دانشگاه شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

**پایان‌نامه کارشناسی ارشد**

# بررسی مسئله کلاه روی گراف

طیبه بالغ

استاد راهنما

**دکتر نادر جعفری‌راد**

تیر ۱۳۹۴

ماحصل آموخته هایم را تقدیم می کنم، به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است.

به استوارترین تکیه گاه ام، دستان پر مهر پدرم

سبزترین نگاه زندگی ام، چشمان مادرم

# سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. سپاس و ستایش خدای عزوجل، که آثار قدرت او بر چهره روز روشن تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درخشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید...

بعد از مدتها، پس از پیمودن راه‌های فراوان با حضور شیرین اساتید عزیزم، با راهنمایی‌ها و دغدغه‌های فراوان‌شان و شیطنت‌های زیبای آن دوران، نگاه‌های پدر و مادرم، با چشم‌های پر از برق شوق و زیبایی حضور خواهران و برادرانم در کنارم، که خستگی‌های این راه را به امید و روشنی راه تبدیل کرده، امیدوارم بتوانم در آینده‌ای نزدیک جواب‌گوی این همه محبت آنها باشم...

اکنون واجب می‌دانم از استاد با کمالات و شایسته‌ام، جناب آقای دکتر نادر جعفری را که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به پایان نمی‌رسید. همچنین از مزاحمت‌های پی در پی که در طی آماده سازی این رساله برایشان به وجود آوردم پوزش می طلبم و برایشان آرزوی توفیق روزافزون دارم.

همچنین از اساتید محترم که زحمت داوری این رساله را تقبل نمودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدسشان را...

طیبه بالغ

تیر ۱۳۹۴

# تعهدنامه

اینجانب **طیبه بالغ** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی مسئله کلاه روی گراف** ، تحت راهنمایی **دکتر نادر جعفری‌راد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

طیبه بالغ

تیر ۱۳۹۴

# مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

# چکیده

**مسئله کلاه:** یک تیم متشکل از $n$ بازیکن وارد یک اتاق شده، هر بازیکن به‌طور تصادفی و مستقل با یک کلاه به رنگ آبی یا قرمز در سر خود مشخص می‌شود. بازیکنان هیچ تصوری از رنگ کلاه خود ندارند، بدون این‌که با هم در ارتباط باشند؛ به طور همزمان هر بازیکن باید رنگ کلاه خود را با نگاه کردن به رنگ کلاه دیگر بازیکنان حدس بزنند. اگر حداقل یکی از بازیکنان رنگ کلاه خود را درست حدس بزند و حدس دیگر بازیکنان نادرست نباشد تیم برنده است در غیر این‌صورت تیم بازنده است. هدف ماکزیمم کردن احتمال برنده شدن تیم است. در این پایان‌نامه مسئله کلاه را روی گراف در نظر می‌گیریم. رئوس، متناظر با بازیکنان و مشاهده‌های هر بازیکن را با یک یال نشان می‌دهیم. مسئله کلاه را روی درختان، مسیرها، گراف‌های کامل و دورها بررسی می‌کنیم و به طور مجزا در هر مورد عدد کلاه را به دست می‌آوریم. همچنین عدد کلاه را برای گراف‌های دو دوری برای اولین بار به دست می‌آوریم. هدف در واقع به‌دست آوردن استراتژی بهینه و قطعی از طریق مجموعه‌ای از راه‌بردهایی که هر بازیکن به‌طور منحصر به‌فرد با توجه به رنگ کلاه دیگر بازیکنان در پیش می‌گیرد و به‌دنبال ماکزیمم کردن احتمال برنده شدن تیم هستیم. این مقدار ماکزیمم، عدد کلاه در گراف نامیده می‌شود و آن را با نماد $h(G)$ نمایش می‌دهیم.

**کلمات کلیدی: استراتژی، درخت، درجه رئوس، گراف دو دوری، مسئله کلاه، مسیر.**

# پیش گفتار

در این پایان‌نامه به طور کلی مسئله کلاه را روی گراف‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی را که در فصل‌های آتی به آن‌ها نیازمندیم را بیان می‌کنیم. در فصل دوم مسئله کلاه را روی برخی گراف‌های خاص مانند درختان و مسیرها بیان و بررسی می‌کنیم و عدد کلاه را به‌طور دقیق به‌دست می‌آوریم و همچنین کران بالایی برای شانس موفقیت با داشتن درجه رئوس به‌دست می‌آوریم و این کران را برای گراف‌های کامل با دو، سه و چهار راس به ترتیب بررسی و ارائه می‌کنیم. در فصل سوم مسئله کلاه را روی دورها در نظر می‌گیریم و عدد کلاه را به طور دقیق به دست می‌آوریم. در فصل چهارم مسئله کلاه را با افزودن یال به رئوس دور $C_۴$ را بیان و بررسی می‌کنیم. در فصل پنجم مسئله کلاه را روی گراف‌های دو دوری را بیان و بررسی می‌کنیم، که مطالب فصل چهارم و پنجم برای اولین بار در این پایان‌نامه ارائه شده است.

**مسئله کلاه:** یک تیم متشکل از $n$ بازیکن وارد یک اتاق شده، هر بازیکن به‌طور تصادفی و مستقل با یک کلاه به رنگ آبی یا قرمز در سر خود مشخص می‌شود. بازیکنان هیچ تصوری از رنگ کلاه خود ندارند، بدون این‌که با هم در ارتباط باشند؛ به طور همزمان هر بازیکن باید رنگ کلاه خود را با نگاه کردن به رنگ کلاه دیگر بازیکنان حدس بزنند. هر بازیکن یکبار شانس نگاه کردن به رنگ کلاه دیگر بازیکنان را

دارد. اگر حداقل یکی از بازیکنان رنگ کلاه خود را درست حدس بزند و حدس دیگر بازیکنان نادرست نباشد تیم برنده است در غیر این‌صورت تیم بازنده است. هدف ماکزیمم کردن احتمال برنده شدن تیم است، این مقدار ماکزیمم، عدد کلاه در گراف نامیده می‌شود و آن را با نماد $h(G)$ نمایش می‌دهیم.

مسئله کلاه در ابتدا به‌عنوان یک معما در نظریه بازی‌ها مطرح شد. تنها آن را به‌عنوان یک معما یا ژیمناستیک ذهنی می‌شناختند و معماهای هوشمندانه‌ای که باعث ورزش ذهن می‌شد در این زمینه مطرح بود. به مرور زمان مسئله کلاه در زمینه‌های زیادی ظاهر شد، از جمله می‌توان به نظریه اطلاعات، اقتصاد، برنامه‌های خطی، ژنتیک و غیره اشاره کرد. مسئله فوق زمینه‌ی جدیدی در ریاضیات، آمار و رشته‌های علوم کامپیوتر بوجود آورد.

اصل مسئله کلاه توسط ایبرت [۱] در زمینه‌ی علوم کامپیوتر در ارتباط با نظریه برنامه نویسی مطرح شد. یک نسخه از مسئله کلاه توسط ایبرت و ولمر [۲] درسال ۲۰۰۰ ارائه شده است. توسط رابینسون [۳] و باهلر [۴] به ترتیب در سال‌های ۲۰۰۱، ۲۰۰۲ دنبال شده است. اولین بار مسئله کلاه روی گراف توسط کرزیوکووسکی [۵] در [۱۶] بیان شده است.

مسئله کلاه، با هفت بازیکن «معمای هفت زندانی» نامیده شده است، که توسط ایبرت در رساله دکتری خود در [۹] ارائه شده است. بعدها تغییرات منحصر به‌فرد بازیکنان مانند زندانیان، کوتوله‌ها، کودکان، سکه‌ها و غیره به‌عنوان افراد بازی در نظر گرفته شده است.

مسئله کلاه و نظریه کد گذاری همینگ [۶] در [۸] بیان گردیده است. مسئله کلاه با $n$ بازیکن و دو کلاه رنگی در [۴] و همچنین برای $۲^k - ۱$ بازیکن در [۱۰] بررسی شده است.

از تغییرات و تعمیمات مسئله فوق می‌توان به موارد زیر اشاره داشت: تعمیم مسئله فوق به $q \geq ۲$ رنگ در [۲۰] بررسی شده است. توزیع تصادفی استراتژی [۷] بازی و استراتژی متقارن در [۱، ۶] در نظر گرفته شده است. نوع دیگر از مسئله فوق بازیکنان باید رنگ کلاه خود را حدس بزنند و مجاز به پاس نیستند در [۱۵] بیان شده است و هدف ماکزیمم کردن حدس‌های درست است. در [۱۱] مسئله کلاه برای طراحی استراتژی که تعداد حدس‌های درست بزرگتر یا مساوی با یک عدد صحیح و مثبت باشد بیان شده است. در [۱۳] توزیع کلاه‌های رنگی که معادل ندارند مطرح شده است. مسئله مشابه به مسئله کلاه در [۲] که $n$ بازیکن وجود دارد و به‌طور تصادفی روی پیشانی هر بازیکن یک بیت قرار گرفته و بازیکنان به طور معادل یکی از این $n$ بیت را باید حدس بزنند بیان شده است.

مسئله کلاه در زمینه‌های علمی و عملی کاربردهای فراوانی دارد؛ از جمله می‌توان به موارد کاربردی زیر اشاره کرد: نظریه اطلاعات در [۳]، برنامه‌های خطی در [۱۱، ۱۴]، برنامه‌های ژنتیک در [۵]، اقتصاد در [۱، ۱۵]، زیست شناسی در [۱۳]، تقریب توابع بولی در [۲] و دنباله‌های متوالی در [۱، ۹، ۱۰] مطرح شده است. در پایان امیدواریم مسئله کلاه قابل تعمیم به بسیاری از برنامه‌های کاربردی و عملی

[۱] Ebert

[۲] Ebert and Vollmer

[۳] Robinson

[۴] Buhler

[۵] Krzywkowski

[۶] Hamming codes

[۷] strategies

دیگر نیز باشد.

ما در این پایان‌نامه مسئله کلاه را روی گراف در نظر می‌گیریم. رئوس، متناظر با بازیکنان و مشاهده‌های هر بازیکن را با یک یال نشان می‌دهیم. اگر حداقل یکی از بازیکنان رنگ کلاه خود را درست حدس بزند و حدس بازیکنان دیگر نادرست نباشد تیم برنده است؛ در غیر این صورت تیم بازنده است. هدف ماکزیمم کردن احتمال برنده شدن تیم است، این مقدار ماکزیمم، عدد کلاه در گراف نامیده می‌شود. برای این منظور مسئله فوق را روی درختان، مسیرها، گراف‌های کامل و دورها بررسی می‌کنیم. در پایان مسئله کلاه را روی گراف‌های دو دوری را برای اولین بار بررسی و بیان می‌کنیم.

# لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. T. Balegh and N. Jafari Rad, *Hat problem on some graphs*, 2st National Industrial Mathematics Conference (NIMC 2015).

2. *On the hat problem on bicyclic graphs*, submitted for publication.

# فهرست مطالب

# لیست جداول

# فصل ۱

# تعاریف و قضایا

**مسئله کلاه:** تیمی متشکل از $n$ بازیکن وارد یک اتاق شده است و هر بازیکن به‌طور تصادفی و مستقل با یک کلاه به رنگ آبی یا قرمز در سر خود مشخص می‌شود. بازیکنان هیچ تصوری از رنگ کلاه خود ندارند. بدون این‌که با هم در ارتباط باشند، هر بازیکن باید با نگاه کردن به رنگ کلاه دیگر بازیکنان رنگ کلاه خود را حدس بزند. مسئله فوق با یک گراف قابل تعریف است، رئوس، متناظر با بازیکنان و مشاهده‌های هر بازیکن را با یک یال نشان می‌دهیم. اگر حداقل یکی از بازیکنان رنگ کلاه خود را درست حدس بزند و بازیکنان دیگر رنگ کلاه خود را نادرست حدس نزنند تیم برنده است در غیر این صورت تیم بازنده است. هدف ماکزیمم کردن احتمال برنده شدن تیم است؛ این مقدار ماکزیمم، عدد کلاه در گراف نامیده می‌شود و آن را با نماد $h(G)$ نمایش می‌دهیم.

در این فصل به بیان تعاریف، نمادها و واژگان مقدماتی و همچنین قضایایی که در فصل‌های آتی به آن‌ها نیازمندیم می‌پردازیم.

**تعریف ۱.۰.۱.** [۱۶] **گراف** $G$ یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$، متشکل از مجموعه‌ای ناتهی $V(G)$ی راس‌ها، مجموعه‌ای $E(G)$ی یال‌ها مجزا از $V(G)$، و تابع وقوع $\psi_G$ است که با هر یال $G$ یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از راس‌های $G$ را همراه می‌کند. فرض کنید $H$ و $G$ دو گراف باشند. $H$ **زیر گراف** $G$ است هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد و آن را با نماد $H \subseteq G$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۲.۰.۱.** [۱۶] فرض کنید $v \in V(G)$ باشد. **همسایگی** باز راس $v$ را با نماد $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم که عبارت است از $N_G(v) = \{x \in V(G) : vx \in E(G)\}$. همسایگی بسته راس $v$ را به صورت $N_G[v] = N_G(v) \bigcup \{v\}$ تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۳.۰.۱.** [۱۶] **درجه راس** را که با نماد $d_G(v)$ نمایش می‌دهیم، برابر با تعداد همسایه‌های راس $v$ است. به عبارت دیگر $d_G(v) =\mid N_G(v) \mid$.

**تعریف ۴.۰.۱.** [۱۶] یک **گشت** به طول $k$ یک دنباله‌ی $v_۰, e_۰, v_۱, e_۱, \dots, e_n, v_n$ متناوباً از راس‌ها و یال‌ها است که به ازای هر $i$ داریم: $e_i = v_{i-۱}v_i$. یک **گذر** گشتی است که هیچ یال تکراری نداشته

باشد. یک **مسیر** گشتی است که هیچ راس تکراری نداشته باشد. یک **دور** گذر بسته‌ای به طول حداقل یک است که در آن نخستین و آخرین راس تنها رئوس تکراری هستند. **گراف کامل** گرافی است که بین هر دو راس آن یک یال موجود باشد. مسیر و دور با $n$ راس را به ترتیب با $P_n$ و $C_n$ نمایش می‌دهیم و گراف کامل با $n$ راس را با $K_n$ نمادگذاری می‌کنیم.

**تعریف ۱.۰.۵.** [۱۶] بدون کاستن از کلیت، مجموعه رئوس گراف $G$ را $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ در نظر بگیرید. تابع رنگ آمیزی گراف $G$ را به‌صورت $c : V(G) \to \{b, r\}$ تعریف می‌کنیم که $\{b, r\}$ مجموعه‌ای از **رنگ‌ها** است، $b$ رنگ آبی و $r$ رنگ قرمز است. برای هر راس $v_i \in V(G)$ رنگ راس $v_i$ را با نماد $c(v_i)$ نمایش می‌دهیم. یک **حالت رنگی** گراف $G$ دنباله‌ای به‌صورت $(c(v_1), c(v_2), \dots, c(v_n))$ است. مجموعه همه حالت‌های رنگی گراف $G$ را با نماد $C(G)$ نمایش می‌دهیم که عبارت است از $|C(G)| = 2^{|V(G)|}$.

**تعریف ۱.۰.۶.** [۱۶] برای هر راس $v_i \in V(G)$ تابع **موقعیت** را به صورت $s_i : V(G) \to \{b, r, *\}$ تعریف می‌کنیم. اگر راس $v_i$ بتواند راس $v_j$ را ببیند آنگاه $s_i(v_j) \in \{b, r\}$ است و در غیر این صورت $s_i(v_j) = *$ است. اگر $v_j \in N_G(v_i)$ باشد آنگاه $s_i(v_j) = c(v_j)$ است. اگر $v_j \in V(G) - N_G(v_i)$ باشد آنگاه $s_i(v_j) = *$ است. موقعیت هر راس $v_i$ در گراف $G$ را به‌صورت دنباله‌ای از $(s_i(v_1), s_i(v_2), \dots, s_i(v_n))$ نمایش می‌دهیم. مجموعه همه موقعیت‌های راس $v_i$ را با نماد $St_i(G)$ نشان می‌دهیم که عبارت است از $|St_i(G)| = 2^{|N_G(v_i)|}$.

**تعریف ۱.۰.۷.** [۱۶] فرض کنید $v_i \in V(G)$ باشد. با تغییر هر علامت $*$ به رنگ $b$ یا $r$ یک موقعیت جدید ایجاد می‌شود. **حالت** رنگی $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ با **موقعیت** $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ از راس $v_i$ در گراف $G$ متناظر است. اگر هر راس مجاور به $v_i$ در حالت رنگی و موقعیت به وجود آمده رنگ یکسانی داشته باشد آنگاه حالت رنگی راس $v_i$ با موقعیت آن متناظر است. هر موقعیت از راس $v_i$ در گراف $G$ با $2^{|V(G)|-|N_G(v_i)|}$ حالت متناظر است، زیرا برای هر موقعیت راس $v_i$، $|V(G)| - |N_G(v_i)|$ حالت علامت $*$ پیش می‌آید.

**تعریف ۱.۰.۸.** [۱۶] فرض کنید $H$ و $G$ دو گراف باشند که $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$، $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m, \dots, v_n\}$ و $E(H) \subseteq E(G)$ است. حالت رنگی $(a_1, a_2, \dots, a_m, \dots, a_n)$ برای گراف $G$ با حالت رنگی $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ برای گراف $H$ متناظر است هرگاه $(a_1, a_2, \dots, a_m) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ باشد، به عبارت دیگر هر راس از گراف $H$ در هر دو حالت رنگی، رنگ یکسانی داشته باشد. هر حالت رنگی گراف $H$ با $2^{n-m}$ حالت رنگی گراف $G$ متناظر است.

**تعریف ۱.۰.۹.** [۱۶] فرض کنید $H$ و $G$ دو گراف باشند که $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$، $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m, \dots, v_n\}$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد. موقعیت $(t_1, t_2, \dots, t_m, \dots, t_n)$ از راس $v_i$ در گراف $G$ با موقعیت $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ راس $v_i$ در گراف $H$ متناظر است هرگاه $(t_1, t_2, \dots, t_m) = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ باشد، به عبارت دیگر هر راس مجاور به $v_i$ در گراف $H$ در هر دو موقعیت رنگ یکسانی داشته باشد.

**تعریف ۱.۰.۱۰.** [۱۶] اظهار نظر کردن هر راس در مورد رنگ کلاهش را بیان **وضعیت** آن راس می‌نامیم. بیان وضعیت، **برنده** یا **بازنده** بودن هر حالت رنگی را نتیجه می‌دهد. با توجه به تعریف مسئله کلاه، اگر حداقل یک راس رنگ خود را درست بیان کند و رئوس دیگر رنگ خود را نادرست بیان نکنند آنگاه نتیجه حالت برنده است. اگر راسی رنگ خود را بیان نکند یا بعضی رئوس رنگ خود را نادرست بیان کنند آنگاه نتیجه حالت بازنده است.

**تعریف ۱.۰.۱۱.** [۱۶] قاعده‌ای که رفتار هر راس $v_i$ را در هر موقعیت مشخص می‌کند را **دستورکار حدس** می‌نامیم و آن را با نماد $g_i$ نمایش می‌دهیم. تابع دستورکار حدس را به صورت $g_i : St_i(G) \to \{b, r, p\}$ تعریف می‌کنیم. برای یک موقعیت معین که راس $v_i$ رنگ خود را بیان کند رنگ $b$ یا $r$ را داریم یا اگر راس $v_i$ رنگ خود را بیان نکند آنگاه حرف $p$ را داریم. **استراتژی** گراف $G$ را دنباله‌ای به‌صورت $(g_۱, g_۲, \ldots, g_n)$ نمایش می‌دهیم. خانواده همه استراتژی‌های گراف $G$ را با $F(G)$ نمادگذاری می‌کنیم.

**تعریف ۱.۰.۱۲.** [۱۶] فرض کنید $v_i \in V(G)$ و $S \in F(G)$ باشد. اگر $v_i$ در هر **موقعیت** با استراتژی $S$ هرگز رنگ خود را بیان نکند آنگاه $g_i \equiv p$ است. اگر راس $v_i$ همیشه در هر موقعیت با استراتژی $S$ رنگ خود را بیان کند آنگاه برای هر $T \in St_i(G)$ داریم $g_i(T) \in \{b, r\}$ که با $g_i(T) \neq p$ معادل است.

**تعریف ۱.۰.۱۳.** [۱۶] فرض کنید $S \in F(G)$. مجموعه حالت‌های رنگی گراف $G$ را که تیم برنده یا بازنده است را به ترتیب با $Cw(S)$ و $Cl(S)$ نمادگذاری می‌کنیم؛ داریم:

$$\mid Cw(S) \mid + \mid Cl(S) \mid = \mid C(G) \mid$$

**تعریف ۱.۰.۱۴.** [۱۶] احتمال موفقیت هر استراتژی $S$ را با نماد $p(S)$ نمادگذاری می‌کنیم. شانس موفقیت استراتژی $S$ برابر با $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G)|}$ است. عدد کلاه گراف $G$ را به صورت $h(G) = max\{p(S) : S \in F(G)\}$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که $p(S) \leq h(G)$ است.

**تعریف ۱.۰.۱۵.** برای یک گراف $G$، اگر $p(S) = h(G)$ باشد آنگاه استراتژی $S$ بهینه است. خانواده همه استراتژی‌های بهینه گراف $G$ را با $F^\circ(G)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۱.۰.۱۶.** [۱۶] فرض کنید $t, m_۱, m_۲, \ldots, m_t \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$، که برای هر $j, k \in \{۱, ۲, \ldots, t\}$ ، $m_j \neq m_k$ و $c_{m_j} \in \{b, r\}$ است. رنگ هر راس $v_{m_j}$ را با $c_{m_j}$ نمایش می‌دهیم. مجموعه حالت‌های رنگی گراف $G$ را به صورت $C(G, v_{m_۱}^{c_{m_۱}}, v_{m_۲}^{c_{m_۲}}, \ldots, v_{m_t}^{c_{m_t}})$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید $S \in F(G)$. مجموعه حالت‌های رنگی گراف $G$ را با $Cw(S, v_{m_۱}^{c_{m_۱}}, v_{m_۲}^{c_{m_۲}}, \ldots, v_{m_t}^{c_{m_t}})$ یا $Cl(S, v_{m_۱}^{c_{m_۱}}, v_{m_۲}^{c_{m_۲}}, \ldots, v_{m_t}^{c_{m_t}})$ نمایش می‌دهیم که به‌ترتیب مجموعه حالت‌های رنگی است که تیم برنده یا بازنده است. هر دو مجموعه فوق متعلق به مجموعه $C(G, v_{m_۱}^{c_{m_۱}}, v_{m_۲}^{c_{m_۲}}, \ldots, v_{m_t}^{c_{m_t}})$ است.

**تعریف ۱.۰.۱۷.** [۱۶] فرض کنید $v_i \in V(G)$. اگر برای هر $j \in \{۱, ۲, \ldots, t\}$، $v_{m_j} \in N_G(v_i)$ باشد آنگاه مجموعه موقعیت‌های ممکن هر راس $v_i$ را به صورت $St_i(G, v_{m_۱}^{c_{m_۱}}, v_{m_۲}^{c_{m_۲}}, \ldots, v_{m_t}^{c_{m_t}})$ تعریف می‌کنیم و رنگ هر راس $v_{m_j}$ را با $c_{m_j}$ نمایش می‌دهیم.

**قضیه ۱.۰.۱۸.** *[۱۶] فرض کنید $G$ و $H$ دو گراف باشند. اگر $H \subseteq G$ باشد آن‌گاه $h(H) \leq h(G)$.*

***برهان.*** فرض کنید $H \subseteq G$ باشد. هر راس از مجموعه $V(G) - V(H)$ نمی‌تواند همیشه رنگ خود را بیان نکند و رنگ هر راس $v_i \in V(H)$ از مجموعه $N_G(v_i) - N_H(v_i)$ را نمی‌توان نادیده گرفت. بنابراین عدد کلاه گراف $G$ بزرگتر یا مساوی با عدد کلاه گراف $H$ است. □

**نتیجه ۱.۰.۱۹.** *برای هر گراف $G$ داریم: $h(G) \geq \frac{1}{2}$.*

***برهان.*** چون‌که $K_1$ زیرگراف هر گرافی است، پس با توجه به قضیه (۱.۰.۱۸)، $h(G) \geq \frac{1}{2}$ است. □

**تعریف ۱.۰.۲۰.** [۱۶] فرض کنید $S$ یک استراتژی بهینه برای گراف $G$ باشد. با توجه به تعریف (۱.۰.۱۵)، $p(S) = h(G)$ است. از این‌که $h(G) \geq \frac{1}{2}$، درنتیجه $p(S) \geq \frac{1}{2}$.

اکنون در قضیه بعد تعداد حالت‌هایی که بیان وضعیت هر راس بازنده بودن تیم را نتیجه می‌دهد را مشخص می‌کنیم.

**قضیه ۱.۰.۲۱.** *[۱۶] فرض کنید $G$ یک گراف و $v_i$ راسی از $G$ و $S \in F(G)$ باشد. اگر راس $v_i$ رنگ خود را در یک موقعیت بیان کند آن‌گاه در حداقل $\frac{1}{2}$ همه حالت‌های رنگی متناظر با این موقعیت تیم بازنده است.*

***برهان.*** فرض کنید راس $v_i$ در موقعیت $T$ رنگ خود را بیان کند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید راس $v_i$ رنگ خود را در موقعیت $T$ آبی بیان کند پس $g_i(T) = b$ است. در یک دوم همه حالت‌های رنگی متناظر با موقعیت $T$، $c(v_i) = r$ است و این بدان معنا است که رنگ راس $v_i$ قرمز است. پس $g_i(T) = b \neq r = c(v_i)$ است. بنابراین راس $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند. در نتیجه در هر یک از این حالات تیم بازنده است. □

**قضیه ۱.۰.۲۲.** *[۱۶] فرض کنید $G$ یک گراف و $v$ راسی از $G$ باشد. اگر $S \in F^{\circ}(G)$ یک استراتژی باشد که راس $v$ رنگ خود را همیشه بیان کند آن‌گاه $h(G) = \frac{1}{2}$.*

***برهان.*** فرض کنید راس $v$ در هر حالت رنگ خود را بیان کند. با توجه به قضیه (۱.۰.۲۱) داریم: $|Cl(S)| \geq \frac{|C(G)|}{2}$. پس

$$p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G)|} = \frac{|C(G)| - |Cl(S)|}{|C(G)|} \leq \frac{|C(G)| - \frac{|C(G)|}{2}}{|C(G)|} = \frac{1}{2}$$

بنابراین $p(S) \leq \frac{1}{2}$ است. چون که $S \in F^{\circ}(G)$، پس با توجه به تعریف (۱.۰.۱۵)، $h(G) \leq \frac{1}{2}$. از طرفی $h(G) \geq \frac{1}{2}$، در نتیجه $h(G) = \frac{1}{2}$. □

در قضیه بعد ثابت می‌کنیم با داشتن شرایط کافی می‌توان یک راس را از گراف $G$ حذف کرد بدون این‌که عدد کلاه گراف تغییر کند.

**قضیه ۱.۰.۲۳.** *[۱۶] فرض کنید $G$ یک گراف و $v$ راسی از $G$ باشد. اگر $S \in F^{\circ}(G)$ یک استراتژی باشد که راس $v$ هرگز رنگ خود را بیان نکند آن‌گاه $h(G) = h(G - v)$.*

***برهان.*** فرض کنید استراتژی $S' \in F(G-v)$ به صورت زیر باشد. اگر راسی مجاور به راس $v$ در گراف $G$ نباشد آن‌گاه گراف $G$ بر طبق استراتژی $S$ رفتار می‌کند. اگر $v_i \notin N_G(v)$ نباشد آن‌گاه دستور کار حدس هر راس $v_i$ با استراتژی $S$ و $S'$ را به ترتیب با $g_i$ و $g'_i$ نمادگذاری می‌کنیم، در نتیجه $g'_i = g_i$. حال در ابتدا فرض کنید $| Cw(S,v^r) | \geq | Cw(S,v^b) |$ باشد و فرض کنید هر راس مجاور راس $v$ در گراف $G$ زمانی‌که راس $v$ آبی است بر اساس استراتژی $S$ رفتار کند. در این صورت اگر $v_i \in N_G(v)$ باشد آن‌گاه $g'_i = g_{i|St_i(G,v^b)}$ است. نتیجه هر حالت رنگی $C'$ با استراتژی $S'$ با نتیجه هر حالت رنگی $C$ با استراتژی $S$ یکسان است، در حالی که حالت رنگی $C$ متناظر با حالتی است که راس $v$ آبی است. چون که در هر دو استراتژی $S$ و $S'$ راس $v$ هرگز رنگ خود را بیان نمی‌کند پس استراتژی $S'$ با استراتژی $S$ زمانی‌که $v$ آبی است یکسان رفتار می‌کنند. این بدان معنا است که $| Cw(S,v^b) | = | Cw(S') |$. در نتیجه

$$p(S') = \frac{| Cw(S') |}{۲^{|V(G-v)|}} = \frac{| Cw(S,v^b) |}{۲^{|V(G)|-۱}} = \frac{۲ \ | Cw(S,v^b) |}{۲^{|V(G)|}}$$
$$\geq \frac{| Cw(S,v^b) | + | Cw(S,v^r) |}{۲^{|V(G)|}} = p(S)$$

اگر $| Cw(S,v^r) | < | Cw(S,v^b) |$ باشد آن‌گاه به‌طور مشابه ثابت می‌شود که $p(S') > p(S)$. چون که $S \in F^{\circ}(G)$ و $S' \in F(G-v)$، پس خواهیم داشت:

$$h(G) = p(S) \leq p(S') \leq h(G-v)$$

از طرفی $h(G) \geq h(G-v)$، در نتیجه $h(G) = h(G-v)$. $\square$

فرض کنید $S$ یک استراتژی برای گراف $G$ باشد. فرض کنید $C$ حالت رنگی باشد که بعضی رئوس رنگ خود را بیان می‌کنند، با توجه به تعریف مسئله کلاه، یک حالت بیان وضعیت درست برنده بودن تیم را نتیجه می‌دهد و یک حالت بیان وضعیت نادرست بازنده بودن تیم را نتیجه می‌دهد. روشن است بیان وضعیت رئوس دیگر نمی‌توانند نتیجه هر حالت رنگی $C$ را بهبود ببخشند.

# فصل ۲

# مسئله کلاه روی درختان و برخی گراف‌های خاص

## ۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا مسئله کلاه را روی مسیرها و درختان بیان و بررسی می‌کنیم، سپس کران بالایی برای شانس موفقیت با داشتن درجه رئوس ارائه می‌کنیم. در پایان فصل چند مثال را روی گراف‌های کامل در نظر می‌گیریم و در هر مورد عدد کلاه را به‌طور دقیق به‌دست می‌آوریم.

## ۲.۲ محاسبه عدد کلاه

**قضیه ۱.۲.۲.** *[۱۶] برای هر مسیر $P_n$ داریم: $h(P_n) = \frac{1}{2}$.*

***برهان.*** فرض کنید $V(P_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ و $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n\}$ باشد. شش حالت $n = 1$، $n = 2$، $n = 3$، $n = 4$، $n = 5$ و $n \geq 6$ را در زیر در نظر می‌گیریم.

در ابتدا فرض کنید $n = 1$ باشد. چون که $P_1 = K_1$ است. در نتیجه $h(P_1) = h(K_1) = \frac{1}{2}$.

فرض کنید $n = 2$ باشد. فرض کنید $S$ یک استراتژی بهینه برای $P_2$ باشد. اگر بعضی رئوس مانند $v_i$ هرگز رنگ خود را بیان نکنند آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۳.۰.۱) داریم: $h(P_2) = h(P_2 - v_i)$. چون $P_2 - v_i = P_1$، در نتیجه $h(P_2) = h(P_1) = \frac{1}{2}$. اکنون فرض کنید $v_1$ و $v_2$ رنگ خود را بیان کنند. اگر یکی از رئوس رنگ خود را همیشه بیان کند آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۲.۰.۱) داریم: $h(P_2) = \frac{1}{2}$. اگر $v_1$ یا $v_2$ همیشه رنگ خود را بیان نکنند آن‌گاه بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید راس $v_1$ زمانی‌که راس $v_2$ آبی است رنگ خود را بیان کند و دراین موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. چهار احتمال زیر را در مورد $v_2$ در نظر می‌گیریم.

(۲.۱) $g_2(b,*)=b$.

(۲.۲) $g_2(b,*)=r$.

(۲.۳) $g_2(r,*)=b$.

(۲.۴) $g_2(r,*)=r$.

در جداولی که در زیر ارائه شده است $b$ رنگ آبی، $r$ رنگ قرمز، + بیان وضعیت درست (برنده)، − بیان وضعیت نادرست (بازنده) و مربع خالی راس $v_i$ ($i \in \{1,2\}$) رنگ خود را بیان نمی‌کند، نماد گذاری می‌کنیم.

جدول ۲.۱: $g_2(b,*)=b$

| شماره | رنگ رئوس | | بیان وضعیت رئوس | | نتیجه |
|---|---|---|---|---|---|
| | $v_1$ | $v_2$ | $v_1$ | $v_2$ | |
| ۱ | $b$ | $b$ | + | + | + |
| ۲ | $b$ | $r$ | | − | − |
| ۳ | $r$ | $b$ | − | | − |
| ۴ | $r$ | $r$ | | | − |

جدول ۲.۲: $g_2(b,*)=r$

| شماره | رنگ رئوس | | بیان وضعیت رئوس | | نتیجه |
|---|---|---|---|---|---|
| | $v_1$ | $v_2$ | $v_1$ | $v_2$ | |
| ۱ | $b$ | $b$ | + | − | − |
| ۲ | $b$ | $r$ | | + | + |
| ۳ | $r$ | $b$ | − | | − |
| ۴ | $r$ | $r$ | | | − |

جدول ۲.۳: $g_2(r,*)=b$

| شماره | رنگ رئوس | | بیان وضعیت رئوس | | نتیجه |
|---|---|---|---|---|---|
| | $v_1$ | $v_2$ | $v_1$ | $v_2$ | |
| ۱ | $b$ | $b$ | + | | + |
| ۲ | $b$ | $r$ | | | − |
| ۳ | $r$ | $b$ | − | + | − |
| ۴ | $r$ | $r$ | | − | − |

جدول ۴.۲: $g_{۲}(r,*) = r$

| شماره | رنگ رئوس | | بیان وضعیت رئوس | | نتیجه |
|---|---|---|---|---|---|
| | $v_۱$ | $v_۲$ | $v_۱$ | $v_۲$ | |
| ۱ | $b$ | $b$ | + | | + |
| ۲ | $b$ | $r$ | | | − |
| ۳ | $r$ | $b$ | − | − | − |
| ۴ | $r$ | $r$ | | + | + |

در جداول ۱.۲؛ ۲.۲؛ ۳.۲ داریم: $\mid Cw(S) \mid = ۱$ و $\mid C(P_۲) \mid = ۴$. بنابراین داریم:

$$p(S) = \frac{\mid Cw(S) \mid}{\mid C(P_۲) \mid} = \frac{۱}{۴} < \frac{۱}{۲}$$

این با $p(S) \geq \frac{۱}{۲}$ در تناقض است.

اما در جدول ۴.۲ داریم: $\mid Cw(S) \mid = ۲$ و $\mid C(P_۲) \mid = ۴$. بنابراین $p(S) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$ است. چون $S \in F^{\circ}(P_۲)$، در نتیجه $h(P_۲) = \frac{۱}{۲}$.

فرض کنید $n = ۳$ و $S$ یک استراتژی بهینه برای $P_۳$ باشد. اگر $v_۱$ یا $v_۳$ هرگز رنگ خود را بیان نکنند، بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ رنگ خود را بیان نکند آنگاه با توجه به قضیه (۲۳.۰.۱) داریم: $h(P_۳) = h(P_۳ - v_۱)$. چون $P_۳ - v_۱ = P_۲$، در نتیجه $h(P_۳) = h(P_۲) = \frac{۱}{۲}$. اکنون فرض کنید $v_۱$ و $v_۳$ رنگ خود را بیان کنند. اگر $v_۱$ یا $v_۳$ همیشه رنگ خود را بیان کنند آنگاه با توجه به قضیه (۲۲.۰.۱) داریم: $h(P_۳) = \frac{۱}{۲}$. اگر راس $v_۱$ یا $v_۳$ همیشه رنگ خود را بیان نکنند آنگاه بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ رنگ خود را زمانی‌که $v_۲$ آبی است بیان کند، و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. دو احتمال زیر را در مورد $v_۳$ در نظر می‌گیریم:

(۱) $v_۳$ زمانی‌که $v_۲$ آبی است رنگ خود را بیان کند.

(۲) $v_۳$ زمانی‌که $v_۲$ آبی است رنگ خود را بیان نمی‌کند.

(۱) فرض کنید استراتژی $S'$ متفاوت با استراتژی $S$ باشد و تنها تفاوت این دو استراتژی در این است که $v_۳$ زمانی‌که $v_۲$ آبی است رنگ خود را بیان نمی‌کند. در هر حالت که $v_۲$ آبی است $v_۱$ رنگ خود را بیان می‌کند پس بیان وضعیت $v_۳$ نمی‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهتر کند. بنابراین $p(S) \leq p(S')$. چون $S \in F^{\circ}(P_۳)$، پس استراتژی $S'$ نیز برای $P_۳$ بهینه است. اگر $v_۳$ هرگز رنگ خود را با استراتژی $S'$ بیان نکند احتمالاتی که قبلاً درمورد استراتژی $S$ داشتیم را در نظر می‌گیریم. حال وقتی که $v_۳$ رنگ خود را بیان می‌کند در قسمت (۲) در نظر می‌گیریم.

(۲) یقیناً $v_۳$ زمانی‌که $v_۲$ قرمز باشد رنگ خود را بیان می‌کند. چون‌که $v_۱$ ( $v_۳$، به ترتیب) زمانی‌که $v_۲$ آبی ( قرمز ، به ترتیب) باشد رنگ خود را بیان می‌کند، با توجه به قضیه (۲۱.۰.۱) داریم:

$$\mid Cl(S, v_۲^b) \mid \geq \frac{\mid C(P_۳, v_۲^b) \mid}{۲}, \qquad \mid Cl(S, v_۲^r) \mid \geq \frac{\mid C(P_۳, v_۲^r) \mid}{۲}$$

$$| Cl(S) |=| Cl(S, v_۲^b) | + | Cl(S, v_۲^r) | \geq \frac{| C(P_۳, v_۲^b) |}{۲} + \frac{| C(P_۳, v_۲^r) |}{۲} = \frac{| C(P_۳) |}{۲}$$

پس

$$p(S) = \frac{| Cw(S) |}{| C(P_۳) |} = \frac{| C(P_۳) | - | Cl(S) |}{| C(P_۳) |} \leq \frac{| C(P_۳) | - \frac{|C(P_۳)|}{۲}}{| C(P_۳) |} = \frac{۱}{۲}$$

از این‌که $S \in F^\circ(P_۳)$ یک استراتژی بهینه برای $P_۳$ است، پس $h(P_۳) \leq \frac{۱}{۲}$، از طرفی $h(P_۳) \geq \frac{۱}{۲}$، در نتیجه $h(P_۳) = \frac{۱}{۲}$.

فرض کنید $n = ۴$ و $S$ یک استراتژی بهینه برای $P_۴$ باشد. اگر بعضی رئوس مانند $v_i$ هرگز رنگ خود را بیان نکنند آن‌گاه بنا به قضیه (۲۳.۰.۱) داریم: $h(P_۴) = h(P_۴ - v_i)$. اگر $i \in \{۱, ۴\}$ باشد آن‌گاه $P_۴ - v_i = P_۳$، بنابراین خواهیم داشت: $h(P_۴) = h(P_۳) = \frac{۱}{۲}$. اگر $i \in \{۲, ۳\}$ باشد آن‌گاه $P_۴ - v_i = P_۱ \cup P_۲$ است. چون $P_۱ \cup P_۲ \subseteq P_۳$، پس با توجه به قضیه (۱۸.۰.۱) داریم: $h(P_۱ \cup P_۲) \leq h(P_۳) = \frac{۱}{۲}$. بنابراین $h(P_۴) = h(P_۱ \cup P_۲) \leq \frac{۱}{۲}$، از طرفی $h(P_۴) \geq \frac{۱}{۲}$، در نتیجه $h(P_۴) = \frac{۱}{۲}$. اکنون فرض کنید هر راس رنگ خود را بیان کند. اگر بعضی رئوس رنگ خود را همیشه بیان کنند آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۲.۰.۱) داریم: $h(P_۴) = \frac{۱}{۲}$. اگر هیچ راس رنگ خود را همیشه بیان نکند آن‌گاه بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ زمانی‌که $v_۲$ آبی است رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. به‌طور مشابه از این‌که $N_{P_۴}[v_۱] \cap N_{P_۴}[v_۴] = \phi$ است. فرض کنید $v_۴$ زمانی‌که $v_۳$ آبی است رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. دو احتمال زیر را درمورد $v_۲$ و $v_۳$ در نظر می‌گیریم:

(۱) $v_۲$ زمانی‌که $v_۳$ آبی است رنگ خود را بیان می‌کند یا $v_۳$ زمانی‌که $v_۲$ آبی است رنگ خود را بیان می‌کند.

(۲) $v_۲$ زمانی‌که $v_۳$ آبی است رنگ خود را بیان نمی‌کند و $v_۳$ زمانی‌که $v_۲$ آبی است رنگ خود را بیان نمی‌کند.

(۱) فرض کنید استراتژی $S'$ متفاوت با استراتژی $S$ باشد و تنها تفاوت این دو استراتژی در این است که $v_۲$ زمانی‌که $v_۳$ آبی است رنگ خود را بیان نمی‌کند یا $v_۳$ زمانی‌که $v_۲$ آبی است رنگ خود را بیان نمی‌کند. چون که در هر حالت $v_۳$ ($v_۲$، به ترتیب) آبی است $v_۴$ ($v_۱$، به ترتیب) رنگ خود را بیان می‌کند. بیان وضعیت $v_۲$ ($v_۳$، به ترتیب) نمی‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهتر کند. بنابراین $p(S) \leq p(S')$. از این‌که $S \in F^\circ(P_۴)$، پس استراتژی $S'$ نیز برای $P_۴$ بهینه است. اگر $v_۲$ یا $v_۳$ با استراتژی $S'$ هرگز رنگ خود را بیان نکند احتمالاتی که قبلاً درمورد استراتژی $S$ داشتیم را در نظر می‌گیریم. حال وقتی که $v_۲$ و $v_۳$ رنگ خود را بیان می‌کنند در قسمت (۲) در نظر می‌گیریم.

(۲) اگر $c(v_۱) = r$ و $c(v_۲) = b$ یا $c(v_۳) = b$ و $c(v_۴) = r$ باشد آن‌گاه تیم در ۷ حالت بازنده است، زیرا $v_۲$ تنها زمانی‌که $v_۳$ قرمز باشد رنگ خود را بیان می‌کند. چهار احتمال زیر را در مورد $v_۲$ در نظر می‌گیریم:

(۲.۱) $g_۲(b, *, r, *) = b$.

**(۲.۲)** $g_2(b,*,r,*)=r$.
**(۲.۳)** $g_2(r,*,r,*)=b$.
**(۲.۴)** $g_2(r,*,r,*)=r$.

احتمال (۲.۱) چون که

$$|\ Cl(S,v_1^b,v_2^r,v_3^r)\ |=|\ C(P_4,v_1^b,v_2^r,v_3^r)\ |=2$$

داریم:

$$C(P_4,v_1^b,v_2^r,v_3^r)\cap\left(C(P_4,v_1^r,v_2^b)\cup C(P_4,v_3^b,v_4^r)\right)=\phi$$

پس تیم در حداقل $9=2+7$ حالت بازنده است. بنابراین تیم در ۷ حالت برنده است، پس $p(S)\leq\frac{7}{16}<\frac{1}{2}$، و این با $p(S)\geq\frac{1}{2}$ در تناقض است. احتمال (۲.۲) و (۲.۳) مشابه احتمال (۲.۱) حل می‌شود.

احتمال (۲.۴)، $v_3$ تنها زمانی‌که $v_2$ قرمز باشد رنگ خود را بیان می‌کند. بنابراین چهار احتمال زیر را در مورد $v_3$ در نظر می‌گیریم:

**(۲.۴.۱)** $g_3(*,r,*,b)=b$.
**(۲.۴.۲)** $g_3(*,r,*,b)=r$.
**(۲.۴.۳)** $g_3(*,r,*,r)=b$.
**(۲.۴.۴)** $g_3(*,r,*,r)=r$.

احتمالات (۲.۴.۱)، (۲.۴.۲)، (۲.۴.۳) بدون در نظر گرفتن دنباله‌ای از بیان وضعیت $v_2$ مشابه با احتمالات (۲.۱)، (۲.۲)، (۲.۳) عمل می‌کنند.

(۲.۴.۴) تحلیل این احتمال در جدول ۵.۲ ارائه شده است. داریم: $|\ Cw(S)\ |=8$ و $|\ C(P_4)\ |=16$. بنابراین $p(S)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ است. چون $S\in F^{\circ}(P_4)$، در نتیجه $h(P_4)=\frac{1}{2}$.

اکنون فرض کنید $n=5$ و $S$ یک استراتژی بهینه برای $P_5$ باشد. اگر برای هر $i\in\{1,3,5\}$، راس $v_i$ رنگ خود را بیان نکند آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۳.۰.۱) داریم: $h(P_5)=h(P_5-v_i)$. اگر $i\in\{1,5\}$ باشد آن‌گاه $P_5-v_i=P_4$، در نتیجه $h(P_5)=h(P_4)=\frac{1}{2}$. اگر $i=3$ باشد آن‌گاه $P_5-v_3=P_2\cup P_2$ است. از آن‌جایی که $P_2\cup P_2\subseteq P_4$، با توجه به قضیه (۱۸.۰.۱) داریم: $h(P_2\cup P_2)\leq h(P_4)=\frac{1}{2}$. پس $h(P_5)\leq\frac{1}{2}$، از طرفی $h(P_5)\geq\frac{1}{2}$، در نتیجه $h(P_5)=\frac{1}{2}$.

اینک فرض کنید هر راس از مجموعه $\{v_1,v_3,v_5\}$ رنگ خود را بیان کند. اگر بعضی رئوس رنگ خود را همیشه بیان کنند آن‌گاه بنابه قضیه (۲۲.۰.۱) داریم: $h(P_5)=\frac{1}{2}$. اگر هیچ راس از مجموعه $\{v_1,v_3,v_5\}$ همیشه رنگ خود را بیان نکند آن‌گاه بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_1$ زمانی‌که $v_2$ آبی است رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. به‌طور مشابه، از آنجایی‌که $N_{P_5}[v_1]\cap N_{P_5}[v_5]=\phi$ است. فرض کنید $v_5$ زمانی‌که $v_4$ آبی است رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. دو احتمال زیر را در مورد $v_3$ در نظر می‌گیریم:

**(۱)** $v_3$ زمانی‌که $v_2$ یا $v_4$ آبی باشد رنگ خود را بیان می‌کند.

**(۲)** $v_3$ زمانی‌که $v_2$ یا $v_4$ آبی باشد رنگ خود را بیان نمی‌کند.

جدول ۵.۲: $g_3(*, r, *, r) = r$

| شماره | رنگ رئوس | | | | بیان وضعیت رئوس | | | | نتیجه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | |
| ۱ | $b$ | $b$ | $b$ | $b$ | + | | | + | + |
| ۲ | $b$ | $b$ | $b$ | $r$ | + | | | − | − |
| ۳ | $b$ | $b$ | $r$ | $b$ | + | | | | + |
| ۴ | $b$ | $b$ | $r$ | $r$ | + | | | | + |
| ۵ | $b$ | $r$ | $b$ | $b$ | | | | + | + |
| ۶ | $b$ | $r$ | $b$ | $r$ | | | − | − | − |
| ۷ | $b$ | $r$ | $r$ | $b$ | | | | | − |
| ۸ | $b$ | $r$ | $r$ | $r$ | | | + | | + |
| ۹ | $r$ | $b$ | $b$ | $b$ | − | | | + | − |
| ۱۰ | $r$ | $b$ | $b$ | $r$ | − | | | − | − |
| ۱۱ | $r$ | $b$ | $r$ | $b$ | − | − | | | − |
| ۱۲ | $r$ | $b$ | $r$ | $r$ | − | − | | | − |
| ۱۳ | $r$ | $r$ | $b$ | $b$ | | | | + | + |
| ۱۴ | $r$ | $r$ | $b$ | $r$ | | | − | − | − |
| ۱۵ | $r$ | $r$ | $r$ | $b$ | | + | | | + |
| ۱۶ | $r$ | $r$ | $r$ | $r$ | | + | + | | + |

(۱) فرض کنید استراتژی $S'$ متفاوت با استراتژی $S$ باشد. تنها تفاوت دو استراتژی در این است که $v_3$ رنگ خود را زمانی‌که $v_2$ یا $v_4$ آبی است بیان نمی‌کند. چون که در هر حالت $v_2$ ($v_4$، به ترتیب) آبی است، $v_1$ ($v_5$، به ترتیب) رنگ خود را بیان می‌کند، پس بیان وضعیت $v_3$ نمی‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهتر کند. بنابراین $p(S) \leq p(S')$ است. از آنجایی‌که $S \in F^\circ(P_5)$، پس استراتژی $S'$ نیز برای $P_5$ بهینه است. اگر $v_3$ هرگز رنگ خود را با استراتژی $S'$ بیان نکند، احتمالاتی که قبلاً در مورد استراتژی $S$ در نظر گرفتیم را داریم. حال وقتی که $v_3$ رنگ خود را بیان می‌کند را در زیر در نظر می‌گیریم.

(۲) اگر $c(v_1) = r$ و $c(v_2) = b$ یا $c(v_4) = b$ و $c(v_5) = r$ باشد آن‌گاه تیم در $14 = 2 - 2^3 + 2^3$ حالت بازنده است. توجه کنید که $v_3$ رنگ خود را زمانی‌که $v_2$ و $v_4$ قرمز باشد بیان می‌کند، بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید در این موقعیت $v_3$ رنگ خود را آبی بیان کند. اگر $c(v_2) = c(v_3) = c(v_4) = r$ باشد آن‌گاه تیم در ۴ حالت بازنده است. از آن‌جایی‌که

$$\left(C(P_5, v_1^r, v_2^b) \cup C(P_5, v_4^b, v_5^r)\right) \cap C(P_5, v_2^r, v_3^r, v_4^r) = \phi$$

تیم در حداقل $18 = 4 + 14$ حالت بازنده است. بنابراین تیم در ۱۴ حالت برنده است، پس داریم: $\frac{1}{2} > \frac{14}{32} \geq p(S)$، و این با $P(S) \geq \frac{1}{2}$ در تناقض است.

در حالت کلی برای $n \geq 6$ مسئله را بررسی می‌کنیم، که $n$ عدد صحیح و مثبت است. اینک با استقرا روی تعداد رئوس مسیر ثابت و استنباط می‌کنیم. فرض استقرا: فرض کنید $h(P_{n-1}) = \frac{1}{2}$

باشد. حکم استقرا: حال ثابت می‌کنیم $h(P_n)=\frac{۱}{۲}$ است.

فرض کنید $S$ یک استراتژی بهینه برای $P_n$ باشد. اگر برای هر $i\in\{۱,۳,n\}$، راس $v_i$ هرگز رنگ خود را بیان نکند آن‌گاه بنا به قضیه (۲۳.۰.۱) داریم: $h(P_n)=h(P_n-v_i)$. اگر $i\in\{۱,n\}$ باشد، پس $P_n-v_i=P_{n-۱}$، آن‌گاه با توجه به فرض استقرا $h(P_{n-۱})=\frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(P_n)=h(P_n-v_i)=\frac{۱}{۲}$. اگر $i=۳$ باشد آن‌گاه $P_n-v_۳=P_۲\cup P_{n-۳}$، چون $P_۲\cup P_{n-۳}\subseteq P_{n-۱}$، و با توجه به قضیه (۱۸.۰.۱) داریم: $h(P_۲\cup P_{n-۳})\leq h(P_{n-۱})=\frac{۱}{۲}$ . بنابراین $h(P_n)=h(P_۲\cup P_{n-۳})\leq\frac{۱}{۲}$. از طرفی $h(P_n)\geq\frac{۱}{۲}$ ، در نتیجه $h(P_n)=\frac{۱}{۲}$.

اکنون فرض کنید هر راس از مجموعه $\{v_۱,v_۳,v_n\}$ رنگ خود را بیان کند. اگر بعضی رئوس همیشه رنگ خود را بیان کنند آن‌گاه بنا به قضیه (۲۲.۰.۱) داریم: $h(P_n)=\frac{۱}{۲}$. اگر هیچ راس از مجموعه $\{v_۱,v_۳,v_n\}$ همیشه رنگ خود را بیان نکند آن‌گاه بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ زمانی که $v_۲$ آبی است رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. به‌طور مشابه، از آنجایی‌که $N_{P_n}[v_۱]\cap N_{P_n}[v_n]=\phi$ است. فرض می‌کنیم که $v_n$ زمانی که $v_{n-۱}$ آبی است رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. دو احتمال زیر را در مورد $v_۳$ در نظر می‌گیریم:

**(۱)** $v_۳$ زمانی که $v_۲$ آبی است رنگ خود را بیان می‌کند.

**(۲)** $v_۳$ زمانی که $v_۲$ آبی است رنگ خود را بیان نمی‌کند.

(۱) فرض کنید استراتژی $S'$ با استراتژی $S$ متفاوت باشد. تنها تفاوت این دو استراتژی در این است که $v_۳$ زمانی که $v_۲$ آبی است رنگ خود را بیان نمی‌کند. از آنجایی که $v_۱$ در هر حالت که $v_۲$ آبی است رنگ خود را بیان می‌کند، پس بیان وضعیت $v_۳$ در بهتر کردن نتیجه هر حالت نمی‌تواند تأثیر داشته باشد. بنابراین $p(S)\leq p(S')$ است. چون $S\in F^\circ(P_n)$، پس استراتژی $S'$ نیز برای $P_n$ بهینه است. اگر $v_۳$ با استراتژی $S'$ هرگز رنگ خود را بیان نکند آن‌گاه احتمالاتی که قبلاً در مورد استراتژی $S$ داشتیم را در نظر می‌گیریم. وقتی که $v_۳$ رنگ خود را بیان می‌کند در زیر در نظر می‌گیریم.

(۲) اگر $c(v_۱)=r$ و $c(v_۲)=b$ یا $c(v_{n-۱})=b$ و $c(v_n)=r$ باشد آن‌گاه تیم در $\mid C(P_n)\mid=\frac{۷}{۱۶}\mid C(P_n)\mid\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴^۲}\right)$ حالت بازنده است. توجه کنید که $v_۳$ زمانی که $v_۲$ قرمز است رنگ خود را بیان می‌کند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ زمانی که $v_۲$ قرمز و $v_۴$ آبی است رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. اگر $c(v_۲)=c(v_۳)=r$ و $c(v_۴)=b$ باشد آن‌گاه تیم بازنده است. همه حالت‌های $c(v_{n-۱})=b$ و $c(v_n)=r$ شمارش شده است. یکی از حالت‌های $c(v_۲)=c(v_۳)=r$، $c(v_۴)=b$ و $(c(v_n)=b$ یا $c(v_{n-۱})=r)$ باقی می‌ماند. بنابراین $\mid C(P_n)\mid=\frac{۳}{۳۲}\mid C(P_n)\mid\frac{۱}{۲^۳}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot$ حالت بیان وضعیت نادرست داریم، از این رو تیم در حداقل $\mid C(P_n)\mid=\frac{۱۷}{۳۲}\mid C(P_n)\mid(\frac{۷}{۱۶}+\frac{۳}{۳۲})$ حالت بازنده است. پس تیم در $\frac{۱۵}{۳۲}\mid C(P_n)\mid$ حالت برنده است. در نتیجه $p(S)\leq\frac{۱۵}{۳۲}<\frac{۱}{۲}$، و این با $p(S)\geq\frac{۱}{۲}$ در تناقض است. □

**قضیه ۲.۲.۲.** *[۱۶] برای هر درخت $T$ داریم:* $h(T)=\frac{۱}{۲}$.

***برهان.*** با استقرا روی تعداد رئوس درخت $T$ ثابت می‌کنیم. اگر درخت یک راس داشته باشد آن‌گاه $T=K_۱$ است، در نتیجه $h(K_۱)=h(P_۱)=\frac{۱}{۲}$. حال فرض کنید $T$ درختی با $n\geq ۲$ راس باشد.

فرض استقرا: فرض کنید برای هر درخت $T'$ با $n-1$ راس، $h(T')=\frac{1}{2}$ باشد. حکم استقرا: ثابت می‌کنیم $h(T)=\frac{1}{2}$، که $T$ درختی با $n$ راس است. هر درخت حداقل دو برگ دارد. اگر $T$ دقیقاً دارای دو برگ باشد آن‌گاه با توجه به قضیه (۱.۲.۲)، $T$ یک مسیراست. در نتیجه $h(T)=\frac{1}{2}$. اگر $T$ حداقل سه برگ داشته باشد آن‌گاه فرض کنید $v_1$، $v_2$ و $v_3$ سه برگ درخت باشند. فرض کنید $S$ یک استراتژی بهینه برای $T$ باشد. از آن‌جایی که $v_1$، $v_2$ و $v_3$ برگ‌های درخت $T$ هستند، برای هر برگ درخت $T$ دقیقاً دو موقعیت وجود دارد. اگر برای هر $i\in\{1,2,3\}$ راس $v_i$ هرگز رنگ خود را بیان نکند آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۳.۰.۱) داریم: $h(T)=h(T-v_i)$. چون که $T-v_i$ درختی با $n-1$ راس است، با توجه به فرض استقرا $h(T-v_i)=\frac{1}{2}$. در نتیجه $h(T)=\frac{1}{2}$. اکنون فرض کنید هر راس از مجموعه $\{v_1,v_2,v_3\}$ رنگ خود را بیان کند. اگر یک راس همیشه رنگ خود را بیان کند آن‌گاه بنا به قضیه (۲۲.۰.۱) داریم: $h(T)=\frac{1}{2}$. فرض کنید هر راس از مجموعه $\{v_1,v_2,v_3\}$ در دقیقاً یک موقعیت رنگ خود را بیان کند. دو احتمال زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱) حداقل دو برگ از مجموعه $\{v_1,v_2,v_3\}$ همسایه مشترک داشته باشند، به عبارت دیگر $N_T(v_i)=N_T(v_j)$ برای هر $i,j\in\{1,2,3\}$ و $i\neq j$.

(۲) هر راس از مجموعه $\{v_1,v_2,v_3\}$ همسایه مشترک نداشته باشند، به عبارت دیگر $N_T(v_1)\neq N_T(v_2)\neq N_T(v_3)$ و $N_T(v_1)\neq N_T(v_3)$.

(۱) فرض کنید $N_T(v_i)=N_T(v_j)=\{x\}$ باشد. دو احتمال زیر را در مورد $v_i$ و $v_j$ در نظر می‌گیریم.

*(۱.۱)* $v_i$ و $v_j$ در موقعیت یکسان رنگ خود را بیان کنند.

*(۲.۲)* $v_i$ و $v_j$ در موقعیت‌های متفاوت رنگ خود را بیان کنند.

(۱.۱) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_i$ و $v_j$ زمانی که $x$ آبی است رنگ خود را بیان کنند. فرض کنید استراتژی $S'$ با استراتژی $S$ متفاوت باشد و تنها تفاوت این دو استراتژی در این است که $v_j$ زمانی که $x$ آبی است رنگ خود را بیان نمی‌کند. چون که در هر حالت که $x$ آبی است $v_i$ رنگ خود را بیان می‌کند، پس بیان وضعیت $v_j$ نتیجه هر حالت را نمی‌تواند بهتر کند. بنابراین $p(S)\leq p(S')$. از آنجایی‌که $S\in F^{\circ}(T)$، پس استراتژی $S'$ نیز برای $T$ بهینه است. اگر $v_j$ هرگز رنگ خود را با استراتژی $S'$ بیان نکند آن‌گاه احتمالات که قبلاً در مورد استراتژی $S$ داشتیم را در نظر می‌گیریم.

(۱.۲) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_i$ زمانی که $x$ آبی است رنگ خود را بیان کند؛ و $v_j$ زمانی که $x$ قرمز است رنگ خود را بیان کند. با توجه به قضیه (۲۱.۰.۱) داریم:

$$\mid Cl(S,x^b)\mid\geq\frac{\mid C(T,x^b)\mid}{2},\qquad \mid Cl(S,x^r)\mid\geq\frac{\mid Cl(T,x^r)\mid}{2}$$

$$\mid Cl(S)\mid=\mid Cl(S,x^b)\mid+\mid Cl(S,x^r)\mid\geq\frac{\mid C(T,x^b)\mid}{2}+\frac{\mid C(T,x^r)\mid}{2}=\frac{\mid C(T)\mid}{2}$$

آن‌گاه خواهیم داشت:

$$p(S)=\frac{\mid Cw(S)\mid}{\mid C(T)\mid}=\frac{\mid C(T)\mid-\mid Cl(S)\mid}{\mid C(T)\mid}\leq\frac{\mid C(T)\mid-\frac{\mid C(T)\mid}{2}}{\mid C(T)\mid}=\frac{1}{2}$$

از آن‌جایی که $S \in F^{\circ}(T)$، داریم: $h(T) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی $h(T) \geq \frac{۱}{۲}$، در نتیجه $h(T) = \frac{۱}{۲}$.

(۲) برای هر $i \in \{۱, ۲, ۳\}$ فرض کنید $N_T(v_i) = \{v'_i\}$ باشد. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ زمانی که $v'_۱$ آبی است رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. به طور مشابه، از آن‌جایی که $v'_۱ \neq v'_۲ \neq v'_۳$ و $v'_۱ \neq v'_۳$ است. فرض کنید که $v_۲$ زمانی که $v'_۲$ آبی است رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. $v_۳$ زمانی که $v'_۳$ آبی است رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. هیچ راس از مجموعه $\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ رنگ خود را بیان نمی‌کند اگر تنها اگر $r = c(v'_۱) = c(v'_۲) = c(v'_۳)$ باشد. اگر $(c(v'_۱) = b$ و $c(v_۱) = r)$ یا $(c(v'_۲) = b$ و $c(v_۲) = r)$ یا $(c(v'_۳) = b$ و $c(v_۳) = r)$ باشد آن‌گاه تیم در $\mid C(T) \mid \frac{۳۷}{۶۴} = \mid C(T) \mid (۱ - (۱ - \frac{۱}{۴})^۳)$ حالت بازنده است. بنابراین تیم در $\frac{۲۷}{۶۴} \mid C(T) \mid$ حالت برنده است، در نتیجه

$$p(S) = \frac{\mid Cw(S) \mid}{\mid C(T) \mid} \leq \frac{\frac{۲۷}{۶۴} \mid C(T) \mid}{\mid C(T) \mid} = \frac{۲۷}{۶۴} < \frac{۱}{۲}$$

این با $p(S) \geq \frac{۱}{۲}$ در تناقض است. $\square$

*اکنون مسئله کلاه، را روی گرافی که تنها درجه رئوس آن گراف را می‌دانیم در نظر می‌گیریم. در قضیه زیر کران بالایی برای شانس موفقیت هر استراتژی با داشتن درجه رئوس به دست می‌آوریم.*

**قضیه ۳.۲.۲.** *[۱۶] فرض کنید $G$ یک گراف و $S$ یک استراتژی برای این گراف باشد. داریم:*

$$\mid Cw(S) \mid \leq \sum_{v \in V(G)} \lfloor ۲^{d_G(v)+۱} - \frac{\mid Cw(S) \mid}{۲^{|V(G)|-d_G(v)-۱}} \rfloor \cdot ۲^{|V(G)|-d_G(v)-۱}$$

***برهان.*** فرض کنید $G$ یک گراف و $v_i$ راسی از $G$ باشد. هر راس $v_i$ در هر موقعیت رنگ خود را در دقیقاً $۲^{|V(G)|-d_G(v_i)-۱}$ حالت نادرست بیان می‌کند، زیرا هر موقعیت راس $v_i$ متناظر با $۲^{|V(G)|-d_G(v_i)}$ حالت است و در $\frac{۱}{۲}$ این حالات راس $v_i$ رنگ خود را بیان می‌کند. راس $v_i$ رنگ خود را در حداقل

$$\lfloor ۲^{d_G(v_i)+۱} - \frac{\mid Cw(S) \mid}{۲^{|V(G)|-d_G(v_i)-۱}} \rfloor + ۱$$

موقعیت نمی‌تواند بیان کند و بیان وضعیت راس $v_i$ حداقل در

$$\begin{aligned} &۲^{|V(G)|-d_G(v_i)-۱} \left( \lfloor ۲^{d_G(v_i)+۱} - \frac{\mid Cw(S) \mid}{۲^{|V(G)|-d_G(v_i)-۱}} \rfloor + ۱ \right) \\ &\qquad > ۲^{|V(G)|-d_G(v_i)-۱} \left( ۲^{d_G(v_i)+۱} - \frac{\mid Cw(S) \mid}{۲^{|V(G)|-d_G(v_i)-۱}} \right) \\ &\qquad = ۲^{|V(G)|} - \mid Cw(S) \mid \end{aligned}$$

حالت نادرست است. پس تیم در $۲^{|V(G)|} - \mid Cw(S) \mid$ حالت بازنده است. داریم:

$$\mid C(G) \mid - (۲^{|V(G)|} - \mid Cw(S) \mid) = ۲^{|V(G)|} - ۲^{|V(G)|} + \mid Cw(S) \mid = \mid Cw(S) \mid$$

لیکن این با $\mid Cw(S) \mid$ تعداد حالاتی که تیم برنده است در تناقض است. چون که راس $v_i$ رنگ خود را حداقل در

$$\lfloor ۲^{d_G(v_i)+۱} - \frac{\mid Cw(S) \mid}{۲^{|V(G)|-d_G(v_i)-۱}} \rfloor + ۱$$

موقعیت بیان نمی‌کند. بیان وضعیت هر راس $v_i$ در دقیقاً $۲^{|V(G)|-d_G(v_i)-۱}$ حالت درست است. زیرا هر موقعیت راس $v_i$ متناظر با $۲^{|V(G)|-d_G(v_i)}$ حالت است، در $\frac{۱}{۲}$ این حالات راس $v_i$ رنگ خود را بیان می‌کند. بنابراین راس $v_i$ در حداکثر

$$\lfloor ۲^{d_G(v_i)+۱} - \frac{| Cw(S) |}{۲^{|V(G)|-d_G(v_i)-۱}} \rfloor \cdot ۲^{|V(G)|-d_G(v_i)-۱}$$

حالت رنگ خود را درست بیان می‌کند. پس در حالت کلی تیم در حداکثر

$$\sum_{v\in V(G)} \lfloor ۲^{d_G(v)+۱} - \frac{| Cw(S) |}{۲^{|V(G)|-d_G(v)-۱}} \rfloor \cdot ۲^{|V(G)|-d_G(v)-۱}$$

حالت برنده است. □

*اکنون در زیر کران بالایی برای شانس موفقیت استراتژی $S$ برای گراف‌های کامل با ۲، ۳ و ۴ راس به ترتیب ارائه می‌کنیم. در هر مورد عدد کلاه را به طور دقیق به دست می‌آوریم.*

**مثال ۴.۲.۲.** $h(K_۲) = \frac{۱}{۲}$.

**حل.** *فرض کنید $S$ یک استراتژی برای $K_۲$ باشد. با توجه به قضیه (۳.۲.۲) داریم:*

$$| Cw(S) |\leq \sum_{v\in V(K_۲)} \lfloor ۲^{d_{K_۲}(v)+۱} - \frac{| Cw(S) |}{۲^{|V(K_۲)|-d_{K_۲}(v)-۱}} \rfloor \cdot ۲^{|V(K_۲)|-d_{K_۲}(v)-۱}$$

*چون‌که $| V(K_۲) |= ۲$ است و هر راس $K_۲$ دقیقاً دارای یک همسایه است. داریم:*

$$| Cw(S) |\leq ۲ \cdot \lfloor ۲^۲ - | Cw(S) |\rfloor \Leftrightarrow | Cw(S) |\leq ۸ - ۲ \,| Cw(S) | \Leftrightarrow | Cw(S) |\leq ۲\frac{۲}{۳}$$

*چون $| Cw(S) |\in N$، پس $| Cw(S) |\leq ۲$ در نظر می‌گیریم، خواهیم داشت:*

$$p(S) = \frac{| Cw(S) |}{| C(K_۲) |} \leq \frac{۲}{۲^۲} = \frac{۱}{۲}$$

*از این‌که $S$ یک استراتژی بهینه برای $K_۲$ است، داریم: $h(K_۲) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی $h(K_۲) \geq \frac{۱}{۲}$، در نتیجه $h(K_۲) = \frac{۱}{۲}$.*

**مثال ۵.۲.۲.** $h(K_۳) = \frac{۳}{۴}$.

**حل.** *فرض کنید $S$ یک استراتژی برای $K_۳$ باشد. با توجه به قضیه (۳.۲.۲) داریم:*

$$| Cw(S) |\leq \sum_{v\in V(K_۳)} \lfloor ۲^{d_{K_۳}(v)+۱} - \frac{| Cw(S) |}{۲^{|V(K_۳)|-d_{K_۳}(v)-۱}} \rfloor \cdot ۲^{|V(K_۳)|-d_{K_۳}(v)-۱}$$

*از آنجایی‌که $| V(K_۳) |= ۳$ است و هر راس $K_۳$ دقیقاً دارای دو همسایه است، داریم:*

$$| Cw(S) |\leq ۳ \cdot \lfloor ۲^۳ - | Cw(S) |\rfloor \Leftrightarrow | Cw(S) |\leq ۲۴ - ۳ \,| Cw(S) | \Leftrightarrow | Cw(S) |\leq ۶$$

*خواهیم داشت:*

$$p(S) = \frac{| Cw(S) |}{| C(K_۳) |} \leq \frac{۶}{۲^۳} = \frac{۳}{۴}$$

*ازآنجایی‌که $S$ یک استراتژی بهینه برای $K_۳$ است، پس $h(K_۳) \leq \frac{۳}{۴}$ است. فرض کنید $S_۱ \in F(K_۳)$، یک استراتژی باشد که هر راس رنگ دو همسایه خود را در نظر می‌گیرد. اگر هر راس دو همسایه با*

رنگ یکسان داشته باشد آن‌گاه رنگ خود را رنگ مخالف آن دو بیان می‌کند. اگر هر راس دو همسایه با رنگ مخالف هم داشته باشد آن‌گاه هر راس رنگ خود را بیان نمی‌کند. به روشنی دیده می‌شود که $|Cw(S_1)|=۶$ است. از آنجایی‌که $|C(K_۳)|=۲^۳=۸$، داریم: $p(S_1)=\frac{|Cw(S)|}{|C(K_۳)|}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$. چون $P(S_1)\leq h(K_۳)$، و از این‌که $h(K_۳)\geq\frac{۳}{۴}$ است و از طرفی $h(K_۳)\leq\frac{۳}{۴}$، در نتیجه $h(K_۳)=\frac{۳}{۴}$.

**مثال ۶.۲.۲.** $h(K_۴)=\frac{۳}{۴}$.

*حل.* فرض کنید $S$ یک استراتژی برای $K_۴$ باشد. با توجه به قضیه (۳.۲.۲) داریم:

$$|Cw(S)|\leq\sum_{v\in V(K_۴)}\lfloor ۲^{d_{K_۴}(v)+1}-\frac{|Cw(S)|}{۲^{|V(K_۴)|-d_{K_۴}(v)-1}}\rfloor\cdot ۲^{|V(K_۴)|-d_{K_۴}(v)-1}$$

از آنجایی‌که $|V(K_۴)|=۴$ است و هر راس $K_۴$ سه همسایه دارد. داریم:

$$|Cw(S)|\leq ۴\cdot\lfloor ۲^۴-|Cw(S)|\rfloor\Leftrightarrow|Cw(S)|\leq ۶۴-۴|Cw(S)|\Leftrightarrow|Cw(S)|\leq ۱۲\frac{۴}{۵}$$

چون $|Cw(S)|\in N$، پس $|Cw(S)|\leq ۱۲$ در نظر می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$p(S)=\frac{|Cw(S)|}{|C(K_۴)|}\leq\frac{۱۲}{۲^۴}=\frac{۳}{۴}$$

ازآنجایی‌که $S$ یک استراتژی بهینه برای $K_۴$ است، پس $h(K_۴)\leq\frac{۳}{۴}$، و ازاین‌که $K_۳\subseteq K_۴$ است، پس با توجه به قضیه (۱۸.۰.۱)، $h(K_۳)\leq h(K_۴)$ است. از آن‌جایی‌که $h(K_۳)=\frac{۳}{۴}$، خواهیم داشت: $h(K_۴)\geq\frac{۳}{۴}$. در نتیجه $h(K_۴)=\frac{۳}{۴}$.

درمثال بعد مسئله کلاه را روی $K_۳\cup K_۲$ حل می‌کنیم.

**مثال ۷.۲.۲.** $h(K_۳\cup K_۲)=\frac{۳}{۴}$.

*حل.* فرض کنید $V(K_۳\cup K_۲)=\{v_1,v_۲,v_۳,v_۴,v_۵\}$، $E(K_۳\cup K_۲)=\{v_1v_۲,v_۲v_۳,v_۳v_1,v_۴v_۵\}$ و $S$ یک استراتژی برای گراف $K_۳\cup K_۲$ باشد. با توجه به قضیه (۳.۲.۲) داریم:

$$|Cw(S)|\leq\sum_{v\in V(K_۳\cup K_۲)}\lfloor ۲^{d_{K_۳\cup K_۲}(v)+1}-\frac{|Cw(S)|}{۲^{|V(K_۳\cup K_۲)|-d_{K_۳\cup K_۲}(v)-1}}\rfloor\cdot ۲^{|V(K_۳\cup K_۲)|-d_{K_۳\cup K_۲}(v)-1}$$

از آنجایی‌که $d_{K_۳\cup K_۲}(v_1)=d_{K_۳\cup K_۲}(v_۲)=d_{K_۳\cup K_۲}(v_۳)=۲$ و $d_{K_۳\cup K_۲}(v_۴)=d_{K_۳\cup K_۲}(v_۵)=1$ است.

$$\begin{aligned}|Cw(S)|\leq\;& ۳\cdot ۲^۲\cdot\lfloor ۲^۳-\frac{|Cw(S)|}{۲^۲}\rfloor+۲\cdot ۲^۳\cdot\lfloor ۲^۲-\frac{|Cw(S)|}{۲^۳}\rfloor\\ &=۱۲\lfloor ۸-\frac{|Cw(S)|}{۴}\rfloor+۱۶\lfloor ۴-\frac{|Cw(S)|}{۸}\rfloor\end{aligned}$$

پس خواهیم داشت:

$$| Cw(S) | \leq ۱۲ \left(۸ - \frac{| Cw(S) |}{۴}\right) + ۱۶ \left(۴ - \frac{| Cw(S) |}{۸}\right)$$
$$= ۹۶ - ۳ \mid Cw(S) \mid + ۶۴ - ۲ \mid Cw(S) \mid = ۱۶۰ - ۵ \mid Cw(S) \mid$$

اکنون به آسانی دیده می‌شود که $| Cw(S) | \leq \frac{۱۶۰}{۶} = ۲۶\frac{۲}{۳}$ است. چون $| Cw(S) |$ صحیح است، پس داریم: $| Cw(S) | \leq ۲۶$. حال فرض کنید که $| Cw(S) | = ۲۶$ باشد. در این صورت

$$۲۶ \leq ۱۲\lfloor ۸ - \frac{۲۶}{۴} \rfloor + ۱۶\lfloor ۴ - \frac{۲۶}{۸} \rfloor = ۱۲ \cdot ۱ + ۱۶ \cdot ۰ = ۱۲$$

این تناقض است. حال فرض کنید $| Cw(S) | = ۲۵$ باشد، پس

$$۲۵ \leq ۱۲\lfloor ۸ - \frac{۲۵}{۴} \rfloor + ۱۶\lfloor ۴ - \frac{۲۵}{۸} \rfloor = ۱۲ \cdot ۱ + ۱۶ \cdot ۰ = ۱۲$$

این نیز تناقض است. بنابراین $| Cw(S) | \leq ۲۴$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(K_۳ \cup K_۲)|} \leq \frac{۲۴}{۳۲}$.
از این‌که $S$ یک استراتژی بهینه برای $K_۳ \cup K_۲$ است پس $h(K_۳ \cup K_۲) \leq \frac{۳}{۴}$ است. از آن‌جایی‌که $K_۳ \subseteq K_۳ \cup K_۲$ است با توجه به قضیه (۱.۰.۱۸) داریم: $h(K_۳ \cup K_۲) \geq h(K_۳)$. چون $h(K_۳) = \frac{۳}{۴}$، پس $h(K_۳ \cup K_۲) \geq \frac{۳}{۴}$. در نتیجه $h(K_۳ \cup K_۲) = \frac{۳}{۴}$.

# فصل ۳

# مسئله کلاه روی دورها

## ۱.۳ مقدمه

*تا به حال مسئله کلاه را روی مسیرها، درختان و برخی گراف‌های خاص بررسی کردیم و در هر مورد عدد کلاه را به‌طور دقیق به‌دست آوردیم. در این فصل مسئله کلاه را روی دورها در نظر می‌گیریم.*

*یوریل فیج [۱] در [۱۲] حدس زد برای هر گراف ماکزیمم شانس موفقیت برابر با ماکزیمم شانس موفقیت بزرگترین خوشه است. یوریل فیج چندین نتیجه، در بردارنده این حدس را ثابت کرد و مسئله کلاه را روی گراف‌های دو بخشی و گراف‌های مسطح شامل مثلث حل کرد و در هر مورد عدد کلاه را به‌طور دقیق به‌دست آورد. ما با پذیرفتن حدس یوریل فیج یک قدم به جلوتر برمی‌داریم، پس ماکزیمم شانس موفقیت مسئله کلاه روی دور فرد به‌طول حداقل سه برابر $\frac{۳}{۴}$ است.*

*در این فصل نشان می‌دهیم عدد کلاه دور فرد به‌طول حداقل پنج برابر با $\frac{۱}{۲}$ است، و عدد کلاه گراف‌های با دور به طول فرد را در حالت کلی به دست می‌آوریم، همچنین مسئله کلاه را روی دورهای زوج در نظر می‌گیریم و عدد کلاه دور زوج $C_۴$ را به دست می‌آوریم.*

**تعریف ۱.۱.۳.** مجموعه رئوس دو به دو مجاور گراف $G$ را **خوشه** (دسته) می‌نامیم. اندازه‌ای بزرگترین خوشه گراف $G$ را عدد خوشه‌ای می‌نامیم و آن را با نماد $\omega(G)$ نماد گذاری می‌کنیم. گراف کامل یک خوشه است.

**گزاره ۲.۱.۳.** *[۱۷] فرض کنید $G$ یک گراف و $S$ یک استراتژی برای $G$ باشد. فرض کنید $C$ حالت رنگی است که بعضی رئوس رنگ خود را بیان می‌کنند، پس بیان وضعیت هر راس دیگر نمی‌تواند نتیجه حالت رنگی $C$ را بهبود ببخشد.*

**تعریف ۳.۱.۳.** [۱۸] فرض کنید $G$ یک گراف و $v$ راسی از $G$ باشد. اگر راس دیگری مانند $u$ وجود داشته باشد که $N_G(v) \subseteq N_G(u)$ باشد آن‌گاه راس $v$ **راس غالب** نامیده می‌شود.

[۱] Uriel Feige

**مثال ۴.۱.۳.** [۱۸] یک حالت رنگی $c \in C(G)$ برای گراف دوری به‌طول حداقل پنج را به صورت $c(v_1) = ۲,\ c(v_2) = ۱,\ c(v_3) = ۱,\ c(v_4) = ۲,\ c(v_5) = ۱$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $c = ۲۱۱۲۱$.

**مثال ۵.۱.۳.** [۱۸] یک موقعیت برای راس $v_3$ در گراف دوری $C_5$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم. اگر $s_3 \in St_3(C_5)$ باشد. در این صورت $s_3(v_2) = ۲$ و $s_3(v_4) = ۱$ را در نظر می‌گیریم آن‌گاه $s_3 = ۰۲۰۱۰$ است.

## ۲.۳ عدد کلاه گراف‌های با دور به‌طول فرد

**لم ۱.۲.۳.** *[۱۲] فرض کنید $G$ یک گراف باشد. اگر $v$ راس غالب از $G$ باشد آن‌گاه $h(G) = h(G-v)$.*

***برهان.*** روشن است که $G - v \subseteq G$ است. بنابراین با توجه به قضیه (۱۸.۰.۱) داریم: $h(G-v) \leq h(G)$. اینک کافی است نشان دهیم $h(G-v) \geq h(G)$. فرض کنید $S$ یک استراتژی بهینه برای گراف $G$ و $u$ راسی از $G$ و $v$ یک راس غالب باشد. مجموعه همه پیکر بندی‌های ممکن کلاه‌های رنگی گراف $G$ را در دو مجموعه قرار می‌دهیم. مجموعه رئوس $u$ و $v$ کلاه‌های با رنگ یکسان دارند و مجموعه رئوس $u$ و $v$ کلاه‌های با رنگ متفاوتی دارند، را به ترتیب با نماد $C_1$ و $C_2$ نماد گذاری می‌کنیم. $h(G)$ میانگینی از احتمالات موفقیت استراتژِی $S$ در دو مجموعه فوق است. از آن‌جایی که یکی از مجموعه‌های فوق با استفاده از استراتژی $S$ با احتمال برابر $h(G)$ موفقیت آمیز است. فرض می‌کنیم که این مجموعه، مجموعه $C_1$ باشد (به‌طور مشابه برای $C_2$ داریم). واضح است که رنگ کلاه راس $u$ منحصر به فرد و مشخص از تعیین رنگ کلاه $v$ است. اینک کافی است که رنگ کلاه همه رئوس، به جز $v$ را تعیین کنیم. فرض کنید استراتژی $S'$ یک استراتژی بهینه برای گراف $G - v$ باشد، که باعث موفقیت مجموعه $C_1$ می‌شود و $S$ یک استراتژی بهینه برای $G$ باشد. فرض کنید استراتژی $S'$ به صورت زیر باشد. اگر گراف $G - v$ شامل $u$ و همسایه‌ای از راس $v$ نباشد آن‌گاه $S'$ دقیقاً یکسان با $S$ رفتار می‌کند. هر راس $w$ که همسایه‌ای از $v$ در گراف $G$ باشد همسایه‌ای از راس $u$ نیز هست. در مجموعه $C_1$ راس $w$ رنگ کلاه $u$ را مشاهده می‌کند، در نتیجه گراف $G - v$ همان گراف $G$ است، در این صورت رنگ کلاه راس $v$ با رنگ کلاه راس $u$ باید یکسان باشد، پس راس $w$ بر طبق استراتژی $S$ رفتار می‌کند. اینک توصیف رفتار راس $u$ باقی می‌ماند. از آن‌جایی که در گراف $G$، $N_G(v) \subset N_G(u)$ است. راس $u$ می‌داند که راس $v$ چگونه در $G$ عمل می‌کند، علاوه بر این راس $u$ می‌تواند اعمال راس $v$ را نیز انجام دهد، بنابراین برای راس $u$ می‌توان دو خروجی یکی برای راس $v$ و دیگری برای خود راس $u$ در نظر گرفت. اگر هر دو خروجی، رنگ خود را بیان نکنند آن‌گاه $u$ نیز رنگ خود را حدس نمی‌زند. اگر یکی از خروجی‌ها رنگ خود را بیان نکند و دیگری رنگ خود را بیان کند آن‌گاه $u$ نیز رنگ خود را حدس می‌زند. مهم نیست که این حدس توسط راس $u$ یا توسط راس $v$ زده شده باشد زیرا در مجموعه $C_1$ رنگ کلاه هر دو راس یکسان در نظر گرفته شده است و این حدس درست است اگر و تنها اگر حدس زده شده با رنگ کلاه راس $u$ منطبق باشد. در انتها اگر هر دو راس رنگ خود را بیان کنند آن‌گاه $u$ نیز می‌تواند رنگ

خود را بیان کند، بنابراین بیان وضعیت راس $v$ نمی‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد. پس $h(G-v) \geq h(G)$. درنتیجه $h(G-v) = h(G)$. □

**لم ۲.۲.۳.** *([۱۸]).* $h(C_5) = \frac{1}{2}$.

***برهان.*** فرض کنید $S$ یک استراتژی بهینه برای $C_5$ باشد. اگر بعضی رئوس مانند $v_i$ هرگز رنگ خود را بیان نکند آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۳.۰.۱) داریم: $h(C_5) = h(C_5 - v_i)$. در این صورت $C_5 - v_i = P_4$ است و با توجه به قضیه (۱.۲.۲) داریم: $h(P_4) = \frac{1}{2}$. در نتیجه $h(C_5) = \frac{1}{2}$.

اکنون فرض کنید بعضی رئوس رنگ خود را حدس بزنند. اینک ساختار حدس یک راس را در نظر می‌گیریم. اگر در هر حالت که یک راس رنگ خود را درست حدس می‌زند، بعضی رئوس دیگر همچنین رنگ خود را درست حدس بزنند آن‌گاه چنین ساختار حدسی را ساختار حدس غالب گوییم. روشن است که استراتژی را که ساختار حدس آن غالب باشد را در نظر نمی‌گیرم زیرا این ساختار نمی‌تواند شانس موفقیت هر استراتژی را بهتر کند. اگر تنها یکی از رئوس رنگ خود را حدس نزند آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۳.۰.۱) داریم: $p(S) \leq h(G - v_i) = h(P_4) = \frac{1}{2}$. در نتیجه $h(C_5) = \frac{1}{2}$.

اکنون روشی را شرح می‌دهیم که نتیجه آن با استفاده از کامپیوتر محقق شده است. ساختار حدس را به گونه‌ایی تعریف می‌کنیم که رئوس مجاز نیستند رنگ خود را بیان نکنند. در ابتدا ما برای هر راس دقیقاً یک ساختار در نظر می‌گیریم. برای هر راس دقیقاً ۸ ساختار وجود دارد (زیرا دو کلاه رنگی و هر راس دارای دو همسایه است). پس تعداد کل احتمالات برای استراتژی $S$ مساوی $2^{15} = 8^5$ است. روشن است که می‌توانیم یک گروه ۳۲۰تایی از استراتژی‌های متقارن به‌دست آوریم (تشخیص این استراتژی‌ها لازم نیست). ما هر یک از عملیات زیر را برای به‌دست آوردن استراتژی‌های متقارن در نظر می‌گیریم: چرخش رئوس ۵ حالت، جابه‌جای رئوس ۲ حالت و بر چسب گذاری رنگی رئوس $32 = 2^5$ حالت امکان دارد. با تجزیه گروه ۳۲۰تایی استراتژی‌های متقارن تنها ۱۲۰ احتمال برای استراتژی $S$ را می‌توان در نظر گرفت. اکنون برای هر یک از احتمالات فوق تعداد حالت‌های که بعضی رئوس رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند را بررسی می‌کنیم. در حداقل ۱۶ حالت بعضی رئوس رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند، پس تیم در حداقل ۱۶ حالت بازنده است، در نتیجه $p(S) \leq \frac{1}{2}$. با بررسی ۶۱ از ۱۲۰ استراتژی، در حداقل ۱۶ حالت بعضی رئوس رنگ خود را نادرست حدس می‌زنند. بنابراین تنها ۵۹ استراتژی باقی مانده را در نظر می‌گیریم. اینک مجموعه احتمالات را با استفاده از ایده و تعریف ساختار حدس غالب پاراگراف قبلی کاهش می‌دهیم. در این روش ما ۳۷ استراتژی را حذف می‌کنیم و تنها ۲۲ استراتژی باقی می‌ماند. هر یک از این ۲۲ استراتژی را بررسی می‌کنیم و تعداد حالت‌های که تا کنون تیم برنده بوده است را به دست می‌آوریم، یعنی حالت‌های که بعضی رئوس رنگ خود را درست حدس می‌زنند، در حالی‌که هیچ یک از رئوس دیگر رنگ خود را نادرست حدس نمی‌زند. از بین ۲۲ استراتژی فوق، تنها ۱۲ استراتژی بهترین موفقیت و پیروزی را به دنبال دارد، در این صورت ساختارهای زیادی را با این ۲۲ استراتژی، بدون در نظر گرفتن حداقل ۱۶ حالتی که تیم بازنده است، یا بعضی ساختار حدس غالب، را بررسی می‌کنیم. از بین این استراتژی‌ها تنها در ۱۲ حالت تیم برنده است. اکنون هر یک از این ۲۲ استراتژی را با اضافه کردن یک دستورالعمل جدید بررسی می‌کنیم. با بررسی هر یک از این استراتژی‌ها تیم در حداقل ۱۶ حالت بازنده است یا این که بعضی ساختارهای حدس غالب هستند.

اینک برای هر استراتژی $S \in F(C_5)$، داریم: $p(S) \leq \frac{1}{2}$. در نتیجه $h(C_5) = \frac{1}{2}$. □

**قضیه ۳.۲.۳.** *[۱۸] اگر $n \geq 5$ عدد صحیح و فرد باشد آن‌گاه* $h(C_n) = \frac{1}{2}$.

***برهان.*** با استقراء روی طول دور اثبات می‌کنیم. برای $n = 5$ با توجه به لم (۲.۲.۳) داریم: $h(C_5) = \frac{1}{2}$. اکنون فرض کنید $n \geq 7$ عدد صحیح و فرد باشد. فرض استقراء: فرض می‌کنیم $h(C_{n-2}) = \frac{1}{2}$ باشد. حکم استقرا: باید ثابت کنیم که $h(C_n) = \frac{1}{2}$. حال فرض کنید $H_n = C_n \cup v_1v_4$ باشد. با توجه به قضیه (۱۸.۰.۱) داریم: $h(H_n) \geq h(C_n)$. مشاهده می‌کنیم که $N_{H_n}(v_1) \subseteq N_{H_n}(v_3)$. پس $H'_n = H_n - v_3$، و با توجه به لم (۱.۲.۳) داریم: $h(H_n) = h(H'_n)$. علاوه بر این، چون که $N_{H'_n}(v_n) \subseteq N_{H'_n}(v_2)$، دوباره با استفاده از لم (۱.۲.۳) داریم: $h(H'_n) = h(H'_n - v_2)$. روشن است که گراف $H'_n - v_2$ همسان (هم‌ریخت) با دور $C_{n-2}$ است. بنابراین با توجه به فرض استقراء که $h(C_{n-2}) = \frac{1}{2}$ است. داریم: $h(C_n) \leq h(H_n) = h(H'_n) = h(C_{n-2}) = \frac{1}{2}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱)، $h(C_n) \geq \frac{1}{2}$ است. در نتیجه $h(C_n) = \frac{1}{2}$. □

## ۳.۳ عدد کلاه گراف‌های با دور به‌طول زوج

### ۱.۳.۳ عدد کلاه دور $C_4$

**قضیه ۱.۳.۳.** *([۱۷]).* $h(C_4) = \frac{1}{2}$.

***برهان.*** فرض کنید $S$ یک استراتژی بهینه برای $C_4$ باشد. موقعیتی وجود ندارد که رئوس $v_1$ و $v_3$ هر دو با هم رنگ خود را بیان کنند و موقعیتی وجود ندارد که رئوس $v_2$ و $v_4$ هر دو با هم رنگ خود را بیان کنند. اکنون نشان می‌دهیم که چنین استراتژی وجود دارد. فرض کنید $S'$ یک استراتژی بهینه برای $C_4$ باشد. فرض کنید در استراتژی $S'$ موقعیتی وجود دارد که رئوس $v_1$ و $v_3$ هر دو با هم رنگ خود را بیان می‌کنند یا وجود دارد موقعیتی که رئوس $v_2$ و $v_4$ هر دو با هم رنگ خود را بیان می‌کنند. استراتژی $S$ با استراتژی $S'$ متفاوت است و تنها تفاوت این دو استراتژی در این است که $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کند زمانی‌که $v_1$ رنگ خود را بیان کند، و $v_4$ رنگ خود را بیان نمی‌کند زمانی‌که $v_2$ رنگ خود را بیان کند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳) بیان وضعیت $v_3$ و $v_4$ نتیجه هر یک از حالت‌های رنگی را نمی‌توانند بهبود ببخشند، پس $p(S) \geq p(S')$. از آن‌جایی که $S' \in F^\circ(C_4)$، پس استراتژی $S$ نیز بهینه است. در استراتژی $S$ موقعیتی وجود ندارد که رئوس $v_1$ و $v_3$ هر دو با هم رنگ خود را بیان کنند و موقعیتی وجود ندارد که رئوس $v_2$ و $v_4$ هر دو با هم رنگ خود را بیان کنند. اگر بعضی رئوس در $C_4$ هرگز رنگ خود را بیان نکنند. فرض کنید برای هر $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ راس $v_i$ هرگز رنگ خود را بیان نکند. آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۳.۰.۱) داریم: $h(C_4) = h(C_4 - v_i)$. چون $C_4 - v_i = P_3$، و با توجه به قضیه (۱.۲.۲) داریم: $h(P_3) = \frac{1}{2}$. در نتیجه $h(C_4) = \frac{1}{2}$.

حال فرض می‌کنیم هر راس در $C_4$ رنگ خود را بیان کند. اگر بعضی رئوس در $C_4$ همیشه رنگ خود را بیان کنند آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۲.۰.۱) داریم: $h(C_4) = \frac{1}{2}$. اکنون فرض کنید هیچ راس در

$C_۴$ وجود ندارد که همیشه رنگ خود را بیان کند. هر راس رنگ خود را در یک، دو یا سه موقعیت بیان می‌کند. پس دو احتمال زیر را در نظر می‌گیریم:

**(۱)** هر راس در دقیقاً یک موقعیت رنگ خود را بیان کند.

**(۲)** وجود دارد راسی که در حداقل دو موقعیت رنگ خود را بیان کند.

(۱) بیان وضعیت هر راس در هر موقعیت در دقیقاً دو حالت درست است زیرا هر موقعیت متناظر با ۴ حالت است، و در $\frac{۱}{۲}$ این حالات هر راس رنگ خود را بیان می‌کند. اگر هر راس رنگ خود را در دقیقاً یک موقعیت بیان کند آن‌گاه دقیقاً ۸ حالت بیان وضعیت درست وجود دارد، حتی اگر حالت‌های رنگی دیگری نیز برای هر راس به وجود آید. بنابراین تیم در حداکثر ۸ حالت برنده است، داریم: $p(S) \leq \frac{۸}{۱۶} = \frac{۱}{۲}$. از آن‌جایی که $S \in F^\circ(C_۴)$، داریم: $h(C_۴) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱) داریم: $h(C_۴) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(C_۴) = \frac{۱}{۲}$.

(۲) دو احتمال در نظر می‌گیریم:

**(۲.۱)** وجود دارد راسی که در دقیقاً سه موقعیت رنگ خود را بیان می‌کند.

**(۲.۲)** هر راس در حداکثر دو موقعیت رنگ خود را بیان می‌کند.

(۲.۱) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ رنگ خود را در دقیقاً سه موقعیت بیان کند. از آن‌جایی که موقعیتی وجود ندارد که رئوس $v_۱$ و $v_۳$ هر دو با هم رنگ خود را بیان کنند. $v_۳$ در حداقل یک موقعیت رنگ خود را بیان می‌کند، پس $v_۳$ در دقیقاً یک موقعیت رنگ خود را بیان می‌کند. از این رو در هر یک از موقعیت‌های $(*, b, *, b)$، $(*, b, *, r)$، $(*, r, *, b, )$ و $(*, r, *, r)$ راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان می‌کند. با توجه به قضیه (۲۱.۰.۱) داریم:

$$|Cl(S, v_۲^b, v_۴^b)| \geq \frac{|C(C_۴, v_۲^b, v_۴^b)|}{۲}, \qquad |Cl(S, v_۲^b, v_۴^r)| \geq \frac{|C(C_۴, v_۲^b, v_۴^r)|}{۲}$$
$$|Cl(S, v_۲^r, v_۴^b)| \geq \frac{|C(C_۴, v_۲^r, v_۴^b)|}{۲}, \qquad |Cl(S, v_۲^r, v_۴^r)| \geq \frac{|C(C_۴, v_۲^r, v_۴^r)|}{۲}$$

بنابراین

$$|Cl(S)| = |Cl(S, v_۲^b, v_۴^b)| + |Cl(S, v_۲^b, v_۴^r)| + |Cl(S, v_۲^r, v_۴^b)| + |Cl(S, v_۲^r, v_۴^r)|$$

$$\geq \frac{|C(C_۴, v_۲^b, v_۴^b)|}{۲} + \frac{|C(C_۴, v_۲^b, v_۴^r)|}{۲} + \frac{|C(C_۴, v_۲^r, v_۴^b)|}{۲} + \frac{|C(C_۴, v_۲^r, v_۴^r)|}{۲} = \frac{|C(C_۴)|}{۲}$$

خواهیم داشت:

$$p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(C_۴)|} = \frac{|C(C_۴)| - |Cl(S)|}{|C(C_۴)|} \leq \frac{|C(C_۴)| - \frac{|C(C_۴)|}{۲}}{|C(C_۴)|} = \frac{۱}{۲}$$

از آن‌جایی که $S \in F^\circ(C_۴)$، داریم: $h(C_۴) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱) داریم: $h(C_۴) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(C_۴) = \frac{۱}{۲}$.

(۲.۲) راسی وجود دارد که رنگ خود را در دقیقاً دو موقعیت بیان می‌کند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ رنگ خود را در دقیقاً دو موقعیت بیان کند. دو احتمال در مورد $v_۳$ در زیر در نظر می‌گیریم:

**(۲.۲.۱)** $v_۳$ رنگ خود را در دقیقاً دو موقعیت بیان کند.

**(۲.۲.۲)** $v_۳$ رنگ خود را در دقیقاً یک موقعیت بیان کند.

(۲.۲.۱) از این که در هر یک از موقعیت‌های $(*,b,*,b)$، $(*,b,*,r)$، $(*,r,*,b)$ و $(*,r,*,r)$ راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان می‌کند. به طور مشابه با مباحث در (۲.۱) داریم: $h(C_۴)=\frac{۱}{۲}$.
(۲.۲.۲) دو احتمال زیر را در نظر می‌گیریم:

**(آ)** در هر دو موقعیت که $v_۱$ رنگ خود را بیان می‌کند، $v_۲$ رنگ یکسانی دارد یا $v_۴$ رنگ یکسانی دارد.

**(ب)** در هر دو موقعیت که $v_۱$ رنگ خود را بیان می‌کند، $v_۲$ رنگ متفاوتی دارد و $v_۴$ رنگ متفاوتی دارد.

لیکن در مورد $v_۱$ دو احتمال زیر را در نظر می‌گیریم:

**۱.** در هر دو موقعیت $v_۱$ رنگ یکسانی بیان می‌کند.

**۲.** در هر دو موقعیت $v_۱$ رنگ متفاوتی بیان می‌کند.

فرض کنید $v_i\in\{v_۱,v_۲\}$. اکنون ۴ احتمال زیر را در نظر می‌گیریم: *(۲.۲.۲.۱)* (آ،۱)؛ *(۲.۲.۲.۲)* (آ،۲)؛ *(۲.۲.۲.۳)* (ب،۱)؛ *(۲.۲.۲.۴)* (ب،۲).

(۲.۲.۲.۱) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در موقعیت‌های $(*,b,*,b)$ و $(*,b,*,r)$ رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت‌ها رنگ خود را آبی بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در موقعیت $(*,r,*,b)$ رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. حالت‌های که بیان وضعیت درست داریم عبارتند از: $(b,b,b,b)$، $(b,b,r,b)$، $(b,b,b,r)$، $(b,b,r,r)$، $(b,r,b,b)$ و $(r,r,b,b)$. حالت‌های که بیان وضعیت نادرست داریم عبارتند از: $(b,r,r,b)$، $(r,b,b,b)$، $(r,b,b,r)$، $(r,b,r,b)$، $(r,b,r,r)$ و $(r,r,r,b)$. موقعیت $(b,*,b,*)$ متناظر با چهار حالت است که سه حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، و حالت $(b,r,b,r)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳) از بین حالت‌های متناظر با موقعیت $(b,*,b,*)$ تنها حالت $(b,r,b,r)$ می‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد. در دو حالت متناظر با موقعیت $(b,*,b,*)$ بیان وضعیت $v_i$ نادرست است، و این بدان معنا است که در حداقل یک حالت متناظر با موقعیت $(b,*,b,*)$ که $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند. بنابراین بیان وضعیت $v_i$ در موقعیت $(b,*,b,*)$ شانس موفقیت را بهتر نمی‌کند، پس فرض می‌کنیم $v_i$ در موقعیت $(b,*,b,*)$ رنگ خود را بیان نکند. اینک حالت‌های متناظر با موقعیت $(b,*,r,*)$ را در نظر می‌گیریم. در دو حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را

درست بیان می‌کنند و یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳) از بین حالت‌های متناظر با موقعیت $(b,*,r,*)$ تنها حالت $(b,r,r,r)$ می‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد. بیان وضعیت $v_i$ در صورتی می‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد که بیان وضعیت $v_i$ در هر حالت درست باشد. از بین ۴ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*)$ در دو حالت بیان وضعیت $v_i$ نادرست است، و این بدان معنا است که بعضی حالت‌های متناظر با موقعیت $(b,*,r,*)$ که $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند و این نتیجه هر حالت رنگی را بهتر نمی‌کند. بنابراین بیان وضعیت $v_i$ در موقعیت $(b,*,r,*)$ نتیجه هر حالت رنگی را بهتر نمی‌کند، پس فرض می‌کنیم $v_i$ در موقعیت $(b,*,r,*)$ رنگ خود را بیان نکند. تنها یک حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*)$ وجود دارد که $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین تنها یک حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*)$ وجود دارد که $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین تنها دو حالت است که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۸ حالت برنده است. بنابراین $p(S)=\frac{|Cw(S)|}{|C(C_۴)|}\leq\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲}$، از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $C_۴$ است، داریم: $h(C_۴)\leq\frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱)، $h(C_۴)\geq\frac{۱}{۲}$، در نتیجه $h(C_۴)=\frac{۱}{۲}$.

(۲.۲.۲.۲) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در موقعیت $(*,b,*,b)$ رنگ خود را آبی بیان کند و در موقعیت $(*,b,*,r)$ رنگ خود را قرمز بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در موقعیت $(*,r,*,b)$ رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. حالت‌های که بیان وضعیت درست داریم عبارتند از: $(b,b,b,b)$، $(b,b,r,b)$، $(r,b,b,r)$، $(r,b,r,r)$، $(b,r,b,b)$ و $(r,r,b,b)$ و حالت‌های که بیان وضعیت نادرست داریم عبارتند از: $(r,b,b,b)$، $(r,b,r,b)$، $(b,b,b,r)$، $(b,b,r,r)$، $(b,r,r,b)$ و $(r,r,r,b)$. موقعیت $(b,*,b,*)$ متناظر با چهار حالت است که در دو حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین در دو حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,r,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ در هر یک از موقعیت‌های $(b,*,b,*)$ و $(r,*,b,*)$ رنگ خود را بیان نکند. در سه حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان می‌کنند و یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین در سه حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان می‌کنند و یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین با توجه به گزاره (۲.۱.۳) تنها دو حالت است که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۸ حالت برنده است. در نتیجه $p(S)=\frac{|Cw(S)|}{|C(C_۴)|}\leq\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲}$.

(۲.۲.۲.۳) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در موقعیت‌های $(*,b,*,b)$ و $(*,r,*,r)$ رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت‌ها رنگ خود را آبی بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در موقعیت $(*,r,*,b)$ رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. حالت‌های که بیان وضعیت درست داریم عبارتند از: $(b,b,b,b)$، $(b,b,r,b)$،

$(b,r,b,r)$، $(b,r,r,r)$، $(b,r,b,b)$ و $(r,r,b,b)$ و حالت‌های که بیان وضعیت نادرست داریم عبارتند از: $(r,b,b,b)$، $(r,b,r,b)$، $(r,r,b,r)$، $(r,r,r,r)$، $(b,r,r,b)$ و $(r,r,r,b)$. موقعیت $(b,*,b,*)$ متناظر با چهار حالت است که سه حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند و یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,b,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ در موقعیت $(b,*,b,*)$ رنگ خود را بیان نکند. در دو حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند و یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,r,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ در موقعیت $(b,*,r,*)$ رنگ خود را بیان نکند. تنها یک حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین تنها یک حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین با توجه به گزاره (۲.۱.۳) تنها دو حالت است که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند. این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۸ حالت برنده است. در نتیجه $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(C_۴)|} \leq \frac{۸}{۱۶} = \frac{۱}{۲}$.

(۲.۲.۲.۴) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید در موقعیت $(*,b,*,b)$، $v_۱$ رنگ خود را آبی بیان کند و در موقعیت $(*,r,*,r)$ رنگ خود را قرمز بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در موقعیت $(*,r,*,b)$ رنگ خود را بیان کند و در این موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. حالت‌های که بیان وضعیت درست داریم عبارتند از: $(b,b,b,b)$، $(b,b,r,b)$، $(r,r,b,r)$، $(r,r,r,r)$، $(b,r,b,b)$، و $(r,r,b,b)$، و حالت‌های که بیان وضعیت نادرست داریم عبارتند از: $(r,b,b,b)$، $(r,b,r,b)$، $(b,r,b,r)$، $(b,r,r,r)$، $(b,r,r,b)$ و $(r,r,r,b)$. موقعیت $(b,*,b,*)$ متناظر با ۴ حالت است که در دو حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. در دو حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و یک حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,r,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ در هر یک از موقعیت‌های $(b,*,b,*)$ و $(r,*,b,*)$ رنگ خود را بیان نکند. تنها یک حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*)$ است که $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. یک حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین با توجه به گزاره (۲.۱.۳) تنها دو حالت است که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۸ حالت برنده است، پس $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(C_۴)|} \leq \frac{۸}{۱۶} = \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(C_۴) = \frac{۱}{۲}$. □

### ۲.۳.۳ عدد کلاه دورهای زوج به‌طول $n > ۴$

*یوریل فیج در [۱۲] ثابت کرد اگر عدد رنگی گراف $G$ برابر با عدد خوشه‌ای آن باشد، آن‌گاه عدد کلاه گراف $G$ برابر با عدد کلاه بزرگترین خوشه آن است. قضیه‌ی قوی در مورد گراف‌های کامل در [۷] بیان شده است.*

**قضیه ۲.۳.۳.** *[۱۲] برای هر گراف $G$، اگر $\chi(G) = \omega(G)$ باشد آن‌گاه $h(G) = h(K_{\omega(G)})$.*

*ما در زیر بلافاصله با استفاده از قضیه (۲.۳.۳) عدد کلاه دور زوج را در حالت کلی ارائه می‌کنیم.*

**قضیه ۳.۳.۳.** *اگر $n \geq 4$ عدد صحیح زوج باشد آن‌گاه* $h(G) = \frac{1}{2}$.

***برهان.*** بنا به قضیه (۲.۳.۳)، برای هر دور زوج داریم: $\chi(G) = \omega(G) = 2$. لذا برای هر دور زوج $h(G) = h(K_{\omega(G)})$ است، پس $h(G) = h(K_2)$، و چون که $h(K_2) = \frac{1}{2}$، در نتیجه $h(G) = \frac{1}{2}$. $\square$

# فصل ۴

# مسئله کلاه با افزودن یال به هر یک از رئوس دور $C_۴$

## ۱.۴ مقدمه

*تا به حال مسئله کلاه را روی برخی گراف‌های خاص، مسیرها و درختان و همچنین دورها بیان و بررسی کردیم و در هر مورد عدد کلاه را به طور دقیق به دست آوردیم. اینک در این فصل مسئله کلاه را با افزودن یال به هر یک از رئوس دور $C_۴$ را برای اولین بار بیان و بررسی می‌کنیم و عدد کلاه را با دو روش به طور دقیق به‌دست می‌آوریم.*

**قضیه ۱.۱.۴.** *[۱۲] برای اجتماع دوگراف مجزای $G_۱$ و $G_۲$ داریم:* $h(G_۱+G_۲) = max[h(G_۱), h(G_۲)]$.

## ۲.۴ عدد کلاه با افزودن یال به رئوس دور $C_۴$

**قضیه ۱.۲.۴.** *فرض کنید $G$ یک گراف باشد که از حذف یال‌های متصل به هر راس دور $C_۴$ به دست بیاید، آن‌گاه* $h(G) = \frac{۱}{۲}$.

## ۳.۴ اثبات قضیه (۱.۲.۴)

**برهان.** روش اول

بنا به تعریف راس غالب در (۳.۱.۳)، چون $N_G(v) \subseteq N_G(u)$ ($d_G(v) = ۱$ و $d_G(u) \geq ۲$)، و با توجه به قضیه (۱.۲.۳) داریم: $h(G) = h(G-v)$، و با توجه به قضیه (۱.۳.۳) داریم: $h(G-v) = h(C_۴) = \frac{۱}{۲}$، در نتیجه $h(G) = \frac{۱}{۲}$.

**روش دوم**

حال به طور مفصل و با در نظر گرفتن تمام جزئیات قضیه (۱.۲.۴) را برای اولین بار به صورت زیر در نظر می‌گیریم و عدد کلاه را به طور دقیق به دست می‌آوریم.

فرض کنید $G = G_t$ باشد. گراف $G$ با حذف $۴ - t$ از اتصالات به رئوس دور $C_۴$ به‌دست می‌آید. برای $t = ۰$ در قضیه (۱.۳.۳) داریم: $h(C_۴) = \frac{۱}{۲}$. حال $t \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ در نظر می‌گیریم، و در هر مورد عدد کلاه را به دست می‌آوریم. اکنون چهار حالت به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

**حالت اول** فرض کنید $t = ۱$. $۴ - t = ۳$ تا از اتصالات به رئوس دور $C_۴$ را حذف می‌کنیم، و آن را با نماد $G_۱$ نمادگذاری می‌کنیم.

**حالت دوم** فرض کنید $t = ۲$. $۴ - t = ۲$ تا از اتصالات به رئوس دور $C_۴$ را حذف می‌کنیم، دو احتمال زیر را در نظر می‌گیریم:

**(آ)** دو یال از دو راس مجاور دور $C_۴$ حذف کنیم، و آن را با نماد $G_{۲۱}$ نماد گذاری می‌کنیم.

**(ب)** دو یال از دو راس متقابل دور $C_۴$ حذف کنیم، و آن را با نماد $G_{۲۲}$ نماد گذاری می‌کنیم.

**حالت سوم** فرض کنید $t = ۳$. $۴ - t = ۱$ از اتصالات به رئوس دور $C_۴$ را حذف می‌کنیم، و آن را با نماد $G_۳$ نماد گذاری می‌کنیم.

**حالت چهارم** فرض کنید $t = ۴$. $۴ - t = ۰$ یعنی از اتصالات به رئوس دور $C_۴$ یالی حذف نشده است، و آن را با نماد $G_۴$ نماد گذاری می‌کنیم.

**حالت اول:** فرض کنید $S$ یک استراتژی بهینه برای گراف $G_۱$ باشد، که رئوس $v_i$ و $v_j$ در هیچ موقعیتی هر دو با هم رنگ خود را بیان نمی‌کنند، و $N_{G_۱}(v_i) \cap N_{G_۱}(v_j) = \{x, y\}$، برای هر $i$ و $j$ معین $i, j \in \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $i \neq j$. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که چنین استراتژی وجود دارد. فرض کنید $S'$ یک استراتژی بهینه برای گراف $G_۱$ باشد. فرض کنید در استراتژی $S'$ موقعیتی وجود دارد که رئوس $v_i$ و $v_j$ هر دو با هم رنگ خود را بیان می‌کنند. تنها تفاوت استراتژی $S$ و $S'$ در این است که راس $v_i$ ($v_j$، به ترتیب) رنگ خود را بیان می‌کند زمانی که راس $v_j$ ($v_i$، به ترتیب) رنگ خود را بیان نکند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳) بیان وضعیت $v_j$ ($v_i$، به ترتیب) نمی‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد، پس داریم: $p(S) \geq p(S')$. از آن‌جایی که $S'$ یک استراتژی بهینه برای گراف $G_۱$ است، پس $S$ نیز بهینه است. در استراتژی $S$ موقعیتی وجود ندارد که رئوس $v_i$ و $v_j$ هر دو با هم رنگ خود را بیان کنند. اگر بعضی رئوس مانند $v_i$ هرگز رنگ خود را بیان نکنند. آن‌گاه با توجه به قضیه (۱.۰.۲۳) داریم: $h(G_۱) = h(G_۱ - v_i)$. اگر $d_{G_۱}(v_i) = ۲$ باشد. آن‌گاه $G_۱ - v_i = T$، و با توجه به قضیه (۲.۲.۲) داریم: $h(T) = \frac{۱}{۲}$. بنابراین $h(G_۱ - v_i) = h(T) = \frac{۱}{۲}$ است، در نتیجه $h(G_۱) = \frac{۱}{۲}$. اگر $d_{G_۱}(v_i) > ۲$، آن‌گاه $G_۱ - v_i = P_۱ \cup P_۳$، پس $P_۱ \cup P_۳ \subseteq P_۴$، با توجه به قضیه (۱.۲.۲) و قضیه (۱.۰.۱۸) داریم: $h(P_۱ \cup P_۳) \leq h(P_۴)$. چون $h(P_۴) = \frac{۱}{۲}$، پس $h(G_۱) = h(P_۱ \cup P_۳) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱.۰.۱۹)، $h(G_۱) \geq \frac{۱}{۲}$، در نتیجه

$h(G_۱)=\frac{۱}{۲}$. فرض کنید $d_{G_۱}(v_i)=۱$. پس $G_۱-v_i=C_۴$، بنابراین با توجه به قضیه (۱.۳.۳) داریم: $h(C_۴)=\frac{۱}{۲}$. درنتیجه $h(G_۱-v_i)=h(G_۱)=\frac{۱}{۲}$. اگر بعضی رئوس $G_۱$ همیشه رنگ خود را بیان کنند آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۲.۰.۱) داریم: $h(G_۱)=\frac{۱}{۲}$. اکنون فرض کنید هیچ راسی در $G_۱$ وجود ندارد که همیشه رنگ خود را بیان کند. فرض کنید هر راس در ۱، ۲، ۴ یا ۶ موقعیت رنگ خود را بیان کند. بنابراین دو احتمال زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱) هر راس در دقیقاً یک موقعیت رنگ خود را بیان کند.

(۲) وجود دارد راسی که در حداقل ۴ موقعیت رنگ خود را بیان کند.

(۱) بیان وضعیت هر راس در هر موقعیت در دقیقاً ۴ حالت درست است. زیرا موقعیت هر راس متناظر با ۸ حالت است، در $\frac{۱}{۲}$ همه این حالات هر راس رنگ خود را بیان می‌کند. اگر هر راس رنگ خود را در دقیقاً یک موقعیت بیان کند، پس دقیقاً در ۱۶ حالت بیان وضعیت درست داریم، بنابراین تیم در حداکثر ۱۶ حالت برنده است، و این بدان معنا است که $p(S)=\frac{|Cw(S)|}{|C(G_۱)|}\leq\frac{۱۶}{۳۲}=\frac{۱}{۲}$. از آن‌جایی که $S\in F^\circ(G_۱)$، داریم: $h(G_۱)\leq\frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱) داریم: $h(G_۱)\geq\frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_۱)=\frac{۱}{۲}$.

(۲) دو احتمال در نظر می‌گیریم: *(۲.۱)* وجود دارد راسی که در دقیقاً ۶ موقعیت رنگ خود را بیان می‌کند؛ *(۲.۲)* هر راس رنگ خود را در حداکثر ۴ موقعیت بیان می‌کند.

(۲.۱) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_i$ در دقیقاً ۶ موقعیت رنگ خود را بیان کند. از آن‌جایی که موقعیتی وجود ندارد که هر دو راس $v_i$ و $v_j$ با هم رنگ خود را بیان کنند. $v_j$ رنگ خود را در حداقل ۲ موقعیت بیان می‌کند، پس $v_j$ رنگ خود را در دقیقاً ۲ موقعیت بیان می‌کند. فرض کنید $v_i\in\{v_۱,v_۲\}$. از این رو در هر یک از موقعیت‌های $(*,b,*,b,b)$ ، $(*,b,*,b,r)$، $(*,b,*,r,b)$، $(*,b,*,r,r)$، $(*,r,*,b,b)$، $(*,r,*,b,r)$، $(*,r,*,r,b)$، $(*,r,*,r,r)$ راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان می‌کند. با توجه به قضیه (۲۱.۰.۱) داریم:

$$|Cl(S,v_۲^b,v_۴^b,v_۵^b)|\geq\frac{|C(G_۱,v_۲^b,v_۴^b,v_۵^b)|}{۲},\qquad |Cl(S,v_۲^b,v_۴^b,v_۵^r)|\geq\frac{|C(G_۱,v_۲^b,v_۴^b,v_۵^r)|}{۲}$$
$$|Cl(S,v_۲^b,v_۴^r,v_۵^b)|\geq\frac{|C(G_۱,v_۲^b,v_۴^r,v_۵^b)|}{۲},\qquad |Cl(S,v_۲^b,v_۴^r,v_۵^r)|\geq\frac{|C(G_۱,v_۲^b,v_۴^r,v_۵^r)|}{۲}$$
$$|Cl(S,v_۲^r,v_۴^b,v_۵^b)|\geq\frac{|C(G_۱,v_۲^r,v_۴^b,v_۵^b)|}{۲},\qquad |Cl(S,v_۲^r,v_۴^b,v_۵^r)|\geq\frac{|C(G_۱,v_۲^r,v_۴^b,v_۵^r)|}{۲}$$
$$|Cl(S,v_۲^r,v_۴^r,v_۵^b)|\geq\frac{|C(G_۱,v_۲^r,v_۴^r,v_۵^b)|}{۲},\qquad |Cl(S,v_۲^r,v_۴^r,v_۵^r)|\geq\frac{|C(G_۱,v_۲^r,v_۴^r,v_۵^r)|}{۲}$$

خواهیم داشت:

$$|Cl(S)| = |Cl(S, v_2^b, v_4^b, v_5^b)| + Cl(S, v_2^b, v_4^b, v_5^r)| + |Cl(S, v_2^b, v_4^r, v_5^b)| + Cl(S, v_2^b, v_4^r, v_5^r)|$$

$$+|Cl(S, v_2^r, v_4^b, v_5^b)| + Cl(S, v_2^r, v_4^b, v_5^r)| + |Cl(S, v_2^r, v_4^r, v_5^b)| + Cl(S, v_2^r, v_4^r, v_5^r)|$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{|C(G_1, v_2^b, v_4^b, v_5^b)|}{2} + \frac{|C(G_1, v_2^b, v_4^b, v_5^r)|}{2} + \frac{|C(G_1, v_2^b, v_4^r, v_5^b)|}{2} + \frac{|C(G_1, v_2^b, v_4^r, v_5^r)|}{2} \\ &+ \frac{|C(G_1, v_2^r, v_4^b, v_5^b)|}{2} + \frac{|C(G_1, v_2^r, v_4^b, v_5^r)|}{2} + \frac{|C(G_1, v_2^r, v_4^r, v_5^b)|}{2} + \frac{|C(G_1, v_2^r, v_4^r, v_5^r)|}{2} \\ &= \frac{|C(G_1)|}{2} \end{aligned}$$

$$p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_1)|} = \frac{|C(G_1)| - |Cl(S)|}{|C(G_1)|} \leq \frac{|C(G_1)| - \frac{|C(G_1)|}{2}}{|C(G_1)|} = \frac{1}{2}$$

از آن‌جایی که $S \in F^\circ(G_1)$، پس $h(G_1) \leq \frac{1}{2}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱) داریم: $h(G_1) \geq \frac{1}{2}$. در نتیجه $h(G_1) = \frac{1}{2}$.

(۲.۲) از آن‌جایی که وجود دارد راسی که رنگ خود را در دقیقاً ۴ موقعیت بیان می‌کند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید راس $v_1$ در دقیقاً ۴ موقعیت رنگ خود را بیان کند. حال دو احتمال در مورد $v_3$ در نظر می‌گیریم:

**(۲.۲.۱)** $v_3$ در دقیقاً ۴ موقعیت رنگ خود را بیان کند.

**(۲.۲.۲)** $v_3$ در دقیقاً ۲ موقعیت رنگ خود را بیان کند.

(۲.۲.۱) از آن‌جایی که در هر یک از موقعیت‌های $(*, b, *, b, b)$، $(*, b, *, b, r)$، $(*, b, *, r, b)$، $(*, b, *, r, r)$، $(*, r, *, b, b)$، $(*, r, *, b, r)$، $(*, r, *, r, b)$، $(*, r, *, r, r)$ راس $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان می‌کند. به طور مشابه، به مباحث در (۲.۱) داریم: $h(G_1) = \frac{1}{2}$.

(۲.۲.۲) دو احتمال در نظر می‌گیریم: *(آ)* در هر ۴ موقعیت که $v_1$ رنگ خود را بیان می‌کند، $v_2$ یا $v_4$ یا $v_5$ رنگ‌های یکسانی دارند؛ *(ب)* در هر ۴ موقعیت که $v_1$ رنگ خود را بیان می‌کند، $v_2$ و $v_4$ و $v_5$ رنگ‌های متفاوتی دارند. اکنون دو احتمال در مورد $v_1$ در نظر می‌گیریم: ۱. در هر ۴ موقعیت $v_1$ رنگ یکسانی بیان می‌کند؛ ۲. در هر ۴ موقعیت $v_1$ رنگ متفاوتی بیان می‌کند.

فرض کنید $v_i \in \{v_1, v_2\}$. چهار احتمال در نظر می‌گیریم: *(۲.۲.۲.۱)* (آ،۱)؛ *(۲.۲.۲.۲)* (آ،۲)؛ *(۲.۲.۲.۳)* (ب،۱)؛ *(۲.۲.۲.۴)* (ب،۲).

(۲.۲.۲.۱) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_1$ در ۴ موقعیت $(*, b, *, b, b)$، $(*, b, *, b, r)$، $(*, b, *, r, b)$، $(*, b, *, r, r)$ رنگ خود را آبی بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_3$ در دو موقعیت $(*, r, *, b, b)$، $(*, r, *, b, r)$ رنگ خود را آبی بیان کند. حالت‌های که بیان وضعیت درست داریم عبارتند از: $(b, b, b, b, b)$، $(b.b, b, b, r)$، $(b, b, b, r, b)$، $(b, b, b, r, r)$،

$(b,b,r,b,b)$، $(b,b,r,b,r)$، $(b,b,r,r,b)$، $(b,b,r,r,r)$، $(b,r,b,b,b)$، $(b,r,b,b,r)$، $(r,r,b,b,b)$ و $(r,r,b,b,r)$؛ و حالت‌های که بیان وضعیت نادرست داریم عبارتند از: $(b,r,r,b,b)$، $(b,r,r,b,r)$، $(r,b,b,b,b)$، $(r,b,b,b,r)$، $(r,b,b,r,b)$، $(r,b,b,r,r)$، $(r,b,r,b,b)$، $(r,b,r,b,r)$، $(r,b,r,r,b)$، $(r,b,r,r,r)$، $(r,r,r,b,b)$ و $(r,r,r,b,r)$. موقعیت $(b,*,b,*,*)$ متناظر با ۸ حالت است که در ۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۲ حالت راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنا به گزاره (۲.۱.۳) از بین حالت‌های متناظر با موقعیت $(b,*,b,*,*)$ تنها دو حالت $(b,r,b,r,b)$ و $(b,r,b,r,r)$ می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند. در دو حالت که $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند بیان وضعیت $v_i$ نادرست است، و این بدان معنا است که در حداقل ۴ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,b,*,*)$ که $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند. بنابراین بیان وضعیت $v_i$ در موقعیت $(b,*,b,*,*)$ نمی‌تواند نتیجه شانس موفقیت را بهبود ببخشد، پس فرض می‌کنیم $v_i$ رنگ خود را در موقعیت $(b,*,b,*,*)$ بیان نکند. اینک حالت‌های متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*)$ را در نظر می‌گیریم. در ۴ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*)$ راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، و در ۲ حالت راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳) از بین حالت‌های متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*)$ تنها دو حالت $(b,r,r,r,b)$ و $(b,r,r,r,r)$ می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند. بیان وضعیت $v_i$ در این دو حالت است که می‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد. اما در حالت‌های که $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند. بنابراین بیان وضعیت $v_i$ در موقعیت $(b,*,r,*,*)$ نمی‌تواند نتیجه شانس موفقیت را بهبود ببخشد. فرض می‌کنیم $v_i$ رنگ خود را در موقعیت $(b,*,r,*,*)$ بیان نکند. از حالت‌های متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*)$ تنها دو حالت است که $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین از حالت‌های متناظر با موقعیت $(r,*,r,*,*)$ تنها دو حالت است که $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند، بنابراین تنها ۴ حالت است که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۱۶ حالت برنده است، پس داریم: $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_۱)|} \leq \frac{۱۶}{۳۲} = \frac{۱}{۲}$. از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_۱$ است، پس $h(G_۱) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱)، $h(G_۱) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_۱) = \frac{۱}{۲}$.

(۲.۲.۲.۲) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در موقعیت‌های $(*,b,*,b,b)$، $(*,b,*,b,r)$ رنگ خود را آبی بیان کند و در موقعیت‌های $(*,b,*,r,b)$، $(*,b,*,r,r)$ رنگ خود را قرمز بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در موقعیت‌های $(*,r,*,b,b)$، $(*,r,*,b,r)$ رنگ خود را آبی بیان کند. حالت‌های که بیان وضعیت درست داریم عبارتند از: $(b,b,b,b,b)$، $(b,b,b,b,r)$، $(b,b,r,b,b)$، $(b,r,b,b,r)$، $(b,b,r,b,r)$، $(b,r,b,b,b)$، $(r,b,b,r,b)$، $(r,b,b,r,r)$، $(r,b,r,r,b)$، $(r,b,r,r,r)$، $(r,r,b,b,b)$ و $(r,r,b,b,r)$. حالت‌های که بیان وضعیت نادرست داریم عبارتند از: $(b,b,b,r,b)$، $(b,b,b,r,r)$، $(b,b,r,r,b)$، $(b,b,r,r,r)$، $(b,r,r,b,b)$، $(b,r,r,b,r)$، $(r,b,b,b,b)$، $(r,b,b,b,r)$، $(r,b,r,b,b)$، $(r,b,r,b,r)$، $(r,r,r,b,b)$ و $(r,r,r,b,r)$. موقعیت $(b,*,b,*,*)$ متناظر با ۸ حالت است که در ۴ حالت راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۲ حالت راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۲ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند.

همچنین در ۴ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*)$، $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۲ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۲ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,r,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ رنگ خود را در هر یک از موقعیت‌های $(b,*,b,*,*)$ و $(r,*,b,*,*)$ بیان نکند. موقعیت $(b,*,r,*,*)$ متناظر با ۸ حالت است که در ۲ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۴ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۲ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین موقعیت $(r,*,r,*,*)$ متناظر با ۸ حالت است که در ۲ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۴ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۲ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین با توجه به گزاره (۲.۱.۳) تنها ۴ حالت است که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۱۶ حالت برنده است. در این صورت $p(S)=\frac{|Cw(S)|}{|C(G_1)|}\leq\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$ است. از آن‌جایی که $S$ بهینه است، پس $h(G_1)\leq\frac{1}{2}$. از طرفی $h(G_1)\geq\frac{1}{2}$، در نتیجه $h(G_1)=\frac{1}{2}$.

(۲.۲.۲.۳) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_1$ در موقعیت‌های $(*,b,*,b,b)$، $(*,b,*,b,r)$، $(*,r,*,r,b)$ و $(*,r,*,r,r)$ رنگ خود را آبی بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_3$ در موقعیت‌های $(*,r,*,b,b)$، $(*,r,*,b,r)$ رنگ خود را آبی بیان کند. حالت‌های که بیان وضعیت درست داریم عبارتند از: $(b,b,b,b,b)$، $(b,b,b,b,r)$، $(b,b,r,b,b)$، $(b,b,r,b,r)$، $(b,r,b,b,b)$، $(b,r,b,b,r)$، $(b,r,b,r,b)$، $(b,r,b,r,r)$، $(b,r,r,r,b)$، $(b,r,r,r,r)$، $(r,r,b,b,b)$ و $(r,r,b,,b,r)$. حالت‌های که بیان وضعیت نادرست داریم عبارتند از: $(b,r,r,b,b)$، $(b,r,r,b,r)$، $(r,b,b,b,b)$، $(r,b,b,b,r)$، $(r,b,r,b,b)$، $(r,b,r,b,r)$، $(r,r,b,r,b)$، $(r,r,b,r,r)$، $(r,r,r,b,b)$، $(r,r,r,b,r)$، $(r,r,r,r,b)$ و $(r,r,r,r,r)$. موقعیت $(b,*,b,*,*)$ متناظر با ۸ حالت است که در ۶ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۲ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,b,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ رنگ خود را در موقعیت $(b,*,b,*,*)$ بیان نکند. همچنین در ۴ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*)$ راس $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۲ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۲ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,r,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ رنگ خود را در موقعیت $(b,*,r,*,*)$ بیان نکند. در ۲ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*)$، $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین در ۲ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*,*)$، $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین بیان وضعیت $v_i$ تنها در ۴ حالت است که می‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد، پس تیم در حداکثر ۱۶ حالت برنده است، داریم: $p(S)=\frac{|Cw(S)|}{|C(G_1)|}\leq\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$. از آن‌جایی که $S$ بهینه است، پس $h(G_1)\leq\frac{1}{2}$. از طرفی $h(G_1)\geq\frac{1}{2}$ است. در نتیجه $h(G_1)=\frac{1}{2}$.

(۲.۲.۲.۴) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_1$ در موقعیت‌های $(*,b,*,b,b)$، $(*,b,*,b,r)$ رنگ خود را آبی بیان کند و در موقعیت‌های $(*,r,*,r,b)$ و $(*,r,*,r,r)$ رنگ خود را قرمز بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_3$ در موقعیت‌های $(*,r,*,b,b)$، $(*,r,*,b,r)$ رنگ خود را آبی بیان کند. حالت‌های که بیان وضعیت درست داریم عبارتند از: $(b,b,b,b,b)$، $(b,b,b,b,r)$، $(b,b,r,b,b)$، $(b,b,r,b,r)$، $(b,r,b,b,b)$، $(b,r,b,b,r)$، $(r,r,b,b,b)$، $(r,r,b,b,r)$، $(r,r,b,r,b)$،

$(r,r,b,r,r)$، $(r,r,r,r,b)$ و $(r,r,r,r,r)$. حالت‌های که بیان وضعیت نادرست داریم عبارتند از: $(b,r,b,r,b)$، $(b,r,b,r,r)$، $(b,r,r,b,b)$، $(b,r,r,b,r)$، $(b,r,r,r,b)$، $(b,r,r,r,r)$، $(r,b,b,b,b)$، $(r,b,b,b,r)$، $(r,b,r,b,b)$، $(r,b,r,b,r)$، $(r,r,r,b,b)$، $(r,r,r,b,r)$. در ۴ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,b,*,*)$ راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۲ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۲ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. در ۴ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*)$ راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۲ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۲ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,r,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ در موقعیت‌های $(b,*,b,*,*)$ و $(r,*,b,*,*)$ رنگ خود را بیان نکند. در ۲ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. در ۲ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین با توجه به گزاره (۲.۱.۳) تنها ۴ حالت است که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۱۶ حالت برنده است، داریم: $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_۱)|} \leq \frac{۱۶}{۳۲} = \frac{۱}{۲}$. از آن‌جایی که $S$ بهینه است، پس $h(G_۱) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی $h(G_۱) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_۱) = \frac{۱}{۲}$.

**حالت دوم:** (آ). فرض کنید $S$ یک استراتژی بهینه برای گراف $G_{۲۱}$ باشد که رئوس $v_i$ و $v_j$ در هیچ موقعیتی هر دو با هم رنگ خود را بیان نمی‌کنند، و $N_{G_{۲۱}}(v_i) \cap N_{G_{۲۱}}(v_j) = \{x,y\}$ برای هر $i$ و $j$ معین که $i,j \in \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $i \neq j$. اینک نشان می‌دهیم که چنین استراتژی وجود دارد. فرض کنید $S'$ یک استراتژی بهینه برای گراف $G_{۲۱}$ باشد. فرض کنید در استراتژی $S'$ موقعیتی وجود دارد که رئوس $v_i$ و $v_j$ هر دو با هم رنگ خود را بیان می‌کنند. استراتژی $S$ و $S'$ با هم متفاوت است و تنها تفاوت این دو استراتژی در این است که راس $v_i$ ($v_j$، به ترتیب) رنگ خود را بیان می‌کند زمانی که راس $v_j$ ($v_i$، به ترتیب) رنگ خود را بیان نکند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳) بیان وضعیت $v_j$ ($v_i$، به ترتیب) نمی‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد. بنابراین داریم: $p(S) \geq p(S')$. از آن‌جایی که $S'$ یک استراتژی بهینه برای $G_{۲۱}$ است، پس $S$ نیز بهینه است. در استراتژی $S$ موقعیتی که رئوس $v_i$ و $v_j$ هر دو با هم رنگ خود را بیان کنند وجود ندارد. اگر بعضی رئوس مانند $v_i$ هرگز رنگ خود را بیان نکنند. آنگاه با توجه به قضیه (۲۳.۰.۱) داریم: $h(G_{۲۱}) = h(G_{۲۱} - v_i)$. اگر $d_{G_{۲۱}}(v_i) = ۲$ باشد، آنگاه $G_{۲۱} - v_i = T$، و با توجه به قضیه (۲.۲.۲)، $h(T) = \frac{۱}{۲}$ است. بنابراین $h(G_{۲۱} - v_i) = h(T) = \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_{۲۱}) = \frac{۱}{۲}$. اگر $d_{G_{۲۱}}(v_i) > ۲$، آنگاه $G_{۲۱} - v_i = P_۱ \cup T$، و با توجه به قضیه (۲.۲.۲) و قضیه (۱.۲.۲) داریم: $h(P_۱ \cup T) = max\{h(P_۱), h(T)\} = \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_{۲۱}) = \frac{۱}{۲}$. اگر $d_{G_{۲۱}}(v_i) = ۱$، پس $G_{۲۱} - v_i = G_۱$، بنابراین با توجه حالت اول داریم: $h(G_۱) = \frac{۱}{۲}$. درنتیجه $h(G_{۲۱}) = h(G_{۲۱} - v_i) = h(G_۱) = \frac{۱}{۲}$. اگر بعضی رئوس $G_{۲۱}$ همیشه رنگ خود را بیان کنند آنگاه با توجه به قضیه (۲۲.۰.۱) داریم: $h(G_{۲۱}) = \frac{۱}{۲}$. اکنون فرض کنید هیچ راس در $G_{۲۱}$ وجود ندارد که همیشه رنگ خود را بیان کند. فرض کنید هر راس در ۱، ۴، ۸ یا ۱۲ موقعیت رنگ خود را بیان کند. دو احتمال زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱) هر راس رنگ خود را در دقیقاً یک موقعیت بیان کند.

**(۲)** وجود دارد راسی که رنگ خود را در حداقل ۸ موقعیت بیان کند.

(۱) بیان وضعیت هر راس در هر موقعیت در دقیقاً ۸ حالت درست است، زیرا موقعیت هر راس متناظر با ۱۶ حالت است، در $\frac{۱}{۲}$ همه این حالات هر راس رنگ خود را بیان می‌کند. اگر هر راس رنگ خود را در دقیقاً یک موقعیت بیان کند، پس دقیقاً در ۳۲ حالت بیان وضعیت درست داریم. بنابراین تیم در حداکثر ۳۲ حالت برنده است، و این بدان معنا است که $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_{۲۱})|} \leq \frac{۳۲}{۶۴} = \frac{۱}{۲}$. از آن‌جایی که $S \in F^{\circ}(G_{۲۱})$، داریم: $h(G_{۲۱}) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱) داریم: $h(G_{۲۱}) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_{۲۱}) = \frac{۱}{۲}$.

(۲) دو احتمال در نظر می‌گیریم: *(۲.۱)* وجود دارد راسی که رنگ خود را در دقیقاً ۱۲ موقعیت بیان می‌کند؛ *(۲.۲)* هر راس رنگ خود را در حداکثر ۸ موقعیت بیان می‌کند.

(۲.۱) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_i$ رنگ خود را در دقیقاً ۱۲ موقعیت بیان کند. از آن‌جایی که موقعیتی وجود ندارد که هر دو راس $v_i$ و $v_j$ با هم رنگ خود را بیان کنند. $v_j$ رنگ خود را در حداقل ۴ موقعیت بیان می‌کند، پس $v_j$ رنگ خود را در دقیقاً ۴ موقعیت بیان می‌کند. فرض کنید $v_i \in \{v_۱, v_۲\}$. از این رو در هر یک از موقعیت‌های $(*, b, *, b, b, b)$، $(*, b, *, b, r, b)$، $(*, b, *, b, b, r)$، $(*, b, *, b, r, r)$، $(*, b, *, r, b, b)$، $(*, b, *, r, r, b)$، $(*, b, *, r, b, r)$، $(*, b, *, r, r, r)$، $(*, r, *, b, b, b)$، $(*, r, *, b, r, b)$، $(*, r, *, b, b, r)$، $(*, r, *, b, r, r)$، $(*, r, *, r, b, b)$، $(*, r, *, r, r, b)$، $(*, r, *, r, b, r)$ و $(*, r, *, r, r, r)$ راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان می‌کنند. با توجه به قضیه (۲۱.۰.۱) داریم:

$$|Cl(S, v_۲^b, v_۴^b, v_۵^b, v_۶^b)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^b, v_۴^b, v_۵^b, v_۶^b)|}{۲}, \qquad |Cl(S, v_۲^b, v_۴^b, v_۵^r, v_۶^b)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^b, v_۴^b, v_۵^r, v_۶^b)|}{۲}$$

$$|Cl(S, v_۲^b, v_۴^b, v_۵^b, v_۶^r)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^b, v_۴^b, v_۵^b, v_۶^r)|}{۲}, \qquad |Cl(S, v_۲^b, v_۴^b, v_۵^r, v_۶^r)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^b, v_۴^b, v_۵^r, v_۶^r)|}{۲}$$

$$|Cl(S, v_۲^b, v_۴^r, v_۵^b, v_۶^b)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^b, v_۴^r, v_۵^b, v_۶^b)|}{۲}, \qquad |Cl(S, v_۲^b, v_۴^r, v_۵^r, v_۶^b)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^b, v_۴^r, v_۵^r, v_۶^b)|}{۲}$$

$$|Cl(S, v_۲^b, v_۴^r, v_۵^b, v_۶^r)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^b, v_۴^r, v_۵^b, v_۶^r)|}{۲}, \qquad |Cl(S, v_۲^b, v_۴^r, v_۵^r, v_۶^r)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^b, v_۴^r, v_۵^r, v_۶^r)|}{۲}$$

$$|Cl(S, v_۲^r, v_۴^b, v_۵^b, v_۶^b)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^r, v_۴^b, v_۵^b, v_۶^b)|}{۲}, \qquad |Cl(S, v_۲^r, v_۴^b, v_۵^r, v_۶^b)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^r, v_۴^b, v_۵^r, v_۶^b)|}{۲}$$

$$|Cl(S, v_۲^r, v_۴^b, v_۵^b, v_۶^r)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^r, v_۴^b, v_۵^b, v_۶^r)|}{۲}, \qquad |Cl(S, v_۲^r, v_۴^b, v_۵^r, v_۶^r)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^r, v_۴^b, v_۵^r, v_۶^r)|}{۲}$$

$$|Cl(S, v_۲^r, v_۴^r, v_۵^b, v_۶^b)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^r, v_۴^r, v_۵^b, v_۶^b)|}{۲}, \qquad |Cl(S, v_۲^r, v_۴^r, v_۵^r, v_۶^b)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^r, v_۴^r, v_۵^r, v_۶^b)|}{۲}$$

$$|Cl(S, v_۲^r, v_۴^r, v_۵^b, v_۶^r)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^r, v_۴^r, v_۵^b, v_۶^r)|}{۲}, \qquad |Cl(S, v_۲^r, v_۴^r, v_۵^r, v_۶^r)| \geq \frac{|C(G_{۲۱}, v_۲^r, v_۴^r, v_۵^r, v_۶^r)|}{۲}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
|Cl(S)| &= |Cl(S,v_{۲}^{b},v_{۴}^{b},v_{۵}^{b},v_{۶}^{b})| + |Cl(S,v_{۲}^{b},v_{۴}^{b},v_{۵}^{r},v_{۶}^{b})| + |Cl(S,v_{۲}^{b},v_{۴}^{b},v_{۵}^{b},v_{۶}^{r})| \\
&+|Cl(S,v_{۲}^{b},v_{۴}^{b},v_{۵}^{r},v_{۶}^{r})| + |Cl(S,v_{۲}^{b},v_{۴}^{r},v_{۵}^{b},v_{۶}^{b})| + |Cl(S,v_{۲}^{b},v_{۴}^{r},v_{۵}^{r},v_{۶}^{b})| \\
&+|Cl(S,v_{۲}^{b},v_{۴}^{r},v_{۵}^{b},v_{۶}^{r})| + |Cl(S,v_{۲}^{b},v_{۴}^{r},v_{۵}^{r},v_{۶}^{r})| + |Cl(S,v_{۲}^{r},v_{۴}^{b},v_{۵}^{b},v_{۶}^{b})| \\
&+|Cl(S,v_{۲}^{r},v_{۴}^{b},v_{۵}^{r},v_{۶}^{b})| + |Cl(S,v_{۲}^{r},v_{۴}^{b},v_{۵}^{b},v_{۶}^{r})| + |Cl(S,v_{۲}^{r},v_{۴}^{b},v_{۵}^{r},v_{۶}^{r})| \\
&+|Cl(S,v_{۲}^{r},v_{۴}^{r},v_{۵}^{b},v_{۶}^{b})| + |Cl(S,v_{۲}^{r},v_{۴}^{r},v_{۵}^{r},v_{۶}^{b})| + |Cl(S,v_{۲}^{r},v_{۴}^{r},v_{۵}^{b},v_{۶}^{r})| \\
&+|Cl(S,v_{۲}^{r},v_{۴}^{r},v_{۵}^{r},v_{۶}^{r})| \geq \frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{b},v_{۴}^{b},v_{۵}^{b},v_{۶}^{b})|}{۲} + \frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{b},v_{۴}^{b},v_{۵}^{r},v_{۶}^{b})|}{۲} \\
&+\frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{b},v_{۴}^{b},v_{۵}^{b},v_{۶}^{r})|}{۲} + \frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{b},v_{۴}^{b},v_{۵}^{r},v_{۶}^{r})|}{۲} + \frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{b},v_{۴}^{r},v_{۵}^{b},v_{۶}^{b})|}{۲} \\
&+\frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{b},v_{۴}^{r},v_{۵}^{r},v_{۶}^{b})|}{۲} + \frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{b},v_{۴}^{r},v_{۵}^{b},v_{۶}^{r})|}{۲} + \frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{b},v_{۴}^{r},v_{۵}^{r},v_{۶}^{r})|}{۲} \\
&+\frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{r},v_{۴}^{b},v_{۵}^{b},v_{۶}^{b})|}{۲} + \frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{r},v_{۴}^{b},v_{۵}^{r},v_{۶}^{b})|}{۲} + \frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{r},v_{۴}^{b},v_{۵}^{b},v_{۶}^{r})|}{۲} \\
&+\frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{r},v_{۴}^{b},v_{۵}^{r},v_{۶}^{r})|}{۲} + \frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{r},v_{۴}^{r},v_{۵}^{b},v_{۶}^{b})|}{۲} + \frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{r},v_{۴}^{r},v_{۵}^{r},v_{۶}^{b})|}{۲} \\
&+\frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{r},v_{۴}^{r},v_{۵}^{b},v_{۶}^{r})|}{۲} + \frac{|C(G_{۲۱},v_{۲}^{r},v_{۴}^{r},v_{۵}^{r},v_{۶}^{r})|}{۲} = \frac{|C(G_{۲۱})|}{۲}
\end{aligned}$$

پس داریم:

$$p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_{۲۱})|} = \frac{|C(G_{۲۱})| - |Cl(S)|}{|C(G_{۲۱})|} \leq \frac{|C(G_{۲۱})| - \frac{|C(G_{۲۱})|}{۲}}{|C(G_{۲۱})|} = \frac{۱}{۲}$$

از آن‌جایی که $S \in F^{\circ}(G_{۲۱})$، داریم: $h(G_{۲۱}) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱) داریم: $h(G_{۲۱}) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_{۲۱}) = \frac{۱}{۲}$.

(۲.۲) از آن‌جایی که وجود دارد راسی که رنگ خود را در دقیقاً ۸ موقعیت بیان می‌کند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید راس $v_{۱}$ رنگ خود را در دقیقاً ۸ موقعیت بیان کند. حال دو احتمال در مورد $v_{۳}$ در زیر در نظر می‌گیریم:

**(۲.۲.۱)** $v_{۳}$ رنگ خود را در دقیقاً ۸ موقعیت بیان کند.

**(۲.۲.۲)** $v_{۳}$ رنگ خود را در دقیقاً ۴ موقعیت بیان کند.

(۲.۲.۱) از آن‌جایی که در هر یک از موقعیت‌های $(*,b,*,b,b,b)$، $(*,b,*,b,r,b)$، $(*,b,*,b,b,r)$، $(*,b,*,b,r,r)$، $(*,b,*,r,b,b)$، $(*,b,*,r,r,b)$،$(*,b,*,r,b,r)$، $(*,b,*,r,r,r)$، $(*,r,*,b,b,b)$، $(*,r,*,b,r,b)$، $(*,r,*,b,b,r)$، $(*,r,*,b,r,r)$، $(*,r,*,r,b,b)$، $(*,r,*,r,r,b)$، $(*,r,*,r,b,r)$ و $(*,r,*,r,r,r)$ راس $v_{۱}$ یا $v_{۳}$ رنگ خود را بیان می‌کنند، به طور مشابه به مباحث در (۲.۱) داریم: $h(G_{۲۱}) = \frac{۱}{۲}$.

(۲.۲.۲) دو احتمال در نظر می‌گیریم: *(آ)* در هر ۸ موقعیت که $v_{۱}$ رنگ خود را بیان می‌کند، $v_{۲}$ یا $v_{۴}$ یا $v_{۵}$ یا $v_{۶}$ رنگ یکسانی دارند؛ *(ب)* در هر ۸ موقعیت که $v_{۱}$ رنگ خود را بیان می‌کند، $v_{۲}$ و $v_{۴}$

و $v_۵$، $v_۶$ رنگ متفاوتی دارند. اکنون دو احتمال در مورد $v_۱$ در نظر می‌گیریم: ۱. در هر ۸ موقعیت $v_۱$ رنگ یکسانی بیان می‌کند؛ ۲. در هر ۸ موقعیت $v_۱$ رنگ متفاوتی بیان می‌کند.

فرض کنید $v_i \in \{v_۱, v_۲\}$. اکنون چهار احتمال در نظر می‌گیریم: *(۲.۲.۲.۱)* (آ،۱)؛ *(۲.۲.۲.۲)* (آ،۲)؛ *(۲.۲.۲.۳)* (ب،۱)؛ *(۲.۲.۲.۴)* (ب،۲).

(۲.۲.۲.۱) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در موقعیت‌های $(*,b,*,b,b,b)$، $(*,b,*,b,r,b)$، $(*,b,*,b,b,r)$، $(*,b,*,b,r,r)$، $(*,b,*,r,b,b)$، $(*,b,*,r,r,b)$، $(*,b,*,r,b,r)$، $(*,b,*,r,r,r)$، رنگ خود را آبی بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در موقعیت‌های $(*,r,*,b,b,b)$، $(*,r,*,b,r,b)$، $(*,r,*,b,b,r)$، $(*,r,*,b,r,r)$ رنگ خود را آبی بیان کند. حالت‌های که بیان وضعیت درست داریم عبارتند از: $(b,b,b,b,b,b)$، $(b.b,b,b,b,r)$، $(b,b,b,b,r,b)$، $(b.b,b,b,r,r)$، $(b,b,b,r,b,b)$، $(b,b,b,r,b,r)$، $(b,b,b,r,r,b)$، $(b,b,b,r,r,r)$، $(b,b,r,b,b,b)$، $(b,b,r,b,b,r)$، $(b,b,r,b,r,b)$، $(b,b,r,b,r,r)$، $(b,b,r,r,b,b)$، $(b,b,r,r,b,r)$، $(b,b,r,r,r,b)$، $(b,b,r,r,r,r)$، $(b,r,b,b,b,b)$، $(b,r,b,b,b,r)$، $(b,r,b,b,r,b)$، $(b,r,b,b,r,r)$، $(r,r,b,b,r,b)$، $(r,r,b,b,r,r)$، $(r,r,b,b,b,b)$ و $(r,r,b,b,b,r)$، و حالت‌های که بیان وضعیت نادرست داریم عبارتند از: $(b,r,r,b,b,b)$، $(b,r,r,b,b,r)$، $(b,r,r,b,r,b)$، $(b,r,r,b,r,r)$، $(r,b,b,b,r,b)$، $(r,b,b,b,r,r)$، $(r,b,b,b,b,b)$، $(r,b,b,b,b,r)$، $(r,b,b,r,r,b)$، $(r,b,b,r,r,r)$، $(r,b,b,r,b,b)$، $(r,b,b,r,b,r)$، $(r,b,r,b,r,b)$، $(r,b,r,b,r,r)$، $(r,b,r,b,b,b)$، $(r,b,r,b,b,r)$، $(r,b,r,r,r,b)$، $(r,b,r,r,r,r)$، $(r,b,r,r,b,b)$، $(r,b,r,r,b,r)$، $(r,r,r,b,r,b)$، $(r,r,r,b,r,r)$، $(r,r,r,b,b,b)$ و $(r,r,r,b,b,r)$. موقعیت $(b,*,b,*,*,*)$ متناظر با ۱۶ حالت است که در ۱۲ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، ۴ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنا به گزاره (۲.۱.۳) از بین حالت‌های متناظر با موقعیت $(b,*,b,*,*,*)$ تنها ۴ حالت است که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند. در ۸ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,b,*,*,*)$ بیان وضعیت $v_i$ نادرست است. این بدان معنا است که در ۸ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,b,*,*,*)$ که $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند. بنابراین بیان وضعیت $v_i$ در موقعیت $(b,*,b,*,*,*)$ نمی‌تواند شانس موفقیت را بهبود ببخشد. پس فرض می‌کنیم $v_i$ در موقعیت $(b,*,b,*,*,*)$ رنگ خود را بیان نکند. اکنون حالت‌های متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*)$ را در نظر می‌گیریم. در ۸ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*)$ راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، ۴ حالت راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و ۴ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳) از بین ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*)$، ۸ حالت است که $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند، و این بدان معنا است که در بعضی حالت‌های متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند. بنابراین بیان وضعیت $v_i$ در موقعیت $(b,*,r,*,*,*)$ نمی‌تواند شانس موفقیت را بهبود ببخشد، پس فرض می‌کنیم $v_i$ در موقعیت $(b,*,r,*,*,*)$ رنگ خود را بیان نکند. در ۴ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین تنها ۴ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین تنها ۸ حالت است که می‌توانند نتیجه

هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۳۲ حالت برنده است. در این صورت $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_{۲۱})|} \leq \frac{۳۲}{۶۴} = \frac{۱}{۲}$. از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_{۲۱}$ است. پس $h(G_{۲۱}) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱)، $h(G_{۲۱}) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_{۲۱}) = \frac{۱}{۲}$.

(۲.۲.۲.۲) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در موقعیت‌های $(*, b, *, b, b, b)$، $(*, b, *, b, r, b)$، $(*, b, *, b, b, r)$، $(*, b, *, b, r, r)$ رنگ خود را آبی بیان کند و در موقعیت‌های $(*, b, *, r, b, b)$، $(*, b, *, r, r, b)$، $(*, b, *, r, b, r)$، $(*, b, *, r, r, r)$ رنگ خود را قرمز بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در موقعیت‌های $(*, r, *, b, b, b)$، $(*, r, *, b, r, b)$، $(*, r, *, b, b, r)$، $(*, r, *, b, r, r)$، رنگ خود را آبی بیان کند. حالت‌های که بیان وضعیت درست داریم عبارتند از: $(b, b, b, b, b, b)$، $(b.b, b, b, b, r)$، $(b, b, b, b, r, b)$، $(b.b, b, b, r, r)$، $(b, b, r, b, b, b)$، $(b, b, r, b, b, r)$، $(b, b, r, b, r, b)$، $(b, b, r, b, r, r)$، $(b, r, b, b, b, b)$، $(b, r, b, b, b, r)$، $(b, r, b, b, r, b)$، $(b, r, b, b, r, r)$، $(r, b, b, r, r, b)$، $(r, b, b, r, r, r)$، $(r, b, b, r, b, b)$، $(r, b, b, r, b, r)$، $(r, b, r, r, r, b)$، $(r, b, r, r, r, r)$، $(r, b, r, r, b, b)$، $(r, b, r, r, b, r)$، $(r, r, b, b, r, b)$، $(r, r, b, b, r, r)$، $(r, r, b, b, b, b)$ و $(r, r, b, b, b, r)$، و حالت‌های که بیان وضعیت نادرست داریم عبارتند از: $(b, b, b, r, b, b)$، $(b, b, b, r, b, r)$، $(b, b, b, r, r, b)$، $(b, b, b, r, r, r)$، $(b, b, r, r, b, b)$، $(b, b, r, r, b, r)$، $(b, b, r, r, r, b)$، $(b, b, r, r, r, r)$، $(b, r, r, b, b, b)$، $(b, r, r, b, b, r)$، $(b, r, r, b, r, b)$، $(b, r, r, b, r, r)$، $(r, b, b, b, r, b)$، $(r, b, b, b, r, r)$، $(r, b, b, b, b, b)$، $(r, b, b, b, b, r)$، $(r, b, r, b, r, b)$، $(r, b, r, b, r, r)$، $(r, b, r, b, b, b)$، $(r, b, r, b, b, r)$، $(r, r, r, b, r, b)$، $(r, r, r, b, r, r)$، $(r, r, r, b, b, b)$ و $(r, r, r, b, b, r)$. موقعیت $(b, *, b, *, *, *)$ متناظر با ۱۶ حالت است که در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۴ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۲ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین در ۸ حالت متناظر با موقعیت $(r, *, b, *, *, *)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۴ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند، در ۴ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند، به دلائل مشابه به موقعیت $(b, *, r, *, *, *)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ در هر یک از موقعیت‌های $(b, *, b, *, *, *)$ و $(r, *, b, *, *, *)$ رنگ خود را بیان نکند. در ۴ حالت متناظر با موقعیت $(b, *, r, *, *, *)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند، و در ۴ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین در ۴ حالت متناظر با موقعیت $(r, *, r, *, *, *)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند، در ۴ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳) تنها ۸ حالت وجود دارد که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۳۲ حالت برنده است. در این صورت $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_{۲۱})|} \leq \frac{۳۲}{۶۴} = \frac{۱}{۲}$ است. از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_{۲۱}$ است، پس $h(G_{۲۱}) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی $h(G_{۲۱}) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_{۲۱}) = \frac{۱}{۲}$.

(۲.۲.۲.۳) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در موقعیت‌های $(*, b, *, b, b, b)$، $(*, b, *, b, r, b)$، $(*, b, *, b, b, r)$، $(*, b, *, b, r, r)$، $(*, r, *, r, b, b)$، $(*, r, *, r, r, b)$، $(*, r, *, r, b, r)$، $(*, r, *, r, r, r)$ رنگ خود را آبی بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در موقعیت‌های $(*, r, *, b, b, b)$، $(*, r, *, b, r, b)$، $(*, r, *, b, b, r)$، $(*, r, *, b, r, r)$ رنگ خود را آبی بیان کند.

حالت‌های که بیان وضعیت درست داریم عبارتند از: $(b,b,b,b,b,b)$، $(b.b,b,b,b,r)$، $(b,b,b,b,r,b)$، $(b.b,b,b,r,r)$، $(b,b,r,b,b,b)$، $(b,b,r,b,b,r)$، $(b,b,r,b,r,b)$، $(b,b,r,b,r,r)$، $(b,r,b,b,b,b)$، $(b,r,b,b,b,r)$، $(b,r,b,b,r,b)$، $(b,r,b,b,r,r)$، $(b,r,b,r,b,b)$، $(b,r,b,r,b,r)$، $(b,r,b,r,r,b)$، $(b,r,b,r,r,r)$، $(b,r,r,r,b,b)$، $(b,r,r,r,b,r)$، $(b,r,r,r,r,b)$، $(b,r,r,r,r,r)$، $(r,r,b,b,r,b)$، $(r,r,b,b,r,r)$، $(r,r,b,b,b,b)$ و $(r,r,b,b,b,r)$ و حالت‌های که بیان وضعیت نادرست داریم عبارتند از: $(b,r,r,b,b,b)$، $(b,r,r,b,b,r)$، $(b,r,r,b,r,b)$، $(b,r,r,b,r,r)$، $(r,b,b,b,r,b)$، $(r,b,b,b,r,r)$، $(r,b,b,b,b,b)$، $(r,b,b,b,b,r)$، $(r,b,r,b,r,b)$، $(r,b,r,b,r,r)$، $(r,b,r,b,b,b)$، $(r,b,r,b,b,r)$، $(r,r,b,r,r,b)$، $(r,r,b,r,r,r)$، $(r,r,b,r,b,b)$، $(r,r,b,r,b,r)$، $(r,r,r,r,b,b)$، $(r,r,r,b,r,r)$، $(r,r,r,b,b,b)$، $(r,r,r,b,b,r)$، $(r,r,r,r,r,b)$، $(r,r,r,r,b,r)$، $(r,r,r,r,b,b)$ و $(r,r,r,r,r,r)$. موقعیت $(b,*,b,*,*,*)$ متناظر با ۱۶ حالت است که در ۱۲ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، ۴ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند، به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,b,*,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ رنگ خود را در موقعیت $(b,*,b,*,*,*)$ بیان نکند. همچنین موقعیت $(b,*,r,*,*,*)$ متناظر با ۱۶ حالت است که در ۸ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۴ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و ۴ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند، به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,r,*,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ رنگ خود را در موقعیت $(b,*,r,*,*,*)$ بیان نکند. در ۴ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*,*)$، $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین در ۴ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*,*,*)$، $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین بیان وضعیت $v_i$ تنها در ۸ حالت است که می‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد، پس تیم در حداکثر ۳۲ حالت برنده است، داریم: $p(S)=\frac{|Cw(S)|}{|C(G_{21})|}\leq\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$. از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_{21}$ است. در نتیجه $h(G_{21})\leq\frac{1}{2}$.

**(۲.۲.۲.۴)** بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_1$ در موقعیت‌های $(*,b,*,b,b,b)$، $(*,b,*,b,r,b)$، $(*,b,*,b,b,r)$، $(*,b,*,b,r,r)$ رنگ خود را آبی بیان کند و در موقعیت‌های $(*,r,*,r,b,b)$، $(*,r,*,r,r,b)$، $(*,r,*,r,b,r)$، $(*,r,*,r,r,r)$ رنگ خود را قرمز بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_3$ در موقعیت‌های $(*,r,*,b,b,b)$، $(*,r,*,b,r,b)$، $(*,r,*,b,b,r)$، $(*,r,*,b,r,r)$ رنگ خود را آبی بیان کند. حالت‌های که بیان وضعیت درست داریم عبارتند از: $(b,b,b,b,b,b)$، $(b.b,b,b,b,r)$، $(b,b,b,b,r,b)$، $(b.b,b,b,r,r)$، $(b,b,r,b,b,b)$، $(b,b,r,b,b,r)$، $(b,b,r,b,r,b)$، $(b,b,r,b,r,r)$، $(b,r,b,b,b,b)$، $(b,r,b,b,b,r)$، $(b,r,b,b,r,b)$، $(b,r,b,b,r,r)$، $(r,r,b,b,r,b)$، $(r,r,b,b,r,r)$، $(r,r,b,b,b,b)$، $(r,r,b,b,b,r)$، $(r,r,b,r,r,b)$، $(r,r,b,r,r,r)$، $(r,r,b,r,b,b)$، $(r,r,b,r,b,r)$، $(r,r,r,r,r,b)$، $(r,r,r,r,b,r)$، $(r,r,r,r,b,b)$ و $(r,r,r,r,r,r)$. حالت‌های که بیان وضعیت نادرست داریم عبارتند از: $(b,r,b,r,b,b)$، $(b,r,b,r,b,r)$، $(b,r,b,r,r,b)$، $(b,r,b,r,r,r)$، $(b,r,r,b,b,b)$، $(b,r,r,b,b,r)$، $(b,r,r,b,r,b)$، $(b,r,r,b,r,r)$، $(b,r,r,r,b,b)$، $(b,r,r,r,b,r)$، $(b,r,r,r,r,b)$، $(b,r,r,r,r,r)$، $(r,b,b,b,r,b)$، $(r,b,b,b,r,r)$، $(r,b,b,b,b,b)$، $(r,b,b,b,b,r)$، $(r,b,r,b,r,b)$، $(r,b,r,b,r,r)$، $(r,b,r,b,b,b)$، $(r,b,r,b,b,r)$، $(r,r,r,b,r,b)$، $(r,r,r,b,r,r)$، $(r,r,r,b,b,b)$ و $(r,r,r,b,b,r)$. موقعیت $(b,*,b,*,*,*)$ متناظر با ۱۶ حالت

است که در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۴ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۴ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. موقعیت $(r, *, b, *, *, *)$ متناظر با ۱۶ حالت است که در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۴ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۴ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند، به دلائل مشابه به موقعیت $(b, *, r, *, *, *)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ در هر یک از موقعیت‌های $(b, *, b, *, *, *)$ و $(r, *, b, *, *, *)$ رنگ خود را بیان نکند. در ۴ حالت متناظر با موقعیت $(b, *, r, *, *, *)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. در ۴ حالت متناظر با موقعیت $(r, *, r, *, *, *)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین با توجه به گزاره (۲.۱.۳) تنها ۸ حالت وجود دارد که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم درحداکثر ۳۲ حالت برنده است، داریم: $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_{۲۱})|} \leq \frac{۳۲}{۶۴} = \frac{۱}{۲}$. از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_{۲۱}$ است، پس $h(G_{۲۱}) \leq \frac{۱}{۲}$.
از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱) داریم: $h(G_{۲۱}) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_{۲۱}) = \frac{۱}{۲}$.
(ب). مشابه قسمت (آ) اثبات می‌شود.

**حالت سوم:** فرض کنید $S$ یک استراتژی بهینه برای گراف $G_۳$ باشد که رئوس $v_i$ و $v_j$ در هیچ موقعیتی هر دو با هم رنگ خود را بیان نمی‌کنند، و $N_{G_۳}(v_i) \cap N_{G_۳}(v_j) = \{x, y\}$، برای هر $i$ و $j$ معین $i, j \in \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ و $i \neq j$. اکنون نشان می‌دهیم که چنین استراتژی وجود دارد. فرض کنید $S'$ یک استراتژی بهینه برای گراف $G_۳$ باشد. فرض کنید در استراتژی $S'$ موقعیتی وجود دارد که رئوس $v_i$ و $v_j$ هر دو با هم رنگ خود را بیان می‌کنند. استراتژی $S$ و $S'$ با هم متفاوت است و تنها تفاوت این دو استراتژی در این است که راس $v_i$ ($v_j$، به ترتیب) رنگ خود را بیان می‌کند زمانی که راس $v_j$ ($v_i$، به ترتیب) رنگ خود را بیان نکند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳) بیان وضعیت $v_j$ ($v_i$، به ترتیب) نمی‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد. بنابراین داریم: $p(S) \geq p(S')$. از آن‌جایی که $S'$ یک استراتژی بهینه برای گراف $G_۳$ است، پس $S$ نیز بهینه است. در استراتژی $S$ موقعیتی که رئوس $v_i$ و $v_j$ هر دو با هم رنگ خود را بیان کنند وجود ندارد. اگر بعضی رئوس مانند $v_i$ هرگز رنگ خود را بیان نکنند، آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۳.۰.۱) داریم: $h(G_۳) = h(G_۳ - v_i)$. اگر ۲ $d_{G_۳}(v_i) =$ باشد، آن‌گاه $G_۳ - v_i = T$، و با توجه به قضیه (۲.۲.۲) داریم: $h(T) = \frac{۱}{۲}$. بنابراین $h(G_۳ - v_i) = h(T) = \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_۳) = \frac{۱}{۲}$. اگر ۲ $d_{G_۳}(v_i) >$، آن‌گاه $G_۳ - v_i = P_۱ \cup T$، و با توجه به قضیه (۲.۲.۲) و قضیه (۱.۲.۲) داریم: $h(P_۱ \cup T) = max\{h(P_۱), h(T)\} = \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_۳) = \frac{۱}{۲}$. اگر $d_{G_۳}(v_i) = ۱$. پس $G_۳ - v_i = G_{۲۱}$، بنابراین با توجه به حالت دوم داریم: $h(G_{۲۱}) = \frac{۱}{۲}$. درنتیجه $h(G_۳) = h(G_۳ - v_i) = h(G_{۲۱}) = \frac{۱}{۲}$. اگر بعضی رئوس در گراف $G_۳$ همیشه رنگ خود را بیان کنند آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۲.۰.۱) داریم: $h(G_۳) = \frac{۱}{۲}$. اکنون فرض کنید راسی در $G_۳$ که همیشه رنگ خود را بیان کند وجود ندارد. فرض کنید هر راس در ۱، ۸، ۱۶ یا ۲۴ موقعیت رنگ خود را بیان کند. بنابراین دو احتمال در زیر در نظر می‌گیریم:

(۱) هر راس رنگ خود را در دقیقاً یک موقعیت بیان کند.

(۲) وجود دارد راسی که رنگ خود را در حداقل ۱۶ موقعیت بیان کند.

(۱) بیان وضعیت هر راس در هر موقعیت در دقیقاً ۱۶ حالت درست است، زیرا موقعیت هر راس متناظر با ۳۲ حالت است، در $\frac{۱}{۲}$ همه این حالات هر راس رنگ خود را بیان می‌کند. اگر هر راس رنگ خود را در دقیقاً یک موقعیت بیان کند، پس دقیقاً در ۶۴ حالت بیان وضعیت درست داریم. بنابراین تیم در حداکثر ۶۴ حالت برنده است، و این بدان معنا است که $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_۳)|} \leq \frac{۶۴}{۱۲۸} = \frac{۱}{۲}$. از آن‌جایی که $S \in F^\circ(G_۳)$، داریم: $h(G_۳) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱)، $h(G_۳) \geq \frac{۱}{۲}$ . در نتیجه $h(G_۳) = \frac{۱}{۲}$.

(۲) فرض کنید $v_i \in \{v_۱, v_۲\}$. دو احتمال در نظر می‌گیریم: *(۲.۱)* وجود دارد راسی که رنگ خود را در دقیقاً ۲۴ موقعیت بیان کند؛ *(۲.۲)* هر راس رنگ خود را در حداکثر ۱۶ موقعیت بیان کند.

(۲.۱) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در دقیقاً ۲۴ موقعیت رنگ خود را بیان کند. از آن‌جایی که موقعیتی وجود ندارد که هر دو راس $v_۱$ و $v_۳$ هر دو با هم رنگ خود را بیان کنند. $v_۳$ رنگ خود را در حداقل ۸ موقعیت بیان می‌کند، پس $v_۳$ در دقیقاً ۸ موقعیت رنگ خود را بیان می‌کند. با توجه به قضیه (۲۱.۰.۱) داریم: $|Cl(S)| \geq \frac{|C(G_۳)|}{۲}$. پس

$$p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_۳)|} = \frac{|C(G_۳)| - |Cl(S)|}{|C(G_۳)|} \leq \frac{|C(G_۳)| - \frac{|C(G_۳)|}{۲}}{|C(G_۳)|} = \frac{۱}{۲}$$

از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_۳$ است. بنابراین $h(G_۳) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱)، $h(G_۳) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_۳) = \frac{۱}{۲}$.

(۲.۲) از آن‌جای که وجود دارد راسی که در دقیقاً ۱۶ موقعیت رنگ خود را بیان می‌کند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید راس $v_۱$ در دقیقاً ۱۶ موقعیت رنگ خود را بیان کند. حال دو احتمال در مورد $v_۳$ در زیر در نظر می‌گیریم:

**(۲.۲.۱)** $v_۳$ رنگ خود را در دقیقاً ۱۶ موقعیت بیان کند.

**(۲.۲.۲)** $v_۳$ رنگ خود را در دقیقاً ۸ موقعیت بیان کند.

(۲.۲.۱) از آن‌جای که $v_۱$ در دقیقاً ۱۶ موقعیت رنگ خود را بیان می‌کند و $v_۳$ نیز رنگ خود را بیان می‌کند. به طور مشابه به مباحث در (۲.۱) داریم: $h(G_۳) = \frac{۱}{۲}$.

(۲.۲.۲) دو احتمال در نظر می‌گیریم: *(آ)* در هر ۱۶ موقعیت که $v_۱$ رنگ خود را بیان می‌کند، برای هر $i$ که $i \in \{۲, ۴, ۵, ۶, ۷\}$، $v_i$ رنگ یکسانی دارد؛ *(ب)* در هر ۱۶ موقعیت که $v_۱$ رنگ خود را بیان می‌کند، برای هر $i$ که $i \in \{۲, ۴, ۵, ۶, ۷\}$، $v_i$ رنگ متفاوتی دارد. اکنون دو احتمال در مورد $v_۱$ در نظر می‌گیریم: ۱. در هر ۱۶ موقعیت $v_۱$ رنگ یکسانی بیان می‌کند؛ ۲. در هر ۱۶ موقعیت $v_۱$ رنگ متفاوتی بیان می‌کند.

فرض کنید $v_i \in \{v_۱, v_۲\}$. حال چهار احتمال در نظر می‌گیریم: *(۲.۲.۲.۱)* (آ،۱)؛ *(۲.۲.۲.۲)* (آ،۲)؛ *(۲.۲.۲.۳)* (ب،۱)؛ *(۲.۲.۲.۴)* (ب،۲).

(۲.۲.۲.۱) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در ۱۶ موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در ۸ موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. در ۴۸ حالت بیان وضعیت درست داریم. در ۴۸ حالت بیان وضعیت نادرست داریم. موقعیت $(b, *, b, *, *, *, *)$

متناظر با ۳۲ حالت است که در ۲۴ حالت راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۸ حالت راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنا به گزاره (۲.۱.۳) از بین حالت‌های متناظر با موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*)$ تنها ۸ حالت است که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند. در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*)$ بیان وضعیت $v_i$ نادرست است، و این بدان معنا است که در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*)$ که $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند. بنابراین بیان وضعیت $v_i$ در موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*)$ نمی‌تواند شانس موفقیت را بهبود ببخشد، پس فرض می‌کنیم $v_i$ در موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*)$ رنگ خود را بیان نکند. اکنون حالت‌های متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*)$ را در نظر می‌گیریم. در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*)$ راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۸ حالت راس $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳) از بین ۳۲ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*)$، ۱۶ حالت $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند. این بدان معنا است که در بعضی حالت‌های متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*)$ که $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند. بنابراین بیان وضعیت $v_i$ در موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*)$ نمی‌تواند شانس موفقیت را بهبود ببخشد. فرض می‌کنیم $v_i$ در موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*)$ رنگ خود را بیان نکند. ۸ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین تنها ۸ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین تنها ۱۶ حالت است که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۶۴ حالت برنده است. داریم: $p(S)=\frac{|Cw(S)|}{|C(G_۳)|}\leq\frac{۶۴}{۱۲۸}=\frac{۱}{۲}$. از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_۳$ است. پس $h(G_۳)\leq\frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱)، $h(G_۳)\geq\frac{۱}{۲}$، در نتیجه $h(G_۳)=\frac{۱}{۲}$.

(۲.۲.۲.۲) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در ۸ موقعیت متناظر با $(*,b,*,b,*,*,*)$ رنگ خود را آبی بیان کند و در ۸ موقعیت متناظر با $(*,b,*,r,*,*,*)$ رنگ خود را قرمز بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در ۸ موقعیت متناظر با $(*,r,*,b,*,*,*)$ رنگ خود را آبی بیان کند. در ۴۸ حالت بیان وضعیت درست داریم و در ۴۸حالت بیان وضعیت نادرست داریم. موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*)$ متناظر با ۳۲ حالت است که در ۱۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند، به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ در هر یک از موقعیت‌های $(b,*,b,*,*,*,*)$ و $(r,*,b,*,*,*,*)$ رنگ خود را بیان نکند. در ۸ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۱۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند، در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین در ۸ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۱۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند، در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ

خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین با توجه به گزاره (۲.۱.۳) تنها ۱۶ حالت وجود دارد که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۶۴ حالت برنده است. در این صورت $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_۳)|} \leq \frac{۶۴}{۱۲۸} = \frac{۱}{۲}$ است. از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_۳$ است، پس $h(G_۳) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی $h(G_۳) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_۳) = \frac{۱}{۲}$.

(۲.۲.۲.۳) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در ۱۶ موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در ۸ موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. ۴۸ حالت بیان وضعیت درست داریم و در ۴۸ حالت بیان وضعیت نادرست داریم. موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*)$ متناظر با ۳۲ حالت است که در ۲۴ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند، به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ رنگ خود را در موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*)$ بیان نکند. همچنین در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند، به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ رنگ خود را در موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*)$ بیان نکند. در ۸ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین در ۸ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین بیان وضعیت $v_i$ تنها در ۱۶ حالت است که می‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد. پس تیم در حداکثر ۶۴ حالت برنده است. در این صورت $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_۳)|} \leq \frac{۶۴}{۱۲۸} = \frac{۱}{۲}$ است. از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_۳$ است، در نتیجه $h(G_۳) \leq \frac{۱}{۲}$.

(۲.۲.۲.۴) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در ۸ موقعیت متناظر با $(*,b,*,b,*,*,*)$ رنگ خود را آبی بیان کند و در ۸ موقعیت متناظر با $(*,r,*,r,*,*,*)$ رنگ خود را قرمز بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در ۸ موقعیت متناظر با $(*,r,*,b,*,*,*)$ رنگ خود را آبی بیان کند. در ۴۸ حالت بیان وضعیت درست داریم و در ۴۸ حالت بیان وضعیت نادرست داریم. موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*)$ متناظر با ۳۲ حالت است که در ۱۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند، به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ در هر یک از موقعیت‌های $(b,*,b,*,*,*,*)$ و $(r,*,b,*,*,*,*)$ رنگ خود را بیان نکند. در ۸ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. در ۸ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین با توجه به گزاره (۲.۱.۳) تنها ۱۶ حالت وجود دارد که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۶۴ حالت برنده است. در این صورت $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_۳)|} \leq \frac{۶۴}{۱۲۸} = \frac{۱}{۲}$ است. از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_۳$ است. پس $h(G_۳) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱) داریم: $h(G_۳) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_۳) = \frac{۱}{۲}$.

**حالت چهارم:** فرض کنید $S$ یک استراتژی بهینه برای گراف $G_۴$ باشد، که رئوس $v_i$ و $v_j$ در هیچ موقعیتی هر دو با هم رنگ خود را بیان نمی‌کنند، و $N_{G_۴}(v_i) \cap N_{G_۴}(v_j) = \{x, y\}$ برای هر $i$ و $j$ معین $i, j \in \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ و $i \neq j$. حال نشان می‌دهیم که چنین استراتژی وجود دارد. فرض کنید $S'$ یک استراتژی بهینه برای $G_۴$ باشد. فرض کنید در استراتژی $S'$ موقعیتی وجود دارد که رئوس $v_i$ و $v_j$ هر دو با هم رنگ خود را بیان می‌کنند. استراتژی $S$ و $S'$ با هم متفاوت است و تنها تفاوت این دو استراتژی در این است که راس $v_i$ ($v_j$، به ترتیب) رنگ خود را بیان می‌کند زمانی که راس $v_j$ ($v_i$، به ترتیب) رنگ خود را بیان نکند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳) بیان وضعیت $v_j$ ( $v_i$، به ترتیب) نمی‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد. بنابراین داریم: $p(S) \geq p(S')$. از آن‌جایی که $S'$ یک استراتژی بهینه برای $G_۴$ است، پس $S$ نیز بهینه است. در استراتژی $S$ موقعیتی که رئوس $v_i$ و $v_j$ هر دو با هم رنگ خود را بیان کنند وجود ندارد. اگر بعضی رئوس مانند $v_i$ هرگز رنگ خود را بیان نکنند آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۳.۰.۱) داریم: $h(G_۴) = h(G_۴ - v_i)$. اگر $d_{G_۴}(v_i) > ۲$ باشد آن‌گاه $G_۴ - v_i = P_۱ \cup T$، و با توجه به قضیه (۲.۲.۲) و قضیه (۱.۲.۲) داریم: $h(P_۱ \cup T) = max\{h(P_۱), h(T)\} = \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_۴) = \frac{۱}{۲}$. اگر $d_{G_۴}(v_i) = ۱$، آن‌گاه $G_۴ - v_i = G_۳$. بنابراین با توجه به حالت سوم داریم: $h(G_۳) = \frac{۱}{۲}$ و $h(G_۴ - v_i) = h(G_۳) = \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_۴) = \frac{۱}{۲}$. اگر بعضی رئوس $G_۴$ همیشه رنگ خود را بیان کنند آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۲.۰.۱) داریم: $h(G_۴) = \frac{۱}{۲}$. اکنون فرض کنید هیچ راس در $G_۴$ همیشه رنگ خود را بیان نکند. فرض کنید هر راس در ۱، ۱۶، ۳۲ یا ۴۸ موقعیت رنگ خود را بیان کند. بنابراین دو احتمال در نظر می‌گیریم:

**(۱)** هر راس رنگ خود را در دقیقاً یک موقعیت بیان کند.

**(۲)** وجود دارد راسی که رنگ خود را در حداقل ۳۲ موقعیت بیان کند.

(۱) بیان وضعیت هر راس در هر موقعیت در دقیقاً ۳۲ حالت درست است، زیرا هر موقعیت متناظر با ۶۴ حالت است، در $\frac{۱}{۲}$ همه این حالات هر راس رنگ خود را بیان می‌کند. اگر هر راس رنگ خود را در دقیقاً یک موقعیت بیان کند آن‌گاه دقیقاً در ۱۲۸ حالت بیان وضعیت درست داریم. بنابراین تیم درحداکثر ۱۲۸ حالت برنده است، و این بدان معنا است که $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_۴)|} \leq \frac{۱۲۸}{۲۵۶} = \frac{۱}{۲}$. از آن‌جایی که $S \in F^{\circ}(G_۴)$. داریم: $h(G_۴) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱)، $h(G_۴) \geq \frac{۱}{۲}$، در نتیجه $h(G_۴) = \frac{۱}{۲}$.

(۲) فرض کنید $v_i \in \{v_۱, v_۲\}$. دو احتمال در نظر می‌گیریم: *(۲.۱)* وجود دارد راسی که رنگ خود را در دقیقاً ۴۸ موقعیت بیان کند؛ *(۲.۲)* هر راس رنگ خود را در حداکثر ۳۲ موقعیت بیان کند.

(۲.۱) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در دقیقاً ۴۸ موقعیت رنگ خود را بیان کند. از آن‌جایی که موقعیتی وجود ندارد که هر دو راس $v_۱$ و $v_۳$ هر دو با هم رنگ خود را بیان کنند. $v_۳$ رنگ خود را در حداقل ۱۶ موقعیت بیان می‌کند، پس $v_۳$ در دقیقاً ۱۶ موقعیت رنگ خود را بیان می‌کند. با توجه به قضیه (۲۱.۰.۱) داریم: $|Cl(S)| \geq \frac{|C(G_۴)|}{۲}$. داریم:

$$p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_۴)|} = \frac{|C(G_۴)| - |Cl(S)|}{|C(G_۴)|} \leq \frac{|C(G_۴)| - \frac{|C(G_۴)|}{۲}}{|C(G_۴)|} = \frac{۱}{۲}$$

از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_4$ است، پس $h(G_4) \leq \frac{1}{2}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱) داریم: $h(G_4) \geq \frac{1}{2}$. در نتیجه $h(G_4) = \frac{1}{2}$.

(۲.۲) از آن‌جایی که وجود دارد راسی که در دقیقاً ۳۲ موقعیت رنگ خود را بیان می‌کند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید راس $v_1$ در دقیقاً ۳۲ موقعیت رنگ خود را بیان کند. حال دو احتمال در مورد $v_3$ در زیر در نظر می‌گیریم:

**(۲.۲.۱)** $v_3$ رنگ خود را در دقیقاً ۳۲ موقعیت بیان کند.

**(۲.۲.۲)** $v_3$ رنگ خود را در دقیقاً ۱۶ موقعیت بیان کند.

(۲.۲.۱) از آن‌جایی که $v_1$ در دقیقاً ۳۲ موقعیت رنگ خود را بیان می‌کند و $v_3$ نیز رنگ خود را بیان می‌کند. به طور مشابه به مباحثی در (۲.۱) داریم: $h(G_4) = \frac{1}{2}$.

(۲.۲.۲) دو احتمال در نظر می‌گیریم: *(آ)* در هر ۳۲ موقعیت که $v_1$ رنگ خود را بیان می‌کند، برای هر $i$ که $i \in \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$، $v_i$ رنگ یکسانی دارد؛ *(ب)* در هر ۳۲ موقعیت که $v_1$ رنگ خود را بیان می‌کند، برای هر $i$ که $i \in \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$، $v_i$ رنگ متفاوتی دارد. اکنون دو احتمال در مورد $v_1$ در نظر می‌گیریم: ۱. در هر ۳۲ موقعیت $v_1$ رنگ یکسانی بیان می‌کند؛ ۲. در هر ۳۲ موقعیت $v_1$ رنگ متفاوتی بیان می‌کند.

فرض کنید $v_i \in \{v_1, v_2\}$. حال چهار احتمال در نظر می‌گیریم: *(۲.۲.۲.۱)* (آ،۱)؛ *(۲.۲.۲.۲)* (آ،۲)؛ *(۲.۲.۲.۳)* (ب،۱)؛ *(۲.۲.۲.۴)* (ب،۲).

(۲.۲.۲.۱) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_1$ در ۳۲ موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_3$ در ۱۶ موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. در ۹۶ حالت بیان وضعیت درست داریم و در ۹۶ حالت بیان وضعیت نادرست داریم. موقعیت $(b, *, b, *, *, *, *, *)$ متناظر با ۶۴ حالت است که در ۴۸ حالت راس $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۱۶ حالت راس $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳) از بین حالت‌های متناظر با موقعیت $(b, *, b, *, *, *, *, *)$ تنها ۱۶ حالت است که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند. در ۳۲ حالت متناظر با موقعیت $(b, *, b, *, *, *, *, *)$ بیان وضعیت $v_i$ نادرست است، و این بدان معنا است که در ۳۲ حالت متناظر با موقعیت $(b, *, b, *, *, *, *, *)$ که $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند، بنابراین بیان وضعیت $v_i$ در موقعیت $(b, *, b, *, *, *, *, *)$ نمی‌تواند شانس موفقیت را بهبود ببخشد، فرض می‌کنیم $v_i$ رنگ خود را در موقعیت $(b, *, b, *, *, *, *, *)$ بیان نکند. اکنون حالت‌های متناظر با موقعیت $(b, *, r, *, *, *, *, *)$ را در نظر می‌گیریم. در ۳۲ حالت متناظر با موقعیت $(b, *, r, *, *, *, *, *)$ راس $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۱۶ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۱۶ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳) از بین ۶۴ حالت متناظر با موقعیت $(b, *, r, *, *, *, *, *)$، ۳۲ حالت $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند، و این بدان معنا است که در بعضی حالت‌های متناظر با موقعیت $(b, *, r, *, *, *, *, *)$، $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند $v_i$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کند؛ بنابراین بیان وضعیت $v_i$ در موقعیت $(b, *, r, *, *, *, *, *)$

نمی‌تواند شانس موفقیت را بهبود ببخشد، پس فرض می‌کنیم $v_i$ در موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*,*)$ رنگ خود را بیان نکند. در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین تنها در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین، تنها ۳۲ حالت است که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۱۲۸ حالت برنده است. در این صورت $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_۴)|} \leq \frac{۱۲۸}{۲۵۶} = \frac{۱}{۲}$ است. از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_۴$ است، پس $h(G_۴) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱)، $h(G_۴) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_۴) = \frac{۱}{۲}$.

(۲.۲.۲.۲) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در ۱۶ موقعیت متناظر با $(*,b,*,b,*,*,*,*)$ رنگ خود را آبی بیان کند و در ۱۶ موقعیت متناظر با $(*,b,*,r,*,*,*,*)$ رنگ خود را قرمز بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در ۱۶ موقعیت متناظر با $(*,r,*,b,*,*,*,*)$ رنگ خود را آبی بیان کند. در ۹۶ حالت بیان وضعیت درست داریم؛ و در ۹۶حالت بیان وضعیت نادرست داریم. موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*,*)$ متناظر با ۶۴ حالت است که در ۳۲ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۱۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۱۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین در ۳۲ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۱۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۱۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند، به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ در هر یک از موقعیت‌های $(b,*,b,*,*,*,*,*)$ و $(r,*,b,*,*,*,*,*)$ رنگ خود را بیان نکند. در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۳۲ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۱۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۳۲ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۱۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین با توجه به گزاره (۲.۱.۳) تنها ۳۲ حالت وجود دارد که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۱۲۸ حالت برنده است. در این صورت $p(S) = \frac{|Cw(S)|}{|C(G_۴)|} \leq \frac{۱۲۸}{۲۵۶} = \frac{۱}{۲}$. از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_۴$ است، پس $h(G_۴) \leq \frac{۱}{۲}$. از طرفی $h(G_۴) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G_۴) = \frac{۱}{۲}$.

(۲.۲.۲.۳) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۱$ در ۳۲ موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_۳$ در ۱۶ موقعیت رنگ خود را آبی بیان کند. در ۹۶ حالت بیان وضعیت درست داریم؛ و ۹۶ حالت بیان وضعیت نادرست داریم. موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*,*)$ متناظر با ۶۴ حالت است که در ۴۸ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۱۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند، به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ رنگ خود را در موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*,*)$ بیان نکند. همچنین در ۳۲ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*,*)$، $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۱۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۱۶ حالت $v_۱$ یا $v_۳$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند، به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ رنگ خود را

در موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*,*)$ بیان نکند. در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*,*,*,*)$، $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. همچنین در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*,*,*,*,*)$، $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین بیان وضعیت $v_i$ تنها در ۳۲ حالت است که می‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد، پس تیم در حداکثر ۱۲۸ حالت برنده است. در این صورت $p(S)=\frac{|Cw(S)|}{|C(G_4)|}\leq\frac{128}{256}=\frac{1}{2}$ است. از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_4$ است، در نتیجه $h(G_4)\leq\frac{1}{2}$.

(۲.۲.۲.۴) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_1$ در ۱۶ موقعیت متناظر با $(*,b,*,b,*,*,*,*)$ رنگ خود را آبی بیان کند و در ۱۶ موقعیت متناظر با $(*,r,*,r,*,*,*,*)$ رنگ خود را قرمز بیان کند. همچنین بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $v_3$ در ۱۶ موقعیت متناظر با $(*,r,*,b,*,*,*,*)$ رنگ خود را آبی بیان کند. در ۹۶ حالت بیان وضعیت درست داریم؛ و در ۹۶ حالت بیان وضعیت نادرست داریم. در ۳۲ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,b,*,*,*,*,*)$، $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، در ۱۶ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۱۶ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. در ۳۲ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,b,*,*,*,*,*)$، $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را درست بیان می‌کنند، ۱۶ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را نادرست بیان می‌کنند و در ۱۶ حالت $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند، به دلائل مشابه به موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*,*)$ در (۲.۲.۲.۱) فرض می‌کنیم $v_i$ در هر یک از موقعیت‌های $(b,*,b,*,*,*,*,*)$ و $(r,*,b,*,*,*,*,*)$ رنگ خود را بیان نکند. در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(b,*,r,*,*,*,*,*)$، $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. در ۱۶ حالت متناظر با موقعیت $(r,*,r,*,*,*,*,*)$، $v_1$ یا $v_3$ رنگ خود را بیان نمی‌کنند. بنابراین با توجه به گزاره (۲.۱.۳) تنها ۳۲ حالت وجود دارد که می‌توانند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشند، و این بدان معنا است که تیم در حداکثر ۱۲۸ حالت برنده است. در این صورت $p(S)=\frac{|Cw(S)|}{|C(G_4)|}\leq\frac{128}{256}=\frac{1}{2}$. از آن‌جایی که $S$ یک استراتژی بهینه برای $G_4$ است. پس $h(G_4)\leq\frac{1}{2}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱) داریم: $h(G_4)\geq\frac{1}{2}$. در نتیجه $h(G_4)=\frac{1}{2}$. □

# فصل ۵

# مسئله کلاه روی گراف‌های دو دوری

## ۱.۵ مقدمه

*تا به حال مسئله کلاه را روی مسیرها، درختان، گراف‌های کامل و دورها بیان کردیم و در هر مورد عدد کلاه را به طور دقیق به دست آوردیم. اینک در این فصل مسئله کلاه را روی **گراف‌های دو دوری** دقیقاً با دو دور را برای اولین بار در نظر می‌گیریم و عدد کلاه را به طور دقیق به دست می‌آوریم.*

**تعریف ۱.۱.۵.** حداقل تعداد رنگ لازم برای رنگ آمیزی کامل گراف $G$، که رئوس مجاور رنگ یکسان ندارند، **عدد رنگی** یک گراف نامیده می‌شود، و آن را با $\chi(G)$ نماد گذاری می‌کنیم.

**تعریف ۲.۱.۵.** اگر گراف $G$ تنها شامل یک زیر گراف دوری باشد آن‌گاه $G$ را **تک دوری** می‌نامیم.

**قضیه ۳.۱.۵.** *[۱۲] برای هر گراف $G$، اگر $\omega(G)+1$ توانی از ۲ باشد آن‌گاه $h(G)=h(K_{\omega(G)})$.*

**نتیجه ۴.۱.۵.** *[۱۲] اگر $\omega(G)+1$ توانی از ۲ باشد آن‌گاه $h(G)=\frac{\omega(G)}{\omega(G)+1}$.*

**قضیه ۵.۱.۵.** *[۱۹] برای هر گراف تک دوری $G$ داریم: $h(G)=\frac{1}{2}$.*

**قضیه ۶.۱.۵.** *فرض کنید $G$ یک گراف دو دوری باشد. اگر $G$ شامل مثلث باشد آن‌گاه $h(G)=\frac{3}{4}$، و در غیر این صورت $h(G)=\frac{1}{2}$.*

## ۲.۵ اثبات قضیه (۶.۱.۵)

*فرض کنید $G=G(n_1,n_2)$ گراف دو دوری با دقیقاً دو دور $C_{n_1}$ و $C_{n_2}$ باشد، که $n_1$ و $n_2$ اعداد صحیح و بزرگتر از ۲ هستند. فرض کنید $\delta(G)=1$ باشد. روشن است که هر راس از درجه یک، یک راس غالب است. اگر $x_1$ یک راس از درجه یک باشد آن‌گاه با توجه به لم (۱.۲.۳)، $h(G)=h(G-x_1)$. اگر $\delta(G-x_1)=1$، و $x_2$ راسی از درجه یک در $G-x_1$ باشد آن‌گاه با توجه به لم (۱.۲.۳)، $h(G)=h(G-x_1)=h(G-x_1-x_2)$. با ادامه این روند ما گراف دو دوری $G-x_1-x_2-\cdots-x_k$*

*را به دست می‌آوریم که $h(G-x_1-x_2-\cdots-x_k)=h(G)$. اینک فرض می‌کنیم $\delta(G)\geq 2$ باشد. فرض کنید $u\in V(C_{n_1})$ و $v\in V(C_{n_2})$ دو راس باشند که $d(u,v)=d(C_{n_1},C_{n_2})$ است. ما این روند را با وابستگی به طول دو دور $C_{n_1}$ و $C_{n_2}$ ادامه می‌دهیم.*

*اگر $3\in\{n_1,n_2\}$ باشد آن‌گاه با توجه به $\omega(G)=3$ و نتیجه (۴.۱.۵) قضیه زیر به دست می‌آید.*

**قضیه ۱.۲.۵.** *اگر $3\in\{n_1,n_2\}$ باشد آن‌گاه $h(G)=\frac{3}{4}$.*

*اگر هر دو دور $C_{n_1}$ و $C_{n_2}$ زوج باشند آن‌گاه $\chi(G)=\omega(G)=2$ است، و با توجه به قضیه (۲.۳.۳) داریم:*

**قضیه ۲.۲.۵.** *اگر هر دو $n_1$ و $n_2$ زوج باشند آن‌گاه $h(G)=\frac{1}{2}$.*

*اکنون فرض کنید که حداقل یکی از $n_1$ و $n_2$ فرد باشند. با توجه به گزاره (۲.۱.۳)، فرض می‌کنیم که $d(u,v)\leq 1$ باشد. در ابتدا حالتی را که $n_1=n_2=5$ باشد را در لم زیر در نظر می‌گیریم.*

**لم ۳.۲.۵.** $h(G(5,5))=\frac{1}{2}$.

***برهان.*** فرض کنید $d(u,v)=1$ باشد. فرض کنید $S$ یک استراتژی بهینه برای گراف $G(5,5)$ باشد. اگر بعضی رئوس مانند $v_i$ هرگز رنگ خود را بیان نکنند آن‌گاه با توجه به قضیه (۲۳.۰.۱) داریم: $h(G)=h(G-v_i)$. اگر $d_G(v_i)=2$ باشد آن‌گاه $G-v_i$ یک گراف تک دوری است و با توجه به قضیه (۵.۱.۵) داریم: $h(G-v_i)=\frac{1}{2}$. در نتیجه $h(G)=h(G-v_i)=\frac{1}{2}$. فرض کنید $d_G(v_i)=3$ باشد. $G-v_i$ اجتماع مجزای از $C_5$ و $P_4$ است که با توجه به دو قضیه (۱.۲.۲ و ۱.۱.۴) و لم (۲.۲.۳) داریم: $h(G)=h(G-v_i)=max\{h(P_4),h(C_5)\}=\frac{1}{2}$.

اکنون فرض کنید هر راس رنگ خود را بیان کند. اگر بعضی رئوس همیشه رنگ خود را بیان کنند، با توجه به قضیه (۲۲.۰.۱)، $h(G)=\frac{1}{2}$. فرض کنید هیچ راسی در گراف $G$ وجود نداشته باشد که همیشه رنگ خود را بیان کند. فرض کنید هر راس در یک، دو یا چهار موقعیت رنگ خود را بیان کند. پس دو احتمال زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱) هر راس در دقیقاً یک موقعیت رنگ خود را بیان کند.

(۲) وجود دارد راسی که در حداقل دو موقعیت رنگ خود را بیان می‌کند.

(۱) بیان وضعیت هر راس $v_i$ در هر موقعیت در $2^{|V(G)|-|N_G(v_i)|-1}$ حالت نادرست است، زیرا هر موقعیت از هر راس $v_i$ متناظر با $2^{|V(G)-|N_G(v_i)|}$ حالت است، در $\frac{1}{2}$ همه این حالات راس $v_i$ رنگ خود را بیان می‌کند. چون که هر راس در دقیقاً یک موقعیت رنگ خود را بیان می‌کند، دقیقاً $2^9=512$ حالت بیان وضعیت درست داریم، پس تیم در حداکثر ۵۱۲ حالت برنده است، حتی اگر هریک از این $2^9$ بیان وضعیت درست در حالت‌های دیگری نیز باشند، و این بدان معنا است که $p(S)=\frac{|Cw(S)|}{|C(G)|}\leq\frac{512}{1024}=\frac{1}{2}$. از آنجایی که $S\in F^\circ(G)$، پس $h(G)\leq\frac{1}{2}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱)، $h(G)\geq\frac{1}{2}$ است. در نتیجه $h(G)=\frac{1}{2}$.

(۲) در ابتدا نشان می‌دهیم راسی که رنگ خود را در ۴ موقعیت بیان کند وجود ندارد. فرض خلف: فرض می‌کنیم که وجود دارد راسی که رنگ خود را در دقیقاً ۴ موقعیت بیان می‌کند. واضح است که راس درجه سه رنگ خود را در دقیقاً ۴ موقعیت بیان می‌کند. ما در واقع به دنبال حداقل تعداد حالت‌های که بیان وضعیت نادرست داریم هستیم. برای راس درجه دو ۴ موقعیت وجود دارد و علاوه بر این راس درجه سه رنگ خود را در ۴ موقعیت بیان می‌کند. بنابراین حداکثر $۲^۲(۲^۶+۲^۷)=۲^۸(۳)$ حالت بیان وضعیت نادرست داریم، پس تیم در حداکثر $۲^۸(۳)$ حالت بازنده است. در این صورت داریم:

$$p(S)=\frac{|Cw(S)|}{|C(G)|}=\frac{|C(G)|-|Cl(S)|}{|C(G)|}\leq\frac{۲^{۱۰}-۲^۸(۳)}{۲^{۱۰}}=\frac{۱}{۴}<\frac{۱}{۲}$$

این با $p(S)\geq\frac{۱}{۲}$ در تناقض است.

وجود دارد راسی مانند $x$ که رنگ خود را در دقیقاً دو موقعیت بیان می‌کند. فرض می‌کنیم که $x$ رنگ خود را بیان کند هرگاه حداقل دو رنگ آبی یا دو رنگ قرمز را ببیند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $S$ یک استراتژی که برای هر دو راس $u_۱$ و $u_۲$، $u_i$ $(i\in\{۱,۲\})$ هرگاه حداقل دو رنگ آبی را ببیند رنگ خود را بیان کند. فرض کنید $S'$ یک استراتژی بهینه متفاوت با استراتژی $S$ باشد که برای هر دو راس $u_۱$ و $u_۲$، یکی از $u_۱$ و $u_۲$ زمانی که حداقل دو رنگ آبی می‌بیند رنگ خود را بیان می‌کند و دیگری زمانی که حداقل دو رنگ آبی ببیند رنگ خود را بیان نکند. اگر $y\in\{u_۱,u_۲\}$ زمانی که حداقل دو رنگ آبی را ببیند رنگ خود را بیان نکند. روشن است که راس دیگری از $\{u_۱,u_۲\}$ زمانی که حداقل دو رنگ آبی را ببیند رنگ خود را بیان می‌کند، با توجه به گزاره (۲.۱.۳) بیان وضعیت $y$ نمی‌تواند نتیجه هر حالت رنگی را بهبود ببخشد، بنابراین داریم: $p(S')\leq p(S)$. از آنجایی که $S'\in F^{\circ}(G)$، پس استراتژی $S$ نیز بهینه است. اگر $y$ در استراتژی $S'$ هرگز رنگ خود را بیان نکند همان احتمالات قبلی را که در مورد $S$ داشتیم را در نظر می‌گیریم (یعنی $S'=S$).

به طور مشابه برای $d(u,v)=۰$ نیز اثبات می‌شود. □

**قضیه ۴.۲.۵.** *اگر* $n_۱,n_۲\geq ۵$ *اعداد صحیح فرد باشند آن‌گاه* $h(G)=\frac{۱}{۲}$.

***برهان.*** در ابتدا برای هر عدد صحیح فرد $n_۲\geq ۵$ نشان می‌دهیم که $h(G(۵,n_۲))=\frac{۱}{۲}$. حال با استقرا روی $n_۲\geq ۵$ ثابت می‌کنیم. برای $n_۲=۵$ با توجه به لم (۳.۲.۵) داریم: $h(G(۵,۵))=\frac{۱}{۲}$.

فرض استقرا: فرض می‌کنیم برای هر $n'_۲>۵$ که $n'_۲<n_۲$، برقرار است. فرض کنید $v_۱v_۲v_۳v_۴$ به ترتیب یک مسیر روی دور $n_۲$ باشد که $v\notin\{v_۱,v_۲,v_۳,v_۴\}$. فرض کنید $H$ یک گراف باشد که با اتصال $v_۱$ به $v_۴$ در $G(۵,n_۲)$ به دست می‌آید، و با توجه به قضیه (۱۸.۰.۱) داریم: $h(G(۵,n_۲))\leq h(H)$. مشاهده می‌کنیم $N_H(v_۲)\subseteq N_H(v_۴)$. فرض کنید $H'=H-v_۲$. با توجه به لم (۱.۲.۳) داریم: $h(H)=h(H')$. علاوه بر این مشاهده می‌کنیم $N_{H'}(v_۳)\subseteq N_{H'}(v_۱)$ است، دوباره با استفاده از لم (۱.۲.۳) داریم: $h(H')=h(H'-v_۳)$. گراف $H'-v_۳$ یک گراف دو دوری است. با توجه به فرض استقرا داریم: $h(H'-v_۳)=\frac{۱}{۲}$. در این صورت $h(G(۵,n_۲))\leq h(H)=h(H')=\frac{۱}{۲}$ است. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱)، $h(G(۵,n_۲))\geq\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین $h(G(۵,n_۲))=\frac{۱}{۲}$. در نتیجه برای هر $n_۲\geq ۵$، $h(G(۵,n_۲))=\frac{۱}{۲}$.

تا کنون برای $n_۲ \geq ۵$ نشان داده شد که $h(G(۵, n_۲)) = \frac{۱}{۲}$. اینک برای $n_۱ \geq ۵$، به طور مشابه و با استقرا روی $n_۱$ که فرض استقرا $h(G(۵, n_۲)) = \frac{۱}{۲}$ است، ثابت می‌کنیم، که اثبات آن روشن است و از آوردن اثبات در این جا امتناع می‌کنیم. در نتیجه $h(G(n_۱, n_۲)) = \frac{۱}{۲}$. □

*در زیر یک گراف دو دوری با یک دور زوج و یک دور فرد در نظر می‌گیریم.*

**قضیه ۵.۲.۵.** *فرض کنید $G$ یک گراف با دقیقاً دو دور $C_{n_۱}$ و $C_{n_۲}$، که $n_۱ \geq ۴$ عدد صحیح زوج و $n_۲ \geq ۵$ عدد صحیح فرد باشد سپس* $h(G) = \frac{۱}{۲}$.

***برهان.*** فرض کنید $n_۲ \geq ۵$ عدد صحیح و فرد باشد. با استقرا روی $n_۱$ نشان می‌دهیم $h(G) = \frac{۱}{۲}$. در ابتدا فرض کنید $V(C_{n_۱}) = \{a, b, c, u\}$ باشد که $N_G(b) = \{a, c\}$ است. چون که $N_G(b) \subseteq N_G(u)$. با توجه به لم (۱.۲.۳)، $h(G) = h(G - b)$ است. با توجه به این که $G - b$ یک گراف تک دوری است و با توجه به قضیه (۵.۱.۵)، $h(G) = \frac{۱}{۲}$ است .

فرض استقرا: فرض کنید نتیجه برای $۴ < n'_۱ < n_۱$ برقرار باشد. حال فرض کنید $abcd$ یک مسیر در دور $C_{n_۱}$ باشد و $u \notin \{a, b, c, d\}$. فرض کنید گراف $H$ را با اتصال $a$ به $d$ در گراف $G$ به دست بیاوریم. مشاهده می‌کنیم که $N_H(c) \subseteq N_H(a)$، و با توجه به قضیه (۱۸.۰.۱) و لم (۱.۲.۳) داریم: $h(G) \leq h(H) = h(H - c)$. لیکن $h(H - c) = h(H - c - b)$، و $H - c - b$ یک گراف دو دوری است. با توجه به فرض استقرا داریم: $h(G) \leq h(H - c - b) = \frac{۱}{۲}$. از طرفی با توجه به نتیجه (۱۹.۰.۱)، $h(G) \geq \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $h(G) = \frac{۱}{۲}$. □

# مراجع


[1] *G. Aggarwal, A. Fiat, A. V. Goldberg, J. D. Hartline, N. Immorlica, and M. Sudan. Derandomization of auctions.* Games and Economic Behavior*, 72(1):1–11, 2011.*

[2] *J. Aspnes, R. Beigel, M. Furst, and S. Rudich. The expressive power of voting polynomials.* Combinatorica*, 14(2):135–148, 1994.*

[3] *M. Bernstein. The hat problem and hamming codes.* Focus*, 21(8):4–6, 2001.*

[4] *M. Breit, D. Deshommes, and A. Falden. Hats required.* Preprint*, 2002.*

[5] *E. Burke, S. Gustafson, and G. Kendall. A puzzle to challenge genetic programming. In* Genetic Programming*, pp. 238–247. Springer, 2002.*

[6] *S. Butler, M. T. Hajiaghayi, R. D. Kleinberg, and T. Leighton. Hat guessing games.* SIAM review*, 51(2):399–413, 2009.*

[7] *M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. The strong perfect graph theorem.* Annals of Mathematics*, pp. 51–229, 2006.*

[8] *A. Dąbrowski. Kolorowe czapeczki–kontynuacja.* Delta*, 2:8–9, 2006.*

[9] *T. Ebert.* Applications of recursive operators to randomness and complexity*. University of California, Santa Barbara, 1998.*

[10] *T. Ebert, W. Merkle, and H. Vollmer. On the autoreducibility of random sequences.* SIAM Journal on Computing*, 32(6):1542–1569, 2003.*

[11] *U. Feige. You can leave your hat on (if you guess its color). Technical report, Technical Report MCS04-03, Computer Science and Applied Mathematics, The Weizmann Institute of Science, 2004.*

[12] *U. Feige. On optimal strategies for a hat game on graphs.* SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 24(3):782–791, 2010.*

[13] *W. Guo, S. Kasala, M. B. Rao, and B. Tucker. The hat problem and some variations. In* Advances in Distribution Theory, Order Statistics, and Inference*, pp. 459–479. Springer, 2006.*

[14] *A. J. Hoffman and J. B. Kruskal. Integral boundary points of convex polyhedra. In* 50 Years of Integer Programming 1958-2008*, pp. 49–76. Springer, 2010.*

[15] *N. Immorlica.* Computing with strategic agents*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2005.*

[16] *M. Krzywkowski. Hat problem on a graph.* Mathematica Pannonica*, 21:3–21, 2010.*

[17] *M. Krzywkowski. Hat problem on the cycle c4.* International Mathmatical Forum*, pp. 505–212, 2010.*

[18] *M. Krzywkowski. Hat problem on odd cycles.* Houston journal of mathematics*, 37(4):1063–1069, 2011.*

[19] *M. Krzywkowski. On the hat problem of a graph.* Opuscula Mathematica*, pp. 285–296, 2012.*

[20] *H. W. Lenstra Jr and G. Seroussi. On hats and other covers. In* Information Theory, 2002. Proceedings. 2002 IEEE International Symposium on*, pp. 342. IEEE, 2002.*

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

استراتژی ........ *Strategy*

احتمال ........ *Probability*

ب

برنده ........ *Win*

بازنده ........ *Loss*

بدون جهت ........ *Undirected*

بهینه ........ *Optimal*

ت

تک دوری ........ *Unicyclic*

خ

خوشه ........ *Clique*

د

درخت ........ *Tree*

درجه ........ *Degree*

دور ........ *Cycle*

دو دوری ........ *Bicyclic*

ر

راس ........ *Vertex*

رنگ ........ *Color*

ز

زیرگراف ........ *Subgraph*

س

ساختار حدس ........ *Gussing instruction*

ع

عدد کلاه ........ *Hat number*

عدد رنگی ........ *Chromatic number*

ک

کران بالا ........ *Upper bound*

م

مسئله کلاه ........ *Hat problem*

مسیر ........ *Path*

موقعیت ........ *Situation*

مجاور ........ *Adjacent*

ه

همسایه ........ *Neighbourhood*

همسایه غالب ........ *Neighbourhood-dominated*

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

*A*

*Adjacent* ........ مجاور

*B*

*Bicyclic* ........ دو دوری

*C*

*Color* ........ رنگ

*Cycle* ........ دور

*Clique* ........ خوشه

*Chromatic number* ........ عدد رنگی

*D*

*Degree* ........ درجه

*E*

*Edge* ........ یال

*G*

*Gussing instruction* ........ ساختار حدس

*H*

*Hat problem* ........ مسئله کلاه

*Hat number* ........ عدد کلاه

*I*

*Independ* ........ مستقل

*Index* ........ اندیس

*L*

*Loss* ........ بازنده

*N*

*Neighbourhood* ........ همسایه

Neighbourhood-dominated ........ همسایه غالب

O

Optimal ........ بهینه

P

Path ........ مسیر

Probability ........ احتمال

S

Strategy ........ استراتژی

Situation ........ موقعیت

Strucrure ........ ساختار

Subgraph ........ زیرگراف

T

Tree ........ درخت

U

Undirected ........ بدون جهت

Upper bound ........ کران بالا

Unicyclic ........ تک دور

V

Vertex ........ راس

Vertex disjoint ........ راس مجزا

W

Win ........ برنده

# نمایه

***Aabstract***

*In the **hat problem**, each of $n$ people is randomly fitted with a blue or red hat. Then everybody can try to guess simultaneously his own hat color looking at the hat colors of the other people. The team wins if at least one person guesses his hat color correctly and no one guesses his hat color wrong, otherwise the team loses. The aim is to maximize the probability of winning. In this thesis, we cosider such problem on a graph, where vertices are people and a person can see all people, to which he is connected by an edge. We investigate the hat problem on the trees, paths, complete graphs and some cycles, and separately in each case obtain the hat number. Also we obtain the hat number on bicyclic graphs as our own work.*
***Keywords: Bicyclic graph, Cycle, Hat problem, Path, Strategy, Tree, Vertex degree***

*Shahrood University*

*Faculty Of Mathematical Sciences*

# On the Hat problem on a graph


***Tayebe Balegh***

*Supervisor*

*Dr. Nader Jafari Rad*


***July 2015***