup_i R_i$، فرض کنید $P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$ و $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$ دو چند جمله‌ای ناصفر در $R[x]$ باشند. به‌طوری‌که $P(x)Q(x) = 0$. اگر $degP(x) = 0$و $b_0 \neq 0$ از اینکه $P(x)Q(x) = 0$ داریم

$$a_0b_0 = 0 \Longrightarrow P(x)b_0 = 0$$

که نتیجه حاصل است.

فرض کنید هر ضریب از $P(x)$ شامل تک‌جمله‌ای‌هایی از درجه بیشتر از صفر باشد و ۱ در مجموعه ضرایب آن نباشد. در این‌صورت چون تنها تعدادی ضرایب متناهی و تعداد متناهی تک‌جمله‌ای از هر ضریب وجود دارد، به استقرا نتیجه می‌شود که متغیر y_s وجود دارد که تمام ضرایب را از راست پوچ می‌کند و با توجه به روابطی که ایده‌الها از آنها تشکیل شده‌اند نتیجه می‌شود $y_s \neq 0$ و حکم ثابت است.

فرض کنید $k \leqslant m$ و ۱ در مجموعه a_k باشد همچنین فرض کنید $l \leqslant m$ کوچکترین عددی باشد که b_l ناصفر است. مجموع تک‌جمله‌ای‌های درجه کمتر از b_l را با b'_l نشان دهید. ضریب $k+l$ام از معادله $P(x)Q(x) = 0$ برابر است با:

$$\sum_{(u,v):u+v=k+l} a_ub_v = 0$$

چون R حلقه خارج‌قسمتی جبر آزاد روی ایده‌ال است و می‌دانیم تک‌جمله‌ای‌ها از هر درجه ثابت در معادله قبلی باید صفر شود و در نتیجه $1.b_0 = 0$ که یک تناقض است. بنابراین R مک‌کوی راست است.

حال چندجمله‌ای‌های $a_0 + b_0x$ و $c_0 + d_0x$ را روی R در نظر بگیرید. در این صورت $(a_0 + b_0x)(c_0 + d_0x) = 0$. اما چون $a_0d_0 \neq 0$ و $b_0c_0 \neq 0$ و برای هر $i \in \mathbb{N}$ و هر زیرمجموعه متناهی S که درنظر بگیرید داریم:

$$c_iy_S = d_iy_S = 0,\ c_ix_S \neq 0,\ d_ix_S \neq 0.$$

بنابراین $r \in c_\circ R + d_\circ R$ ناصفر وجود ندارد که $(a_\circ + b_\circ x)r = \circ$ و درنتیجه R قویا مک‌کوی راست نیست.
در گزاره ۷.۱.۲ بیان کردیم که حلقه‌هایی که در شرط $(\star)$ صدق می‌کنند آبلی هستند اما حلقه‌هایی مک کوی وجود دارند که ناآبلی هستند.

مثال ۲۱.۱.۲. فرض کنید K یک میدان باشد و $K\{e,x,y,z\}$ یک جبر آزاد تولیدشده توسط متغیرهای ناجابه‌جایی z و y و x و e روی K و R یک حلقه از $K\{e,x,y,z\}$ با روابط زیر باشد:

$$e^{۲} = e,\ ex = x,\ xe = \circ,\ ey = ye = \circ,\ ez = ze = z,$$

$$x^{۲} = y^{۲} = z^{۲} = xy = xz = yx = yz = zx = zy = \circ,$$

$\{e,x,y,z\}$ را با تصاویرشان در R یکی بگیرید. توجه داشته باشید که فضای برداری R با پایه $\{۱,e,x,y,z\}$ غیرآبلی است زیرا عنصر خودتوان e با x جابجا نمی‌شود.
ایده‌آل M از R را به فرم $M = Kx + Ky + Kz$ در نظر بگیرید که $M^{۲} = \circ$ و $MR = RM = M$.
حال نشان می‌دهیم R قویا مک‌کوی راست است.
چندجمله‌ای‌های $f(w) \neq \circ$ و $g(w) \neq \circ$ را در $R[w]$ در نظر بگیرید به‌طوری‌که $f(w)g(w) = \circ$ باشد. قرار دهید $f(w) = \sum_{i=\circ}^{m} a_i w^i$ و $g(w) = \sum_{j=\circ}^{n} b_j w^j$. فرض کنید $h(w)$ چندجمله‌ای در $R[w]$ باشد، ایده‌آل راست تولیدشده توسط ضرایب $h(w)$ را با $I_{h(w)}$ نشان می‌دهیم.

حالت اول: $y \in I_{g(w)}$

اگر $f(w)y \neq \circ$، آنگاه بنابر [۵]، y در مجموعه ضرایب $g(w)$ قرار نمی‌گیرد، چون $y \in I_{g(w)}$ پس باید $f(w)y = \circ$ و بنابراین y در مجموعه ضرایب $g(w)$ قرار می‌گیرد.

حالت دوم: $y \notin I_{g(w)}$

اگر $y \notin I_{g(w)}$ آنگاه به‌ازای $\beta'_j \in K$ و $m'_j \in M$، b_jها به فرم $\beta'_j e + m'_j$ هستند.

زیرحالت ۱: فرض کنید $f(w)y = \circ$، در این صورت به ازای هر $\alpha'_i \in K$ و $m_i \in M$، a_i ها به فرم $\alpha'_i e + m_i$ هستند. چون $y \notin I_{g(w)}$ نیست، تمام ضرایب $g(w)$ به ازای هر $\beta'_j \in K$ و $m' \in M$ به فرم $b_j = \beta'_j e + m'_j$ است.

الف. فرض کنید بعضی از b_j ها، β'_j غیر صفر داشته باشند و $k \leq n$ کوچکترین اندیسی باشد که $\beta'_k \neq \circ$ و همچنین فرض کنید کوچکترین ضریب $f(w)$ به ازای $m_i \in M$ و $\alpha'_i \in K$ به فرم $a_i = \alpha'_i e + m_i$ باشد که به ازای برخی از $i \in \{\circ,\dots,m\}$، $\alpha'_i \neq \circ$. فرض کنید $s \leq m$ کوچکترین اندیسی باشد که $\alpha'_s \neq \circ$. بنابراین به ازای $l \in M$ داریم:

$$f(w)g(w) = \cdots + (\alpha'_s \beta'_k e + l)w^{s+k} + \cdots \neq \circ.$$

که یک تناقض است.
پس تمام ضرایب $f(w)$ به ازای $\alpha_{i۱}, \alpha_{i۲}, \alpha_{i۳} \in K$ به فرم $a_i = \alpha_{i۱}x + \alpha_{i۲}y + \alpha_{i۳}z \in M$

هستند. فرض کنید $t \leq m$ کوچکترین اندیسی باشد که در مجموعه‌ای از a_t ها $\alpha_{t۳} \neq ۰$. در این صورت داریم:

$$f(w)g(w) = \cdots + (\alpha_{t۳}\beta'_k z)w^{t+k} + \cdots \neq ۰,$$

که یک تناقض است. بنابراین برای $۱ \leq i \leq m$، $\alpha_{i۳} = ۰$ و از این‌که $f(w) \neq ۰$ برای برخی $۱ \leq i \leq m$ نتیجه می‌شود که $\alpha_{i۱} \neq ۰$ یا $\alpha_{i۲} \neq ۰$. بنابراین $f(w)b_k x = f(w)\beta'_k x = ۰$ که $۰ \neq b_k x \in I_{g(w)}$.

ب. فرض کنید تمام ضرایب $g(w)$ برای برخی $\beta_{j۱}, \beta_{j۲}, \beta_{j۳} \in K$ به فرم $b_j = \beta_{j۱}x + \beta_{j۲}y + \beta_{j۳}z \in M$ باشند. زمانی که بعضی $\beta_{j۱}$ غیر صفر هستند، فرض کنید $k \leqslant n$ کوچک‌ترین اندیسی باشد که در مجموعه‌ای از b_k ها $\beta_{k۱} \neq ۰$. حال فرض کنید که یکی از کوچک‌ترین ضرایب $f(w)$ به ازای $m_i \in M$ و $\alpha'_i \in K$ به فرم $a_i = \alpha'_i e + m_i$ باشد و برای برخی $۰ \leqslant i \leqslant m$ ، $\alpha'_i \neq ۰$ و فرض کنید که $s \leqslant m$ کوچک‌ترین اندیسی باشدکه در مجموعه‌ای از a_s، $\alpha'_s \neq ۰$ باشد. پس به ازای $l \in Kz$ داریم:

$$f(w)g(w) = \cdots + (\alpha'_s\beta_{k۱}x + l)\, w^{s+k} + \cdots \neq ۰$$

که این یک تناقض است. بنابراین همه ضرایب $f(w)$ به فرم $a_i = m_i \in M$ هستند و در نتیجه به ازای $۰ \neq b_k \in I_{g(w)}$، $f(w)b_k = ۰$.

زمانی که بعضی از $\beta_{j۳}$ ناصفر هستند، فرض کنید $k \leqslant n$ کوچک‌ترین اندیسی باشد که در مجموعه‌ای از b_k ها $\beta_{k۳} \neq ۰$ و کوچک‌ترین ضریب از $f(w)$ به ازای $m_i \in M$ و $\alpha'_i \in K$ به فرم $a_i = \alpha'_i e + m_i$ و برای $۰ \leq i \leq m$، $\alpha'_i \neq ۰$ باشد.

فرض کنید $s \leq m$ کوچک‌ترین اندیسی باشد که در مجموعه‌ای از a_s، $\alpha'_s \neq ۰$ پس

$$f(w)g(w) = \cdots + (\alpha'_s\beta_{k۳}z + l)\, w^{s+k} + \cdots \neq ۰$$

که $l \in Kx$ و این یک تناقض است. پس تمام ضرایب $f(w)$ به فرم $a_i = m_i \in M$ هستند و داریم $۰ \neq b_k \in I_{g(w)}$ که $f(w)b_k = ۰$.

زمانی که بعضی از $\beta_{j۲}$ ناصفر هستند، فرض کنید $k \leqslant n$ کوچک‌ترین اندیسی باشد که در مجموعه‌ای از b_k ها $\beta_{k۲} \neq ۰$ و چون $y \notin I_{g(w)}$ از اینکه $b_j e = (\beta_{j۱}x + \beta_{j۲}y + \beta_{j۳}z)e = \beta_{j۳}z$ باید $\beta_{k۱} \neq ۰$.
فرض کنید کوچک‌ترین ضریب از $f(w)$ به ازای $m_i \in M$ و $\alpha'_i \in K$ به فرم $a_i = \alpha'_i e + m_i$ و برای $۰ \leq i \leq m$، $\alpha'_i \neq ۰$ باشد.

فرض کنید $s \leq m$ کوچک‌ترین اندیسی باشد که در مجموعه‌ای از a_s، $\alpha'_s \neq ۰$. پس

$$f(w)g(w) = \cdots + (\alpha'_s\beta_{k۱}x + l)\, w^{s+k} + \cdots \neq ۰$$

که $l \in Kz$ و این یک تناقض است.بنابراین تمام ضرایب $f(w)$ به فرم $a_i = m_i \in M$ هستند و داریم $۰ \neq b_k \in I_{g(w)}$ که $f(w)b_k = ۰$.

زیرحالت ۲: فرض کنید $f(w)y \neq ۰$ در این صورت کوچک‌ترین ضریب $f(w)$ به ازای $m_i \in M$ و $\alpha_i, \alpha'_i \in K$ به فرم $a_i = \alpha_i + \alpha'_i e + m_i$ باشند و برای برخی از $۰ \leq i \leq m$ داشته باشیم $\alpha_i \neq ۰$.

زمانی که $f(w)y \neq ۰$ بنابر [۵]، تمام ضرایب از $f(w)$ به فرم $\alpha(۱-e)+m$ هستند که $m \in M$ و $\alpha \in K$. بنابراین می‌توانیم به ازای $m_i \in M$ و $\alpha_i \neq ۰$ قرار دهیم $a_i = \alpha_i(۱-e) + m_i$.

فرض کنید $s \leq m$ کوچک‌ترین اندیسی باشد که در مجموعه‌ای از a_sها $\alpha_s \neq ۰$. در این حالت توجه داشته باشید که هر b_j به ازای بعضی $\beta'_j \in K, m'_j \in M$ به فرم $\beta'_j e + m'_j$ است. ابتدا فرض کنید که $b_k = \beta'_k e + m'_k$ که برای برخی $k \in \{۱, \ldots, n\}$، $\beta'_k \neq ۰$ و $m'_k \in M$ باشد. درنتیجه $f(w)b_k x = ۰$ که $۰ \neq b_k x \in I_{g(w)}$.

حال فرض کنید که ضرایب $g(w)$ به ازای $\beta_{j۱}, \beta_{j۲}, \beta_{j۳} \in K$ به فرم $b_j = \beta_{j۱}x + \beta_{j۲}y + \beta_{j۳}z \in M$ باشند که برخی از $\beta_{j۲}$ها غیرصفر و $t \leq m$ کوچک‌ترین اندیسی باشد که در مجموعه‌ای از b_t، $\beta_{t۲} \neq ۰$ باشد بنابراین $f(w)g(w) = \cdots + (\alpha_s \beta_{t۲} y)\, w^{s+t} + \cdots \neq ۰$ که تناقض است. پس برای تمام jها، $\beta_{j۲} = ۰$ و بنابراین برای $۰ \neq b_j \in I_{g(w)}$ داریم $f(w)b_j = ۰$.

با توجه به حالت‌های فوق R یک حلقه قویا مک کوی راست است. اگر به جای e از $۱ - e$ استفاده کنیم نتیجه می‌شود R حلقه قویا مک کوی چپ است.

قضیه ۲.۱.۲۲. فرض کنید R یک حلقه دیو راست باشد و $f(x) = \sum_{i=۰}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=۰}^{n} b_j x^j$ چند جمله‌ای‌های غیر صفر در R باشند که $f(x)g(x) = ۰$ در این صورت $r \in R$ وجود دارد که $g(x)r \neq ۰$ و برای تمام i, jها $a_i b_j r = ۰$.

برهان. فرض کنید R یک حلقه دیو راست باشد و $f(x), g(x) \in R[x]$ چندجمله‌ای‌های غیرصفر باشند که $f(x)g(x) = ۰$. قرار دهید $f(x) = \sum_{i=۰}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=۰}^{n} b_j x^j$ با فرض این‌که $a_۰, a_m, b_۰, b_n$ ناصفر باشند. ثابت می‌کنیم که $r \in R$ وجود دارد که $g(x)r \neq ۰$ و برای تمام $j \in \{۰, \ldots, n\}$ ، $f(x)b_j r = ۰$. اگر $degf(x) = ۰$ آن‌گاه برای تمام $j \in \{۰, \ldots, n\}$ $f(x)b_j = ۰,$ زیرا

$$f(x) = a_۰ \Longrightarrow a_۰(b_۰ + b_۱ x + \cdots + b_n x^n) = ۰ \Longrightarrow a_۰ b_j = ۰ \Longrightarrow f(x)b_j = ۰,$$

فرض کنید $degf(x) \geq ۱$ و $a_۰ g(x) \neq ۰$ و j کوچکترین عددی باشد که $a_۰ b_j \neq ۰$. بنابر لم (۲.۳.۱) می‌دانیم عددصحیح $t > ۰$ وجود دارد که در $a_۰^t b_j \neq ۰$ و $a^{t+۱} b_j = ۰$ صدق می‌کند. چون R دیو راست است پس $r_۱ \in R$ وجود دارد که $a_۰^t b_j = b_j r_۱$.

فرض کنید $g_۱(x) = g(x)r_۱$، درنتیجه داریم $f(x)g_۱(x) = ۰$ که $g_۱(x) \neq ۰$. توجه کنید که به ازای $a_۰ b_h \neq ۰$ و $h \geqslant j + ۱$ داریم

$$a_۰ g_۱(x) = a_۰ b_h r_۱ x^h + \cdots + a_۰ b_n r_۱ x^n$$

بنابراین برای $k = ۰, \ldots, j$ داریم $a_۰ b_k r_۱ = ۰$. حال اگر $a_۰ g_۱(x) = ۰$،

چون R دیوراست و آبلی است داریم:

$$g_1(x)a_0 = 0,$$

و اگر $a_0 g_1(x) \neq 0$ و h کوچکترین اندیسی باشد که $a_0 b_h \neq 0$، بنابر لم (۲.۳.۱) $s > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $a_1^s b_j \neq 0$ و $a_1^{s+1} b_j = 0$، از اینکه $a_1^s b_j \neq 0$ چون R دیوراست است، $b_j a_1^s \neq 0$ و از اینکه $a_1^{s+1} b_j = 0$ داریم $a_1 b_j a_1^s = 0$ و چون R دیوراست است، $r_2 \in R$ وجود دارد که $a_1^s b_j = b_j r_2$.
فرض کنید $g_2(x) = g_1(x) r_2$ و $f(x) g_2(x) = 0$ و $g_2(x) \neq 0$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} a_0 g_2(x) &= a_0 g_1(x) r_2 = a_0 g(x) r_1 r_2 \\ &= a_0 \left(b_0 + b_1 x + \cdots + b_h x^h + b_{h+1} x^{h+1} + \cdots + b_n x^n\right) r_1 r_2 \\ &= a_0 b_l x^l r_1 r_2 + \cdots + a_0 b_n r_1 r_2 x^n. \end{aligned}$$

که $l \geq h+1$ و برای $k = 0, \ldots, j, \ldots, h$ داریم:

$$a_0 b_k (r_1 r_2) = 0.$$

پس روند را به تعداد متناهی بار انجام می‌دهیم و در نتیجه $r_1, \ldots, r_s \in R$ به‌دست می‌آوریم به طوری که $a_0 g(x) (r_1 \cdots r_s) = 0, g(x) (r_1 \cdots r_s) \neq 0$ و برای $k = 0, \ldots, n$، $a_0 b_k (r_1 \cdots r_s) = 0$.
درنتیجه برای هر یک از حالت‌های $a_0 g(x) = 0$ و $a_0 g(x) \neq 0$ عنصر $t \in R$ وجود دارد که برای تمام $j = 0, \ldots, n$ داریم $a_0 b_j t = 0$. بنابراین

$$0 = f(x) g(x) t = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m) g(x) t = (a_1 x + \cdots + a_m x^m) g(x) t,$$

حال روند را برای $a_1 g(x) t$ انجام می‌دهیم و $v \in R$ بدست می‌آید که وابسته به a_1 است به‌طوری‌که برای تمام $j = 0, \ldots, n$ داریم $a_1 b_j t v = 0$ و $g(x) t v \neq 0$.
چون برای تمام $j = 0, \ldots, n$ داریم $a_0 b_j t = 0$. بنابراین برای تمام i و j ها که $i = 0, 1$ و $j = 0, \ldots, n$ داریم:

$$a_i b_j t v = 0.$$

به تعداد متناهی بار محاسبه را ادامه می‌دهیم و در نتیجه $w \in R$ به‌دست می‌آید که برای $i = 0, \ldots, m$ و $j = 0, \ldots, n$، $a_i b_j (tv \cdots w) = 0$ و $g(x)(tv \cdots w) \neq 0$. با فرض $r = tv \cdots w$ برهان کامل می‌شود. □

کلاسی از حلقه‌های (قویا) مک کوی راست نسبت به زیر حلقه‌ها بسته نیست.

مثال ۲۳.۱.۲. (الف).حلقه R مثال ۲۱.۱.۲ را در نظر می‌گیریم، زیر حلقه‌ای از R که توسط $\{\alpha, e, x | \alpha \in K\}$ تولید شده باشد را در نظر بگیرید و آن را S بنامید. هر عضو S به ازای $\alpha_i \in K$ به فرم $\alpha_1 + \alpha_2 e + \alpha_3 x$ است. فرض کنید $f(t) = x + et$ و $g(t) = x - (1-e)t$. داریم $f(t) g(t) = 0$.
فرض کنید $f(t)\left(\alpha_1 + \alpha_2 e + \alpha_3 x\right) = 0$ بنابراین $x\left(\alpha_1 + \alpha_2 e + \alpha_3 x\right) = \alpha_1 x = 0$ و در نتیجه $\alpha_1 = 0$ و $e\left(\alpha_2 e + \alpha_3 x\right) = \alpha_2 e + \alpha_3 x = 0$ نتیجه می‌دهد $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. بنابراین S نمی‌تواند مک کوی راست باشد در صورتی R قویا مک کوی است.

اما اگر S یک ایده‌ال راست ناصفر از حلقه قویا مک کوی راست R باشد، آنگاه نتیجه می‌شود که Sمک‌کوی راست است.

فرض کنید $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \neq 0$ و $f(x)$ در $S[x]$ باشند به طوری که $f(x)g(x) = 0$. چون R قویا مک کوی راست است، $0 \neq c \in \sum_{j=0}^{n} b_j R$ وجود دارد به طوری که $f(x)c = 0$ و چون S ایده‌ال راست از R است پس $c \in S$ و در نتیجه S قویا مک‌کوی راست است.

(ب). فرض کنید R حلقه چهارتایی‌ها با ضرایب صحیح باشد ($R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}k$). بنا بر ([۷]،تمرین ۲A)، چون R مشمول در یک حلقه تقسیم است پس R دامنه و بنابراین قویا مک کوی است. اما بنا بر همان تمرین $\frac{R}{qR}$با حلقه ماتریس‌های ۲×۲ روی میدان از مرتبه q(q عدد صحیح اول فرد است.) ایزومورف است و لذا $\frac{R}{qR}$ مک کوی راست یا چپ نیست.

توجه:
حلقه قویا مک کوی وجود دارد که در شرط‌های $(\star)$ و $(\star\star)$ صدق نمی‌کند. فرض کنید R حلقه مثال ۲.۱.۲۱ باشد که ثابت شد R قویا مک کوی است. فرض کنید $f(t) = x + et$ و $g(t) = x - (1-e)t$ چندجمله‌ای با ضرایب t روی R باشند به وضوح $f(t)g(t) = 0$ اما $g(t)e = 0$ و $g(t)x = 0$ و $f(t)(1-e) = x \neq 0$ و $f(t)x = xt \neq 0$ بنابراین R در شرط $(\star)$ صدق نمی‌کند و از آن‌جا که $f(t)ex = xt \neq 0$ و $f(t)x(1-e) = xt \neq 0$ مشابها ثابت می‌شود که R در شرط $(\star\star)$ صدق نمی‌کند.

نتایج به‌دست آمده از مطالبی که تاکنون گفته شد در گزاره زیر بیان می‌شود.

گزاره ۲.۱.۲۴. برای حلقه منظم R،
R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر R متقارن باشد اگرو تنها اگر R برگشت پذیر باشد اگر و تنها اگر R در شرط $(\star)$ صدق کند اگرو تنها اگر R در شرط $(\star\star)$ صدق کند اگرو تنها اگر R آبلی باشد.

۲.۲ تعمیمی از حلقه‌های قویا مک کوی راست

در این بخش کلاسی از حلقه‌های قویا مک کوی راست را بسط می‌دهیم. ابتدا حلقه‌های کسرهای کلاسیک را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۱. عنصر $a \in R$ را منظم می‌نامیم هرگاه $r_R(a) = 0 = l_R(a)$.
اگر R و Q دو حلقه باشند، $R \subseteq Q$ و $x \in R$ در Q وارون‌پذیر باشد آنگاه x یک عنصر منظم است.

تعریف ۲.۲.۲. زیر مجموعه ناتهی X از حلقه R را ضربی بسته می‌نامیم هرگاه:
الف. $1 \in X$
ب. اگر $x, y \in X$ آنگاه $xy \in X$.

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنید X زیر مجموعه ضربی بسته از عناصر منظم حلقه R باشد، گوییم Q حلقه کسرهای راست نسبت به مجموعه X است هرگاه:

الف. $R \subseteq Q$

ب. هر عضو از X در Q وارون‌پذیر باشد.

پ. هر عضو از Q را بتوان به فرم ax^{-1} نوشت که $a \in R$ و $x \in X$.

متناظراً حلقه کسرهای چپ R نسبت به مجموعه X تعریف می‌شود.
اگر حلقه R جابجایی باشد از نوشتن پسوندهای چپ و راست خودداری می‌کنیم.

تعریف ۴.۲.۲. حلقه R اور راست[۲] نامیده می‌شود اگر برای هر $a, b \in R$ با b منظم، $a_1, b_1 \in R$ با b_1 منظم وجود داشته باشد به‌طوری که $ab_1 = ba_1$.

R یک حلقه اور راست است اگر و تنها اگر حلقه کسرهای راست کلاسیک از R موجود باشد. [۱]

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه اور راست با حلقه کسرهای راست کلاسیک $Q_r(R)$ باشد در این صورت:

الف. R قویا مک کوی راست است اگرو تنها اگر $Q_r(R)$ چنین باشد.

ب. R مک کوی راست است اگروتنها اگر $Q_r(R)$ چنین باشد.

برهان. الف. فرض کنید $Q = Q(R)$ و برای $F(x), G(x) \in Q[x]$ داشته باشیم $F(x)G(x) = 0$. بنابراین

$$F(x) = a_0u^{-1} + a_1u^{-1}x + \cdots + a_mu^{-1}x^m$$

$$G(x) = b_0\nu^{-1} + b_1\nu^{-1}x + \cdots + b_n\nu^{-1}x^n$$

که u و v منظم هستند. چون

$$\begin{aligned}
&F(x)G(x) = 0 \Rightarrow \\
&\left(a_0u^{-1} + a_1u^{-1}x + \cdots + a_mu^{-1}x^m\right)(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) = 0 \\
&a_0u^{-1}b_0 = 0, a_0u^{-1}b_1 + a_1u^{-1}b_0 = 0, \ldots, a_mu^{-1}b_n = 0, \quad (\dagger)
\end{aligned}$$

حال برای

$$u^{-1}b_0, u^{-1}b_1, \ldots, u^{-1}b_n$$

$c_0, c_1, \ldots, c_n$ و عنصر منظم s وجود دارند به‌طوری‌که برای همه i ها داریم:

$$u^{-1}b_i = c_is^{-1}.$$

با جایگذاری در $(\dagger)$ داریم:

$$a_0c_0 = 0, a_0c_1 + a_1c_0 = 0 \ldots, a_mc_n = 0$$

[۲] Right Ore

و بنابراین
$$f(x)g(x)=0$$
که $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ و $g(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ در $R[x]$ هستند. چون R قویا مک کوی راست است بنابراین عنصر ناصفر r در $c_0R+c_1R+\cdots+c_nR$ وجود دارد به‌طوری که $f(x)r=0$. توجه کنید که

$$\begin{aligned} r\in &c_0R+c_1R+\cdots+c_nR\subseteq c_0Q+c_1Q+\cdots+c_nQ\\ &=c_0s^{-1}Q+c_1s^{-1}Q+\cdots+c_ns^{-1}Q\\ &=u^{-1}b_0Q+u^{-1}b_1Q+\cdots+u^{-1}b_nQ \end{aligned}$$

بنابراین
$$ur\in b_0Q+b_1Q+\cdots+b_nQ=b_0v^{-1}Q+b_1v^{-1}Q+\cdots+b_nv^{-1}Q$$
$ur\neq 0$ و چون $f(x)r=0$ داریم:

$$\begin{aligned} 0&=(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)\,r\\ &=(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)\,u^{-1}ur\\ &=\left(a_0u^{-1}+a_1u^{-1}x+\cdots+a_mu^{-1}x^m\right)ur=F(x)ur \end{aligned}$$

بنابراینQ قویا مک کوی راست است.

بالعکس:

فرض کنید
$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$$
و
$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$
دو چندجمله‌ای از $R[x]$ باشند به‌طوری که $f(x)g(x)=0$. در این صورت $f(x),g(x)\in Q[x]$. چون Q قویا مک کوی راست است و برای برخی از $rs^{-1}\in b_0Q+b_1Q+\cdots+b_nQ$ ناصفر، $f(x)rs^{-1}=0$ است. اگر به ازای $r_is_i^{-1}\in Q$ داشته باشیم:
$$rs^{-1}=b_0r_0s_0^{-1}+b_1r_1s_1^{-1}+\cdots+b_nr_ns_n^{-1}$$
آنگاه
$$r=b_0r_0s_0^{-1}s+b_1r_1s_1^{-1}s+\cdots+b_nr_ns_n^{-1}s$$
حال برای
$$s_0^{-1}s,s_1^{-1}s,\cdots,s_n^{-1}s$$
اعضای منظم $u_0,u_1,\ldots,u_n$ و v وجود دارند به‌طوری که برای هر i داریم $s_i^{-1}s=u_iv^{-1}$، درنتیجه
$$rv=b_0r_0u_0+b_1r_1u_1+\cdots+b_nr_nu_n\in b_0R+b_1R+\cdots+b_nR$$

چون برای برخی $0 \neq r \in R$ داریم $f(x)r = 0$، بنابراین برای برخی

$$0 \neq rv \in b_0 R + b_1 R + \cdots + b_n R$$

داریم $f(x)rv = 0$. درنتیجه R قویا مک کوی راست است.

ب. چون R مک کوی راست است $0 \neq r \in R$ وجود دارد به‌طوری که $f(x)r = 0$ و $ur \neq 0$ و $F(x)ur = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m)\, u^{-1} ur = f(x)r = 0$ بنابراین Q مک کوی راست است. حال اگر Q مک‌کوی راست باشد، $rs^{-1} \in Q$ ناصفر وجود دارد به‌طوری که $f(x)rs^{-1} = 0$ پس $0 \neq r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x)r = 0$ و درنتیجه R مک کوی راست است.

□

برای حلقه R و عدد صحیح n، $n \geqslant 2$، $D_n(R)$ و $V_n(R)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in R \right\} \tag{4.2}$$

و

$$V_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix} \middle| a_1, \cdots, a_n \in R \right\} \tag{5.2}$$

حلقه ماتریس‌های کامل $n \times n$ روی R را با $\mathrm{Mat}_n(R)$ و ماتریسی که درایه(i و j)ام آن یک و بقیه صفر باشند را با e_{ij} نمایش می‌دهیم.

قضیه ۶.۲.۲. برای حلقه R، عبارات زیر معادلند:

الف. R قویا مک کوی راست (چپ) است.

ب. $D_2(R)$ قویا مک کوی راست (چپ) است.

پ. برای هر $n \geqslant 2$، $V_n(R)$ قویا مک کوی راست (چپ) است.

برهان. ب $\Longrightarrow$ الف

فرض کنید Rقویا مک کوی راست است. با توجه به اینکه برای هر عدد صحیح $n \geqslant 2$، $D_n(R)[x] \cong D_n(R[x])$. فرض کنید

$$0 \neq A(x) = \sum_{i=0}^{m} \begin{pmatrix} a_{1i} & b_{1i} \\ 0 & a_{1i} \end{pmatrix} x^i = \begin{pmatrix} f_1(x) & g_1(x) \\ 0 & f_1(x) \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

و

$$0 \neq B(x) = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} a_{2j} & b_{2j} \\ 0 & a_{2j} \end{pmatrix} x^i = \begin{pmatrix} f_2(x) & g_2(x) \\ 0 & f_2(x) \end{pmatrix} \qquad (۷.۲)$$

عضو$D_2(R)[x]$ باشند که $A(x)B(x) = 0$، $f_1(x) = \sum_{i=0}^{m} a_{1i}x^i$ و $g_1(x) = \sum_{i=0}^{m} b_{1i}x^i$ ، $f_2(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{2j}x^j$ و $g_2(x) = \sum_{j=0}^{n} b_{2j}x^j$.

حالت اول: $f_1(x) \neq 0$ و $f_2(x) \neq 0$

توجه کنید $f_1(x)f_2(x) = 0$. چون R قویا مک کوی راست است $\alpha \in \sum_{j=0}^{n} a_{2j}R$ ناصفری وجود دارد به‌طوری‌که $f_1(x)\alpha = 0$. قرار دهید $\alpha = \sum_{j=0}^{n} a_{2j}\alpha_j$ پس $A(x)\alpha e_{12} = 0$ توجه داشته باشید که

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} a_{2j} & b_{2j} \\ 0 & a_{2j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} a_{2j} & b_{2j} \\ 0 & a_{2j} \end{pmatrix} D_2(R) \qquad (۸.۲)$$

یعنی حاصلضرب $A(x)$ در عبارتی ناصفر برابر ۰ شد.

حالت دوم: $f_1(x) \neq 0$ و $f_2(x) = 0$ و $g_2(x) \neq 0$

توجه کنید که $f_1(x)g_2(x) = 0$. چون R قویا مک کوی راست است. $\beta \in \sum_{j=0}^{n} b_{2j}R$ غیر صفر موجود است به‌طوری که $f_1(x)\beta = 0$قرار دهید $\beta = \sum_{j=0}^{n} b_{2j}\beta_j$ پس $A(x)\beta e_{12} = 0$ توجه داشته باشید که

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} 0 & b_{2j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_j & 0 \\ 0 & \beta_j \end{pmatrix} \in \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} 0 & b_{2j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D_2(R) \qquad (۹.۲)$$

یعنی حاصلضرب$A(x)$ در عبارتی ناصفر برابر ۰ شد.

حالت سوم: $f_1(x) = 0$ و $f_2(x) \neq 0$

برای هر $\gamma = \sum_{j=0}^{n} a_{2j}\gamma_j$ ناصفر داریم $A(x)\gamma e_{12} = 0$. با توجه به این‌که

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} a_{2j} & b_{2j} \\ 0 & a_{2j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} a_{2j} & b_{2j} \\ 0 & a_{2j} \end{pmatrix} D_2(R) \qquad (۱۰.۲)$$

یعنی حاصلضرب $A(x)$ در عبارتی ناصفر برابر ۰ شد.

حالت چهارم: $f_1(x) = 0$، $f_2(x) = 0$ و $g_2(x) \neq 0$.

برای هر $\delta = \sum_{j=0}^{n} b_{2j}\delta_j$ ناصفر داریم:

$$A(x)\delta e_{12} = 0,$$

با توجه به این‌که

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} 0 & b_{2j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_j & 0 \\ 0 & \delta_j \end{pmatrix} \in \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} 0 & b_{2j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D_2(R).$$

یعنی حاصلضرب $A(x)$ در عبارتی ناصفر برابر ۰ شد.

با توجه به حالت‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ نتیجه می‌شود $D_2(R)$ قویا مک کوی راست است.

الف $\Longleftarrow$ ب فرض کنید که $D_2(R)$ قویا مک کوی راست باشد و $0 \neq f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$ و

فرض کنید $f(x)g(x)=0$ که $0\neq g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_jx^j$

$$A(x)=\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & f(x)\end{pmatrix}=\sum_{i=0}^{m}\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_i\end{pmatrix}x^i \tag{۱۱.۲}$$

و

$$B(x)=\begin{pmatrix} g(x) & 0 \\ 0 & g(x)\end{pmatrix}=\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} b_j & 0 \\ 0 & b_j\end{pmatrix}x^j \tag{۱۲.۲}$$

که $A(x)B(x)=0$. چون $D_2(R)$ قویا مک کوی راست است،

$$c\in\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} b_j & 0 \\ 0 & b_j\end{pmatrix}D_2(R) \tag{۱۳.۲}$$

غیر صفر وجود دارد به‌طوری که $A(x)c=0$ فرض کنید

$$c=\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} b_j & 0 \\ 0 & b_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{1j} & c_{2j} \\ 0 & c_{1j}\end{pmatrix} \tag{۱۴.۲}$$

توجه کنید که $\sum_{j=0}^{n} b_jc_{1j}\neq 0$ یا $\sum_{j=0}^{n} b_jc_{2j}\neq 0$. چون $f(x)\sum_{j=0}^{n} b_jc_{1j}=0$ یا $f(x)\sum_{j=0}^{n} b_jc_{2j}=0$، و بنابراین R قویا مک کوی راست است.

پ $\Longrightarrow$الف

فرض کنید R قویا مک کوی راست باشد. توجه کنید برای هر عدد صحیح $n\geqslant 2$

$$V_n(R)[x]\cong V_n(R[x])$$

فرض کنید

$$A(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & \dots & f_{n-1}(x) & f_n(x) \\ 0 & f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_{n-2}(x) & f_{n-1}(x) \\ 0 & 0 & f_1(x) & \dots & f_{n-3}(x) & f_{n-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_1(x) & f_2(x) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_1(x)\end{pmatrix}$$

و

$$B(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) & \dots & g_{n-1}(x) & g_n(x) \\ 0 & g_1(x) & g_2(x) & \dots & g_{n-2}(x) & g_{n-1}(x) \\ 0 & 0 & g_1(x) & \dots & g_{n-3}(x) & g_{n-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_1(x) & g_2(x) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & g_1(x)\end{pmatrix}$$

دو عضو از $V_n(R)[x]$ باشند به‌طوری‌که $A(x)B(x)=0$

حالت اول: $f_1(x)\neq 0$

فرض کنید که $f_1(x)\neq 0$، $g_1(x)\neq 0$ که $f_1(x)g_1(x)=0$. چون R قویا مک کوی راست است α

ناصفری وجود دارد به‌طوری که $f_1(x)\alpha = 0$ که α عضو ایده‌آل راستی از R است که توسط ضرایبی از $g_1(x)$ تولید شده است بنابراین $A(x)C = 0$. توجه داشته باشید که
$$C = \alpha(e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn})e_{1n} = \alpha e_{1n}$$

فرض کنید که $f_1(x) \neq 0$ و $g_1(x) = 0$ و $g_2(x) \neq 0$ که $f_1(x)g_2(x) = 0$، چون R قویا مک کوی راست است β ناصفری وجود دارد به‌طوری که $f_1(x)\beta = 0$ و β عضو ایده‌آل راستی از Rاست که توسط ضرایبی از $g_2(x)$ تولید شده است و بنابراین $A(x)D = 0$. توجه داشته باشید که
$$D = \beta(e_{12} + e_{23} + \ldots + e_{(n-1)n})(e_{1(n-1)} + e_{2n}) = \beta e_{1n}$$

با ادامه و تکرار روند برای حالت‌های دیگر نیز می‌توان اثبات کرد.

حالت دوم : $f_1(x) = 0$

فرض کنید $f_2(x) \neq 0$ و $g_1(x) \neq 0$ بنابراین γ ناصفری وجود دارد که به ازای $E = \gamma e_{1n}$ داریم $A(x)E = 0$ که γ عضو ایده ال راستی از R است که توسط ضرایبی از $g_1(x)$ تولید شده است.

فرض کنید که $f_2(x) \neq 0$ و $g_1(x) = 0$ و $g_2(x) \neq 0$ بنابراین δ ناصفری وجود دارد که به ازای $F = \delta e_{1n}$ داریم $A(x)F = 0$ که δ عضو ایده ال راستی از R است که توسط ضرایبی از $g_2(x)$ تولید شده است.

با توجه به حالت‌های ۱ و ۲ برای هر $n \geq 2$، $V_n(R)$ قویا مک کوی راست است.

برهان پ $\Longrightarrow$ الف مشابه برهان ب$\Longrightarrow$ الف است.

□

تبصره: ۱. با توجه به قضیه (۶.۲.۲) این سوال مطرح می‌شود که آیا برای $n \geq 3$ نیز $D_n(R)$ روی حلقه قویا مک کوی راست R، قویا مک کوی راست است. نکات زیر جواب منفی برای این سوال است.

الف. ابتدا حالت $n = 3$ را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید T حلقه‌ای تقلیل یافته باشد و $S = D_3(T)$. بنابر (۵.۱.۳)، S حلقه‌ای قویا مک کوی راست است. فرض کنید $R = D_3(S)$. توجه کنید که R با زیرحلقه ای از $\mathrm{Mat}_9(T)$ ایزومورفیسم است.

دو چندجمله‌ای $A(x) = (e_{12} + e_{45} + e_{78}) + e_{15}x$ و $B(x) = e_{59} - e_{29}$ را در نظر بگیرید که $A(x)B(x) = 0$. توجه کنید که $I = e_{29}s + e_{59}s$ ایده ال راستی از R است که توسط ضرایبی از $B(x)$ تولید شده است. اگر $r \neq 0$ عنصری از I باشد در این صورت $r = e_{29}a + e_{59}b$ و $A(x)r = 0$ نتیجه می‌دهد $a = b = 0$ و درنتیجه $r = 0$ که یک تناقض است. بنابراین R قویا مک‌کوی راست نیست.

ب. برای حلقه دلخواه R فرض کنید $n \geq 4$ باشد. دو چندجمله‌ای
$$f(x) = e_{12} + e_{13}x, \quad g(x) = -e_{3n} + e_{2n}x,$$
را در نظر بگیرید که $f(x)g(x) = 0$. $J = e_{2n}R + e_{3n}R$ ایده ال راست $D_n(R)$ است که توسط ضرایب $g(x)$ تولید شده است. فرض کنید $s \neq 0$ عضوی از J باشد دراین‌صورت

$s = e_{۲n}a + e_{۳n}b$ که $f(x)s = ۰$ نتیجه می‌دهد $a = b = ۰$ و در نتیجه $s = ۰$ که یک تناقض است. بنابراین $D_n(R)$ $(n \geq ۴)$ قویا مک‌کوی راست نیست.

۲. نشان می‌دهیم R حلقه مک کوی راست (چپ) است اگر و تنها اگر برای $n \geqslant ۲$

$$D_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ ۰ & a & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{kl} \in R \right\} \tag{۱۵.۲}$$

مک کوی راست(چپ) باشد.

برهان: $\Leftarrow$)

برای هر $k = ۱, ۲, \ldots, n$ و $l = ۲, ۳, \ldots, n$ و $k < l$ فرض کنید

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & a^i_{۱۲} & \cdots & a^i_{۱n} \\ ۰ & a_i & \cdots & a^i_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_i \end{pmatrix} \tag{۱۶.۲}$$

و

$$B_j = \begin{pmatrix} b_j & b^j_{۱۲} & \cdots & b^j_{۱n} \\ ۰ & b_j & \cdots & b^j_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & b_j \end{pmatrix} \tag{۱۷.۲}$$

بنابراین

$$F(x) = \sum_{i=۰}^{p} A_i x^i = \begin{pmatrix} f(x) & f_{۱۲}(x) & \cdots & f_{۱n}(x) \\ ۰ & f(x) & \cdots & f_{۲n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & f(x) \end{pmatrix} \tag{۱۸.۲}$$

$$G(x) = \sum_{j=۰}^{q} B_j x^j = \begin{pmatrix} g(x) & g_{۱۲}(x) & \cdots & g_{۱n}(x) \\ ۰ & g(x) & \cdots & g_{۲n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & g(x) \end{pmatrix} \tag{۱۹.۲}$$

که $f(x) = \sum_{i=۰}^{p} a_i x^i$ و $f_{kl}(x) = \sum_{i=۰}^{p} a^i_{kl} x^i$ و $g(x) = \sum_{j=۰}^{q} b_j x^j$ و $g_{kl}(x) = \sum_{j=۰}^{q} b^j_{kl} x^j$.

فرض کنید $F(x)G(x) = ۰$ و $F(x), G(x) \neq ۰$. برای $p, q = ۱, ۲, \ldots, n$ قرار دهید

$$H(x) = F(x)G(x) = (h_{pq}(x))$$

حالت اول: اگر $f(x) \neq ۰$ و $g(x) \neq ۰$ آن‌گاه $h_{۱۱}(x) = f(x)g(x) = ۰$، چون R مک کوی است $s, t \in R - \{۰\}$ وجود دارند به‌طوری که $f(x)s = ۰$ و $tg(x) = ۰$. فرض کنید $A = E_{۱n}(s)$ و

$B = E_{1n}(t)$ آن‌گاه $F(x)A = 0$ و $BG(x) = 0$.

حالت دوم: اگر $f(x) \neq 0$ و $g(x) = 0$ آن‌گاه $g_{kl}(x) \neq 0$ وجود دارد به‌طوری که برای برخی از k, l و $1 \leqslant u \leqslant n-k$ داریم $g_{k+u,l}(x) = 0$. چون $G(x) \neq 0$ بنابراین $h_{kl}(x) = f(x)g_{kl}(x) = 0$. چون R مک کوی است $s \in R - \{0\}$ وجود دارد به‌طوری که $f(x)s = 0$ فرض کنید $A = E_{1n}(s)$، پس

$$F(x)A = AG(x) = 0$$

حالت سوم: اگر $f(x) = 0$ و $g(x) \neq 0$ آن‌گاه $A, B \in R_n - \{0\}$ وجود دارد به‌طوری که $F(x)A = BG(x) = 0$. برهان این قسمت مشابه حالت دوم است.

حالت چهارم: اگر $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$ آن‌گاه برای هر $s \in R - \{0\}$ فرض کنید $A = E_{1n}(s)$ این نتیجه می‌دهد که $F(x)A = AG(x) = 0$.

بنابراین R_n در هر حالت مک‌کوی است.

$(\Longrightarrow$

فرض کنید $f(x)g(x) = 0$ که $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \neq 0$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \neq 0$ که $a_i, b_j \in R$ هستند و همچنین فرض کنید $F(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i$ و $G(x) = \sum_{j=0}^{m} B_j x^j$ که برای هر $i = 0, 1, \ldots, n$ و $j = 0, 1, \ldots, m$ داریم:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & a_i & \cdots & a_i \\ 0 & a_i & \cdots & a_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_i \end{pmatrix} \tag{۲۰.۲}$$

و

$$B_j = \begin{pmatrix} b_j & b_j & \cdots & b_j \\ 0 & b_i & \cdots & b_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_j \end{pmatrix} \tag{۲۱.۲}$$

در این صورت

$$F(x)G(x) = \begin{pmatrix} f(x) & f(x) & \cdots & f(x) \\ 0 & f(x) & \cdots & f(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x) & g(x) & \cdots & g(x) \\ 0 & g(x) & \cdots & g(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g(x) \end{pmatrix} = 0 \tag{۲۲.۲}$$

بنابراین

$$A = \begin{pmatrix} s & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & s & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n - \{0\} \tag{۲۳.۲}$$

وجود دارد به‌طوری که $F(x)A = 0$ چون R_n مک کوی است. اگر $s \neq 0$ باشد آن‌گاه $f(x)s = 0$. اگر $s = 0$ آن‌گاه برای هر i, j $s_{ij} \neq 0$ وجود دارد به‌طوری که برای $1 \leqslant v \leqslant n - i$ $s_{i+v,j} = 0$، و همچنین داریم $f(x)s_{ij} = 0$. مشابها t ناصفری وجود دارد به‌طوری که $tg(x) = 0$، بنابراین R مک کوی است.

مشابها می‌توان نشان دادکه R مک کوی راست (چپ) است اگر و تنها اگر برای هر $n \geqslant 2$، $V_n(R)$ مک کوی راست یا چپ باشد.

۳. با توجه به قضیه ۶.۲.۲ و حالت‌های قبل تبصره می‌توانیم به کمک حلقه‌ای که (قویا) مک‌کوی راست باشد حلقه‌هایی را بسازیم که مک‌کوی راست هستند اما قویا مک‌کوی راست نیستند.

گزاره ۷.۲.۲. حلقه ماتریس‌های مربعی و ماتریس‌های مربعی بالا مثلثی روی یک حلقه ناصفر به طور خطی مک کوی راست نیستند.

برهان. فرض کنید e_{ij} ماتریس واحد باشد. چندجمله‌ای‌های $f_1(x) = (1 - e_{2,2}) + e_{1,2}x$ و $g_1(x) = e_{2,2} - e_{1,2}x$ را در $\mathrm{Mat}_n R[x]$ در نظر می‌گیریم که $f_1(x)g_1(x) = 0$. نشان می‌دهیم $r \in R$ ناصفری وجود ندارد که $f_1(x)r = 0$ فرض کنید $r = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ناصفر باشد در این‌صورت

$$f_1(x)r = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x\right) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x\right) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

برای این‌که $f_1(x)r = 0$ باشد باید $a = b = c = d = 0$ باشد که در این صورت $r = 0$ می‌شود که یک تناقض است. پس r ناصفری عضو R وجود ندارد که $f_1(x)r = 0$ و درنتیجه $\mathrm{Mat}_n(R)$ به‌طور خطی مک‌کوی راست نیست.

برای اثبات این‌که حلقه به‌طور خطی مک‌کوی چپ نیست کافی است چندجمله‌ای‌های $f_2(x) = e_{1,1} + e_{1,2}x$ و $g_2(x) = (1 - e_{1,1}) - e_{1,2}x$ را در نظر بگیریم. □

نتیجه ۸.۲.۲. حلقه R قویا مک کوی راست است اگر وتنها اگر $\dfrac{R[x]}{\langle x^n \rangle}$ قویا مک کوی راست باشد، که $n \geqslant 2$ و $\langle x^n \rangle$ ایده‌ال $R[x]$ تولید شده توسط x^n باشد.

برهان. کافی است نشان دهیم که $V_n(R)$ با $\frac{R[x]}{\langle x^n \rangle}$ یکریخت می‌باشد. در این صورت بنا به قضیه (۶.۲.۲) حکم برقرار خواهد بود. برای اثبات یکریختی ضابطه‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Pi : R[x] \longrightarrow V_n(R)$$
$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}, \ a_0, a_1, \cdots, a_n \in R, n \geq 2.$$

ابتدا نشان می‌دهیم که خاصیت جمع و ضرب را حفظ می‌کند.
خاصیت جمع: فرض کنید $f, g \in R[x]$ به‌طوری‌که $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ و $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ در این صورت داریم:

$$f(x)+g(x) = a_0x+\cdots+a_nx^n+b_0+\cdots+b_nx^n = (a_0+b_0)+\cdots+(a_n+b_n)x^n = (f+g)(x).$$

حال بنا به تعریف تابع داریم:

$$\Pi(f+g) = \Pi\Big((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n\Big)$$

$$\begin{pmatrix} a_0+b_0 & \cdots & a_{n-1}+b_{n-1} \\ 0 & \cdots & a_{n-2}+b_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_0+b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

$$= \Pi(f) + \Pi(g).$$

خاصیت ضرب: فرض کنید $f, g \in R[x]$ به‌طوری‌که $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ و $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ در این صورت داریم:

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n$$

حال برای تابع $\Pi : R[x] \longrightarrow V_n(R)$ داریم:

$$\Pi(fg) = \Pi\Big((a_0b_0) + (a_1b_0 + a_0b_1)x + \cdots + (a_0b_n + \cdots a_nb_0)x^n\Big)$$

$$\begin{pmatrix} a_0b_0 & \cdots & a_0b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_0 \\ 0 & \cdots & a_0b_{n-2}+\cdots+a_{n-2}b_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_0b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

$$= \Pi(f)\Pi(g).$$

واضح است که تابع Π یک تابع پوشا است زیرا به ازای هر $0 \neq f \in R[x]$ ماتریسی مانند $v_n \in V_n(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\Pi(f) = v_n$. از طرفی می‌دانیم

$$\ker\Pi = \{f = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in R[x] \,|\, \Pi(f) = 0\}.$$

در نتیجه داریم

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0.$$

در نتیجه $\ker\Pi = \langle x^n \rangle$. حال بنا به قضیه اول یکریختی داریم:

$$V_n(R) \cong \frac{R[x]}{\langle x^n \rangle}.$$

بنابراین $\frac{R[x]}{\langle x^n \rangle}$ قویا مک‌کوی راست است. $\square$

گزاره ۹.۲.۲. ([۸]،قضیه ۱) حلقه R مک کوی است اگر وتنها اگر $R[x]$ مک کوی باشد.

برهان. $\Longleftarrow$)، فرض کنید $F(y)=\sum_{i=0}^{n} f_i y^i$ و $G(y)=\sum_{j=0}^{m} g_j y^j$ چندجمله‌ای‌های ناصفر در $R[x][y]$ باشند که $F(y)G(y)=0$ و $f_i=\sum_{s=0}^{p_i} a_{(i)_s}x^s$ و $g_j=\sum_{t=0}^{q_j} b_{(j)_t}x^t$در $R[x]$ باشند.
فرض کنید $k=\sum degf_i+\sum deg\, g_j$ درجه‌ای از چندجمله‌ای با x و درجه چندجمله‌ای صفر، صفر باشد. پس $G(x^k)=\sum_{j=0}^{m} g_j x^{jk}\in R[x]$ و $F(x^k)=\sum_{i=0}^{n} f_i x^{ik}$ مجموعه‌ای از ضرایب f_iها (متناظرا g_jها) با مجموعه‌ای از ضرایب $F(x^k)$ (متناظرا $G(x^k)$) برابر است. چون $F(y)G(y)=0$ و x با اعضایی از R جابجا می‌شود، $F(x^k)G(x^k)=0$ چون R مک کوی است u,v ناصفری وجود دارد به‌طوری که $F(x^k)u=0$ و $vG(x^k)=0$. بنابراین $F(y)u=0$ و $vG(y)=0$ پس $R[x]$ مک کوی است.
$\Longrightarrow$)
فرض کنید $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ چندجمله‌ای‌های ناصفر در $R[x]$ باشند به‌طوری‌که $f(x)g(x)=0$. همچنین فرض کنید $f(y)=\sum_{i=0}^{n} a_i y^i$ و $g(y)=\sum_{j=0}^{m} b_j y^j$ دو چندجمله‌ای از $R[x][y]$ باشند به‌طوری‌که $f(y)g(y)=0$. چون $R[x]$ مک‌کوی است چندجمله‌ای ناصفر $h(x)=\sum_{k=0}^{p} h_k x^k$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(y)h(x)=0$ و بنابراین برای هر $i=0,1,\ldots,n$ داریم $a_i h(x)=0$. در نتیجه $h_k\in R$ ناصفر وجود دارد به‌طوری‌که $f(x)h_k=0$.
مشابها t ناصفر عضو R وجود دارد به‌طوری‌که $tg(x)=0$ و بنابراین R مک‌کوی است. $\square$

گزاره ۱۰.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد اگر $R[x]$ قویا مک کوی راست باشد آن‌گاه R نیز چنین است.

برهان. فرض کنید $R[x]$ قویا مک کوی راست و $R[x][y]$ حلقه چندجمله‌ای با مجهول y روی $R[x]$ باشد. چندجمله‌ای‌های ناصفر $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ در $R[x]$ را در نظر بگیرید به‌طوری که $f(x)g(x)=0$. فرض کنید $f(y)=\sum_{i=0}^{m} a_i y^i$ و $g(y)=\sum_{j=0}^{n} b_j y^j$ در نتیجه $f(y)g(y)=0$. چون $f(x)\neq 0$ و $g(x)\neq 0$. واضح است که $f(y)\neq 0$ و $g(y)\neq 0$.
چون $R[x]$ قویا مک کوی راست است $0\neq c(x)\in\sum_{j=0} b_j R[x]$ وجود دارد به‌طوری که $f(y)c(x)=0$ پس برای تمام $0\leqslant i\leqslant m$، $a_i c(x)=0$
بنابراین برای تمام $0\leq i\leq m$ و $0\leq k\leq l$ که $c(x)=\sum_{k=0}^{l} c_k x^k$ داریم $a_i c_k=0$ و $(f(x)c_k)=0$.
چون $c(x)$ ناصفر است c_t ناصفری وجود دارد که $f(x)c_t=0$ اما $c(x)\in\sum_{j=0} b_j R[x]$ و هر c_k مشمول در $\sum_{j=0} b_j R$ است. بنابراین R قویا مک کوی راست است.
برای عکس قضیه فوق یعنی زمانی که R قویا مک کوی راست باشد $R[x]$ قویا مک کوی راست است نمی‌توان جواب قطعی داد اما برای حلقه‌هایی که در ادامه بیان شده جواب مثبت است. $\square$

قضیه ۱۱.۲.۲. اگر R یک حلقه دیو راست یا برگشت پذیر باشد آنگاه $R[x]$ قویا مک کوی راست است.

برهان. فرض کنید R حلقه دیو راست و $R[x][t]$ نشان دهنده حلقه چندجمله‌ای با مجهول t روی $R[x]$ باشد. فرض کنید $f(t) = \sum_{i=0}^{m} f_i(x)t^i$ و $g(t) = \sum_{j=0}^{n} g_j(x)t^j \in R[x][t]$ چندجمله‌ای‌های ناصفر باشند که $f(t)g(t) = 0$. $f_i(x) = \sum_{h=0}^{n_i} a(i)_h x^h$ و $g_j(x) = \sum_{k=0}^{m_j} b(j)_k x^k$ در نظر بگیرید و قرار دهید $k = \sum_{i=0}^{m} \deg(f_i(x)) + \sum_{j=0}^{n} \deg(g_i(x))$ به‌طوری که درجه چندجمله‌ای صفر، صفر باشد. فرض کنید $F(x) = f_0 + f_1 x^k + \ldots + f_m x^{km}$ و $G(x) = g_0 + g_1 x^k + \ldots + g_n x^{kn}$ که $F(x)$ و $G(x)$ عضو $R[x] - \{0\}$ باشند. چون مجموعه‌ای از ضرایب f_i ها (g_jها) با مجموعه‌ای از ضرایب $F(x)(G(x))$ برابر است و از این‌که $f(t)g(t) = 0$ نتیجه می‌شود که $F(x)G(x) = 0$.

حال چون R دیو راست است $r \in R$ ناصفر وجود دارد به‌طوری‌که برای تمام k، j، s و i ها $G(x)r \neq 0$، $a(i)_h b(j)_k r = 0$. و در نتیجه $\sum_{j=0}^{h} g_j(x)r \neq 0$ و $f(x)\left(\sum_{j=0}^{h} g_j(x)r\right) = 0$.
بنابراین $R[x]$ قویا مک کوی راست است.

□

گزاره ۱۲.۲.۲. الف. کلاس حلقه‌های (قویا) مک کوی راست نسبت به حد مستقیم بسته است.

ب. فرض کنید I یک زنجبر باشد و برای هر $i \in I$، R_i حلقه‌ای باشد که برای هر $s \leq t$، $R_s \subseteq R_t$ و فرض کنید $J \subseteq I$ به‌طوری‌که برای هر $j \in J$، R_j قویا مک‌کوی (مک‌کوی) باشد.
اگر J در I چگال باشد آنگاه $R = \cup_{i\in I} R_i$ قویا مک کوی راست است.

برهان. الف. فرض کنید $D = \{R_i, \alpha_{ij}\}$ یک سیستم مستقیم از حلقه‌های قویا مک کوی راست باشد به‌طوری که برای هر $i \leq j$ هومورفیسم‌های $\alpha_{ij} : R_i \longrightarrow R_j$ در شرط $\alpha_{ij}(1) = 1$ صدق می‌کنند و I یک مجموعه جزیی مرتب جهت دار است.

فرض کنید $R = \lim_{\rightarrow} R_i$ حد مستقیم D باشد که $\ell_i : R_i \longrightarrow R$ و $\ell_j \alpha_{ij} = \ell_i$.
فرض کنید $a, b \in R$، در این‌صورت برای برخی از i و jهای عضو I، $a = \ell_i(a_i), b = \ell_j(b_j)$ است و $k \in I$ وجود دارد به‌طوری که $j \leq k$ و $i \leq k$، تعریف می‌کنیم:

$$a + b = \ell_k(\alpha_{ik}(a_i) + \alpha_{jk}(b_j)), \quad ab = \ell_k(\alpha_{ik}(a_i)\alpha_{jk}(b_j))$$

که $\alpha_{ik}(a_i)$ و $\alpha_{jk}(b_j)$ عضو R_k هستند. پس R حلقه‌ای است که عضو خنثی آن $\ell_i(0) = 0$ و واحد آن $\ell_i(1) = 1$ می‌باشد.

حال فرض کنید که $f(x) = \sum_{a=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ چندجمله‌ای‌های غیرصفر باشند به‌طوری‌که $f(x)g(x) = 0$. با استفاده از l_iها و α_{ij}ها عنصر $k \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x), g(x) \in R_k[x]$ و در نتیجه در حلقه $R_k[x]$ داریم $f(x)g(x) = 0$. چون R_k قویا مک کوی راست است پس
$c_k \in \sum_{j=0}^{n} b_j R_k$ به‌طوری‌که $f(x)c_k = 0$ که $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$. قرار دهید $c = \ell_k(c_k)$ پس $f(x)c = 0$ که $0 \neq c \in \sum_{j=0}^{n} b_j R$، درنتیجه R قویا مک کوی راست است. برای حلقه مک کوی راست نیز به‌طور مشابه اثبات می‌شود.

ب. فرض کنید که J در I چگال باشد و $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ چندجمله‌ای‌های غیرصفر باشند به‌طوری‌که $f(x)g(x) = 0$. چون J در I چگال است $k \in J$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x), g(x) \in R_k[x]$. چون R_k قویا مک کوی راست است پس $c \in \sum_{j=0}^{n} b_j R_k \subseteq \sum_{j=0}^{n} b_j R$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x)c = 0$. بنابراین R قویا مک کوی راست است.

برای حلقه‌های مک کوی چپ نیز به‌طور مشابه اثبات می‌شود.

$\square$

کلاس حلقه‌های (قویا) مک کوی راست تحت ضرب مستقیم و جمع مستقیم (که ممکن است بدون همانی باشد) با محاسبات معمولی بسته است.

فصل ۳

حلقه‌های آرمنداریز

این فصل برگرفته از مرجع [۱۳] می‌باشد و شامل سه بخش است که در آن به معرفی حلقه‌های آرمنداریز، شبه آرمنداریز، IFP، متناهی مستقیم و ... پرداخته و قضایا و نتایجی را بیان و اثبات می‌کنیم.
در بخش اول نتایجی در مورد حلقه‌های آرمنداریز و دیوراست بیان می‌شود.
در بخش دوم به تجزیه و تحلیل خواصی از حلقه‌های شبه آرمنداریز می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم که برای حلقه‌های منظم، خواص شبه آرمنداریز، آرمنداریز، برگشت‌پذیر، دیوراست و قویا مک‌کوی راست معادل‌اند.
در بخش سوم، خواص و مثال‌هایی از حلقه‌های شبه آرمنداریز بیان می‌شود.

۱.۳ شرط آرمنداریز در حلقه‌های برگشت‌پذیر و دیو راست

تعریف ۱.۱.۳. حلقه R را آرمنداریز می‌نامیم هرگاه $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ، $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ دو عضو از حلقه $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = 0$، آنگاه برای هر i و j، $a_i b_j = 0$.

لم ۲.۱.۳. حلقه‌های تقلیل‌یافته، آرمنداریز هستند.

برهان. (اگر R حلقه تقلیل‌یافته باشد و $f, g \in R[x]$ که $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$، $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$، آنگاه $f(x)g(x) = 0$ اگر وتنهااگر برای هر $0 \leq i \leq n$ و $0 \leq j \leq m$، $a_i b_j = 0$.) با استفاده از این نکته لم را اثبات می‌کنیم.
فرض کنید $fg = 0$ و $m = n$. بنابراین داریم:

$$a_0 b_0 = 0,\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0,\ \ldots,\ a_n b_0 + \cdots + a_0 b_n = 0$$

حال با ضرب از چپ معادله دوم با b_0 نتیجه می‌گیریم $a_1 b_0 = 0$. مشابها برای $1 \leq i \leq n$ بدست

می‌آوریم $a_ib_0=0$.

$$\begin{cases} b_0(a_0b_1+a_1b_0)=b_0a_0b_1+b_0a_1b_0=0 \to b_0a_1b_0=0 \to (a_1b_0)^2=0 \to a_1b_0=0 \\ \vdots \\ b_0(a_ib_1+\cdots+a_0b_i)=0 \to b_0a_ib_0+\cdots+b_0a_0b_i=0 \to b_0a_ib_0=0 \to (a_ib_0)^2=0 \\ \to a_ib_0=0 \end{cases}$$

بنابراین معادله اصلی به معادلات زیر کاهش می‌یابد:

$$a_0b_1=0,\ a_1b_1+a_0b_2=0,\ \ldots,\ a_{n-1}b_1+\cdots+a_0b_n=0,$$

با استفاده دوباره از این روش می‌توان نتیجه گرفت

$$b_1(a_1b_1+a_0b_2)=b_1a_1b_1+b_1a_0b_2=b_1a_1b_1=0 \to (a_1b_1)^2=0 \to a_1b_1=0,$$

و مشابها برای هر $1\le i\le n$ داریم $a_ib_1=0$.
تکرار این فرآیند نتیجه می‌دهد که برای هر $1\le i\le n$ و $1\le j\le m$، $a_ib_j=0$ و نتیجه حاصل است. $\square$

تعریف ۳.۱.۳. حلقه R شبه آرمندآریز راست نامیده می‌شود اگر $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\neq 0$ چندجمله‌ای‌هایی در $R[x]$ باشند که $f(x)g(x)=0$، آنگاه $r\in R$ وجود داشته باشد که $g(x)r\neq 0$ و برای هر i و j، $a_ib_jr=0$.
حلقه‌های شبه آرمندآریز چپ نیز مشابها تعریف می‌شوند.

اگر حلقه‌ای هم شبه آرمندآریز راست و هم شبه آرمندآریز چپ باشد شبه آرمندآریز نامیده می‌شود. حلقه‌های آرمندآریز، شبه آرمندآریز هستند. مطابق لم ۷.۱.۲ و ۲۲.۱.۲ حلقه‌های برگشت‌پذیر و دیوی راست، شبه آرمندآریز راست هستند. بنابراین می‌توان گفت ویژگی‌های حلقه‌های شبه آرمندآریز با حلقه‌های برگشت‌پذیر، حلقه‌های دیو راست و حلقه‌های آرمندآریز یکی می‌باشند. اما در مثال ۴.۱.۳ قسمت اول حلقه‌ای را می‌بینیم که آرمندآریز نیست اما شبه آرمندآریز هست و در ۷.۲.۳ قسمت اول حلقه‌ای را نشان می‌دهیم که شبه آرمندآریز هست ولی برگشت‌پذیر نیست.

مثال ۴.۱.۳. الف. فرض کنید $\mathbb{Z}_3$ حلقه اعداد صحیح به پیمانه ۳ و $S=\mathbb{Z}_3[s,t]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbb{Z}_3$ باشد. فرض کنید I ایده‌الی از S باشد که توسط t^3 و s^2t^2 و s^3 تولید شده باشد و $R=S/I$. برای سادگی $h(s,t)+I$ را با $h(s,t)$ نمایش می‌دهیم. $R[x]$ را حلقه چند جمله‌ای‌ها روی R در نظر می‌گیریم. اگر $f(x)=s+tx$ و $g(x)=s^2+2stx+t^2x^2$ در $R[x]$ باشند آنگاه

$$f(x)g(x)=(s+tx)(s^2+2stx+t^2x^2)=s^3+3s^2tx+3st^2x^2+t^3x^3=0,$$

اما $ts^2\neq 0$ پس R آرمندآریز نیست. حال چون R حلقه جابه‌جایی است بنابر لم ۷.۱.۲ R شبه آرمندآریز می‌باشد. در حقیقت داریم $g(x)t\neq 0$ و $t^2f(x)\neq 0$ بنابراین $abt=0$ و $t^2ab=0$ که a و b ضرایبی از $f(x)$ و $g(x)$ هستند.

ب. حلقه‌های آرمنداریز (دیوراست و برگشت‌پذیر) بدون عضو همانی، لزوماً شبه آرمنداریز یک‌طرفه نیستند. فرض کنید $R = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ زیر حلقه‌ای از حلقه ماتریس‌های 2×2 روی حلقه A باشد. برای دو چندجمله‌ای $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ در R، $f(x)g(x) = 0$ و برای هر i و j، $a_i b_j = 0$ که نتیجه می‌دهد R آرمنداریز است. درحالی‌که حلقه بدون همانی است. اما به ازای هر $r \in R$ $\quad g(x)r = 0$، $rf(x) = 0$ و درنتیجه R شبه آرمنداریز چپ یا راست نیست.

حال از حلقه آرمنداریز راست داده شده روشی ساده برای ساختن حلقه شبه آرمنداریز (نه آرمنداریز) پیدا می‌کنیم. حلقه R از درجه $n \geq 2$ داده شده است. ابتدا زیر حلقه‌هایی از $\mathrm{Mat}_n(R)$ را در نظر بگیرید.

$$D_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} | a, a_{ij} \in R \right\}$$

$$V_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix} | a_1 \cdots, a_n \in R \right\}$$

در گزاره زیر ثابت می‌کنیم که $D_3(R)$ روی حلقه تقلیل یافته R آرمنداریز است.

گزاره ۳.۱.۵. ([۱۲]،گزاره ۲) فرض کنید R حلقه تقلیل‌یافته باشد دراین صورت

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c, d \in R \right\}$$

حلقه آرمنداریز است.

برهان. فرض کنید $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$ دو عضو S با جمع و ضرب زیر باشند:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

و

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1 a_2, a_1 c_2 + b_1 d_2 + c_1 a_2, a_1 d_2 + d_1 a_2)$$

بنابراین می‌توان چندجمله‌ای‌های عضو $S[x]$ را به فرم $(p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x))$ نشان داد که $p_i(x)$ها عضو $R[x]$ هستند.

فرض کنید که $f(x)=(f_0(x),f_1(x),f_2(x),f_3(x))$ و $g(x)=(g_0(x),g_1(x),g_2(x),g_3(x))$ دو عضو از $S[x]$ باشند که $f(x)g(x)=0$. در این صورت

$$\begin{aligned} f(x)g(x)=\Big(&f_0(x)g_0(x),f_0(x)g_1(x)+f_1(x)g_0(x),f_0(x)g_2(x)+f_1(x)g_3(x)+f_2(x)g_0(x),\\ &f_0(x)g_3(x)+f_3(x)g_0(x)\Big)=0\end{aligned}$$

و در نتیجه داریم:

$$f_0(x)g_0(x)=0 \tag{۱.۳}$$

$$f_0(x)g_1(x)+f_1(x)g_0(x)=0 \tag{۲.۳}$$

$$f_0(x)g_2(x)+f_1(x)g_3(x)+f_2(x)g_0(x)=0 \tag{۳.۳}$$

$$f_0(x)g_3(x)+f_3(x)g_0(x)=0 \tag{۴.۳}$$

چون $R[x]$ تقلیل‌یافته است بنابراین از معادله (۱.۳) داریم $g_0(x)f_0(x)=0$. اگر معادله (۲.۳) را از راست در $f_0(x)$ ضرب کنید آن‌گاه

$$f_0(x)g_1(x)f_0(x)+f_1(x)g_0(x)f_0(x)=0$$

درنتیجه $f_0(x)g_1(x)=0$ بنابراین $f_1(x)g_0(x)=0$.

همچنین اگر معادله (۴.۳) را از راست در $f_0(x)$ ضرب کنید آنگاه

$$f_0(x)g_3(x)f_0(x)+f_3(x)g_0(x)f_0(x)=0$$

پس $f_0(x)g_3(x)=0$ بنابراین $f_3(x)g_0(x)=0$.

حال اگر معادله (۳.۳) را از راست در $f_0(x)$ ضرب کنید آن‌گاه

$$f_0(x)g_2(x)f_0(x)+f_1(x)g_3(x)f_0(x)+f_2(x)g_0(x)f_0(x)=0$$

پس $f_0(x)g_2(x)=0$ بنابراین معادله (۳.۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f_1(x)g_3(x)+f_2(x)g_0(x)=0 \tag{۵.۳}$$

حال اگر معادله (۵.۳) را از راست با $f_1(x)$ ضرب کنید داریم:

$$f_1(x)g_3(x)=0$$

و در نتیجه $f_2(x)g_0(x)=0$. حال فرض کنید

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i\\ 0 & a_i & d_i\\ 0 & 0 & a_i\end{pmatrix}x^i,\qquad g(x)=\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix} a'_j & b'_j & c'_j\\ 0 & a'_j & d'_j\\ 0 & 0 & a'_j\end{pmatrix}x^j$$

و

$$f_0(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\quad f_1(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i,$$
$$f_2(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i,\quad f_3(x)=\sum_{i=0}^{n}d_ix^i,$$
$$g_0(x)=\sum_{j=0}^{m}a'_jx^j,\quad g_1(x)=\sum_{j=0}^{m}b'_jx^j,$$
$$g_2(x)=\sum_{j=0}^{m}c'_jx^j,\quad g_3(x)=\sum_{j=0}^{m}d'_jx^j,$$

باشند. بنابراین برای هر i و j نتایج زیر بدست می‌آید:

$$a_ia'_j=0,\ a_ib'_j=0,\ b_ia'_j=0,\ a_ic'_j=0,\ b_id'_j=0,\ c_ia'_j=0,\ a_id'_j=0,\ d_ia'_j=0.$$

با فرض این‌که R تقلیل یافته است برای هر i و j داریم

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'_j & b'_j & c'_j \\ 0 & a'_j & d'_j \\ 0 & 0 & a'_j \end{pmatrix}=0$$

درنتیجه S حلقه آرمنداریز است. $\square$

گزاره ۶.۱.۳. $D_4(R)$ روی حلقه R .آرمنداریز نیست [۱۲]

برهان. فرض کنید S یک حلقه باشد و

$$R_4=\left\{\begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, a_{ij}\in S\right\}$$

فرض کنید

$$f(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}x$$

و

$$g(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}x$$

چند جمله‌ای‌هایی در $R_۴[x]$ باشند. $f(x)g(x)=۰$، در صورتی که

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \neq ۰$$

بنابراین $R_۴$ آرمنداریز نیست. برای حالت $n \geq ۵$ نتیجه مشابه را داریم. $\square$

مثال زیر نشان می‌دهد که حلقه آرمنداریز A وجود دارد که $D_۲(A)$ آرمنداریز نیست.(مثال ۵، [۱۲])

مثال ۷.۱.۳. فرض کنید T یک حلقه تقلیل یافته و $R=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & a \end{pmatrix} | a,b\in T\right\}$ حلقه‌ای آرمنداریز باشد. تعریف کنید $S=\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ ۰ & A \end{pmatrix} | A,B\in R\right\}$ و فرض کنید

$$f(x)=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{pmatrix} x$$

و

$$g(x)=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{pmatrix} x$$

چند جمله‌ای‌هایی در $S[x]$ باشند. $f(x)g(x)=۰$، اما

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{pmatrix} \neq ۰$$

بنابراین S آرمنداریز نیست.

بنابراین اگر ثابت شود $D_۲(A)$ شبه آرمنداریز است می‌توان با استفاده از هر حلقه آرمنداریز حلقه‌ای ساخت که شبه آرمنداریز است ولی آرمنداریز نیست.

قضیه ۸.۱.۳. برای حلقه R و $n\geq ۳$ شرایط زیر معادلند:

الف. R حلقه شبه آرمنداریز راست(چپ) است.

ب. $D_۲(R)$ شبه آرمنداریز راست (چپ) است.

پ. $V_n(R)$ شبه آرمنداریز راست (چپ) است.

برهان. الف$\Longrightarrow$ ب:

فرض کنید R شبه آرمنداریز راست باشد.

با توجه به این‌که برای هر $n \geq ۲$ داریم $D_n(R[x]) \cong D_n(R)[x]$. فرض کنید

$$A(x) = \sum_{i=\circ}^{m} \begin{pmatrix} a_{۱}i & b_{۱}i \\ \circ & a_{۱i} \end{pmatrix} x^i = \begin{pmatrix} f_{۱}(x) & g_{۱}(x) \\ \circ & f_{۱}(x) \end{pmatrix}$$

و

$$\circ \neq B(x) = \sum_{j=\circ}^{n} \begin{pmatrix} a_{۲}j & b_{۲}j \\ \circ & a_{۲j} \end{pmatrix} x^i = \begin{pmatrix} f_{۲}(x) & g_{۲}(x) \\ \circ & f_{۲}(x) \end{pmatrix}$$

عضو $D_{۲}(R)[x]$ باشند به طوری که $A(x)B(x) = \circ$ و

$$f_{۱}(x) = \sum_{i=\circ}^{m} a_{۱i}x^i, \quad g_{۱}(x) = \sum_{i=\circ}^{m} b_{۱i}x^i,$$

$$f_{۲}(x) = \sum_{j=\circ}^{n} a_{۲j}x^j, \quad g_{۲}(x) = \sum_{j=\circ}^{n} b_{۲j}x^j$$

حالت اول: $f_{۲}(x) \neq \circ$.

توجه کنید که $f_{۱}(x)f_{۲}(x) = \circ$. چون R یک حلقه شبه آرمنداریز راست است، $\alpha \in R$ای وجود دارد به‌طوری که $f_{۲}(x)\alpha \neq \circ$ و برای هر i و j، $a_{۱i}a_{۲j}\alpha = \circ$. پس $B(x)\alpha e_{۱۲} \neq \circ$ زیرا

$$\begin{pmatrix} f_{۲}(x) & g_{۲}(x) \\ \circ & f_{۲}(x) \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} \circ & ۱ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{۲}(x) & g_{۲}(x) \\ \circ & f_{۲}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \alpha \\ \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & \alpha f_{۲}(x) \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \circ,$$

و برای تمام i و jها

$$\begin{pmatrix} a_{۱i} & b_{۱i} \\ \circ & a_{۱i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{۲j} & b_{۲j} \\ \circ & a_{۲j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \alpha \\ \circ & \circ \end{pmatrix} = \circ$$

حالت دوم: $f_{۲}(x) = \circ$ (در این صورت $g_{۲}(x) \neq \circ$ چون $B(x) \neq \circ$).

توجه کنید که $f_{۱}(x)g_{۲}(x) = \circ$، پس چون R یک حلقه شبه آرمنداریز راست است، $\beta \in R$ وجود دارد به‌طوری که $g_{۲}(x)\beta \neq \circ$ و برای هر i و j، $a_{۱i}b_{۲j}\beta = \circ$. بنابراین $B(x)\beta(e_{۱۱}+e_{۲۲}) \neq \circ$ و برای تمام i و jها

$$\begin{pmatrix} a_{۱i} & b_{۱i} \\ \circ & a_{۱i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & b_{۲j} \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \circ \\ \circ & \beta \end{pmatrix} = \circ$$

با استفاده از حالت ۱ و ۲، $D_{۲}(R)$ شبه آرمنداریز راست است.

ب $\Longrightarrow$ الف: فرض کنید که $D_{۲}(R)$ شبه آرمنداریز راست باشد و

$$f(x) = \sum_{i=\circ}^{m} a_i x^i, \ \circ \neq g(x) = \sum_{j=\circ}^{n} b_j x^j \ \in R[x]$$

که $f(x)g(x)=0$. با فرض

$$A(x)=\sum_{i=0}^{m}\begin{pmatrix}a_i & 0\\ 0 & a_i\end{pmatrix}x^i \quad \text{و} \quad B(x)=\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix}b_j & 0\\ 0 & b_j\end{pmatrix}x^j$$

داریم:

$$A(x)=\begin{pmatrix}f(x) & 0\\ 0 & f(x)\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B(x)=\begin{pmatrix}g(x) & 0\\ 0 & g(x)\end{pmatrix}$$

که $A(x)B(x)=0$.

چون $D_2(R)$ شبه آرمنداریز راست است، بنابراین $C\in D_2(R)$ای وجود دارد به‌طوری که $B(x)C\neq 0$، قرار دهید

$$C=\begin{pmatrix}s & t\\ 0 & s\end{pmatrix}$$

و برای هر i و j

$$\begin{pmatrix}a_i & 0\\ 0 & a_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_j & 0\\ 0 & b_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s & t\\ 0 & s\end{pmatrix}=0$$

بنابراین برای هر i و j داریم: « $a_ib_js=0$ و $g(x)s\neq 0$ » یا « $a_ib_jt=0$ و $g(x)t\neq 0$ » و در نتیجه R شبه آرمنداریز راست است.

الف$\Longrightarrow$پ: فرض کنید R شبه آرمنداریز راست باشد. توجه کنید که برای $n\geq 3$، $V_n(R[x])\cong V_n(R)[x]$. فرض کنید:

$$A(x)=\begin{pmatrix}f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_{n-1}(x) & f_n(x)\\ 0 & f_1(x) & \cdots & f_{n-2}(x) & f_{n-1}(x)\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & f_1(x) & f_2(x)\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f_1(x)\end{pmatrix}$$

و

$$B(x)=\begin{pmatrix}g_1(x) & g_2(x) & \cdots & g_{n-1}(x) & g_n(x)\\ 0 & g_1(x) & \cdots & g_{n-2}(x) & g_{n-1}(x)\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & g_1(x) & g_2(x)\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1(x)\end{pmatrix}$$

دو عضو $V_n(R)[x]$ باشند به‌طوری که $A(x)B(x)=0$ و $B(x)\neq 0$.

فرض کنید $g_1(x) \neq 0$ بنابراین $f_1(x)g_1(x) = 0$. چون R شبه آرمنداریز راست است، بنابراین $\alpha \in R$ای وجود دارد به‌طوری که $g_1(x)\alpha \neq 0$ و برای هر i و j، $a_ib_j\alpha = 0$ که a_i و b_j به ترتیب ضرایب $f_1(x)$ و $g_1(x)$ هستند. پس $B(x)\alpha e_{1n} \neq 0$ و برای تمام i و jها $A_iB_j\alpha e_{1n} = 0$ که A_i و B_j به ترتیب ضرایب $A(x)$ و $B(x)$ هستند.

فرض کنید $g_1(x) = 0$ و $g_2(x) \neq 0$ بنابراین $f_1(x)g_2(x) = 0$. حال چون R شبه آرمنداریز راست است، $\beta \in R$ وجود دارد به‌طوری که $g_2(x)\beta \neq 0$ و برای هر i و j، $a_ic_j\beta = 0$ که a_i و c_j به ترتیب ضرایب $f_1(x)$ و $g_2(x)$ هستند. پس $B(x)\beta(e_{1(n-1)} + e_{2n}) \neq 0$ و برای تمام i و jها داریم $A_iB_j\beta(e_{1(n-1)} + e_{2n}) = 0$.

به‌طور استقرایی محاسبه را ادامه می‌دهیم، زمانی که برای هر $\{1, \cdots, k-1\}$ $i \in$، $g_i(x) = 0$ و برای $2 \leq k \leq n$، $g_k(x) \neq 0$ باشد داریم $f_1(x)g_k(x) = 0$ و چون R شبه آرمنداریز راست است $\delta \in R$ وجود دارد به‌طوری که $g_k(x)\delta \neq 0$ و برای هر i و j، $a_id_j\delta = 0$ که a_i و d_j به ترتیب ضرایب $f_1(x)$ و $g_k(x)$ هستند. دراین‌صورت $B(x)\delta(e_{1(n-k+1)} + \cdots + e_{kn}) \neq 0$ و برای تمام i و j ها $A_iB_j\delta(e_{1(n-k+1)} + \cdots + e_{kn}) = 0$ و در نتیجه $V_n(R)$ شبه آرمنداریز راست است.

پ$\Longrightarrow$الف: مشابه برهان ب$\Longrightarrow$الف است.

$\square$

نتیجه ۹.۱.۳. اگر R یک حلقه آرمنداریز (برگشت‌پذیر یا دیو راست) باشد آن‌گاه $D_2(R)$ حلقه شبه آرمنداریز است.

با توجه به قضیه فوق این سوال مطرح می‌شود که آیا برای $n \geq 3$، $D_n(R)$ روی حلقه شبه آرمنداریز راست R، شبه آرمنداریز راست است؟

مثال‌های زیر پاسخ منفی برای این سوال است.

مثال ۱۰.۱.۳. الف. فرض کنید T یک حلقه ساده باشد و $S = D_3(T)$.

S بنابر گزاره (۵.۱.۳) یک حلقه آرمنداریز و بنابراین شبه آرمنداریز راست است. حال فرض کنید $R = D_3(S)$ و چندجمله‌ای‌های

$$A(x) = (e_{12} + e_{45} + e_{78}) + (e_{14} + e_{25} + e_{36})x$$

و

$$B(x) = e_{49} - e_{29}x.$$

را در نظر بگیرید که $A(x)B(x) = 0$. ایده‌آل راست I از $R = D_3(s)$ که توسط ضرایبی از $B(x)$ تولید شده برابر $e_{29}R + e_{49}R = e_{29}T + e_{49}T$ است و فرض کنید که r عضوی در $I = e_{29}T + e_{49}T$ باشد، مانند $r = e_{29}a + e_{49}b$، در این‌صورت $A(x)r = 0$ نتیجه می‌دهد $a = b = 0$ و درنتیجه $r = 0$. بنابراین $0 \neq r \in I$ وجود ندارد به‌طوری که $A(x)r = 0$. درنتیجه $R = D_3(S)$ شبه آرمنداریز راست نیست.

ب. فرض کنید R یک حلقه باشد و $n \geq ۴$ در نظر بگیرید. دو چندجمله‌ای $f(x) = e_{۱۲} + e_{۱۳}x$ و $g(x) = -e_{۳n} + e_{۲n}x$ را در نظر بگیرید به‌طوری که $f(x)g(x) = ۰$.
ایده‌آل راست $D_n(R)$ که توسط ضرایبی از $g(x)$ تولید شده برابر $J = e_{۲n}R + e_{۳n}R$ است فرض کنید s عضوی در j باشد مانند $s = e_{۲n}a + e_{۳n}b$ بنابراین $f(x)s = ۰$ نتیجه می‌دهد $a = b = ۰$ و در نتیجه $s = ۰$ بنابراین $۰ \neq s \in J$ وجود ندارد که $f(x)s = ۰$. بنابراین $D_n(R)(n \geq ۴)$ شبه آرمندآریز راست نیست.

در این مرحله در مورد ویژگی تقارنی راست و چپ از شبه آرمندآریز ها بحث می‌کنیم.
حلقه‌های شبه آرمندآریز راستی وجود دارند که شبه آرمندآریز چپ نیستند.

مثال ۱۱.۱.۳. فرض کنید K یک میدان باشد و $S = K\langle a_۰, a_۱, a_۲, a_۳\rangle$ جبر آزاد تولید شده توسط متغیرهای ناجابه‌جایی $a_۰, a_۱, a_۲, a_۳$ روی K باشد و فرض کنید که ایده‌آل I از S توسط روابط زیر تولید شده باشد.
$a_ia_ja_k(۰ \leq i, j, k \leq ۳)$، $a_ia_۱(۰ \leq i \leq ۳)$، $a_ia_۰(۰ \leq i \leq ۳)$، $a_۱a_۳$، $a_۱a_۲ + a_۰a_۳$، $a_۰a_۲$.
قرار دهید $R = \dfrac{S}{I}$ و برای سادگی $\{a_۰, a_۱, a_۲, a_۳\}$ را با تصاویرشان در R یکی بگیرید. فرض کنید $s(x) = a_۰ + a_۱(x)$ و $t(x) = a_۲ + a_۳x$ به وضوح $s(x)t(x) = ۰$. چون داریم $\ell_R(a_۰) = \ell_R(a_۱) = R - K$، نمی‌توانیم $r \in R$ پیدا کنیم که $rs(x) \neq ۰$ و برای تمام $i = ۰, ۱$، $j = ۲, ۳$ ، داشته باشیم $ra_ia_j = ۰$. بنابراین R شبه آرمندآریز چپ نیست. حال نشان می‌دهیم که R شبه آرمندآریز راست است.

فرض کنید $f(x) = \sum_{i=۰}^{m} \alpha_i x^i, ۰ \neq g(x) = \sum_{j=۰}^{n} \beta_j x^j \in R[x]$ که $f(x)g(x) = ۰$ و ثابت α'، یک جمله‌ای از a_i باشد که کوچکترین درجه در مجموعه α_iها را دارد. اگر $۰ \neq k \in K$ در مجموعه‌ای از بعضی β_jها قرارگیرد بنابراین $\alpha' k$ در مجموعه‌ای از $\sum \alpha_i\beta_j = ۰$ باقی می‌ماند که یک تناقض است. پس k در مجموعه‌ای از β_jها واقع نمی‌شود و مشابها k در مجموعه α_iها نیست.
فرض کنید H_n مجموعه‌ای از تمام ترکیبات خطی یک جمله‌ای‌های درجه n روی میدان K باشد. پس تمام ضرایب α_i، β_j در $H_۱$ یا $H_۲$ هستند. اگر برای هر $n \geq k \geq ۰$، $\beta_k \in H_۲$ بنابراین برای تمام j, iها داریم $\alpha_i\beta_j = ۰$. اگر برای بعضی ℓ، $\beta_\ell \in H_۱$ باشد پس می‌توانیم چندجمله‌ای غیرصفر $g_۱(x)$ از $g(x)$ را پیدا کنیم به‌طوریکه $g(x) = g_۱(x) + g_۲(x)$ و $f(x)g_۱(x) = ۰$ درحالیکه $g_۱(x) \in H_۱[x]$ و $g_۲(x) \in H_۲[x]$ می‌باشد. به وضوح می‌توان $r \in H_۱$ پیدا کرد به‌طوریکه $g_۱(x)r \neq ۰$ و برای هر i و j، $\alpha_i\beta_j r = ۰$. پس R حلقه شبه آرمندآریز راست است.

مثال ۱۲.۱.۳. فرض کنید K یک میدان باشد و $A = K\langle a_۰, b_۰, a_۱, b_۱, a_۲, b_۲\rangle$ جبری آزاد، تولید شده توسط متغیرهای ناجابه‌جایی $a_۰, b_۰, a_۱, b_۱, a_۲, b_۲$ روی K باشد. فرض کنید I ایده‌آلی از A باشد که توسط

$$a_۰b_۰, a_۰b_۱ + a_۱b_۰, a_۰b_۲ + a_۱b_۱ + a_۲b_۰, a_۱b_۲ + a_۲b_۱,$$

$$a_۲b_۲, a_۱b_۰b_۲, a_۲b_۰b_۲, b_{j_۱}b_{j_۲}b_{j_۳}, a_{i_۱}a_{i_۲}, b_ja_i,$$

که $i, j, i_۱, i_۲, j_۱, j_۲, j_۳ \in \{۰, ۱, ۲\}$ تولید شده باشد.

تعریف می‌کنیم $R=\dfrac{A}{I}$ و برای سادگی کار a_iها و b_jها را با تصاویرشان در R یکی می‌گیریم. ابتدا از این‌که $0=(a_0b_1+a_1b_0)b_2=a_0b_1b_2$ داریم $a_0b_1b_2=0$.
هر عضو $r\in R$ را می‌توان به ازای هر l_{l_1}، j_t، i_s و m که $u,u_m,v_{is},v_{jt},v_{l_l}\in K$ به صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
r = u+&\sum_{s=0}^{2} v_{i_s}a_s + \sum_{t=0}^{2} v_{j_t}b_t + \sum_{l_1,l_2\in\{0,1,2\}} v_{1_l}b_{l_1}b_{l_2}\\
&+ v_2a_0b_1 + v_3a_0b_2 + v_4a_1b_1 + v_5a_1b_2\\
&+ v_6a_0b_1b_0 + v_7a_0b_1b_1 + v_8a_0b_2b_0 + v_9a_0b_2b_1 + v_{10}a_0b_2b_2 + v_{11}a_1b_1b_0\\
&+ v_{12}a_1b_1b_1 + v_{13}a_1b_1b_2 + v_{14}a_1b_2b_0 + v_{15}a_1b_2b_1 + v_{16}a_1b_2b_2,
\end{aligned}
$$

فرض کنید $a(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ و $b(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in R[x]$. در این‌صورت داریم $a(x)b(x)=0$ زیرا

$$
\begin{aligned}
a(x)b(x) &= (a_0+a_1x+a_2x^2)(b_0+b_1x+b_2x^2)\\
&= a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0)x + (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2\\
&\quad + (a_1b_2+a_2b_1)x^3 + a_2b_2x^4 = 0
\end{aligned}
$$

و $b(x)\neq 0$. فرض کنید که برای هر $r\in R$ داریم $a_ib_jr=0$ و $b(x)r\neq 0$.
با جایگذاری عبارت فوق به‌جای r داریم:

$$b(x)r=b(x)(u+v_{j_0}b_0+v_{j_1}b_1+v_{j_2}b_2),$$

می‌توانیم فرض کنیم $r=u+v_{j_0}b_0+v_{j_1}b_1+v_{j_2}b_2$ واز این‌که $a_ib_jr=0$ داریم:

$$a_0b_1u=a_0b_1v_{j_0}b_0=a_0b_1v_{j_1}b_1=a_0b_2v_{j_2}b_2=0.$$

و در نتیجه $u=v_{j_0}=v_{j_1}=v_{j_2}=0$ و بنابراین $r=0$ که تناقض است. پس حلقه R شبه آرمنداریز راست نیست.
حال نشان می‌دهیم که R یک حلقه قویا مک کوی راست است.
هر چند جمله‌ای روی R را می‌توان بصورت عبارت

$$h_0(x)+\sum_{s=0}^{2} h_{1_s}(x)b_s+\sum_{t=1}^{9} h_{2_t}(x)k_t, \qquad (*)$$

که $h_0(x),h_{1_s}(x),h_{2_t}(x)\in K\langle a_0,a_1,a_2\rangle[x]$ و $k_1=b_0b_0$، $k_2=b_0b_1$، $k_3=b_0b_2$، $k_4=b_1b_0$، $k_5=b_1b_1$، $k_6=b_1b_2$، $k_7=b_2b_0$، $k_8=b_2b_1$، $k_9=b_2b_2$.
توجه کنید که هر ضریب از $h_0(x)$ و $h_1(x)$ها و $h_{2_t}(x)$ها به فرم $z+\sum_{i=0}^{2} z_ia_i$ است که $z,z_i\in K$ هستند.

دو چندجمله‌ای غیرصفر $f(x)=\sum_{v=0}^{m} C_vx^v$ و $g(x)=\sum_{w=0}^{n} D_wx^w$ عضو $R[x]$ هستند. که $f(x)g(x)=0$، اگر آن را بر اساس عبارت $(*)$ بنویسیم داریم:

$$f(x)=f_0(x)+\sum_{s=0}^{2}f_{1_s}(x)b_s+\sum_{t=1}^{9}f_{2_t}(x)k_t$$

و

$$g(x)=g_0(x)+\sum_{s=0}^{2}g_{1_s}(x)b_s+\sum_{t=1}^{9}g_{2_t}(x)k_t$$

چون $f(x)g(x)=0$ بنابراین $f_0(x)g_0(x)=0$ و

$$f_0(x)(\sum_{s=0}^{2}g_{1_s}(x)b_s+\sum_{t=1}^{9}g_{2_t}(x)k_t)+(\sum_{s=0}^{2}f_{1_s}(x)b_s+\sum_{t=1}^{9}f_{2_t}(x)k_t)g_0(x)$$

$$+(\sum_{s=0}^{2}f_{1_s}(x)b_s+\sum_{t=1}^{9}f_{2_t}(x)k_t)(\sum_{s=0}^{2}g_{1_s}(x)b_s+\sum_{t=1}^{9}g_{2_t}(x)k_t)=0.$$

پس زمانی‌که $f_0(x)\neq 0$ یا $g_0(x)\neq 0$، هر ضریب از $f_0(x)$ و $g_0(x)$ باید به فرم $\sum_{i=0}^{2}z_ia_i$ با $z_i\in K$ باشد.

فرض کنید $g_0(x)\neq 0$ پس $g(x)b_1^2=g_0(x)b_1^2\neq 0$ و همچنین به ازای هر w و v، $C_vD_wb_1^2=0$. پس کافی است که حالت $g_0(x)=0$ را محاسبه کنیم. براساس این نتیجه $g(x)$ را با فرض $g_0(x)=0$ دوباره می‌نویسیم.

$$g(x)=\sum_{p=0}^{2}\alpha_pb_p+\sum_{s=0}^{2}g'_{1_s}(x)b_s+\sum_{q=1}^{9}\beta_qk_q+\sum_{t=1}^{9}g'_{2_t}(x)k_t, \qquad (\dagger)$$

که $\alpha_p,\beta_q\in K[x]$ و هر ضریب از $g'_{2_t}(x)$ و $g'_{1_s}(x)$ها به فرم $\sum_{i=0}^{2}z_ia_i(z_i\in K)$ می‌باشد. بنابراین برای هر $0\neq r\in R$، $g(x)r$ به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$g(x)r=\sum_{p,h=0}^{2}\alpha_pb_pb_h+\sum_{s,h=0}^{2}g'_{1_s}(x)b_sb_h.$$

حالت اول: اگر $g_0(x)=0$ و $f_0(x)\neq 0$.

در این حالت اگر ضرایب $g_{1_s}(x)$ها و $g_{2_t}(x)$ها به فرم $\sum_{i=0}^{2}z_ia_i,(z_i\in K)$باشد برای هر w و v ، $C_vD_w=0$.

درنتیجه فرض کنید که هر ضریب از $g_{1_s}(x)$ها و $g_{2_t}(x)$ها به فرم $\sum_{i=0}^{2}z_ia_i,(z_i\in K)$ نباشد. از این‌که $f(x)g(x)=0$، داریم

$$\sum_{s=0}^{2}f_0(x)g_{1_s}(x)b_s+\sum_{t=1}^{9}f_0(x)g_{2_t}(x)k_t+\sum_{u,v=0}^{2}f_{1_u}(x)b_ug_{1_v}(x)b_v=0.$$

پس با توجه به ساختار I داریم:

$$\sum_{s=0}^{2} f_0(x)g_{1_s}(x)b_s = 0 \text{ و } \sum_{t=1}^{9} f_0(x)g_{2_t}(x)k_t + \sum_{u,v=0}^{2} f_{1_u}(x)b_u g_{1_v}(x)b_v = 0.$$

با استفاده از عبارت $(\dagger)$ داریم:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(f_0(x) + \sum_{s=0}^{2} f_{1s}(x)b_s + \sum_{t=1}^{9} f_{2t}(x)k_t\right) \\ &\quad \left(\sum_{p=0}^{2}\alpha_p b_p + \sum_{s=0}^{2} g'_{1s}(x)b_s + \sum_{q=1}^{9}\beta_q k_q + \sum_{t=1}^{9} g'_{2t}k_t\right) \\ &= f_0(x)\left(\sum_{p=0}^{2}\alpha_p b_q + \sum_{s=0}^{2} g'_{1s}(x)b_s + \sum_{q=1}^{9}\beta_q k_q + \sum_{t=1}^{9} g'_{2t}k_t\right) \\ &\quad + \left(\sum_{s=0}^{2} f_{1s}(x)b_s + \sum_{t=1}^{9} f_{2t}(x)k_t\right)\left(\sum_{p=0}^{2}\alpha_p b_p + \sum_{s=0}^{2} g'_{1s}b_s + \sum_{q=1}^{9}\beta_q k_q + \sum_{t=1}^{9} g'_{2t}k_t\right) \\ &= \sum_{p=0}^{2}\alpha_p f_0(x)b_p + \sum_{q=1}^{9}\beta_q f_0(x)k_q + \sum_{u,p=0}^{2}\alpha_p f_{1u}(x)b_u b_p = 0, \end{aligned}$$

چون

$$\sum_{s=0}^{2} f_0(x)g'_{1_s}(x)b_s = 0\,,\ \sum_{t=1}^{9} f_0(x)g'_{2_t}(x)k_t = 0,$$

$$\sum_{u,v=0}^{2} f_{1_u}(x)b_u g'_{1_v}(x)b_v = 0.$$

بدست می‌آوریم:

$$\sum_{p=0}^{2}\alpha_p f_0(x)b_p = 0 \text{ و } \sum_{q=1}^{9}\beta_q f_0(x)k_q + \sum_{u,p=0}^{2}\alpha_p f_{1_u}(x)b_u b_p = 0. \qquad (**)$$

زیر حالت ۱-۱: $f_0(x) \in K\langle a_0\rangle[x]$.

در این حالت دو حالت زیر را داریم:

الف. فرض کنید که $\sum_{p=0}^{2}\alpha_p b_p \neq 0$، آن‌گاه $\sum_{p=0}^{2}\alpha_p f_0(x)b_p = 0$ نتیجه می‌دهد که:

$$\sum_{p=0}^{2}\alpha_p b_p = \alpha_0 b_0$$

بنابراین با جایگذاری در عبارت (†) به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)b_2 = \alpha_0 b_0 b_2 + \sum_{s=0}^{2} g'_{1_s}(x) b_s b_2 \neq 0$$

و این که برای تمام v, w ‏ $C_v D_w b_2 = 0$ نتیجه می‌دهد.

ب. فرض کنید که $\sum_{p=0}^{2} \alpha_p b_p = 0$ پس $\sum_{q=1}^{9} \beta_q f_0(x) k_q = 0$. حال اگر $\sum_{q=1}^{9} \beta_q k_q = 0$ آن‌گاه:

$$g(x) = \sum_{s=0}^{2} g'_{1_s}(x) b_s + \sum_{t=1}^{9} g'_{2_t}(x) k_t$$

و بنابراین برای هر v, w، $C_v D_w = 0$.

اگر $\sum_{q=1}^{9} \beta_q k_q \neq 0$ آن‌گاه $\sum_{q=1}^{9} \beta_q k_q$ شامل $\beta_q b_0 b_j$ یا $\beta_q b_1 b_2$ می‌باشد. هم‌چنین به ازای هر v, w داریم: $C_v D_w = 0$.

برای حالت‌های $f_0(x) \in \langle a_1 \rangle [x]$ و $f_0(x) \in \langle a_2 \rangle [x]$ نتایج مشابه حالت قبلی است.

زیر حالت ۲-۱: فرض کنید که a_0 و a_2 ضرایبی از $f_0(x)$ باشند.

در این حالت می‌توان $f_0(x)$ را به صورت $f_0(x) = f'_0(x) + f''_0(x)$ بیان کرد که:

$$f'_0(x) \in K\langle a_0 \rangle [x], \quad f''_0(x) \in K\langle a_2 \rangle [x]$$

پس:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{p=0}^{2} \alpha_p f_0(x) b_p &= \sum_{p=1}^{2} \alpha_p f'_0(x) b_p + \sum_{p=0}^{1} \alpha_p f''_0(x) b_p \\ \Leftrightarrow \sum_{p=1}^{2} \alpha_p f'_0(x) b_p &= 0 = \sum_{p=0}^{1} \alpha_p f''_0(x) b_p \end{aligned}$$

فرض کنید $\sum_{p=0}^{2} \alpha_p b_p \neq 0$ آن‌گاه:

$$\sum_{p=1}^{2} \alpha_p f'_0(x) b_p + \sum_{p=0}^{1} \alpha_p f''_0(x) b_p \neq 0$$

و این یک تناقض است. پس $\sum_0^2 \alpha_p b_p = 0$ و

$$g(x) = \sum_{s=0}^{2} g'_{1_s}(x) b_s + \sum_{q=1}^{9} \beta_q k_q + \sum_{t=1}^{9} g'_{2_t}(x) k_t$$

و در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
0 = f(x)g(x) = \sum_{q=1}^{9} \beta_q f_0(x)k_q &= \sum_{q=1}^{9} \beta_q f'_0(x)k_q + \sum_{q=1}^{9} \beta_q f''_0(x)k_q \\
&= \beta_4 f'_0(x)k_4 + \beta_5 f'_0(x)k_5 + \beta_7 f'_0(x)k_7 + \beta_8 f'_0(x)k_8 + \beta_9 f'_0(x)k_9 \\
&+ \beta_1 f''_0(x)k_1 + \beta_2 f''_0(x)k_2 + \beta_4 f''_0(x)k_4 + \beta_5 f''_0(x)k_5 + \beta_6 f''_0(x)k_6
\end{aligned}
$$

فرض کنید $\sum_{q=1}^{9} \beta_q k_q \neq 0$. درنتیجه

$$\sum_{q=1}^{9} \beta_q k_q = \beta_3 k_3 = \beta_3 b_0 b_2$$

که با برهان قبل، می‌توان گفت

$$g(x) = \sum_{s=0}^{2} g'_{1_s}(x) b_s + \beta_3 b_0 b_2 + \sum_{t=1}^{9} g'_{2t}(x) k_t,$$

بنابراین برای هر v, w ، $C_v D_w = 0$ و حال، اگر $\sum_{q=1}^{9} \beta_q k_q = 0$ آن‌گاه:

$$g(x) = \sum_{s=0}^{2} g'_{1_s}(x) b_s + \sum_{t=1}^{9} g'_{2_t}(x) k_t$$

و برای هر v, w، داریم: $C_v D_w = 0$.

زیر حالت ۳-۱: فرض کنید که a_0, a_1 به‌صورت ضرایبی از $f_0(x)$ ظاهر شوند، محاسبه مشابه زیر حالت ۲-۱ است.

زیر حالت ۴-۱: فرض کنید a_1, a_2 به‌عنوان ضرایب $f_0(x)$ ظاهر شوند، محاسبه مشابه حالت ۲-۱ است.

زیر حالت ۵-۱: فرض کنید که a_0, a_1, a_2 ضرایب $f_0(x)$ باشند، ابتدا می‌توان $f_0(x)$ از $g(x)$ عبارت (†) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$f_0(x) = P(x)(a_0 + a_1(x) + a_2 x^2) + f'''_0(x)$$

و

$$g(x) = (b_0 + b_1(x) + b_2 x^2) q(x) + \sum_{p=0}^{2} \alpha'_p b_p + \sum_{s=0}^{2} g'_{1_s}(x) b_s + \sum_{q=1}^{9} \beta'_q k_q + \sum_{t=1}^{9} g'_{2_t}(x) k_t, \quad (*)$$

برای برخی $p(x), q(x), \alpha'_p, \beta'_q \in K[x]$ و $f'''_0(x) \in K\langle a_0, a_1, a_2\rangle[x]$ زمانی‌که
$f'''_0(x)$ ($\sum_{p=0}^{2} \alpha'_p b_p + \sum_{q=1}^{9} \beta'_q k_q$) شامل چندجمله‌ای‌هایی با فاکتورهای جمعی به فرم $P(x)(a_0 + a_1(x) + a_2 x^2)$ ($(b_0 + b_1(x) + b_2 x^2) q(x)$) نباشد.

از اینکه $f(x)g(x)=0$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{2}\alpha'_p p(x)(a_0+a_1x+a_2x^2)b_p=0;\\
&\sum_{p=0}^{2}\alpha'_p f'''_0(x)b_p=0;\\
&f'''_0(x)(b_0+b_1(x)+b_2x^2)q(x)=0;
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{9}\beta'_q P(x)(a_0+a_1(x)+a_2x^2)k_q=0,\\
&\sum_{s=0}^{2}f_{1_s}(x)b_s(b_0+b_1(x)+b_2x^2)q(x)+\sum_{q=1}^{9}\beta'_q f'''_0(x)k_q+\sum_{s,p=0}^{2}\alpha'_p f_{1_s}(x)b_ub_p=0.
\end{aligned}$$

در این‌جا اگر $p(x)(a_0+a_1x+a_2x^2)\neq 0$، آن‌گاه $\sum_{p=0}^{2}\alpha'_p b_p=0$.

به‌علاوه چون $\sum_{q=1}^{9}\beta'_q p(x)(a_0+a_1(x)+a_2x^2)k_q=0$ پس زمانی‌که $\sum_{q=1}^{9}\beta'_q k_q\neq 0$ داریم:

$$\sum_{q=1}^{9}\beta'_q k_q=\beta'_3 b_0 b_2$$

و در نتیجه با جایگذاری در معادله (*) داریم:

$$g(x)=(b_0+b_1(x)+b_2x^2)q(x)+\beta'_3 b_0 b_2+\sum_{s=0}^{2}g'_{1_s}(x)b_s+\sum_{t=1}^{9}g'_{2_t}(x)k_t$$

اگر $p(x)(a_0+a_1x+a_2x^2)=0$ آن‌گاه چون $f_0(x)\neq 0$، $f'''_0(x)\neq 0$ و بنابراین $(b_0+b_1(x)+b_2x^2)q(x)=0=\sum_{p=0}^{2}\alpha'_p b_p$، درنتیجه:

$$g(x)=\sum_{s=0}^{2}g'_{1_s}(x)b_s+\sum_{q=1}^{9}\beta'_q k_q+\sum_{t=1}^{9}g'_{2_t}(x)k_t.$$

و چون

$$\sum_{s=0}^{2}f_{1_s}(x)b_s(b_0+b_1(x)+b_2x^2)q(x)+\sum_{q=1}^{9}\beta'_q f'''_0(x)k_q+\sum_{s,p=0}^{2}\alpha'_p f_{1_s}(x)b_ub_p=0.$$

نتیجه می‌شود $\beta'_q f'''_0(x)k_q=0$ و بنابراین اگر $\sum_{q=1}^{9}\beta'_q k_q\neq 0$ آنگاه $\sum_{q=1}^{9}\beta'_q k_q=\beta'_3 b_0 b_2$ و درنتیجه داریم:

$$g(x)=\beta'_3 b_0 b_2+\sum_{s=0}^{2} g'_{1_s}(x)b_s+\sum_{t=1}^{9} g'_{2t}(x)k_t,$$

اگر $(b_0+b_1(x)+b_2x^2)q(x)\neq 0$ آن‌گاه $f'''_0(x)=0$ و در نتیجه:

$$f_0(x)=p(x)(a_0+a_1x+a_2x^2)$$

بنابراین حالت‌های زیر را داریم:

الف. فرض کنید که $p(x)(a_0+a_1x+a_2x^2)\neq 0$ و $(b_0+b_1(x)+b_2x^2)q(x)\neq 0$ در این صورت:

$$f_0(x)=p(x)(a_0+a_1x+a_2x^2)$$

و

$$g(x)=(b_0+b_1(x)+b_2x^2)q(x)+\beta'_3 b_0 b_2+\sum_{s=0}^{2} g'_{1_s}(x)b_s+\sum_{t=1}^{9} g'_{2_t}(x)k_t.$$

برخی از ضرایب $g(x)$ به ازای $0\neq z',z''\in\mathbf{K}$ به صورت $D=z'b_0+z''b_0b_2+\sum_{s=0}^{2}\delta_s b_s+\sum_{t=1}^{9}\gamma_t k_t$ که اعضای غیر صفر δ_s,γ_t به فرم $\sum_{i=0}^{2} z_i a_i$ هستند و درنتیجه :

$$Db_2=zb_0b_2+\sum_{s=0}^{2}\delta_s b_s b_2\neq 0$$

و $f(x)Db_2=0$

ب. فرض کنید که $p(x)(a_0+a_1x+a_2x^2)\neq 0$ و $(b_0+b_1(x)+b_2x^2)q(x)=0$ آن‌گاه:

$$f_0(x)=p(x)(a_0+a_1x+a_2x^2)+f'''_0(x)$$

و

$$g(x)=\sum_{s=0}^{2} g'_{1_s}(x)b_s+\sum_{q=1}^{9}\beta'_q k_q+\sum_{t=1}^{9} g'_{2_t}(x)k_t$$

حال اگر $\sum_{q=1}^{9}\beta'_q k_q\neq 0$، آن‌گاه با توجه به استدلال‌های فوق بدست می‌آوریم:

$$g(x)=\beta'_3 b_0 b_2+\sum_{s=0}^{2} g'_{1_s}(x)b_s+\sum_{t=1}^{9} g'_{2_t}(x)k_t \quad (\beta'_3\neq 0)$$

بنابراین به ازای هر v, w، $C_vD_w = \circ$.

متعاقبا اگر $\sum_{q=1}^{9} \beta'_q k_q = \circ$، آنگاه برای تمام v, wها داریم: $C_vD_w = \circ$.

ج. فرض کنید که $p(x)(a_\circ + a_1 x + a_2 x^2) = \circ$ و $f'''_\circ(x) \neq \circ$، اگر $\sum_{q=1}^{9} \beta'_q k_q \neq \circ$ درنتیجه:
$$f_\circ(x) = f'''_\circ(x)$$

و با توجه به استدلال فوق

$$g(x) = \beta'_3 b_\circ b_2 + \sum_{s=\circ}^{2} g'_{1_s}(x) b_s + \sum_{t=1}^{9} g'_{2_t}(x) k_t \quad (\beta'_3 \neq \circ)$$

بنابراین برای هر v, w، $C_vD_w = \circ$.

متعاقبا اگر $\sum_{q=1}^{9} \beta'_q k_q = \circ$ آنگاه برای هر v, w داریم: $C_vD_w = \circ$.

حالت ۲: $(f_\circ(x) = \circ, g_\circ(x) = \circ)$

حال $f(x)$ و عبارت (†) از $g(x)$ را در نظر بگیرید ، $f(x)g(x) = \circ$ نتیجه می‌دهد که:

$$\sum_{s,p=\circ}^{2} \alpha_p f_{1_s}(x) b_s b_p = \circ$$

اگر $\sum_{p=\circ}^{2} \alpha_p b_p = \circ$، آنگاه برای هر v, w داریم $C_vD_w = \circ$. فرض کنید که $\sum_{p=\circ}^{2} \alpha_p b_p \neq \circ$ درنتیجه ضرایب $g(x)$ به ازای $z'_j, z''_t \in \mathbf{K}$ و $\sum_{j=\circ}^{2} z'_j b_j \neq \circ$ به فرم

$$\sum_{j=\circ}^{2} z'_j b_j + \sum_{s=\circ}^{2} \delta_s b_s + \sum_{t=1}^{9} z''_t k_t + \sum_{t=1}^{9} \gamma_t k_t$$

هستند که اعضای غیر صفر γ_t, δ_t به فرم $\sum_{i=\circ}^{2} z_i a_i$ هستند. و درنتیجه برای هر j، $g(x) b_j \neq \circ$ و برای تمام v, wها $C_vD_w b_j = \circ$.

با استفاده از حالت ۱و۲ نتیجه می‌شود که R یک حلقه قویا مک کوی راست است.

نکته:

الف. در مثال قبل R را حلقه قویا مک‌کوی راست درنظر بگیرید، نشان می‌دهیم که R قویا مک‌کوی چپ نیست.

یادآوری می‌کنیم که
$$a(x)b(x) = (a_\circ + a_1 x + a_2 x^2)(b_\circ + b_1 x + b_2 x^2) = \circ,$$

فرض کنید ایده‌آل چپ L از R توسط $a_\circ$، a_1 و a_2 تولید شده باشد که در این صورت
$$L = ka_\circ + ka_1 + ka_2,$$

فرض کنید برای برخی $\circ \neq s \in L$ که $s = \gamma_\circ a_\circ + \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2$ داشته باشیم $sb(x) = \circ$.
$$s(b_\circ + b_1 x + b_2 x^2) = \circ,$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} sb_۰ = ۰ \\ sb_۱ = ۰ \\ sb_۲ = ۰ \end{cases}$$

و از اینکه $sb_۰ = ۰$، نتیجه می‌شود:

$$۰ = sb_۰ = (\gamma_۰ a_۰ + \gamma_۱ a_۱ + \gamma_۲ a_۲) b_۰ = \gamma_۱ a_۱ b_۰ + \gamma_۲ a_۲ b_۰.$$

و درنتیجه $\gamma_۱ = \gamma_۲ = ۰$. با جایگذاری مقادیر $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ در رابطه s داریم: $s = \gamma_۰ a_۰$. از اینکه $۰ = sb_۱ = \gamma_۰ a_۰ b_۱$ نتیجه می‌شود $\gamma_۰ = ۰$. بنابراین $s = ۰$ که یک تناقض است.
در نتیجه R حلقه قویا مک‌کوی چپ نیست.

ب. فرض کنید K یک میدان باشد و $A = K\langle a_۰, b_۰, a_۱, b_۱, a_۲, b_۲\rangle$ جبر آزاد تولید شده توسط متغیرهای ناجابه‌جایی $a_۰, b_۰, a_۱, b_۱, a_۲, b_۲$ روی K باشد.فرض کنید J ایده‌الی از A باشد که توسط

$$a_۰ b_۰, a_۰ b_۱ + a_۱ b_۰, a_۰ b_۲ + a_۱ b_۱ + a_۲ b_۰, a_۱ b_۲ + a_۲ b_۱,$$

$$a_۲ b_۲, a_۰ a_۰ b_۱, a_۰ a_۰ b_۲, a_{i_۱} a_{i_۲} a_{i_۳}, b_{j_۱} b_{j_۲}, b_j a_i$$

تولید شده باشد که $i, j, i_۱, i_۲, i_۳, j_۱, j_۲ \in \{۰, ۱, ۲\}$ باشند. می‌توان نشان داد که A/J مک کوی چپ است اما قویا مک کوی راست و شبه آرمنداریز چپ نیست که مشابه مثال ۱۲.۱.۳ و قسمت (الف) نکته اثبات می‌شود. اما با توجه به قضیه ۱۲.۲.۳ که در ادامه بیان می‌شود روی حلقه‌های منظم ویژگی شبه آرمنداریز راست(چپ) و ویژگی مک کوی راست و چپ معادلند.

۲.۳ ویژگی‌هایی از حلقه‌های شبه آرمنداریز راست

در این بخش به تجزیه و تحلیل خواص اساسی از حلقه‌های شبه آرمنداریز راست می‌پردازیم و رابطه بین حلقه‌های شبه آرمنداریز راست و مفاهیم وابسته به آن را بیان می‌کنیم. در واقع در قضیه ۱۲.۲.۳ اثبات شده که برای حلقه‌های منظم خواصی از شبه آرمنداریز راست، آرمنداریز، برگشت‌پذیر، دیو راست و قویا مک‌کوی راست معادل‌اند.

گزاره ۱.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه شبه آرمنداریز باشد و $f_۱(x), \ldots, f_n(x) \in R[x]$ باشند که $f_۱(x) \cdots f_n(x) = ۰$ و برای هر $i \in \{۲, \ldots, n\}$، $f_i(x) \neq ۰$. درنتیجه برای هر انتخاب از $a_۱, \ldots, a_n$ که a_i ضریب $f_i(x)$ می‌باشد، $r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f_n(x) r \neq ۰, \quad a_۱ \cdots a_n r = ۰.$$

برهان. چون R حلقه شبه آرمنداریز است، اگر فرض کنیم $f(x) = f_۱(x)$ و $۰ \neq g(x) = f_۲(x) \cdots f_n(x)$ آنگاه $r_۱ \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$(f_۲(x) \cdots f_n(x)) r_۱ \neq ۰$$

و برای هر ضریب a_1 از $f_1(x)$:

$$a_1(f_2(x)\cdots f_n(x))r_1=0$$

از این‌که $(f_2(x)\cdots f_n(x))r_1\neq 0$ داریم $f_3(x)\cdots f_n(x)r_1\neq 0$ وبنابراین $r_2\in R$ وجود دارد که

$$(f_3(x)\cdots f_n(x)r_1)r_2\neq 0$$

و برای هر ضریب a_1a_2 از $a_1f_2(x)$:

$$(a_1a_2)(f_3(x)\cdots f_n(x)r_1)r_2=0$$

به‌طور استقرایی $r_{n-1}\in R$ بدست می‌آید به‌طوری‌که

$$(f_n(x)r_1\cdots r_{n-2})r_{n-1}\neq 0$$

و برای هر ضریب $a_1\cdots a_{n-2}a_{n-1}$ از $(a_1\cdots a_{n-2})f_{n-1}(x)$:

$$(a_1\cdots a_{n-1})f_n(x)(r_1\cdots r_{n-2})r_{n-1}=0$$

قرار دهید $r=r_1\cdots r_{n-2}r_{n-1}$ و چون $f_n(x)\neq 0$، بنابراین

$$(a_1\cdots a_{n-1})f_n(x)r=0,$$
$$(a_1\cdots a_{n-1})r=0.$$

اگر $f_2(x)\cdots f_n(x)=0$ باشد، چون $f_n(x)\neq 0$ بنابراین کوچکترین عددی مانند K($k\geq 3$) وجود دارد که در رابطه $f_k(x)f_{k+1}(x)\cdots f_n(x)\neq 0$ صدق کند. دراین‌صورت داریم:

$$(a_1\cdots a_{k-1})(f_k(x)\cdots f_n(x))=0$$

که به‌ازای $i\in\{1,\ldots,k-1\}$، a_i ضریب $f_i(x)$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از روش قبلی داریم:

$$(a_1\cdots a_{k-1})(f_k(x)\cdots f_n(x))(r_1\cdots r_{k-1})=0$$
$$(a_1\cdots a_k)(f_{k+1}(x)\cdots f_n(x))(r_1\cdots r_k)=0,$$

درنتیجه داریم:

$$(a_1\cdots a_{n-1})f_n(x)(r_1\cdots r_{n-1})=0$$

اگر قرار دهیم $r=r_1\cdots r_{n-1}$ داریم $(a_1\cdots a_{n-1})f_n(x)r=0$ و درنتیجه $f_n(x)r\neq 0$ و $a_1\cdots a_nr=0$.

حال می‌توانیم برای هر $r\in R$ قرار دهیم $f_n(x)r\neq 0$ و $a_1\cdots a_nr=0$. ابتدا

$$(a_1\cdots a_{k-1}f_k(x))(f_{k+1}(x)\cdots f_n(x))=0$$

را تولید می‌کنیم که $f_{k+1}(x)\cdots f_n(x)\neq 0$. □

قضیه ۲.۲.۳. ([۳]،قضیه ۶) برای حلقه فون نیومن منظم R روابط زیر معادلند:

الف. R آرمنداریز است.

ب. R تقلیل‌یافته است.

پ. اگر حاصلضرب دو چندجمله‌ای صفر باشد آن‌گاه حاصلضرب ضرایب آن‌ها صفر است.

برهان. الف $\Longleftarrow$ ب قبلا اثبات شد.
پ $\Longleftarrow$ الف طبق تعریف بدیهی است
. کافی است که از ب $\Longleftarrow$ پ اثبات شود.
$a, b \in R$ را با شرط زیر در نظر بگیرید

$$br_R(a) \cap ar_R(b) = \circ \qquad (۶.۳)$$

فرض کنید $e, f \in R$ خودتوان باشند. قرار دهید $b = e$ و $a = ۱ - f$ و فرض کنید $r_R(a) = fR$ و $r_R(b) = (۱ - e)R$. با جایگذاری در (۶.۳) بدست می‌آوریم:

$$efR \cap (۱ - f)(۱ - e)R = \circ$$

به‌علاوه این، فرض کردیم e و f خودتوان هستند که $fe = \circ$. پس

$$ef = (۱ - f)(۱ - e)(-f) \in efR \cap (۱ - f)(۱ - e)R = \circ$$

بنابراین برای هر عنصر خودتوان $e \in R$ و هر عضو $r \in R$، $x = e + er(۱ - e)$ خودتوان است که $(۱ - e)x = \circ$ و بنابراین $x(۱ - e) = \circ$. درنتیجه $er(۱ - e) = \circ$ و لذا $eR(۱ - e) = \circ$ و R تقلیل‌یافته است. $\square$

توجه:
قسمت (۳) قضیه فوق در حالت کلی برقرار نیست مثلا زمانی که داریم $(ax + b)(a_\circ x + b_\circ) = \circ$ اما

$$(ax + b)(a_\circ x + b_\circ) = aa_\circ x^۲ + ab_\circ x + ba_\circ x + ba_\circ x + bb_\circ$$
$$= aa_\circ x^۲ + (ab_\circ + ba_\circ)x + bb_\circ = \circ$$
$$\Longrightarrow ab_\circ = -ba_\circ \neq \circ,$$

معادلا زمانیکه $r_R(a)$ ($r_R(b)$) پوچ‌ساز راست a (b) است اگر $br_R(a) \cap ar_R(b) \neq \circ$، نتیجه مشابه به‌دست می‌آید.

تعریف ۳.۲.۳. حلقه R، IFP نامیده می‌شود زمانی که برای هر $a, b \in R$، $ab = \circ$ نتیجه دهد $aRb = \circ$.

تبصره ۴.۲.۳. حلقه‌های برگشت‌پذیر و دیوراست *IFP* هستند.
فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد در این صورت $ab = \circ$ نتیجه می‌دهد $ba = \circ$.

$$ba = \circ \Longrightarrow Rba = \circ \Longrightarrow aRb = \circ$$

و بنابراین R حلقه‌ای *IFP* است.
فرض کنید R حلقه دیوراست باشد. اگر $ab = \circ$ آنگاه $b \in r_R(a)$. چون R دیوراست است، هر ایده‌آل راست آن دوطرفه است لذا

$$\forall r \in R, \quad rb \in eR$$

$$\Longrightarrow rb \in r_R(a) \Longrightarrow arb = \circ \Longrightarrow aRb = \circ$$

تبصره ۵.۲.۳. حلقه‌های IFP آبلی هستند.
فرض کنید R یک حلقه IFP و $a = e$ و $b = ۱ - e$. با توجه به این‌که برای هر $a, b \in R$، $ab = \circ$ نتیجه می‌دهد $aRb = \circ$.

$$er(۱ - e) = \circ \Longrightarrow er = ere$$

حال با فرض $a = ۱ - e$ و $b = e$ داریم:

$$(۱ - e)re = \circ \Longrightarrow re = ere$$

و بنابراین R آبلی است.

حلقه‌های آرمنداریز و حلقه‌های IFP مستقل از یکدیگرند. چاوو نشان داد که حلقه‌های جابجایی (بنابراین IFP) لزوما آرمنداریز نیستند. مثال ۷.۲.۳ در زیر نشان می‌دهد که حلقه‌های شبه آرمنداریز وجود دارند که IFP نیستند و درنتیجه حلقه‌های آرمنداریز (شبه آرمنداریز) لزوما برگشت‌پذیر یا دیوی راست نیستند.

مثال ۶.۲.۳. ([۱۷]،مثال ۳.۲) در $(\frac{z}{۸z} (+) \frac{z}{۸z})$ تعریف کنید

$$(a, m)(b, n) = (ab, an + mb)$$

چندجمله‌ای $f(x) = (\bar{۴}, \bar{\circ}) + (\bar{۴}, \bar{۱})x$ را در $(\frac{z}{۸z}(+)\frac{z}{۸z})[x]$ درنظر بگیرید. مربع این چندجمله‌ای صفر است اما

$$(\bar{۴}, \bar{\circ})(\bar{۴}, \bar{۱}) = (\bar{\circ}, \bar{۴}) \neq \circ$$

پس حلقه‌های جابجایی لزوما آرمنداریز نیستند.

می‌دانیم که اگر حلقه R دیوراست یا برگشت‌پذیر باشد آن‌گاه R یک حلقه شبه آرمنداریز است. همچنین به خاطر داریم کلاسی از حلقه‌های آبلی، حلقه‌های آرمنداریز و حلقه‌های دیوراست و حلقه‌های برگشت‌پذیر را شامل می‌شود.

مثال ۷.۲.۳. الف. حلقه‌ای شبه آرمنداریز وجود دارد که آبلی نیست.
فرض کنید k یک میدان باشد و $k\langle e, x, y, z\rangle$ جبر آزاد با متغیرهای ناجابجایی e, x, y, z در k و ضرایب $k\langle e, x, y, z\rangle$ از حلقه R با روابط زیر باشد:

$$e^۲ = e,\ ex = x,\ xe = \circ,\ ey = ye = \circ,\ ez = ze = z$$

$$x^۲ = y^۲ = z^۲ = xy = xz = yx = yz = zx = zy = \circ$$

برای سهولت $\{e, x, y, z\}$ را با تصاویرشان در R یکی می‌گیریم، توجه کنید که R یک فضای برداری با پایه $\{۱, e, x, y, z\}$ است و چون e خودتوان است و با x جابه‌جا نمی‌شود، R غیر آبلی است.
با استفاده از مثال ۲۱.۱.۲ می‌توانیم نشان دهیم که R یک حلقه شبه آرمنداریز است.
ب. با کمک قضیه (۸.۱.۳) می‌توانیم یک حلقه آبلی پیدا کنیم که شبه آرمنداریز راست نیست. فرض

کنید S حلقه تقلیل یافته باشد و $R = D_{۴}(S)$، R یک حلقه آبلی است اما با توجه به مثال ۱۰.۱.۳ شبه آرمنداریز نیست.

لم ۸.۲.۳. ([۹]،لم ۲) اگر S یک حلقه آبلی باشد و

$$R_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ ۰ & a & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in s,\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq ۲ \right\}$$

و عضو خودتوان در R_n به فرم $\begin{pmatrix} f & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & f & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & f \end{pmatrix}$ باشد که $f^{۲} = f \in S$ و بنابراین R_n آبلی است.

برهان. برای اثبات از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix} \in f_{۲}$ پس

$$\begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c^{۲} & cd + dc \\ ۰ & c^{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix}.$$

که داریم :

$$cd + dc = d, \quad c^{۲} = c \Rightarrow c^{۲}d + cdc \overset{c^{۲}=c}{=} cd + cdc = cd \Rightarrow ۰ = cdc = c^{۲}d = cd = dc$$

چون S آبلی است. بنابراین $d = ۰$.

پس عضو خودتوان در $R^{۲}$ به فرم $\begin{pmatrix} f & ۰ \\ ۰ & f \end{pmatrix}$ است که $f^{۲} = f \in s$.

حال فرض کنیم که

$$A = \begin{pmatrix} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ ۰ & a & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix} \in R_n$$

خودتوان باشد، آن‌گاه دو ماتریس $n-1 \times n-1$ زیر در R_{n-1} خودتوان هستند.

$$\begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

طبق فرض استقرا a_{ij}ها صفرند و $a^2 = a$. بنابراین داریم:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

با انجام محاسبات داریم: $aa_{1n} + a_{1n}a = a_{1n}$.

$a^2 = a$ نتیجه می‌دهد که $aa_{1n}a = 0$، چون S آبلی است:

$$0 = a_{1n}a = a^2 a_{1n} = aa_{1n} = a_{1n}a$$

بنابراین $a_{1n} = 0$.

بنابراین خودتوان روی R_n به فرم
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$
است که $a^2 = a \in s$ و این نتیجه می‌دهد که R_n آبلی است زیرا S آبلی است.

□

یک کلاس از حلقه‌های IFP، حلقه‌های دیوراست و حلقه‌های برگشت‌پذیر را شامل می‌شود پس می‌توان حدس زد که حلقه‌های IFP شبه آرمنداریز راست هستند اگرچه حلقه‌های IFP وجود دارد که شبه آرمنداریز راست نیستند.

تعریف ۹.۲.۳. حلقه R ددکیند متناهی نامیده می‌شود اگر برای هر $u, v \in R$، $uv = 1$ نتیجه دهد $vu = 1$.

گزاره ۱۰.۲.۳. الف. حلقه‌های مک‌کوی راست یا چپ ددکیند متناهی هستند.

ب. حلقه‌های قویا مک‌کوی راست یا چپ ددکیند متناهی هستند.

پ. حلقه‌های شبه آرمنداریز راست یا چپ ددکیند متناهی هستند.

برهان. کافی است الف را اثبات کنیم.
فرض کنیم R یک حلقه مک‌کوی چپ باشد که $uv = ۱$، اما $vu \neq ۱$. دو چندجمله‌ای $f(x) = (vu-۱)+(vu-۱)ux$ و $g(x) = v+(vu-۱)x$ را روی R در نظر می‌گیریم که $f(x) \neq ۰$ و $f(x)g(x) = ۰$. چون R مک‌کوی چپ است $۰ \neq r \in R$ وجود دارد که $rg(x) = ۰$. بنابراین $rv = ۰$ و $r(vu-۱) = ۰$. اما $r(vu-۱) = rvu - r = -r \neq ۰$ که یک تناقض است. □

به آسانی ثابت می‌شود که حلقه‌های آبلی ددکیند متناهی هستند.
گزاره ۱۰.۲.۳ نشان می‌دهد که یک کلاس از حلقه‌های متناهی، شامل حلقه‌های آبلی و شبه آرمنداریز یک طرفه است.

مثال ۱۱.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه ماتریس بالا مثلثی ۲×۲ روی حلقه تقلیل‌یافته باشد. دو چندجمله‌ای $f(x) = e_{۱۱} - e_{۱۲}x$ و $g(x) = e_{۲۲} + e_{۱۲}x$ را روی R درنظر می‌گیریم که $f(x)g(x) = ۰$ اما ماتریس غیرصفر $r \in R$ نمی‌تواند $f(x)$ را از راست پوچ کند، مثلا فرض کنید $r = \begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & d \end{pmatrix}$ بنابراین

$$f(x)r = \left(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} x\right)\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۰ & d \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} x \neq ۰,$$

و در نتیجه R شبه آرمنداریز راست نیست. مشابها می‌توان نشان داد که R شبه آرمنداریز چپ نیست. توجه کنید که R ناآبلی اما ددکیند متناهی می‌باشد، همچنین توجه کنید که با استفاده از محاسبات مشابه بالا می‌توان نشان داد که حلقه ماتریس کامل $n \times n$ برای $n \geq ۲$ شبه آرمنداریز چپ نیست.

قضیه ۱۲.۲.۳. برای حلقه منظم R، شرایط زیر معادلند:

الف. R یک حلقه شبه آرمنداریز راست (چپ) است.

ب. R آبلی است.

پ. Rآرمنداریز است.

ت. R برگشت‌پذیر است.

ج. R دیوراست (چپ) است.

د. R حلقه مک‌کوی راست (چپ) قوی است.

برهان. شرایط ب و د معادلند.
اگر R آبلی باشد آنگاه R تقلیل‌یافته و بنابراین برگشت‌پذیر است و همچنین داشتیم که وقتی حلقه R تقلیل‌یافته باشد و $f, g \in R[x]$ و $f = \sum_{i=۰}^{n} a_i x^i$ و $g = \sum_{j=۰}^{m} b_j x^j$ آنگاه $fg = ۰$ اگر و تنها اگر برای تمام $۰ \leq i \leq n$ و $۰ \leq j \leq m$، $a_i b_j = ۰$ در نتیجه R آرمنداریز است، بنابراین

پ $\Longleftarrow$ ب، ت $\Longleftarrow$ ب،الف $\Longleftarrow$ پ و د $\Longleftarrow$ الف واضح است.
الف $\Longleftarrow$ ت نیز از لم (۷.۱.۲) بدست می‌آید. بنابراین کافی است ب $\Longleftarrow$ د را اثبات کنیم:
فرض کنید R قویا مک‌کوی راست باشد و فرض کنیم (فرض خلف) که $e^{۲} = e$ و $r \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $er(۱-e) \neq ۰$. همچنین چون R منظم است، $y \in R$ وجود دارد که $er(۱-e) = er(۱-e)yer(۱-e)$.
قرار می‌دهیم $y = (۱-e)ye$.
حال دو چندجمله‌ای

$$f(x) = er(۱-e) - ex, \quad g(x) = er(۱-e) + yer(۱-e)x$$

را در نظر بگیرید که $f(x)g(x) = ۰$.
چون R قویا مک‌کوی راست است پس $s, t \in R$ وجود دارند که $\alpha = er(۱-e)s + yer(۱-e)t \neq ۰$ و $f(x)\alpha = ۰$. حال چون $yer(۱-e)t = ۰$ پس می‌توان از $er(۱-e)\alpha = ۰$ نتیجه گرفت

$$er(۱-e)yer(۱-e)t = er(۱-e)t = ۰$$

و همچنین $e\alpha = ۰$ نتیجه می‌دهد که $eer(۱-e)s = er(۱-e)s = ۰$ و درنتیجه $\alpha = ۰$ که یک تناقض است.
به طور مشابه برای چپ نیز اثبات می‌شود.

□

۳.۳ مثال‌هایی از حلقه‌های شبه آرمنداریز راست

در این بخش به تجزیه و تحلیل خواصی از کلاس حلقه‌های شبه آرمنداریز می‌پردازیم و مثال‌هایی از آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. حلقه R شبه‌آرمنداریز راست است اگر و تنها اگر $R[x]$ چنین باشد.

برهان. فرض کنید R یک حلقه شبه‌آرمنداریز راست و $R[x][t]$ حلقه چندجمله‌ای با متغیر t روی $R[x]$ باشد و فرض کنید $f(t) = \sum_{i=۰}^{m} f_i(x)t^i$ و $g(t) = \sum_{j=۰}^{n} g_j(x)t^j$ دو چندجمله‌ای $R[x][t]$ باشند که $g(t) \neq ۰$ و $f(t)g(t) = ۰$. فرض کنید

$$f_i(x) = \sum_{h=۰}^{n_i} a(i)_h x^h$$

و

$$g_j(x) = \sum_{k=۰}^{m_j} b(j)_k x^k$$

$k = \sum_{i=۰}^{m} \deg(f_i(x)) + \sum_{j=۰}^{n} \deg(g_j(x))$ و درجه چندجمله‌ای‌های صفر را صفر درنظر بگیرید.
فرض کنید $F(x) = f_۰ + f_۱x^k + \cdots + f_m x^{k_m}$ و $G(x) = g_۰ + g_۱x^k + \cdots + g_n x^{k_n}$ که $F(x), G(x) \in R[x]$ و $G(x) \neq ۰$. چون مجموعه‌ای از ضرایب f_iها (g_jها) با مجموعه ضرایب

$F(x)$ ($G(x)$) برابر است، از $f(t)g(t)=0$ نتیجه می‌گیریم $F(x)G(x)=0$.
چون R شبه‌آرمنداریز راست است، $r\in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $G(x)r\neq 0$ و برای i,j,h,k، $a(i)_h b(j)_k r=0$. درنتیجه $g(t)r\neq 0$ و برای تمام i و jها $f_i(x)g_j(x)r=0$ و بنابراین $R[x]$ شبه‌آرمنداریز راست است.
برعکس: فرض کنید $R[x]$ شبه آرمنداریز راست باشد و $R[x][y]$ حلقه چندجمله‌ای روی $R[x]$ باشد. فرض کنید $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_j x^j$ دو عضو $R[x]$ باشند به‌طوری‌که $f(x)g(x)=0$ و $g(x)\neq 0$.

درنظر می‌گیریم $g(y)=\sum_{j=0}^{n}b_j y^j\in R[x][y]$ ، $f(y)=\sum_{i=0}^{m}a_i y^i$ که $f(y)g(y)=0$، از آن‌جا که $g(x)\neq 0$ واضح است که $g(y)\neq 0$. چون $R[x]$ شبه آرمنداریز راست است $c(x)\in R[x]$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(y)c(x)\neq 0$ و برای هر i و j، $a_i b_j c(x)=0$. همچنین برای برخی از ضرایب c_k از $c(x)$ داریم $g(y)c_k\neq 0$ بنابراین $g(x)c_k\neq 0$ و برای همه i و jها $a_i b_j c_k=0$ و بنابراین R شبه آرمنداریز راست است. □

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید R حلقه اور راست باشد که $Q_r(R)$ حلقه کسرهای راست کلاسیک آن باشد. در این‌صورت R شبه آرمنداریز راست است اگر و تنها اگر $Q_r(R)$ چنین باشد.

برهان. فرض کنید $Q=Q_r(R)$.
$F(x),G(x)\in Q[x]$ را در نظر بگیرید که $F(x)G(x)=0$ و $G(x)\neq 0$ باشد در این‌صورت با عناصر منظم u و v می‌توان $F(x)$ و $G(x)$ را به صورت زیر نوشت:

$$F(x)=a_0u^{-1}+a_1u^{-1}x+\cdots+a_mu^{-1}x^m$$

و

$$G(x)=b_0v^{-1}+b_1v^{-1}x+\cdots+b_nv^{-1}x^n$$

و چون $F(x)G(x)=0$ داریم:

$$(a_0u^{-1}+a_1u^{-1}x+\cdots+a_mu^{-1}x^m)(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)=0$$

و بنابراین

$$a_0u^{-1}b_0=0,\ a_0u^{-1}b_1+a_1u^{-1}b_0=0,\ \cdots,\ a_mu^{-1}b_n=0 \tag{۷.۳}$$

از طرفی چون R اور راست است، برای $u^{-1}b_0,u^{-1}b_1,\ldots,u^{-1}b_n$ عناصر $c_0,c_1,\ldots,c_n\in R$ و s منظم وجود دارند به‌طوری‌که برای هر i، $u^{-1}b_i=c_is^{-1}$.
برای $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ و $g(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n\neq 0$ در $R[x]$ از (۷.۳) داریم:

$$a_0c_0s^{-1}=0, a_0c_1s^{-1}+a_1c_0s^{-1}=0,\ldots,a_mc_ns^{-1}=0$$

و در نتیجه

$$a_0c_0=0, a_0c_1+a_1c_0=0,\ldots,a_mc_n=0$$

و $f(x)g(x) = 0$.

چون R شبه‌آرمنداریز راست است، $r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(x)r \neq 0$ و برای هر i و j ، $a_i c_j r = 0$ و چون برای برخی از kها، $b_k v^{-1} vsr = b_k sr = uc_k s^{-1} sr = uc_k r \neq 0$ بنابراین $vsr \in Q$ وجود دارد به‌طوری‌که $G(x)vsr \neq 0$ و درنتیجه برای تمام i و jها داریم:

$$a_i u^{-1} b_j v^{-1} vsr = a_i c_j s^{-1} v^{-1} vsr = a_i c_j r = 0$$

و بنابراین Q شبه‌آرمنداریز راست است.

برعکس: فرض کنید $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ و $0 \neq b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ عضو $R[x]$ باشند به‌طوری‌که $f(x)g(x) = 0$. در این صورت $f(x), g(x) \in Q[x]$. چون Q شبه آرمنداریز راست است $rs^{-1} \in Q$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(x)rs^{-1} \neq 0$ و برای هر i و j، $a_i b_j rs^{-1} = 0$. همچنین $r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(x)r \neq 0$ و برای هر i و j، $a_i b_j r = 0$ و درنتیجه R شبه‌آرمنداریز راست است. □

نکته: فرض کنید R یک حلقه اور راست با حلقه کسرهای Q باشد اگر R شبه‌آرمنداریز چپ باشد Q نیز چنین است. فرض کنید

$$F(x) = a_0 u^{-1} + a_1 u^{-1} x + \cdots + a_m u^{-1} x^m,$$

$$G(x) = b_0 v^{-1} + b_1 v^{-1} x + \cdots + b_n v^{-1} x^n.$$

عضو $Q[x]$ باشند به‌طوری‌که $F(x)G(x) = 0$ در این صورت

$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m) u^{-1} (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) = 0$$

با توجه به اینکه برای برخی $u', b'_i \in R$ داریم $u^{-1} b_i = b'_i u'^{-1}$ که u' منظم است پس

$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m)(b'_0 + b'_1 x + \cdots + b'_n x^n) = 0$$

چون R شبه آرمنداریز چپ است $r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$r(a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m) \neq 0$$

و برای تمام i و jها $ra_i b'_j = 0$. بنابراین $rF(x) \neq 0$ و $ra_i b'_j u'^{-1} = ra_i u^{-1} b_j v^{-1} = 0$ که نتیجه می‌گیریم Q نیز شبه آرمنداریز چپ است.

گزاره ۳.۳.۳. الف. کلاسی از حلقه‌های شبه آرمنداریز راست (چپ) نسبت به حد مستقیم بسته است.

ب. حاصل‌ضرب مستقیم از حلقه‌ها $R = \prod_{i \in I} R_i$ شبه آرمنداریز راست (چپ) است اگر و تنها اگر برای تمام i ها R_iها شبه آرمنداریز راست (چپ) باشند.

پ. حاصل‌جمع مستقیم حلقه‌ها $R = \sum_{i \in I} R_i$ شبه آرمنداریز راست (چپ) است اگر و تنها اگر برای تمام iها R_i ها شبه آرمنداریز راست (چپ) باشند.

ت. کلاسی از حلقه‌های شبه آرمنداریز راست نسبت به زیرحلقه‌ها بسته نیست.

ج. کلاسی از حلقه‌های شبه آرمنداریز راست نسبت به تصاویر همریخت بسته نیست.

برهان. الف. فرض کنید $i \in I$، $D = \{R_i, \alpha_{ij}\}$ یک سیستم مستقیم از حلقه‌های شبه آرمندار‌یز راست باشد به‌طوری‌که برای $i \leq j$، هومومرفیسم‌های $\alpha_{ij} : R_i \to R_j$ در شرط $\alpha_{ij}(۱) = ۱$ صدق می‌کنند و I یک مجموعه جزیی مرتب جهت‌دار است.
فرض کنید $R = \lim R_i$ حد مستقیم D باشد که $l_i : R_i \to R$ و $l_j \alpha_{ij} = l_i$. فرض کنید $a, b \in R$ باشند. دراین‌صورت برای برخی از $i, j \in I$ ، $a = l_i(a_i)$ و $b = l_j(b_j)$ و $k \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $i \leq k$ و $j \leq k$.

تعریف کنید $a+b = l_k(\alpha_{ik}(a_i)+\alpha_{jk}(b_j))$ و $ab = l_k(\alpha_{ik}(a_i)\alpha_{jk}(b_j))$ که $\alpha_{ik}(a_i)$ و $\alpha_{jk}(b_j)$ در R_k هستند و پس R حلقه‌ای است که عضو خنثی آن $l_i(۰) = ۰$ و واحد آن $l_i(۱) = ۱$ است. حال فرض کنید $f(x) = \sum_{i=۰}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=۰}^{n} b_j x^j \in R[x]$ $۰ \neq$ چندجمله‌ای‌هایی باشند که $f(x)g(x) = ۰$ با استفاده از l_iها و α_{ij}ها عنصر $k \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x), g(x) \in R_k[x]$ بنابراین در $R_k[x]$ داریم $f(x)g(x) = ۰$. چون R_k شبه آرمندار‌یز راست است، $c_k \in R_k$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(x)c_k \neq ۰$ و برای هر i و jها $a_i b_j c_k = ۰$.
قرار دهید $c = l_k(c_k)$ بنابراین داریم $g(x)c \neq ۰$ و برای هر i و jها $a_i b_j c = ۰$ و در نتیجه R شبه آرمندار‌یز راست است. برای حلقه‌های شبه‌آرمندار‌یز چپ نیز مشابها اثبات می‌شود.
ب. فرض کنید داشته باشیم

$$f(x) = \sum_{j=۰}^{m} (a(j)_i) x^j, \ ۰ \neq g(x) = \sum_{k=۰}^{n} (b(k)_i) x^k \in R[x],$$

که $f(x)g(x) = ۰$. قرار دهید $g_i(x) = \sum_{k=۰}^{n} b(k)_i x^k$ و $f_i(x) = \sum_{j=۰}^{m} a(j)_i x^j$ بنابراین می‌توان $f(x) = (f_i(x))$ و $g(x) = (g_i(x))$ در نظر گرفت. فرض کنید که هر حلقه R_i شبه آرمندار‌یز راست باشد،
چون $g(x) \neq ۰$ پس $s \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $g_s(x) \neq ۰$. از آن‌جا که R_s شبه آرمندار‌یز راست است، $r_s \in R_s$ وجود دارد به‌طوری‌که $g_s(x) r_s \neq ۰$ و برای همه i و jها $a(i)_s b(j)_s r_s = ۰$. فرض کنید $r = (r_i) \in R$ دنباله‌ای باشد که جمله sام آن r_s و سایر جملات آن صفر باشد، بنابراین $g(x)r \neq ۰$ و برای تمام i و jها $a(i)b(j)r = ۰$ و درنتیجه R شبه آرمندار‌یز راست است.

برعکس: فرض کنید R شبه آرمندار‌یز راست باشد اگر برای $i_۰ \in I$ ، $R_{i_۰}$ شبه آرمندار‌یز راست نباشد آنگاه برای تمام $r_{i_۰} \in R_{i_۰}$ چند جمله‌ای‌های $f_{i_۰}(x), g_{i_۰}(x) \in R_{i_۰}[x]$ وجود دارد که $g_{i_۰}(x) \neq ۰$ و $f_{i_۰}(x) g_{i_۰}(x) = ۰$ اما $g_{i_۰}(x) r_{i_۰} = ۰$ و یا برای برخی i و jها $a(i_۰)_i b(i_۰)_j r_{i_۰} \neq ۰$.
$f(x) = (f_i(x))$ و $g(x) = (g_i(x))$ در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $f(x)$ و $g(x)$ دنباله‌هایی هستند که در $f(x)$ مختص $i_۰$ام آن $f_{i_۰}(x)$ و مابقی یک باشد و در $g(x)$ مختص $i_۰$ام آن $g_{i_۰}(x)$ و مابقی صفر باشند، از آن‌جا که $f(x)g(x) = ۰$ و R شبه آرمندار‌یز راست است $r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که r دنباله‌ای است که مختص $i_۰$ام آن $r_{i_۰}$ ناصفر و مابقی صفر هستند و $g(x)r \neq ۰$ و برای هر i و j، $a(i)_k b(j)_k r = ۰$ که یک تناقض است.
برای آرمندار‌یز چپ نیز مشابها اثبات می‌شود.
پ. مشابه قسمت ۲ اثبات می‌شود.
ت. با استفاده از مثال ۲.۲ و مثال ۱.۱۲ حلقه شبه آرمندار‌یز راست وجود دارد که زیر حلقه شبه آرمندار‌یز

راست ندارد.

ج. فرض کنید R حلقه‌ای از مجموعه ۴تایی با ضرایب صحیح باشد، در این صورت R دامنه است و همچنین شبه آرمنداریز راست می‌باشد. بنابه ([۷]،تمرین $2A$)، برای هر عدد صحیح اول q حلقه R/qR با $Mat_2(\mathbb{Z}_q)$ ایزومورف است و بنابر مثال ۸.۲.۳ R/qR شبه آرمنداریز راست نیست. □

(با توجه به قسمت ۴ گزاره فوق کلاسی از حلقه‌های شبه آرمنداریز راست نسبت به زیرحلقه‌ها بسته نیست. اما می‌توان نوعی زیرحلقه پیدا کرد که ویژگی شبه آرمنداریز راست را حفظ کند.)

گزاره ۴.۳.۳. فرض کنید e عضو خودتوان R باشد، دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

الف. R شبه آرمنداریز راست است.

ب. eR و $(1-e)R$ شبه آرمنداریز راست هستند.

برهان. ب $\Longleftarrow$ الف)چون e مرکزی است واضح است.

الف $\Longleftarrow$ ب) با توجه به قسمت ۳ از گزاره ۳.۳ چون $R = eR \oplus (1-e)R$ است اثبات می‌شود. □

اگر I ایده‌آلی بدون همانی از R باشد و $\frac{R}{I}$ و I هر دو شبه آرمنداریز راست باشند آنگاه R نیز شبه آرمنداریز راست است. اگرچه مثال‌های نقض زیر نشان می‌دهد که این همیشه برقرار نیست.

مثال ۵.۳.۳. الف. فرض کنید R حلقه ماتریس بالا مثلثی 2×2 روی میدان F و $I = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ باشد، در این صورت I و $\frac{R}{I} \cong F \oplus F$ هر دو شبه آرمنداریز هستند اما R شبه آرمنداریز راست نیست.

ب. فرض کنید $T = \{a, b\}$ نیم‌گروهی با ضرب $a^2 = ab = a$ و $b^2 = ba = b$. همچنین فرض کنید $S = \mathbb{Z}_2T$ حلقه نیم‌گروه چهارعضوی بدون همانی باشد، ادعا می‌کنیم که S آرمنداریز است. فرض کنید $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in S[x]$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in S[x]$ باشند که $f(x)g(x) = 0$ همچنین فرض کنید $a + b \in r_s(f(x))$. اگر هر ضریب از $g(x)$ به‌صورت $a + b$ باشد آن‌گاه برای همه iها

$$a_i(a+b) = 0 \quad (a_i(a+b)a = 0,\ g(x)a = g(x) \neq 0)$$

اگر $b_j \in \{a, b\}$ وجود داشته باشد آنگاه چون $l_S(a) = 0 = l_S(b)$ محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد $f(x) = 0$. در نتیجه برای تمام i و j ها $a_ib_j = 0$، بنابراین S حلقه آرمنداریز(شبه آرمنداریز راست) بدون همانی است. حال با اضافه کردن عضو همانی به S حلقه $S \times \mathbb{Z}$ را داریم. چندجمله‌ای‌های

$$s(x) = (a, 1) + (b, 1)x, \quad t(x) = (a, 0) + (b, 0)x \in R[x].$$

را در نظر بگیرید که $s(x)t(x) = 0$ اما به ازای هر $c, d \in R$، $s(x)c = 0$ نتیجه می‌دهد که $c = 0$ و $dt(x) = 0$ نتیجه می‌دهد که $\mathrm{d} = 0$. در نتیجه R شبه آرمنداریز راست یا چپ نیست. اما با فرض

$S=I$، $\frac{R}{I}\cong\mathbb{Z}$ و I هر دو شبه آرمنداریز راست هستند.
در مثال‌های فوق I تقلیل یافته نیست. (در (۱) $I^{۲}=۰$ و در (۲) $(a+b)^{۲}=۰$). در قضیه زیر I را تقلیل‌یافته در نظر می‌گیریم.

قضیه ۶.۳.۳. برای حلقه R فرض کنید که $\frac{R}{I}$ شبه آرمنداریز راست و I یک ایده‌ال سره از R باشد. اگر I تقلیل یافته بدون همانی باشد آنگاه R شبه آرمنداریز راست است.

برهان. فرض کنید $f(x)=\sum_{i=۰}^{m}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=۰}^{n}b_jx^j\neq ۰$ چندجمله‌ای‌هایی از $R[x]$ باشند که $f(x)g(x)=۰$. ابتدا فرض می‌کنیم $g(x)\notin I[x]$.

چون $\frac{R}{I}$ شبه آرمنداریز راست است $r\in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(x)r\notin I[x]$ و برای هر i و j، $a_ib_jr\in I$. به وضوح $g(x)r\neq ۰$. قضیه را با استقرا روی m ثابت می‌کنیم: اگر $m=۰$ باشد که نتیجه حاصل است. فرض کنید $m\geq ۱$ با توجه با این‌که $a_۰b_۰=۰$ ادعا می‌کنیم برای $j\in\{۰,۱,\ldots,n\}$، $a_۰b_jr=۰$ (فرض خلف) فرض کنید که برای برخی از j ها $a_۰b_jr\neq ۰$ در این صورت $l\in\{۱,۲,\cdots,n\}$ را درنظر بگیرید به‌طوری‌که l کوچکترین عددی باشد که $a_۰b_lr\neq ۰$. بنابراین برای $j\in\{۰,\ldots,l-۱\}$ داریم: $a_۰b_jr=۰$ و چون $b_jrIa_۰\subseteq I$، $(b_jrIa_۰)^{۲}=۰$ و I تقلیل یافته است در نتیجه $b_jrIa_۰=۰$. همچنین

$$(a_{l-j}b_jr)(a_۰b_lr)^{۲}=a_{l-j}b_jr(a_۰b_lr)a_۰b_lr\in a_{l-j}b_jrIa_۰b_lr=a_{l-j}(b_jrIa_۰)b_lr=۰$$

که نتیجه می‌دهد $(a_{l-j}b_jr)(a_۰b_lr)^{۲}=۰$. ضریب x^l در $f(x)g(x)=۰$ عبارت

$$۰=a_۰b_l+a_۱b_{l-۱}+\ldots+a_lb_۰=a_۰b_l+\sum_{j=۰}^{l-۱}a_{l-j}b_j$$

است. اگر معادله فوق را از راست در $r(a_۰b_lr)^{۲}$ ضرب کنیم داریم:

$$۰=(a_۰b_l+\sum_{j=۰}^{l-۱}a_{l-j}b_j)r(a_۰b_lr)^{۲}=(a_۰b_lr)^{۳}$$

و چون $a_۰b_lr\in I$ و I تقلیل یافته است نتیجه می‌شود که $a_۰b_lr=۰$ که یک تناقض است. بنابراین برای تمام $j\in\{۰,۱,\ldots,n\}$ رابطه $a_۰b_jr=۰$ برقرار است و در نتیجه $f_۱(x)g(x)r=۰$ که $f_۱(x)=a_۱+a_۲x+\ldots+a_mx^{m-۱}$. اما درجه $f_۱(x)$ از m کمتر است و با توجه به فرض استقرا $s\in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(x)rs\neq ۰$ و برای $۱\leq i\leq m$ و $۰\leq j\leq n$ داریم $a_ib_jrs=۰$ و در نتیجه برای هر $۰\leq i\leq m$ و $۰\leq j\leq n$ داریم $g(x)rs\neq ۰$ و $a_ib_jrs=۰$. حال فرض کنید که $g(x)\in I[x]$ باشد آنگاه به ازای هر i و j، a_ib_j و b_ja_i هر دو در I قرار می‌گیرند و با استفاده از روش اثبات لم (۲.۱.۳) نتیجه می‌شود که برای هر i و j، $a_ib_j=۰$ و بنابراین R شبه آرمنداریز راست است.

قضیه فوق را در مثال زیر بکار می‌بریم.

مثال ۷.۳.۳. ایده‌ال $J=\{0,2,4\}$ از $\mathbb{Z}_6$ و ایده‌ال $S=J[\{t_i|_i i\in\mathbb{Z}\}]$ از حلقه چندجمله‌ای‌های $T=\mathbb{Z}_6[\{t_i|_i i\in Z\}]$ روی Z_6 را در نظر بگیرید و اتومورفیسم σ از T را که توسط هر t_i به t_{i+1} تعریف می‌شود و ایده‌ال $S[x:\sigma]$ از حلقه چندجمله‌ای‌های اریب $T[x:\sigma]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید R حلقه $S[x:\sigma]\times\mathbb{Z}_6$ باشد که با اضافه کردن عضو همانی به $S[x:\sigma]$ بدست آمده است و فرض کنید $I=S[x:\sigma]\times o$ ایده‌الی از حلقه تقلیل یافته بدون همانی R باشد. چون $\frac{R}{I}\cong\mathbb{Z}_6$ با توجه به قضیه قبل R شبه آرمنداریز است.

□

تجزیه و تحلیل محاسبات مثال ۷.۳.۳ نتیجه می‌دهد که می‌توان ایده‌ال J از $\mathbb{Z}_6$ را به ایده‌ال‌هایی در $\mathbb{Z}_n$ تعمیم داد.

مراجع

[۱] هاشمی. ا، (۱۳۹۰)، ”آشنایی با پوچ‌سازی چندجمله‌ای‌ها“، دانشگاه شاهرود، ۴۱۰ ص.

[۲] هانگرفورد، ترجمه عالم‌زاده. ع. ا، ذاکری. ح، (۱۳۹۲)، ”جبر“، انتشارات پژوهش تهران، ۸۹۹ ص.

[3] D. D. Anderson and V. Camillo, (1998), "Armendariz rings and Gaussian ring", Comm. Algebra 26, no. 7, 2265–2272.

[4] E. P. Armendariz, (1974), "A note on extensions of Baer and P.P.-rings", J. Austral. Math. Soc. 18 , 470–473.

[5] V. Camillo, P. P. Nielsen, (2008). "McCoy rings and zero-divisors". J. Pure Appl. Algebra 212:599–615.

[6] K. R. Goodearl, (1979), "Von Neumann Regular Rings", Pitman, London.

[7] K. R. Goodearl and R. B. Warfield, Jr., (1989), "An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings", Cambridge University Press.

[8] Lei, Z., Chen, J., Ying, Z. (2007). A question on McCoy rings. Bull. Austral. Math. Soc. 76:137–141.

[9] C. Y. Hong, Y. C. Jeon, N. K. Kim, and Y. Lee, (2011), "The McCoy condition on non-commutative rings", Comm. Algebra 39, no. 5, 1809–1825.

[10] C. Huh, H. K. Kim, and Y. Lee, p.p. (2002) "rings and generalized p.p. rings", J. Pure Appl. Algebra 167, no. 1, 37–52.

[11] C. Huh, Y. Lee, and A. Smoktunowicz, (2002), "Armendariz rings and semicommutative rings", Comm. Algebra 30, no. 2, 751–761.

[12] N. K. Kim and Y. Lee, (2000), "Armendariz rings and reduced rings", J. Algebra 223, no. 2, 477–488.

[13] N. K. Kim and Y. Lee, (2013), "On a Ring Property Unifying Reversible and Right Duo Rings", J. Korean Math. Soc. 50, No. 5, pp. 1083–1103.

[14] Kim, N. K., Lee, Y. (2003). "Extensions of reversible rings". J. Pure Appl. Algebra 185:207–223.

[15] N. H. McCoy, (1957), "Annihilators in polynomial rings". Amer. Math. Monthly 64:28–29.

[16] Nielsen, P. P. (2006). "Semi-commutativity and the McCoy condition". J. Algebra 298:134–141.

[17] M. B. Rege and S. Chhawchharia, (1997), "Armendariz rings", Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 73, no. 1, 14–17.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آبلی	Abelian
استقرا	Induction
ایده‌آل سره	Proper Ideal
پوچ‌توان	Nilpotent
پوچ‌ساز	Annihilator
ترکیب	Combination
تقلیل‌یافته	Reduced
تناقض	Contradiction
جایگشت	Permutation
چگال	Dense
چندجمله‌ای اریب	Skew Polynomial
حدس	Conjecture
حلقه	Ring
حلقه ماتریس مثلثی	Triangular Matrix Ring
حلقه خارج‌قسمتی	Quotient Ring
خودتوان	Idempotent
درجه	Integer
زیر حلقه	Subring
سیستم مستقیم	Direct System
شرکت‌پذیر	Associative
صدق کردن	Satisfy
عبارت	Expression
عضو	Element
فرض	Assume
قبلی	Preceding

قویا مک‌کوی راست .... Strongly Right McCoy
متناهی .... Finite
متغیرها .... Variables
مجموعه یکانی .... Singleton Set
محاسبه .... Computation
مختص .... Coordinate
مرکزی .... Central
مطابق .... According
منظم .... Regular
متغیر مجهول .... Indeterminate
ناجابجایی .... Noncommutating
نتیجه .... Conclusion
نظریه .... View
واضح .... Obvious
همانندکردن .... Identify
تک جمله‌ای .... Monomial

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Abelian	آبلی
According	مطابق
Annihilator	پوچ‌ساز
Associative	شرکت‌پذیر
Assume	فرض
Central	مرکزی
Combination	ترکیب
Computation	محاسبه
Conjecture	حدس
Conclusion	نتیجه
Contradiction	تناقض
Coordinate	مختص
Direct System	سیستم مستقیم
Dense	چگال
Element	عضو
Expression	عبارت
Finite	متناهی
Idempotent	خودتوان
Identify	همانندکردن
Indeterminate	متغیر مجهول
Induction	استقرا
Integer	درجه
Monomial	یک جمله‌ای
Nilpotent	پوچ‌توان
Noncommutating	ناجابجایی

واضح .... Obvious
جایگشت .... Permutation
قبلی .... Preceding
ایده‌آل سره .... Proper Ideal
حلقه خارج‌قسمتی .... Quotient Ring
تقلیل‌یافته .... Reduced
منظم .... Regular
حلقه .... Ring
صدق کردن .... Satisfy
مجموعه یکانی .... Singletion Set
چندجمله‌ای اریب .... Skew Polynomial
قویا مک‌کوی راست .... Strongly Right McCoy
زیر حلقه .... Subring
حلقه ماتریس بالامثلثی .... Triangular Matrix Ring
متغیرها .... Variables
نظریه .... View

Aabstract

Abstract of your thesis.
In this thesis first, we recall the definitions and basic properties of commutative and noncommutative rings. Then we investigate the McCoy rings and examine the examples of this rings. Also, the concepts of reversible right duo and Armandariz rings are known to play important roles in ring theory and independent of one another. In this thesis we focus on a concept that can unify them, calling it a ring Armendariz like ring, but not Armandariz (reversible or right due), we show the difference between right Armendarizlike ring and strongly right McCoy.
Finally, for a regular ring R, it is proved that R is right Armendariz like if and only if R is strongly right McCoy if and only if R is Abelian it is shown that a ring R is right Armendarize like if and only if so the classical right quotient ring.
Keywords: McCoy Ring, Armendariz Ring, Reversible Ring, Ideal, Right Duo Ring.

University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

On a Ring Property Unifying Reversible and Right Duo Rings

Supervisor
Dr. Ebrahim Hashemi

by
Salimeh Ezzati Golmai

2015