



دانشکده علوم ریاضی
گروه آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد

برآورد ناپارامتری تابع چگالی دوبعدی به روش موجک

حسین منصورى

استاد راهنما

دکتر احمد نزاقتى رضازاده

استاد مشاور

دکتر محمد آرشى

آبان ۱۳۹۴

تقدیم بہ

ساحت مقدس حضرت ولی عصر (عج)

سپاس گزارمی...

خدایا

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ
بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است حسرت نخورم
و مردنی عطا کن که بر بیهودگی‌اش سوگوار نباشم

سپاس خدا را که نور شناختش را به قلب ما تابانید و شکرش را بر وجودمان الهام فرمود. دروازه‌ی بی‌پایان دانش به پروردگاریش را بر ما گشود و ما را به وادی پر فیض توحید خالصانه‌اش راهبری نمود. تقدیری شایسته و تشکری بایسته از همه‌ی بزرگوارانی که در محضرشان زانوی تعلم زده‌ام و به شاگردی‌شان مفتخر شده‌ام به ویژه از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر نزاکتی که با راهنمایی‌های بسیار ارزنده و عالمانه و هم چنین دقت نظر و توجهاتشان روشنگر راه این پژوهش بوده و همچنین از جناب آقای دکتر آرشی که با مشاوره‌های ارزشمندشان در پیشبرد این پژوهش کمک کردند و از سرکار خانم دکتر اقبال و آقای دکتر ربیعی که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند کمال تشکر را دارم. از خانواده عزیزم که همواره نگاه مشتاقشان بدرقه راهم بوده و در تمام طول تحصیل پشتیبان من بودند تشکر و قدردانی می‌کنم.

حسین مصوری
آبان ۱۳۹۴

تعمدنامه

اینجانب حسین منصوری دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آمار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان برآورد ناپارامتری تابع چگالی دوبعدی به روش موجک، تحت راهنمایی دکتر احمد نراکتی رضازاده متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

حسین منصوری
آبان ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در روش معمول برآورد تابع چگالی f ، تابع چگالی احتمال توأم (x, y) را به صورت $f(x, \nu) = f(x|Y = \nu)\mathbb{P}(Y = \nu)$ بازنویسی می‌کنیم و با برآورد کردن $\mathbb{P}(Y = \nu)$ و $f(x|Y = \nu)$ ، می‌توان تابع چگالی $f(x, \nu)$ را برآورد کرد. در این راستا، $\mathbb{P}(Y = \nu)$ را توسط نسبت متناظر و $f(x|Y = \nu)$ را به روش هسته برآورد می‌کنیم. در روش هسته وجود برخی فرض‌ها روی f و مشتقات آن از دقت برآوردگر کاسته و همچنین انتخاب بهینه پهنای باند همچنان یک موضوع مورد بحث است. در این پایان نامه تابع $f(x|Y = \nu)$ را به وسیله‌ی موجک‌ها برآورد می‌کنیم. از دو برآوردگر خطی موجک و آستانه سخت موجک استفاده می‌کنیم و معیار MISE را برای این دو برآوردگر بررسی می‌کنیم و در پایان با یک مطالعه شبیه‌سازی دقت برآوردگرهای موجک را با برآوردگر هسته مقایسه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: برآورد تابع چگالی، موجک، آستانه سخت، هسته

نظریه‌ی موجک‌ها شاخه‌ای از تحلیل هارمونیک و از پدیده‌های جدید علم ریاضی است که کاربردهای زیادی در ریاضیات و مخابرات و سایر علوم دارد. این نظریه علی‌رغم عمر کوتاه خود، به سرعت رشد کرده و تقریباً در هر زمینه‌ای که تحلیل فوریه حضور داشته، به رقابت با آن برخاسته است. مهم‌ترین عرصه‌ی این رقابت در فشرده‌سازی و مخابره‌ی علائم و تصاویر است. ابزار مورد نیاز برای این هدف‌ها تبدیل‌های موجکی است. اخیراً موضوع تحلیل موجکی مورد توجه زیاد ریاضی‌دانان و مهندسان قرار گرفته است. برخی به آن به عنوان پایه‌ای جدید برای نمایش توابع می‌نگرند و عده‌ای آن را به عنوان شاخه‌ی جدیدی از ریاضیات می‌دانند.

یکی از مهم‌ترین کاربردهای موجک‌ها در پردازش و انتقال اطلاعات، خصوصاً فشرده‌سازی تصاویر است. برای این کار تا کنون از تبدیل‌های فوریه استفاده می‌شده ولی در حال حاضر تبدیل‌های موجکی در حال رقابت با آن‌ها هستند و حتی در مواردی نظیر انگشت‌نگاری، برتری خود را نشان داده‌اند. همچنین علی‌رغم این که بیش از یک دهه از ورود موجک‌ها نمی‌گذرد، نتایج تئوری و عملی ارزشمندی پیرامون نقش موجک‌ها در تحقیقات آماری به چاپ رسیده است.

فصل اول این پایان‌نامه مربوط به پیش نیازهاست و به یادآوری مفاهیمی از موجک، نحوه‌ی پیدایش آن‌ها و مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های آتی اختصاص دارد. فصل دوم به‌طور مختصر به معرفی روش‌های برآورد تابع چگالی می‌پردازیم. عمده‌ی مطالب این فصل به معرفی و مرور مفاهیمی از برآورد تابع چگالی به روش موجک اختصاص دارد. هم‌چنین معیار $MISE$ را در حالت استقلال و m -وابستگی برای برآورد تابع f را در قالب ۲ قضیه بررسی می‌کنیم. در فصل سوم ابتدا به معرفی موجک دو بعدی می‌پردازیم. در ادامه خواص برآوردگر ضرایب موجک در قالب ۳ لم می‌پردازیم و سپس معیار $MISE$ را برای دو برآوردگر خطی موجک و آستانه سخت موجک در قالب دو قضیه مطرح می‌کنیم. در فصل چهارم ابتدا برآورد ناپارامتری تابع چگالی دو بعدی به روش هسته را بیان می‌کنیم و در پایان با یک مطالعه شبیه‌سازی دقت برآوردگرهای موجک و هسته را با هم مقایسه می‌کنیم.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

متغیر تصادفی	X
مجموعه‌ی اعداد حقیقی	\mathbb{R}
تابع مقیاس	ϕ
تابع موجک	ψ
تابع مقیاس دو بعدی	Φ
تابع موجک دو بعدی	Ψ
تکیه‌گاه	$supp$
تقریباً همه جا	$a.e.$
فضای توابع انتگرال‌پذیر مربعی	$L^2(\mathbb{R})$
تعداد عناصر یک مجموعه	$card$
اندازه یا نرم تابع f	$\ f\ $

فهرست مطالب

۱	تعاریف و مقدمات	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۱	۲.۱ تاریخچه	۱
۲	۳.۱ تعاریف مقدماتی	۲
۸	۴.۱ موجک‌ها	۸
۱۰	۵.۱ تحلیل چندریزه‌ساز	۱۰
۱۱	۶.۱ تحلیل چندریزه‌ساز دوبعدی	۱۱
۱۳	۷.۱ موجک‌های دوبشی	۱۳
۱۵	۲ برآورد تابع چگالی یک‌بعدی به روش هسته و موجک	۱۵
۱۵	۱.۲ مقدمه	۱۵
۱۵	۲.۲ برآورد تابع چگالی به روش بافت‌نگار	۱۵
۱۶	۳.۲ برآورد تابع چگالی به روش هسته	۱۶
۱۸	۴.۲ برآورد تابع چگالی به روش موجکی	۱۸
۱۸	۱.۴.۲ برآورد موجک تابع چگالی به روش خطی	۱۸
۱۹	۲.۴.۲ برآورد موجکی تابع چگالی به روش غیرخطی	۱۹
۲۷	۳ برآورد تابع چگالی دوبعدی به روش موجک	۲۷
۲۷	۱.۳ مقدمه	۲۷
۲۷	۲.۳ موجک‌های دو بعدی	۲۷
۲۸	۳.۳ برآوردگرها	۲۸
۲۹	۱.۳.۳ برآوردگر ضرایب موجک	۲۹
۳۰	۲.۳.۳ برآوردگر اصلی موجک	۳۰
۴۳	۴ شبیه‌سازی	۴۳
۴۳	۱.۴ مقدمه	۴۳
۴۳	۲.۴ هسته دوبعدی	۴۳

۴۵	برآورد ناپارامتری تابع چگالی دوبعدی به روش هسته	۳.۴
۴۸	مثال شبیه سازی	۴.۴
۴۹	نتیجه گیری	۵.۴
۴۹	پیشنهادات	۶.۴
۵۱	آ کدهای برنامه در نرم افزار MATLAB	
۵۱	کد شماره ۱	۱.آ
۵۶	کد شماره ۲	۲.آ
۵۸	شکل ها	۳.آ
۶۱	مراجع	
۶۳	واژه نامه فارسی به انگلیسی	
۶۵	واژه نامه انگلیسی به فارسی	

فصل ۱

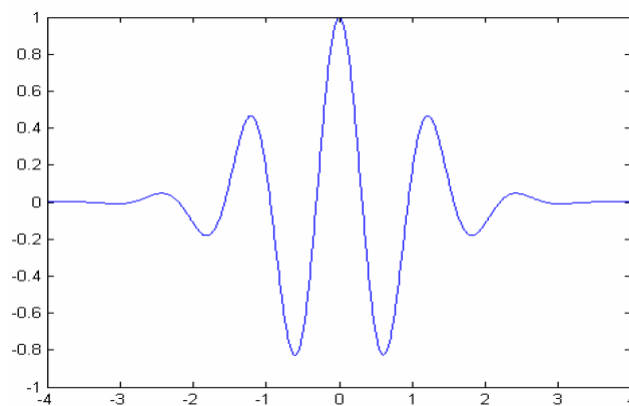
تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

در این فصل به طور مختصر تاریخچه موجک‌ها، برخی خواص موجک‌ها و پایه‌های موجکی، توابع موجکی و روابط بین آن‌ها و قضایای مهم مربوط به موجک‌ها را بیان می‌کنیم. در این فصل سعی شده است، مطالبی برای کسانی که علاقمند به تحقیق در زمینه‌ی کاربرد موجک‌ها در آمار هستند، گنجانیده شود که پس از مطالعه‌ی این فصل، اطلاعات کافی حاصل شود.

۲.۱ تاریخچه

اصطلاح موجک^۱ نخستین بار در ژئوفیزیک توسط مارلت^۲ و همکاران (۱۹۸۲) به کار گرفته شد و اولین موجک توسط آن‌ها ساخته شد. نمودار این موجک در شکل ۱.۱ آمده است.



شکل ۱.۱: نمودار نخستین موجک ساخته شده توسط مارلت

^۱Wavelet

^۲Morlet

موجک‌ها ابزاری قابل انعطاف با محتوای غنی ریاضی و توانایی سطح بالای کاربردی هستند و برای تجزیه و تحلیل یک تابع نوسانی از زمان یا مکان که موج نامیده می‌شود، به‌کار می‌روند. تحلیل فوریه نیز تحلیل موج است که در آن سیگنال بر حسب موج‌های سینوسی با فرکانس‌های مختلف بسط داده می‌شود. استفاده از بسط فوریه برای توابع با سیگنال‌های گذرا یا موقتی که روی بخش بزرگی از دامنه‌ی خود صفر هستند، مناسب نمی‌باشد زیرا تعداد زیادی از مولفه‌های فوریه لازم است تا بتوان یک ناپیوستگی را نشان داد.

موجک‌ها برای تحلیل پدیده‌های گذرا یا توابعی که در بعضی زمان‌ها تغییرات سریع یا تند دارند مناسب‌تر می‌باشند زیرا موجک‌ها بر خلاف موج‌های سینوسی دوره‌ی محدود دارند و سیگنال‌های با تغییرات تند یا سریع را بهتر تحلیل می‌کنند.

یکی از مهم‌ترین کاربردهای موجک‌ها در پردازش و انتقال اطلاعات، فشرده‌سازی تصاویر است. برای این کار تا کنون از تبدیل‌های فوریه استفاده می‌شده ولی در حال حاضر تبدیل‌های موجکی در حال رقابت با آن‌ها بوده و حتی در مواردی نظیر انگشت‌نگاری، برتری خود را نشان داده‌اند.

نخستین بار موجک‌ها در آمار توسط دونوهو و جانستون^۳ (۱۹۹۲) به کار برده شدند. در دهه‌های اخیر متون بسیاری درباره‌ی نقش موجک‌ها در آمار به چاپ رسیده که در این میان می‌توان به کتاب‌های والتر^۴ (۱۹۹۴)، ویداکوویک^۵ (۱۹۹۹)، پرسی‌والدن^۶ (۲۰۰۰) هاردل^۷ و همکاران (۱۹۹۸) و نیسون^۸ (۲۰۰۶) اشاره نمود.

۳.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۳.۱. زیر فضای برداری، زیر مجموعه‌ای از فضای برداری است که تحت جمع برداری و ضرب اسکالر دو بردار بسته باشد، یعنی فضا را به وجود آورد.

تعریف ۲.۳.۱. گویم تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ متعلق به فضای $L^2(\mathbb{R})$ است اگر:

$$\int |f(x)|^2 dx < \infty$$

که در آن \mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد.

^۳Donoho & Johnstone

^۴Walter

^۵Vidakovic

^۶Persival & Walden

^۷Haardle

^۸Nason

در این فضا ضرب داخلی و نرم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int |f(x)|^2 dx}$$

و به طور کلی به ازای $p > 0$ فضای $L^p(\mathbb{R})$ را با

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

و نرم روی این فضا را با

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۳.۱. فضای $L^\infty(\mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{esssup} |f| < \infty \right\}$$

که در آن $\text{esssup} f = \inf \{ \alpha : f(x) \leq \alpha \text{ a.e.} \}$

تعریف ۴.۳.۱. تابع قطعه‌ای پیوسته: اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ به جز چند نقطه‌ای محدود قابل شمارش، پیوسته باشد، به آن تابع، تابع قطعه‌ای پیوسته می‌گویند.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید V یک زیر فضای ضرب داخلی V باشد. متمم متعامد V ، که با V^\perp ، نشان داده می‌شود مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای V می‌باشد که به V عمودند. یعنی؛

$$V^\perp = \{ \nu \in V; \langle \nu, w \rangle = 0 \quad w \in V \text{ هر} \}$$

تعریف ۶.۳.۱. تبدیل فوری تابع $f \in L^1(\mathbb{R})$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

تعریف ۷.۳.۱. هر معادله‌ی تابعی به شکل کلی

$$f(x) = \sum_{k=0}^N C_k f(\alpha x - \beta_k)$$

که در آن $\alpha > 1$ و $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_N$ و اعداد ثابت حقیقی بوده و C_k اعداد ثابت مختلط هستند، یک معادله اتساع نامیده می‌شود.

در این پایان نامه با حالت خاص این گونه معادلات سروکار داریم یعنی وقتی که $\alpha = 2^j$ ، j عدد صحیح، $\beta_k = K$ و C_k اعداد حقیقی هستند.

تعریف ۸.۳.۱. مجموعه‌ی توابع $\{\varphi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ را یک دستگاه متعامدیکه می‌نامند هرگاه:

$$\langle \varphi_{k_1}, \varphi_{k_2} \rangle = \delta_{k_1, k_2}$$

که در آن دلتای کرونکر^۹ نامیده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{k_1, k_2} = \begin{cases} 1 & k_1 = k_2 \\ 0 & k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

تعریف ۹.۳.۱. یک دستگاه متعامدیکه مانند $\{\phi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه‌ی متعامدیکه^{۱۰} برای زیر فضای V از فضای $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ گفته می‌شود، اگر هر تابع $f \in V$ نمایشی به صورت زیر داشته باشد:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_k(x)$$

به طوری که:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty$$

که در آن \mathbb{Z} مجموعه اعداد صحیح است.

فضاهای تابعی زیر در فرایند اثبات قضایا مورد توجه هستند.

۱- فضای سوبولوف^{۱۱}

تابع $f(x)$ را متعلق به فضای سوبولوف، $W_p^s(R)$ می‌نامیم هرگاه

$$\left\| (1 + |\omega|^2)^{s/2} \hat{f}(\omega) \right\|_p < \infty$$

که در آن $\hat{f}(\omega)$ تبدیل فوری تابع $f(x)$ در بسامد ω است.

اگر $s = 0$ ، این فضا، فضای لبگ خواهد بود. اگر $s = 1, 2, 3, \dots$ ، فضای $W_p^s(R)$ شامل تمامی فضای لبگ خواهد بود که s بار مشتق‌پذیرند و این مشتقات متعلق به فضای لبگ است.

^۹Kroneker

^{۱۰}Orthonormal basis

^{۱۱}Sobolev

۲- فضای بسوف^{۱۲}

به منظور تعریف فضای بسوف ابتدا می‌باید نرم فضای بسوف را تعریف کنیم. در این صورت فضای بسوف که با نماد $F_{p,q}^s$ نشان می‌دهیم کلاس توابعی (مثلاً f) هستند که دارای نرم بسوف متناهی می‌باشند. حال برای تعریف نرم در این فضا، فرض کنید برای هر تابع f ، $\Delta_h^{(r)}$ تفاضل از مرتبه r ام باشد که در آن

$$\begin{aligned}\Delta_h^{(0)} f(t) &= f(t) \\ \Delta_h^{(r)} &= \Delta_h^{(r-1)} f(x+h) - \Delta_h^{(r-1)} f(x)\end{aligned}$$

لازم به ذکر است که $\Delta_h^{(r)}$ برای $x \in I_{rh} = \{x \in I \mid x+rh \in I, I \subset \mathbb{R}\}$ تعریف شده است. ضریب r ام همواری تابع $f \in L_p(I)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\omega_{r,p}(f; t) = \sup_{|h| \leq t} \left\| \Delta_h^{(r)} f \right\|_{L^p(I_{rh})}$$

به ازای مقادیر $0 < p \leq \infty$ ، $0 < q \leq \infty$ و r را چنان انتخاب می‌کنیم که $r-1 \leq s \leq r$. در این صورت نرم نیمه فضای بسوف عبارت است از:

اگر $1 \leq q < \infty$ ، آنگاه

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^s} = \left[\int_0^\infty (h^{-s} \omega_{r,p}(f; h))^q \frac{dh}{h} \right]^{1/q}$$

اگر $q = \infty$ ، آنگاه

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^s} = \sup_h \omega_{r,p}(f; h)$$

در نهایت، نرم فضای بسوف به صورت $\|f\|_{L^p(I)} + \|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^s}$ تعریف می‌شود. فضای بسوف کلاس بسیار بزرگی از توابع است. به عنوان مثال فضای سوبولوف W_p^s یک فضای $\mathbf{B}_{p,2}^s$ است.

فضای بسوف دارای خواص اساسی زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{p,q}^s &\subseteq \mathbf{B}_{p',q'}^{s'} & p' > p, \quad s = s' - \frac{1}{p'} + \frac{1}{p}, \quad q' \geq q \\ \mathbf{B}_{p,q}^s &\subseteq \mathbf{B}_{p,2}^s & \text{for } p \leq 2 \\ \mathbf{B}_{p,2}^s &\subseteq \mathbf{B}_{p,p}^s & \text{for } p \geq 2\end{aligned} \tag{۱.۱}$$

تعریف ۱.۰.۳.۱. برای یک m معلوم و ثابت، دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_i\}_{i \geq 1}$ را m -وابسته می‌نامند هرگاه برای هر دو مجموعه $I, J \in \{1, 2, \dots\}$ داشته باشیم:

$$\min(J) - \max(I) > m$$

و خانواده‌های $\{X_j\}_{j \in J}$ و $\{X_i\}_{i \in I}$ مستقل باشند.

^{۱۲}Besov

تعریف ۱۱.۳.۱. میانگین مجموع توان دوم خطای (MISE^{۱۳}) هر برآوردگر \hat{f} به صورت زیر است:

$$\mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) = \mathbb{E}(\|\hat{f} - \mathbb{E}(\hat{f})\|^2) + (\|f - \mathbb{E}(\hat{f})\|^2)$$

که در آن خطای تصادفی $\mathbb{E}(\|\hat{f} - \mathbb{E}(\hat{f})\|^2)$ ناشی از تصادفی بودن مشاهدات است و خطای اریبی $(\|f - \mathbb{E}(\hat{f})\|^2)$ ناشی از روش برآورد است.

تعریف ۱۲.۳.۱. محمول تابع f را با $supp f$ نشان می‌دهیم و برابر است با $\{x : f(x) \neq 0\}$.

لم ۱۳.۳.۱. اگر X و Y دو متغیر تصادفی دلخواه باشند در صورت وجود امید ریاضی‌ها، آن‌گاه:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$$

برهان. به گات (۱۹۹۴) رجوع کنید. □

لم ۱۴.۳.۱. فرض کنید که $\{Y_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی باشند آن‌گاه:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}Y_n$$

برهان. به گات (۱۹۹۴) رجوع کنید. □

لم ۱۵.۳.۱. اگر (X, Y) متغیر تصادفی دوبعدی و $g(X)$ تابعی بر حسب X و $h(Y)$ تابعی بر حسب Y باشند آن‌گاه:

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)|Y=y) = h(y)\mathbb{E}(g(X)|Y=y)$$

برهان. به گات (۱۹۹۴) رجوع کنید. □

لم ۱۶.۳.۱. (نامساوی مینکوفسکی^{۱۴})

فرض کنید $1 \leq p$ و $f, g \in \mathbb{L}^p(\mu)$ در این صورت داریم:

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

برهان. به گات (۱۹۹۴) رجوع کنید. □

لم ۱۷.۳.۱. (نامساوی هولدر^{۱۵})

اگر $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ ، $p, q > 1$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$ ، $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ و

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

برهان. به گات (۱۹۹۴) رجوع کنید. □

^{۱۳}Mean Integrated Square Error

^{۱۴}Minkowski's Inequality

^{۱۵}Holder's Inequality

لم ۱۸.۳.۱. (نامساوی ینسن^{۱۶})

فرض کنید X یک متغیر تصادفی، g یک تابع محدب و همچنین $\mathbb{E}(X)$ و $\mathbb{E}(g(X))$ موجود باشند در این صورت:

$$g(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(g(X))$$

□ برهان. به گات (۱۹۹۴) رجوع کنید.

لم ۱۹.۳.۱. (نامساوی کوشی - شوارتز^{۱۷})

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با واریانس متناهی باشند، آن گاه:

$$|\mathbb{E}XY| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2 \mathbb{E}Y^2}$$

□ برهان. به گات (۱۹۹۴) رجوع کنید.

قضیه ۲۰.۳.۱. (نامساوی رزنتال^{۱۸})

برای $p > 2$ فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین ۰ و به ازای هر $k = 1, \dots, n$ در این صورت $\mathbb{E}|X_k|^p < \infty$

$$\mathbb{E}|S_n|^p = \begin{cases} \leq D_p \max \left\{ \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k|^p, \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k^2 \right)^{p/2} \right\}, \\ \geq 2^{-p} \max \left\{ \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k|^p, \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k^2 \right)^{p/2} \right\} \end{cases}$$

که در آن $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ و D_p عدد ثابت وابسته به p است.

□ برهان. به گات (۱۹۹۴) رجوع کنید.

لم ۲۱.۳.۱. (نامساوی برنشتاین^{۱۹})

فرض کنید U_1, \dots, U_n (n یک عدد صحیح مثبت است) متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر باشد به طوری که برای هر عدد ثابت $M > 0$ داشته باشیم $\sup_{i \in \{1, \dots, n\}} |U_i| \leq M < \infty$ سپس برای هر $\lambda > 0$

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n U_i \right| \geq \lambda \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{\lambda^2}{2 \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(U_i^2) + \lambda M/3 \right)} \right)$$

□ برهان. به فان (۱۹۹۲) رجوع کنید.

^{۱۶}Jensen's Inequality

^{۱۷}Cauchy - Schwarz Inequality

^{۱۸}Rosenthal's

^{۱۹}Bernstein's Inequality

۴.۱ موجک‌ها

نظریه موجک‌ها در ریاضی ابتدا توسط آلفرد هار^{۲۰} در سال ۱۹۱۰ مطرح شد. اساس کار هار به این صورت بود که او برای تقریب یک تابع پیوسته f در فاصله $[۰, ۱]$ از یک تابع f_n که بر اساس توابع پله‌ای واحد ساخته می‌شد استفاده کرد. به عبارت دقیق‌تر، او نشان داد که

$$f_n(x) = \langle \phi_0, f \rangle \phi_0(x) + \langle \phi_1, f \rangle \phi_1(x) + \dots + \langle \phi_n, f \rangle \phi_n(x)$$

که در آن توابع پله‌ای واحد عبارتند از:

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1 & \frac{k}{2^j} \leq x < \frac{k+1}{2^j} \\ -1 & \frac{k+\frac{1}{2}}{2^j} \leq x < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}, \quad j \geq 0, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1, n = 2^j + k$$

به صورت مجانبی ($n \rightarrow \infty$) به f همگراست.

تعریف ۰.۱.۴.۱. تابع $\phi(x) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ به صورت

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

یک تابع مقیاسی هار^{۲۱} و یا موجک پدر^{۲۲} و یا تابع جعبه‌ای^{۲۳} نامیده می‌شود.

تعریف ۰.۲.۴.۱. تابع

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

^{۲۰} Alfred Haar

^{۲۱} Haar Scaling function

^{۲۲} Father Wavelet

^{۲۳} Box function

را موجک مادر^{۲۴} و یا موجک اساسی^{۲۵} می‌نامند چون اتساع‌های دوتایی و انتقال‌های صحیح تولید می‌کند.

تعریف ۳.۴.۱. برای مقادیر صحیح غیرمنفی m ، موجک مادر را از مرتبه m می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

الف. اگر $m = 0$ آن‌گاه $\psi(x) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ و هرگاه $m \geq 1$ آن‌گاه تابع ψ و مشتق‌های آن تا مرتبه m متعلق به $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ باشند.

ب. ψ و تمام مشتق‌های آن تا مرتبه m وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند، سریعاً نزولی می‌باشند.

ج. برای $0 \leq k \leq m$ داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx = 0$$

د. مجموعه توابع $\{\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad j, k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه‌ی متعامدیکه برای $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ باشد.

لازم به ذکر است که موجک‌های پدر و مادر در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1) \quad \text{و} \quad \psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1)$$

و همچنین برای $1 - 2^j, \dots, 1, 0, k$ و $j \geq 0$ و k, j انتقال‌های مقیاس شده ϕ و ψ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k) \quad \text{و} \quad \phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k)$$

برای j ثابت، $\psi_{j,k}(x)$ را موجک‌های نسل j ام یا رده j ام می‌نامند. با توجه به رابطه بالا می‌توان

$$\text{نوشت: } \text{Supp } \psi_{j,k}(x) = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right]$$

کار j فشرده کردن تابع روی محور x و کار k لغزاندن و یا حرکت تابع روی محور x هاست. در رابطه بالا برای $k > 0$ انتقال نمودار تابع به سمت راست و برای $k < 0$ انتقال نمودار به سمت چپ می‌باشد که موجک مادر تولید می‌شود.

با توجه به تعریف توابع $\phi(x)$ ، $\psi(x)$ ، $\psi(2x)$ و $\psi(2x - 1)$ دو عمل اساسی در آن‌ها مشاهده می‌شود: انتقال و اتساع. گامی که از $\psi(2x)$ به $\psi(2x - 1)$ برداشته می‌شود انتقال است. گامی که از $\psi(x)$ به $\psi(2x)$ برداشته می‌شود اتساع است.

^{۲۴}Mother Wavelet

^{۲۵}Basic Wavelet

۵.۱ تحلیل چندریزه‌ساز

تحلیل چندریزه‌ساز^{۲۶} یک روش عمومی برای ساختن پایه‌ی متعامدیکه موجک‌ها است. تحلیل چندریزه‌ساز را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

قضیه ۱.۵.۱. یک تحلیل چندریزه‌ساز شامل یک خانواده از زیرفضاهای بسته‌ی $V_j \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}), j \in \mathbb{Z}$ است به طوری که:

$$1- \text{ برای هر } j \in \mathbb{Z}, V_j \subseteq V_{j+1}$$

$$2- \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$$

$$3- \text{ برای هر } j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \text{ اگر و فقط اگر } f(2x) \in V_{j+1}$$

$$4- \text{ برای هر } k \in \mathbb{Z}, f(x) \in V \text{ اگر و فقط اگر } f(x-k) \in V$$

۵- تابعی مانند $\phi(x) \in V$ وجود دارد به طوری که خانواده $\{\phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه‌ی متعامدیکه برای V است.

□

برهان. به دوبشی^{۲۷} (۱۹۸۸) رجوع کنید.

طبق قضیه (۱.۵.۱) نتیجه می‌شود که به ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ $\phi_{j,k}(\cdot)$ تشکیل یک پایه‌ی متعامدیکه برای V_j می‌دهد که اعضای این پایه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k)$$

فرض کنید P_{V_j} تصویر تابع f روی V_j باشد، در این صورت تقریب P_{V_j} یک تابع f با قدرت تفکیک‌پذیری 2^j به صورت زیر خواهد بود.

$$P_{V_j} f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \phi_{j,k}(x)$$

که در آن

$$\alpha_{j,k} = \int \phi_{j,k}(x) f(x) dx$$

شرط ۲ از قضیه (۱.۵.۱) این اطمینان را می‌دهد که به ازای هر $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_{V_j} f = f$$

اطلاعات اضافی قابل دسترس $P_{V_{j+1}}$ در مورد f در مقایسه با P_{V_j} با متمم متعامد V_j در V_{j+1} داده می‌شود. چنانچه به ازای هر $j \in \mathbb{Z}$ متمم متعامد V_j در V_{j+1} را با W_j نشان دهیم می‌توان نشان داد که

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z}$$

^{۲۶}Multiresolution analysis

^{۲۷}Daubechies

که در آن علامت \oplus نشان دهنده‌ی مجموع متعامد دو زیرفضاست و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{V_{j+1} = V_j \oplus W_j; v_{j+1} = v_j + w_j \quad \text{که} \quad v_j \in V_j, w_j \in W_j\}$$

و نتیجه می‌شود که در آن زیرفضاهای $\{W_j\}_{j=j_0}^{j-1}$ نسبت به هم متعامدند و لذا

$$V_j = V_{j_0} + \bigoplus_{j=j_0}^{j-1} W_j, \quad j_0 < j \quad (2.1)$$

از (۲.۱)، شرط ۲ و ۳ قضیه‌ی (۱.۵.۱) نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$$

همچنین

$$\bigcup_{j=j_0}^{\infty} V_j = V_{j_0} \oplus \left(\bigoplus_{j=j_0}^{\infty} W_j \right) = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$$

بنابراین $\{\psi_{j,k}(\cdot), j, k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه‌ی متعامدیکه برای $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ تشکیل می‌دهد. همچنین

$$\{\phi_{j_0,k}(\cdot), \psi_{j,k}(\cdot) \quad j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}\}$$

یک پایه‌ی متعامدیکه برای $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ است. بنابراین هر تابع $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ به صورت زیر قابل نمایش است:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

که ضرایب $\beta_{j,k}$ و $\alpha_{j_0,k}$ در بسط فوق از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\alpha_{j_0,k} = \int f(x) \phi_{j_0,k}(x) dx = \langle f, \phi_{j_0,k} \rangle$$

$$\beta_{j,k} = \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$$

برای آشنایی بیشتر با مفهوم تحلیل چندریزه‌ساز به دوبشی (۱۹۸۸) و مارلت^{۲۸} و همکاران (۱۹۸۲) مراجعه شود.

۶.۱ تحلیل چندریزه‌ساز دوبعدی

ساده‌ترین راه برای تولید یک پایه از موجک‌های دوبعدی ضرب پایه‌های یک‌بعدی است. اگر $V_j, j \in \mathbb{Z}$ یک تحلیل چندریزه‌ساز برای $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ باشد آنگاه یک تحلیل چندریزه‌ساز برای $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$V_j = V_j \otimes V_j, j \in \mathbb{Z}$$

^{۲۸}Morlet

که در آن

$$V_j = V_j \otimes V_j = \text{span} \{f(x).g(x), f, g \in V_j\}$$

از رابطه‌ی فوق نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_{j+1} \otimes V_{j+1} \\ &= (V_j \oplus W_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \\ &= (V_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) + (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j) \\ &= V_j + (V_j \otimes W_j) + (W_j \otimes V_j) + W_j \\ &= V_j \oplus W_j^{(h)} \oplus W_j^{(\nu)} \oplus W_j^{(d)} \end{aligned}$$

که h ، ν و d مربوط به محورهای افقی، عمودی و قطری می‌باشند. در نتیجه

$$V_{j_0} \oplus \bigoplus_{j=j_0}^{\infty} (W_j^{(h)} \oplus W_j^{(\nu)} \oplus W_j^{(d)}) = L^2(\mathbb{R}^2)$$

بنابراین یک پایه‌ی متعامدیکه برای $L^2(\mathbb{R}^2)$ به صورت زیر است:

$$\{\phi_{j_0, k}(\cdot, \cdot), \psi_{j, k, \ell}(\cdot, \cdot), \quad \ell = 1, 2, 3 \quad j \geq j_0, \quad k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2\}$$

که شامل یک تابع مقیاس و سه تابع موجک زیر است.

$$\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y) \quad \Psi^1(x, y) = \phi(x)\psi(y)$$

$$\Psi^2(x, y) = \psi(x)\phi(y) \quad \Psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

لذا بسط موجکی هر تابع $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ عبارت است از:

$$f(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{j_0, k} \Phi_{j_0, k}(x, y) + \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \beta_{j, k, \ell} \Psi_{j, k, \ell}(x, y)$$

که ضرایب مقیاس $\alpha_{j_0, k}$ و ضرایب موجک $\beta_{j, k, \ell}$ از روابط زیر نتیجه می‌شوند:

$$\alpha_{j_0, k} = \int \int f(x, y) \Phi_{j_0, k}(x, y) dx dy$$

$$\beta_{j, k, \ell} = \int \int f(x, y) \Psi_{j, k, \ell}(x, y) dx dy$$

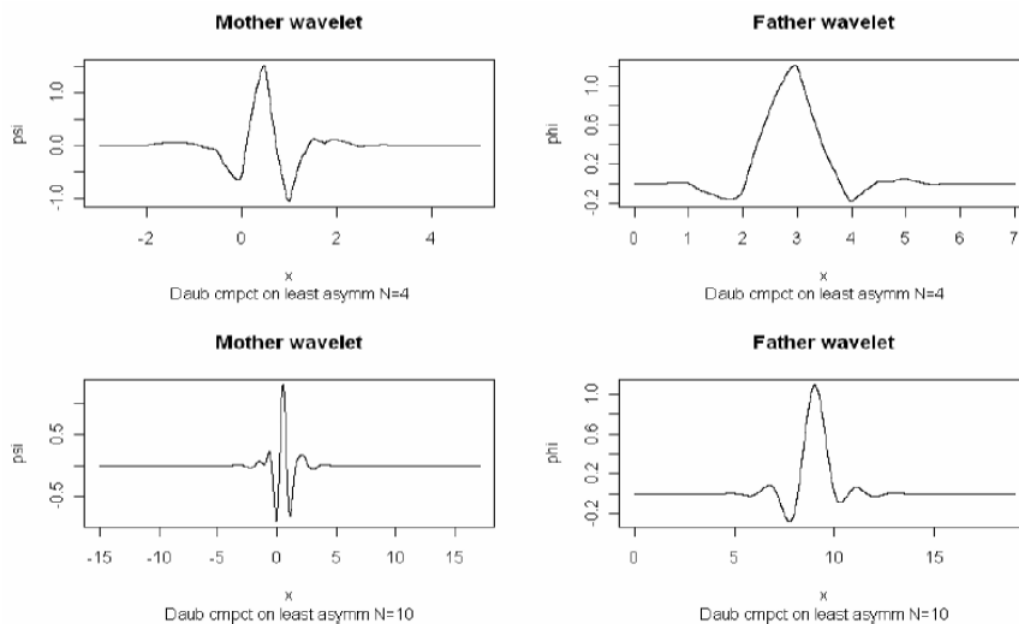
برای جزئیات بیشتر درباره تحلیل چندریزه‌ساز دوبعدی و ابعاد بالاتر می‌توانید به ویدئو (۱۹۹۹) مراجعه کنید.

۷.۱ موجک‌های دوبشی

یکی از مهم‌ترین دستاورد نظریه‌ی موجک‌ها، ساختن موجک‌هایی با تکیه‌گاه فشرده و گشتاورهای صفر است که هموارتر از موجک هار می‌باشند. موجک هار یک تقریب پله‌ای و ناپیوسته از تابع مورد نظر را ارائه می‌کند که بیشتر برای اهداف آموزشی و به دلیل فرم بسته و ساده‌ی توابع موجک و مقیاس آن، مورد استفاده قرار می‌گیرد. دوبشی (۱۹۸۸) با حل معادله اتساع، چند خانواده از موجک‌ها را معرفی نمود که دارای گشتاورهای صفر و تکیه‌گاه فشرده بودند. هر خانواده با تعداد گشتاورهای صفر آن، N ، مشخص می‌شود. این خانواده از موجک‌ها دوبشی نامیده می‌شوند و آن‌ها را با D_N نمایش می‌دهند. توابع مقیاس و موجک دوبشی دارای ویژگی زیر می‌باشند:

$$\text{supp } \phi \subseteq [0, 2N - 1] \quad \text{supp } \psi \subseteq [-N + 1, N]$$

شکل ۲.۱ توابع موجک و مقیاس دوبشی با ۴ و ۱۰ گشتاور صفر نشان می‌دهند.



شکل ۲.۱: نمودار تابع موجک پدر و مادر دوبشی با ۴ و ۱۰ گشتاور صفر

یکی از مهم‌ترین امتیازات این موجک‌ها این است که هماهنگ با فرکانس‌ها عمل می‌کنند، بدین مفهوم که در فرکانس‌های بالا بسیار باریک می‌شوند و در فرکانس‌های پایین پهن‌تر می‌شوند، بنابراین می‌توانند تغییرات جزئی توابع را در ابعاد بزرگتری نمایش دهند، این خاصیت موجک‌ها را درشت‌نمایی می‌گویند زیرا مانند یک ذره‌بین عمل می‌کنند.

فصل ۲

برآورد تابع چگالی یک بعدی به روش هسته و موجک

۱.۲ مقدمه

برآورد تابع چگالی به روش هسته^۱ تعمیم برآورد تابع چگالی به روش بافت‌نگار^۲ است. در این فصل ابتدا به طور مختصر مبحث برآورد تابع چگالی به روش بافت‌نگار را بیان می‌کنیم و سپس به بیان مبحث برآورد تابع چگالی به روش هسته می‌پردازیم. در قسمت بعد برآورد تابع چگالی به روش موجک را بیان می‌کنیم. در پایان به دلیل این‌که در مورد برآورد تابع چگالی به روش موجک در حالت استقلال زیاد کار شده است ما این موضوع را در حالت m -وابستگی بررسی می‌کنیم. مطالب این فصل برگرفته از دوستی و نزاکتی (۲۰۰۸) و لبلنس (۱۹۹۶) می‌باشد.

۲.۲ برآورد تابع چگالی به روش بافت‌نگار

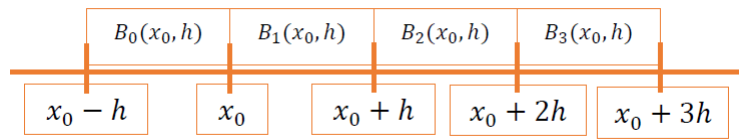
یکی از روش‌های برآورد تابع چگالی استفاده از بافت‌نگارها می‌باشد. در راستای تعریف بافت‌نگار فرض کنید $B_j(x_0, h)$ نشان دهنده فاصله‌ای بانندی به مرکز x_0 و طول h باشد به عبارت دقیق‌تر

$$B_j(x_0, h) = [x_0 + (j - 1)h, x_0 + jh], \quad j \in \mathbb{Z}$$

برای مثال فاصله $[x_0 - h, x_0 + 3h]$ براساس $B_j(\cdot, \cdot)$ ها به صورت شکل (۲.۲) زیر تقسیم‌بندی می‌شود.

^۱Kernel

^۲Histogram



اگر $\{x_i\}_{i=1}^n$ مشاهدات یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی پیوسته f باشد، بافت‌نگار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{f}_h(x) = n^{-1} h^{-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^n I\{x_i \in B_j(x_0, h)\} I\{x \in B_j(x_0, h)\}$$

که در آن $I\{x_i \in B_j(x_0, h)\}$ تعداد مشاهداتی است که در باند $B_j(x_0, h)$ قرار می‌گیرند و $I\{x \in B_j(x_0, h)\}$ برای بررسی این مطلب است که آیا نقاط حول x قرار می‌گیرند یا خیر. پارامتر h پارامتر هموارساز یا مرکز ساز بوده که پهنای باند^۳ بافت‌نگار را تعیین می‌کند. پارامتر h که خیلی بزرگ باشد باعث ایجاد بلوک‌های بزرگی شده که موجب شکل گرفتن بافت‌نگاری بدون ساختار می‌شود. از طرفی پارامتر h که خیلی کوچک باشد برآورد متغیری را نتیجه می‌دهد که شامل تعداد زیادی قله بی‌اهمیت (غیرضروری) است. به عبارتی با زیاد شدن پهنای باند بافت‌نگار هموارتر و با کوچک شدن پهنای باند بافت‌نگار غیر هموارتر می‌شود. از آنجایی که برآورد بافت‌نگار، برآوردی گسسته برای تابع پیوسته f است این ایده مطرح می‌شود که به جای عامل گسسته‌ساز $I\{\cdot\}$ از تابعی پیوسته در برآورد فوق استفاده شود. در این راستا برآوردهای هسته‌جانشینی مناسب به جای برآوردهای بافت‌نگار می‌باشند که در ادامه آن‌ها را توضیح می‌دهیم.

۳.۲ برآورد تابع چگالی به روش هسته

در این قسمت به معرفی برآوردگر تابع چگالی به روش هسته می‌پردازیم که هموارتر از بافت‌نگار است. ایده اصلی این روش این است که به جای استفاده از جعبه‌ها بر روی بازه $B_j(x_0, h)$ در ساخت بافت‌نگار از تابعی هموار استفاده کرده و به جای این که یک تابع نشانگر وظیفه‌ی مرکزی کردن مشاهدات حول x را داشته باشد این کار به‌طور خودکار انجام شود. به عبارتی تابع هموار را طوری در نظر می‌گیریم که خود به خود دارای مرکز x است. حال برای این که بتوانیم تابع نشانگر را با توابع هموارتری جایگزین کنیم ابتدا $\hat{f}_h(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\hat{f}_h(x) = n^{-1} h^{-1} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

که در آن $K(u) = I\left(|u| \leq \frac{1}{4}\right)$ و به K تابع هسته می‌گویند که در شرایط زیر صدق کند:

^۳Band width

۱. برای هر x

$$K(x) \geq 0$$

۲. برای هر $x > 0$

$$K(x) = K(-x)$$

۳.

$$\int K(u) du = 1$$

۴.

$$\int u K(u) du = 0$$

۵.

$$\int u^2 K(u) du < \infty$$

برخی از توابع هسته معروف عبارتند از:

مستطیلی^۴

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |x| < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

مثلثی^۵

$$K(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

گوسین^۶

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad x \in [-\infty, +\infty]$$

اپانچنیکف^۷

$$K(x) = \frac{3}{4} (1 - x^2) \quad x \in [0, 1]$$

^۴Rectangular^۵Triangular^۶Gaussian^۷Epanechnikov

در این روش پهنای باند h ، درجه و میزان همواری (هموار بودن) برآورد را تعیین می‌کند همانند روش بافت‌نگار هرچه پهنای باند بیشتر شود برآوردی هموارتر و هر چه کمتر شود برآوردی ناهموارتر و با نوسانات بیشتر به دست می‌آوریم. در انتخاب پارامتر همواری، سیلورمن^۸ (۱۹۹۸) پیشنهاد زیر را ارائه کرد

$$h = 1.06 \min(s, \frac{R}{1.34}) n^{-\frac{1}{5}}$$

که در آن s انحراف معیار نمونه و R دامنه میان چارکی مشاهدات است. برآورد چگالی هسته، یکی از روش‌های رایج در بین روش‌های برآورد تابع چگالی می‌باشد که برای جزئیات بیشتر می‌توانید به جونز^۹ (۱۹۷۸) و سیمونوف^{۱۰} (۱۹۹۶) مراجعه کنید.

۴.۲ برآورد تابع چگالی به روش موجکی

۱.۴.۲ برآورد موجک تابع چگالی به روش خطی

در فصل ۱ مطالبی در مورد بسط موجکی برای توابع فضای $L^2(\mathbb{R})$ بیان کردیم. بسط موجکی تابع چگالی $f \in L^2(\mathbb{R})$ عبارت است از:

$$f_X(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j_0, k} \phi_{j_0, k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j, k} \psi_{j, k}(x)$$

که ضرایب این بسط به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\alpha_{j_0, k} = \mathbb{E}(\phi_{j_0, k}(X)), \quad \beta_{j, k} = \mathbb{E}(\psi_{j, k}(X))$$

در این قسمت به برآورد موجکی تابع چگالی می‌پردازیم. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n نمونه‌ی تصادفی از متغیر تصادفی با تابع چگالی مجهول $f_X(\cdot)$ باشد. در برآورد به روش موجکی، ضرایب نامعلوم موجک و مقیاس را با برآورد نمونه‌ای آن‌ها جایگزین می‌کنیم. بدین منظور به تعداد جمله‌های متناهی از سری با تعداد جملات نامتناهی نیاز داریم که بر این اساس تعداد متناهی از ضرایب را نگه می‌داریم که منجر به تعریف دو کلاس از برآوردگرهای تابع چگالی می‌شود. یک برآوردگر با نادیده گرفتن همه ضرایب موجک از یک سطح به بعد، به دست می‌آید:

$$\hat{f}_X(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{j_0, k} \phi_{j_0, k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\beta}_{j, k} \psi_{j, k}(x)$$

^۸Silverman

^۹Jones

^{۱۰}Simonoff

که برآورد ناریب ضرایب موجک و مقیاس بسط فوق به روش گشتاورها به صورت زیر می‌باشند:

$$\hat{\alpha}_{j_0, k} = \hat{E}(\phi_{j_0, k}(X)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_{j_0, k}(X_i)$$

$$\hat{\beta}_{j, k} = \hat{E}(\psi_{j, k}(X)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_{j, k}(X_i)$$

برآوردگرهای فوق به دلیل این که توابع خطی از ضرایب موجک $\hat{\beta}_{j, k}$ هستند، برآوردگرهای خطی تابع چگالی نامیده می‌شود.

۲.۴.۲ برآورد موجکی تابع چگالی به روش غیرخطی

در برآورد موجکی تابع چگالی به روش خطی از یک سطح به بعد، تمام ضرایب موجک حذف می‌شوند و به همین دلیل نوسانات زیادی در برآورد تابع مورد نظر دیده می‌شود. ضرایب $\beta_{j, k}$ که نقش آن‌ها کنترل چنین نوساناتی است، از یک سطح به بعد بطور کلی نادیده گرفته می‌شوند. بنابراین طبیعی است که به جای حذف همه‌ی ضرایب از یک سطح به بعد، به دنبال روشی برای انتخاب زیر مجموعه‌ای از ضرایب موجک در هر سطح باشیم. این عمل منجر به معرفی روشی به نام آستانه‌سازی^{۱۱} می‌شود.

روش‌های آستانه‌سازی متفاوتی وجود دارد که در ادامه به معرفی دو مورد از آن‌ها می‌پردازیم. برآورد موجکی تابع چگالی با استفاده از روش آستانه‌سازی موجکی، برآورد غیرخطی تابع چگالی نامیده می‌شود. دو مورد از روش‌های آستانه‌سازی، آستانه‌سازی نرم و سخت می‌باشند. در آستانه‌سازی نرم، ضرایب تجربی موجک $\hat{\beta}_{j, k}$ را با

$$\hat{\beta}_{j, k}^s = \left(|\hat{\beta}_{j, k}| - t \right)_+ \text{sign}(\hat{\beta}_{j, k}) \quad (۱.۲)$$

جایگزین می‌کنیم که در آن $\left(|\hat{\beta}_{j, k}| - t \right)_+$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left(|\hat{\beta}_{j, k}| - t \right)_+ = \begin{cases} |\hat{\beta}_{j, k}| - t & |\hat{\beta}_{j, k}| \geq t \\ 0 & |\hat{\beta}_{j, k}| < t \end{cases}$$

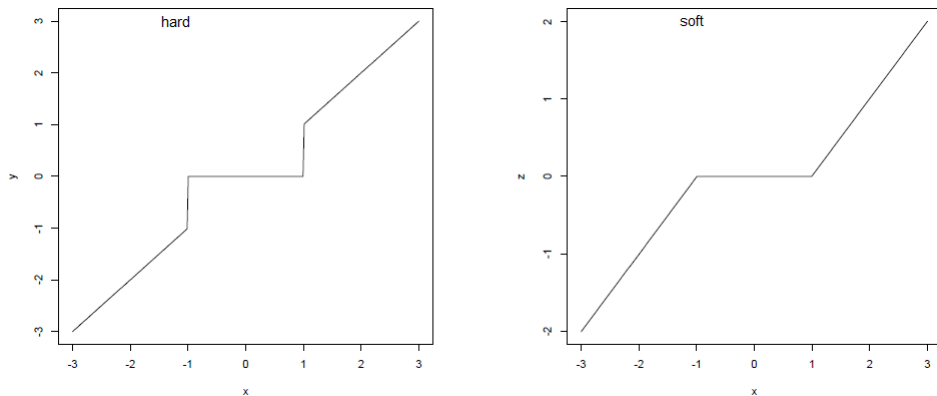
در آستانه‌سازی سخت، ضرایب تجربی موجک $\hat{\beta}_{j, k}$ را با

$$\hat{\beta}_{j, k}^h = \hat{\beta}_{j, k} I(|\hat{\beta}_{j, k}| > t) \quad (۲.۲)$$

با مقدار آستانه‌ی $t > 0$ جایگزین می‌کنیم. به روش آستانه‌سازی نرم، روش انقباض موجکی نیز گفته می‌شود. این دو آستانه در شکل ۱.۲ نمایش داده شده است. برآورد غیرخطی تابع چگالی با استفاده از آستانه‌سازی (۱.۲) و (۲.۲) به صورت زیر است:

$$\hat{f}_n^*(x) = \sum_k \hat{\alpha}_{j_0, k} \phi_{j_0, k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k \hat{\beta}_{j, k}^* \psi_{j, k}(x)$$

^{۱۱}Thresholding



شکل ۱.۲: آستانه‌های نرم و سخت

که $\hat{\beta}_{j,k}^*$ را می‌توان با هر یک از $\hat{\beta}_{j,k}^h$ یا $\hat{\beta}_{j,k}^s$ جایگزین کرد. در این روش به جای استفاده مستقیم از خود ضرایب، از تابعی غیرخطی از ضرایب به صورت $\hat{\beta}_{j,k}^*$ استفاده کنیم. به همین دلیل به این نوع برآوردگر، برآوردگر غیرخطی می‌گوییم.

فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل، با تابع چگالی f باشند. مساله مورد علاقه، برآورد تابع چگالی احتمال، بر پایه مشاهدات $\{X_1, \dots, X_n\}$ است. راتو (۱۹۹۶) نشان داد که تصویر تابع f روی فضای V_j به صورت زیر است:

$$f(x) = \sum_{k \in K_j} \alpha_{j_0, k} \phi_{j_0, k}, \quad \alpha_{j_0, k} = \int f(x) \phi_{j_0, k}(x) dx$$

بنابراین برآوردگر تابع چگالی f به روش موجک به صورت زیر است:

$$\hat{f}(x) = \sum_{k \in K_j} \hat{\alpha}_{j_0, k} \phi_{j_0, k}, \quad \hat{\alpha}_{j_0, k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_{j_0, k}(X_i)$$

که در آن K_j یک مجموعه اندیس است به صورتی که $\text{supp}(f) \cap \text{supp}(\phi_{j_0, k}) \neq \emptyset$ باشد. با توجه به این که موجک پدر محمل فشرده است، مجموعه اندیس K_j متناهی بوده و $\text{card} K_j = O(2^{j_0})$.

لم ۱.۴.۲. فرض کنید ϕ تابع قطعه‌وار پیوسته‌ای باشد که برای هر $j \in \mathbb{N}$ مجموعه توابع $\{\phi_{j,k}, k \in \mathbb{Z} \mid \phi(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)\}$ خانواده‌ای از پایه‌های متعامدیکه برای $L^2(\mathbb{R})$ باشند به علاوه فرض کنید $\theta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\phi(x-k)| < \infty$ ، اگر $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k \phi(2^j x - k)$ آن‌گاه برای $1 \leq p, q \leq \infty$ که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ است داریم:

$$2^{j(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|\lambda\|_{L^p(\mathbb{Z})} \frac{1}{\|\theta\|_{L^q(\mathbb{Z})}^{1/q} \|\theta\|_{L^\infty(\mathbb{Z})}^{1/p}} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2^{j(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|\lambda\|_{L^p(\mathbb{Z})} \|\theta\|_p$$

که در آن $\|\lambda\|_{L^p(\mathbb{Z})} = (\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\lambda_k|^p)^{1/p}$ ، $\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\lambda_k|$

□

برهان. به مهیر^{۱۲} (۱۹۹۰) رجوع کنید.

فضای بسوف از این جهت انتخاب شده است که رابطه‌ی نزدیکی بین ضرایب موجکی و فاصله توابع در فضای بسوف وجود دارد که توسط لبلانس^{۱۳} (۱۹۹۶) در قالب خواص زیر بیان شده که در اثبات قضایا از آن‌ها استفاده خواهیم کرد:

۱- برای بعضی $0 < s < r + 1$ ، $p, q \geq 1$

$$F_{p,q}^s = \left\{ f \in \mathbf{B}_{p,q}^s, \|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^s} \leq M \right\}$$

که در آن s پارامتر هموارساز است و

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^s} = \|P_{j_0} f\|_p + \left(\sum_{j \geq j_0} (\|D_j f\|_p 2^{js})^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

که در آن $D_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}$ و $P_{j_0} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j_0,k} \phi_{j_0,k}$

$$f \in \mathbf{B}_{p,q}^s \Leftrightarrow \|\alpha_{j_0,k}\|_{\ell^p} < \infty, \quad \left(\sum_{j \geq j_0} \left(\|\beta_{j,k}\|_{\ell^p} 2^{j \left(s + \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \right)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

که در آن

$$\|\alpha_{j_0,k}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_{j_0,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\beta_{j_0,k}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\beta_{j_0,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

۳- فرض کنید تابع f متعلق به $\mathbf{B}_{p,\infty}^s(M)$ که در آن $s, M > 0$ اگر و تنها اگر عدد ثابت $M^* > 0$ (وابسته به M) وجود داشته باشد به طوری که:

$$\sup_{j \geq j_0} 2^{js} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\beta_{j,k}|^p \leq M^* \quad (3.2)$$

بر اساس برآوردگر معرفی شده، قضیه زیر کران بالای همگرایی را نشان می‌دهد.

قضیه ۲.۴.۲. فرض کنید $f \in F_{p,q}^s$ که $p \geq 1$ و $s \geq \frac{1}{p}$ و $q \geq 1$ آنگاه برای $p' > \max(2, p)$ عدد ثابتی مانند C وجود دارد به قسمی که

$$\mathbb{E} \left\| \hat{f} - f \right\|_{p'}^2 \leq C n^{-\frac{2s'}{1+2s'}}$$

که در آن $s' = s + \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$ و $2^{j_0} = n^{\frac{1}{1+2s'}}$

^{۱۲}Meyer

^{۱۳}Leblanc

برهان. ابتدا با توجه به تعریف (۱۱.۳.۱) عبارت $\mathbb{E} \|\hat{f} - f\|_{p'}^2$ را به دو جمله‌ی اریبی و جمله‌ی تصادفی افزایش می‌کنیم.

$$\mathbb{E} \|\hat{f} - f\|_{p'}^2 \leq 2 \left(\|f - p_{j_0} f\|_{p'}^2 + \mathbb{E} \|\hat{f} - p_{j_0} f\|_{p'}^2 \right) = 2(T_1 + T_2)$$

اکنون باید به دنبال کران بالا برای جملات T_1 و T_2 باشیم. در ابتدا جمله‌ی T_1 را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \sqrt{T_1} &= \left\| \sum_{j \geq j_0} D_j f \right\|_{p'} \leq \sum_{j \geq j_0} \left(\|D_j f\|_{p'} 2^{js'} \right) 2^{-js'} \\ &\leq \left\{ \sum_{j \geq j_0} \left(\|D_j f\|_{p'} 2^{js'} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{j \geq j_0} 2^{-js'q'} \right\}^{\frac{1}{q'}} \end{aligned}$$

در آخرین قسمت نامساوی فوق با فرض $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ از نامساوی هولدر استفاده شده است. همچنین با استفاده از لبلنس (۱۹۹۶) داریم:

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p',q}^{s'}} = \|p_{j_0} f\|_{p'} + \left(\sum_{j \geq j_0} \left(\|D_j f\|_{p'} 2^{js'} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

با استفاده از نامساوی هولدر با $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ و رابطه فوق نامساوی زیر را به دست می‌آوریم.

$$T_1 \leq C \|f\|_{\mathbf{B}_{p',q}^{s'}} 2^{-s'j_0} \leq C \|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^s} 2^{-s'j_0}$$

این نامساوی با توجه به خواص فضای سوبولوف برقرار است. همچنین از خاصیت $\mathbf{B}_{p,q}^s \subset \mathbf{B}_{p',q'}^{s'}$ ، بنابراین $\|f\|_{\mathbf{B}_{p',q}^{s'}} \leq \|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^s}$ نتیجه می‌شود. بنابراین

$$T_1 \leq K 2^{-2s'j_0} \quad (4.2)$$

و داریم

$$T_2 = \mathbb{E} \|\hat{f} - p_{j_0} f\|_{p'}^2 = \mathbb{E} \left\| \sum_{k \in K_{j_0}} (\hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k}) \phi_{j_0,k}(x) \right\|_{p'}^2$$

اکنون با به کارگیری لم (۱.۴.۲) برای $\lambda_k = \hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k}$ داریم:

$$T_2 = C \mathbb{E} \left\{ \|\hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k}\|_{l_{p'}}^2 \right\} 2^{2j_0(1/2-1/p')}$$

حال با استفاده از نامساوی ینسن داریم:

$$T_2 \leq C 2^{2j_0(1/2-1/p')} \left\{ \sum_{k \in K_{j_0}} \mathbb{E} |\hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k}|^{p'} \right\}^{2/p'} \quad (5.2)$$

برای تکمیل اثبات کافی است کرانی برای $\mathbb{E}|\hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k}|^{p'}$ پیدا کنیم. داریم:

$$\hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{\phi_{j_0,k}(X_i) - \alpha_{j_0,k}\}$$

اکنون ξ_i را به صورت $\xi_i = [\phi_{j_0,k}(X_i) - \alpha_{j_0,k}]$ تعریف می‌کنیم. با توجه به مستقل بودن تابع مقیاس و این که متغیرهای تصادفی مستقل هستند نتیجه می‌گیریم که دنباله متغیرهای تصادفی $\{\xi_i, i \geq 1\}$ مستقل هستند. همچنین طبق راتو (۱۹۸۳) داریم:

$$\|\xi_i\|_\infty \leq K 2^{j_0/2} \|\phi\|_\infty, \quad \mathbb{E}\xi_i = 0, \quad \mathbb{E}\xi_i^2 \leq \|f\|_\infty, \quad |\hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k}| = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|$$

حال با استفاده از قضیه (۲۰.۳.۱) و با توجه به این که $\text{card}K_{j_0} = O(2^{j_0})$ داریم:

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k \in K_{j_0}} \mathbb{E}|\hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k}|^{p'} \right\}^{\frac{2}{p'}} &\leq \left\{ C 2^{j_0} \frac{1}{n^{p'}} \left(n 2^{\frac{j_0}{2}(p'-2)} c_1 + n^{\frac{p'}{2}} c_2 \right) \right\}^{\frac{2}{p'}} \\ &\leq K_1 \left\{ \frac{2^{j_0}}{n^{2(1-\frac{1}{p'})}} + \frac{2^{\frac{j_0}{p'}}}{n} \right\} \end{aligned}$$

با جایگذاری نامساوی بالا در (۵.۲) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} T_2 &\leq K_1 2^{2j_0(1-\frac{1}{p'})} \left\{ \frac{2^{j_0}}{n^{2(1-\frac{1}{p'})}} + \frac{2^{\frac{j_0}{p'}}}{n} \right\} \\ &= K_1 \left\{ \frac{2^{2j_0-2\frac{j_0}{p'}}}{n^{2-\frac{2}{p'}}} + \frac{2^{j_0}}{n} \right\} \\ &= K_1 \left\{ \frac{2^{j_0}}{n} \left(\frac{2^{j_0}}{n} \right)^{1-\frac{2}{p'}} + \frac{2^{j_0}}{n} \right\} \end{aligned}$$

از طرفی چون $n \geq 2^{j_0}$ و $1 - \frac{2}{p'} \geq 0$ نتیجه می‌شود $1 \leq \left(\frac{2^{j_0}}{n} \right)^{1-\frac{2}{p'}}$ بنابراین

$$T_2 \leq \frac{K_2 2^{j_0}}{n} \quad (۶.۲)$$

با کران بالای به دست آمده در (۴.۲) و (۶.۲) و این که $2^{j_0} = n^{\frac{1}{1+\frac{1}{p'}}$ اثبات قضیه کامل می‌شود. \square

حال این قضیه را در حالت m -وابستگی بررسی می‌کنیم و کران بالای همگرایی را به دست می‌آوریم. قبل از بیان قضیه لازم است یک لم و یک قضیه که ما را در اثبات قضیه کمک می‌کند بیان کنیم.

لم ۳.۴.۲. فرض کنید Y_i یک دنباله مستقل از متغیرهای تصادفی با میانگین صفر باشند. همچنین فرض کنید به ازای $q \geq 2$ و تمام i ها داریم $\mathbb{E}|X_i|^q \leq \Delta$ سپس

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right|^q \leq C_q^q \Delta n^{q/2}$$

که در آن Δ عدد ثابت است.

برهان. به چائو (۱۹۷۸) رجوع کنید. □

قضیه ۴.۴.۲. فرض کنید $\{X_i\}$ یک دنباله از متغیرهای وابسته m تایی با میانگین صفر باشند. همچنین فرض کنید برای تمام i ها و $q \geq 2$ داریم $\mathbb{E}|X_i|^q \leq \Delta$. سپس برای تمام $n \geq 2m$

$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^q \leq C_q^q \Delta (4mn)^{q/2}$$

که در آن C_q یک ثابت مثبت وابسته به q می باشد.

برهان. تعریف می کنیم $t = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ که در آن $[\cdot]$ قسمت صحیح را مشخص می کند. مجموع جملات دنباله، X_1, X_2, \dots, X_n را به t بلوک به حجم m تقسیم می کنیم. هر بلوک را با A_i نمایش می دهیم و به صورت $\sum_{j=0}^m X_{i+j}$ تعریف می کنیم. با توجه به تعریف m -وابستگی (تعریف (۱۰.۳.۱)) بلوک های فرد مانند بلوک های زوج مستقل از یکدیگرند. مقدار $\mathbb{E}|A_i|^q$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$\mathbb{E}|A_i|^q = \mathbb{E}|X_i + \dots + X_{i+m}|^q \leq m^q \mathbb{E}|X_i|^q \leq m^q \Delta$$

حال با استفاده از لم (۳.۴.۲) داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|\sum_{i_1} A_i\right|^q &\leq C_q^q (1 + \text{تعداد دسته های فرد})^{q/2} \mathbb{E}|A_i|^q \\ \mathbb{E}\left|\sum_{i_2} A_i\right|^q &\leq C_q^q (1 + \text{تعداد دسته های زوج})^{q/2} \mathbb{E}|A_i|^q \end{aligned} \quad (7.2)$$

که در آن i_1 دسته های فرد و i_2 دسته های زوج است. همچنین داریم

$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^q \leq 2^q \left(\mathbb{E}\left|\sum_{i_1} A_i\right|^q + \mathbb{E}\left|\sum_{i_2} A_i\right|^q \right)$$

با جایگذاری مقادیر (۷.۲) در رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^q &\leq 2^q \left[C_q^q \mathbb{E}|A_i|^q \left\{ (1 + \text{تعداد دسته های فرد})^{q/2} + (1 + \text{تعداد دسته های زوج})^{q/2} \right\} \right] \\ &\leq 2^q [C_q^q \mathbb{E}|A_i|^q (t/2 + 1)^{q/2}] \\ &\leq 2^q C_q^q m^q \Delta t^{q/2} \\ &= 2^q C_q^q m^{q/2} m^{q/2} \Delta t^{q/2} \\ &= 2^q C_q^q \Delta m^{q/2} (mt)^{q/2} \\ &\leq C_q^q \Delta (4mn)^{q/2} \end{aligned}$$

□

حال کران بالایی همگرایی را در حالت m -وابستگی در قالب قضیه زیر معرفی می‌کنیم.

قضیه ۵.۴.۲. فرض کنید $f \in F_{p,q}^{s}$ که $p \geq 1$ و $s \geq \frac{1}{p}$ و $q \geq 1$ در این صورت برای $p' > \max(2, p)$ عدد ثابتی مانند C وجود دارد به قسمی که

$$\mathbb{E} \left\| \hat{f} - f \right\|_{p'}^2 \leq C \left(\frac{n}{m} \right)^{-\frac{2s'}{1+2s'}}$$

$$\text{و } 2^{j_0} = \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{1+2s'}} \text{ و } s' = s + \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$$

برهان. مشابه حالت استقلال ابتدا عبارت $\mathbb{E} \left\| \hat{f} - f \right\|_{p'}^2$ را به دو جمله اریبی و جمله تصادفی افراز می‌کنیم.

$$\mathbb{E} \left\| \hat{f} - f \right\|_{p'}^2 \leq 2 \left(\left\| f - p_{j_0} f \right\|_{p'}^2 + \mathbb{E} \left\| \hat{f} - p_{j_0} f \right\|_{p'}^2 \right) = 2(T_1 + T_2)$$

اکنون باید به دنبال کران بالا برای جملات T_1 و T_2 باشیم. در ابتدا جمله T_1 را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \sqrt{T_1} &= \left\| \sum_{j \geq j_0} D_j f \right\|_{p'} \leq \sum_{j \geq j_0} \left(\|D_j f\|_{p'} 2^{js'} \right) 2^{-js'} \\ &\leq \left\{ \sum_{j \geq j_0} \left(\|D_j f\|_{p'} 2^{js'} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{j \geq j_0} 2^{-js'q'} \right\}^{\frac{1}{q'}} \end{aligned}$$

در آخرین قسمت نامساوی فوق با فرض $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ از نامساوی هولدر استفاده شده است. حال با توجه به خاصیت (۱.۴.۱) فضای بسوف $\|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^s} \leq \|f\|_{\mathbf{B}_{p',q'}^s}$ نتیجه می‌شود لذا داریم:

$$T_1 \leq C \|f\|_{\mathbf{B}_{p',q}^s} 2^{-s'j_0} \leq C \|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^s} 2^{-s'j_0}$$

بنابراین:

$$T_1 \leq K 2^{-2s'j_0} \quad (۸.۲)$$

حال برای T_2 کران به دست می‌آوریم

$$T_2 = \mathbb{E} \left\| \hat{f} - p_{j_0} f \right\|_{p'}^2 = \mathbb{E} \left\| \sum_{k \in K_{j_0}} (\hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k}) \phi_{j_0,k}(x) \right\|_{p'}^2$$

اکنون با به کارگیری لم (۱.۴.۲) برای $\lambda_k = \hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k}$ داریم:

$$T_2 = C \mathbb{E} \left\{ \left\| \hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k} \right\|_{l_{p'}}^2 \right\} 2^{2j_0(1/2 - 1/p')}$$

حال با استفاده از نامساوی ینسن داریم:

$$T_{\Psi} \leq C 2^{2j_0(1/2-1/p')} \left\{ \sum_{k \in K_{j_0}} \mathbb{E} |\hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k}|^{p'} \right\}^{2/p'} \quad (9.2)$$

برای تکمیل اثبات کافی است کرانی برای $\mathbb{E} |\hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k}|^{p'}$ پیدا کنیم. داریم:

$$\hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{\phi_{j_0,k}(X_i) - \alpha_{j_0,k}\}$$

اکنون ξ_i را به صورت $\xi_i = [\phi_{j_0,k}(X_i) - \alpha_{j_0,k}]$ تعریف می‌کنیم. با توجه به مستقل بودن تابع مقیاس و این که متغیرهای تصادفی m -وابسته هستند نتیجه می‌گیریم که دنباله متغیرهای تصادفی $\{\xi_i, n \geq 1\}$ ، m -وابسته هستند. همچنین

$$\|\xi_i\|_{\infty} \leq K 2^{j_0/2} \|\phi\|_{\infty}, \quad \mathbb{E} \xi_i = 0, \quad \mathbb{E} \xi_i^2 \leq \|f\|_{\infty}, \quad |\hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k}| = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|$$

حال با استفاده از قضیه (۴.۴.۲) و با توجه به این که $\text{card} K_{j_0} = O(2^{j_0})$ داریم:

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k \in K_{j_0}} \mathbb{E} |\hat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k}|^{p'} \right\}^{2/p'} &\leq \left\{ C_{p'}^{p'} 2^{2j_0} \frac{1}{n^{p'}} ((4mn)^{p'/2}) \right\}^{2/p'} \\ &\leq K \left\{ 2^{2j_0/p'} \frac{m}{n} \right\} \end{aligned} \quad (10.2)$$

حال نامساوی (۱۰.۲) را در نامساوی (۹.۲) جایگذاری می‌کنیم و داریم:

$$\begin{aligned} T_{\Psi} &\leq K 2^{2j_0(1/2-1/p')} \frac{m}{n} \\ &= K 2^{j_0} \frac{m}{n} \end{aligned} \quad (11.2)$$

با استفاده از رابطه‌های (۸.۲) و (۱۱.۲) و همچنین $2^{j_0} = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{1+\tau s'}}$ اثبات قضیه کامل می‌شود. \square

فصل ۳

برآورد تابع چگالی دوبعدی به روش موجک

۱.۳ مقدمه

در این فصل ابتدا مختصری در مورد برآورد تابع چگالی دوبعدی به روش موجک ارائه کرده و سپس به برآورد ضرایب موجکی می‌پردازیم. در پایان این فصل معیار $MISE^1$ را برای برآوردگر خطی و برآوردگر استانه قوی غیرخطی به دست می‌آوریم. مطالب این فصل برگرفته از چسناوا و همکاران (۲۰۱۴) است. فرض کنید (X, Y) یک بردار تصادفی دوبعدی باشد به طوری که X یک متغیر تصادفی پیوسته و Y یک متغیر تصادفی گسسته روی فضای احتمال $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ تعریف شده است. تابع چگالی احتمال توأم آن‌ها را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$f(x, \nu) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, \nu),$$

که در آن $F(x, \nu) = \mathbb{P}(X \leq x, Y = \nu)$ است.

هدف ما برآورد تابع چگالی f به وسیله n نمونه مستقل و هم‌توزیع از متغیرهای (X, Y) می‌باشد.

۲.۳ موجک‌های دو بعدی

در این قسمت ما موجک‌های دوبعدی که در ساختار برآوردگرهای ناپارامتری برای f مورد استفاده قرار می‌گیرد را در نظر می‌گیریم. در این راستا توابع مقیاس و موجک را برای هر عدد حقیقی $x \in \mathbb{R}$ و عدد صحیح $j \in \mathbb{Z}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), \quad \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

همچنین با توجه به مطالب فصل ۱ مجموعه $\{\phi_{\tau,k}, k \in \mathbb{Z}; \psi_{j,k}, j \geq \tau, k \in \mathbb{Z}\}$ پایه متعامدیکه برای فضای $L^2(\mathbb{R})$ می‌باشد.

¹Mean integrated square error

توابع مقیاس و موجک را در حالت دوبعدی برای هر جهت $\ell \in \{1, 2, 3\}$ ، مقیاس $z \geq \tau$ و مکان فضایی $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Phi_{j,k}(x, y) = 2^j \Phi(2^j x - k_1, 2^j y - k_2)$$

$$\Psi_{j,k,\ell}(x, y) = 2^j \Psi(2^j x - k_1, 2^j y - k_2)$$

با توجه به توابع فوق، برای هر عدد صحیح $J_0 \geq \tau$ ، بسط موجکی هر تابع $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{J_0, k} \Phi_{J_0, k}(x, y) + \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \beta_{j, k, \ell} \Psi_{j, k, \ell}(x, y) \quad (1.3)$$

که در آن ضرایب موجک عبارتند از:

$$\alpha_{J_0, k} = \int \int f(x, y) \Phi_{J_0, k}(x, y) dx dy$$

$$\beta_{j, k, \ell} = \int \int f(x, y) \Psi_{j, k, \ell}(x, y) dx dy$$

برای جزئیات بیشتر به آنتوین و همکاران (۲۰۰۴) رجوع کنید.

لم ۱.۲.۳. تابع f در $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ متعلق به $B_{p,r}^s(M)$ دوبعدی است اگر و فقط اگر M_* وابسته به M وجود داشته باشد به طوری که

$$2^{\tau(1-2/p)} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |\alpha_{\tau, k}|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=\tau}^{\infty} \left(2^{j(s+1-2/p)} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |\beta_{j, k, \ell}|^p \right)^{1/p} \right)^r \right)^{1/r} \leq M_* < \infty,$$

که در آن $s > 0$ پارامتر همواری و $1 \leq p, r \leq \infty$ پارامترهای نرم می‌باشند.

□

برهان. به مالات^۲ (۲۰۰۹) رجوع کنید.

تابع دوبعدی f متعلق به $B_{p,r}^s(M, Q)$ است اگر و تنها اگر $h \in B_{p,r}^s(M)$ و تکیه‌گاه h داخل بازه $[-Q, Q]$ برای $Q > 0$ باشد.

۳.۳ برآوردگرها

روش معمول برآورد تابع چگالی f که در احمد و سریتو (۱۹۹۴) بیان شده است به این صورت است که ابتدا تابع چگالی احتمال توأم (x, y) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x, \nu) = f(x|Y = \nu) \mathbb{P}(Y = \nu)$$

^۲Mallat

که در آن $f(x|Y = \nu)$ تابع چگالی X به شرط پیشامد $\{Y = \nu\}$ است. بنابراین با برآورد کردن $\mathbb{P}(Y = \nu)$ و $f(x|Y = \nu)$ ، می‌توان تابع چگالی $f(x, \nu)$ را برآورد کرد. در این راستا، $\mathbb{P}(Y = \nu)$ را توسط نسبت متناظر و $f(x|Y = \nu)$ را به روش هسته برآورد می‌کنیم. به دلیل وجود برخی فرض‌ها روی f و مشتقات آن نشان داده شده که برآوردگر دارای خواص جانبی خوبی می‌باشد، با این حال انتخاب بهینه و سازگار پهنای باند در روش هسته خیلی مهم است. اگر چه برخی از روش‌های اعتبارسنجی متقابل^۳ ممکن است از دیدگاه عملی این روش را تضمین کنند اما هیچ نتیجه نظری وجود ندارد.

اکنون این رویه را با استفاده از روش موجک بررسی می‌کنیم. یک راه حل، بررسی برآورد $f(x|Y = \nu)$ توسط یک برآوردگر موجک غیرخطی می‌باشد. اگرچه ممکن است در نگاه اول خیلی مشکل به نظر برسد. همان‌طور که در فصل ۱ بیان شد عملکرد این روش به انتخاب آستانه مرتبط است. یک آستانه مناسب به تعداد تصادفی از شاخص i که در آن $\{Y_i = \nu\}$ ، وابسته است. بنابراین آستانه یک متغیر تصادفی می‌باشد. این روش به طور قابل توجهی پیچیده و مطالعه‌ی اجرای جانبی خود یک چالش است.

به همین دلیل، ما یک ایده جایگزین بر اساس یک روش توسعه یافته توسط دانگ و جیانگ (۲۰۰۹)، برپایه تابع پله‌ای را پیشنهاد می‌کنیم. تابع پله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$f_*(x, y) = \sum_{\nu=1}^m \mathbb{P}(Y = \nu) f(x|Y = \nu) \mathbb{1}_{\{\nu-1/2 \leq y < \nu+1/2\}},$$

که در آن $\mathbb{1}_D$ تابع نشانگر روی مجموعه D است.

با توجه به مزیت قطعه‌ای پیوسته بودن تابع f_* ، $f_* \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ ، و برای هر $y = \nu \in \{1, \dots, m\}$ داریم:

$$f_*(x, y) = f(x, \nu).$$

۱.۳.۳ برآوردگر ضرایب موجک

اولین مرحله از برآورد تابع $f_*(x, y)$ ، برآورد ضرایب موجک ناشناخته زیر می‌باشد.

$$\alpha_{j,k} = \int \int f_*(x, y) \Phi_{j,k}(x, y) dx dy,$$

$$\beta_{j,k,\ell} = \int \int f_*(x, y) \Psi_{j,k,\ell}(x, y) dx dy.$$

بنابراین برای هر $k \in \mathbb{Z}$ ، $j \geq \tau$ و $\ell \in \{1, 2, 3\}$ ، برآوردگرهای زیر را پیشنهاد می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{j,k} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{Y_i-1/2}^{Y_i+1/2} \Phi_{j,k}(X_i, y) dy, \\ \hat{\beta}_{j,k,\ell} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{Y_i-1/2}^{Y_i+1/2} \Psi_{j,k,\ell}(X_i, y) dy \end{aligned} \quad (2.3)$$

^۳Cross - validation

۲.۳.۳ برآوردگر اصلی موجک

ما از دو برآوردگر موجک مختلف استفاده می‌کنیم:

- ۱- برآوردگر موجک به روش خطی که آن را با \hat{f}^L نمایش می‌دهیم.
 - ۲- برآوردگر موجک به روش آستانه سخت که آن را با \hat{f}^H نمایش می‌دهیم.
- هر دو برآوردگر مورد نظر وابسته به ضرایب موجک (۲.۳) می‌باشند. فرض کنید $f_* \in B_{p,r}^s(M)$ ، $p \geq 2$. برآوردگر موجک به روش خطی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{f}^L(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{\alpha}_{J_s, k} \Phi_{J_s, k}(x, y), \quad (۳.۳)$$

که در آن $\hat{\alpha}_{J_s, k}$ در تعریف (۲.۳) بیان شده است و J_s عدد صحیحی است که در رابطه زیر صدق کند:

$$\frac{1}{2} n^{1/(2s+1)} < 2^{J_s} \leq n^{1/(2s+1)}$$

برای مطالعه بیشتر در زمینه برآوردگر موجک به روش خطی می‌توانید به چائوبی (۲۰۱۱) رجوع کنید. فرض کنید که همواری تابع f_* ناشناخته است. برآوردگر موجک به روش آستانه سخت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{f}^H(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{\alpha}_{\tau, k} \Phi_{\tau, k}(x, y) + \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=\tau}^{J_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{\beta}_{j, k, \ell} \mathbb{1}_{\{|\hat{\beta}_{j, k, \ell}| \geq k \theta_j\}} \Psi_{j, k, \ell}(x, y) \quad (۴.۳)$$

که در آن $\hat{\alpha}_{\tau, k}$ و $\hat{\beta}_{j, k, \ell}$ در رابطه (۲.۳) بیان شده‌اند و J_1 عدد صحیحی است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\frac{1}{2} \frac{n}{\ln n} < 2^{J_1} \leq \frac{n}{\ln n},$$

همچنین k یک ثابت به اندازه کافی بزرگ بوده و θ_j به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\theta_j = 2^{-j/2} \sqrt{\frac{\ln n}{n}}.$$

در ادامه، نکته‌های زیر در اثبات لم‌ها و قضایا مهم می‌باشند:

- ۱- برای هر $\nu \in \{1, \dots, m\}$ مجموعه c_{j, k_ν} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_{j, k_\nu}(\nu) = \int_{\nu - \frac{1}{2}}^{\nu + \frac{1}{2}} \phi_{j, k_\nu}(y) dy. \quad (۵.۳)$$

با توجه به این‌که برای $i \in \{1, \dots, n\}$ داریم:

$$\int_{Y_i - 1/2}^{Y_i + 1/2} \Phi_{j, k}(X_i, y) dy = \phi_{j, k_1}(X_i) c_{j, k_\nu}(Y_i)$$

در نتیجه داریم:

$$\hat{\alpha}_{j, k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_{j, k_1}(X_i) c_{j, k_\nu}(Y_i).$$

۲- از آنجایی که توابع موجک دارای محمل فشرده هستند و $f_* \in \mathbf{B}_{p,r}^s(M, Q)$ بنابراین برای j ثابت و به دلیل این که توابع موجک نامنفی و از مرتبه 2^j هستند بنابراین ما این مرتبه را توسط یک مجموعه از اعداد صحیح متوالی از مرتبه 2^j به شکل Λ_j نشان می‌دهیم.

۳- مقدار C یک ثابت عمومی است که به مقادیر j, k و n بستگی ندارد و ممکن است مقدار آن از جمله‌ای به جمله دیگر تغییر کند و همچنین ممکن است مقدار آن وابسته به ϕ یا ψ باشد نتایج آماری زیر که در قالب لم بیان شده‌اند، کارا بودن برآوردگرهای (۲.۳) را به وسیله معیارهای مختلف نشان می‌دهند.

لم ۱.۳.۳. فرض کنید $\tau, j \geq \tau, k \in \mathbb{Z}^d, \ell \in \{1, 2, 3\}$ در این صورت داریم:

$$\mathbb{E}(\hat{\alpha}_{j,k}) = \alpha_{j,k}, \quad \mathbb{E}(\hat{\beta}_{j,k,\ell}) = \beta_{j,k,\ell}$$

برهان. رابطه اول با استفاده از لم (۱۳.۳.۱) و رابطه دوم با استفاده از لم (۱۴.۳.۱) به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\phi_{j,k_1}(X_1)c_{j,k_\tau}(Y_1)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\phi_{j,k_1}(X_1)c_{j,k_\tau}(Y_1)|Y_1)) \\ &= \mathbb{E}(c_{j,k_\tau}(Y_1)\mathbb{E}(\phi_{j,k_1}(X_1)|Y_1)) \end{aligned}$$

حال با جایگذاری مقدار $\mathbb{E}(\phi_{j,k_1}(X_1)|Y_1)$ در رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}\left(c_{j,k_\tau}(Y_1) \int \phi_{j,k_1}(x)f(x|Y_1) dx\right) \\ &= \sum_{\nu=1}^m c_{j,k_\tau}(\nu) \int \phi_{j,k_1}(x)f(x|Y_1 = \nu) dx \mathbb{P}(Y_1 = \nu) \\ &= \int \int \left(\sum_{\nu=1}^m \mathbb{P}(Y_1 = \nu) f(x|Y_1 = \nu) \mathbb{1}_{\{\nu - \frac{1}{2} \leq y < \nu + \frac{1}{2}\}}\right) \phi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_\tau}(y) dx dy \\ &= \int \int f_*(x, y) \phi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_\tau}(y) dx dy = \alpha_{j,k}. \end{aligned}$$

□

لم ۲.۳.۳. فرض کنید چگالی x از بالا کران‌دار^۴ باشد و $j \geq \tau$ به طوری که $2^j \leq n$ ، $k \in \mathbb{Z}^d$ ، $\ell \in \{1, 2, 3\}$ سپس عدد ثابتی مانند c وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((\hat{\alpha}_{j,k} - \alpha_{j,k})^4\right) &\leq c \frac{1}{n^2} 2^{-2j} \\ \mathbb{E}\left((\hat{\beta}_{j,k,\ell} - \beta_{j,k,\ell})^4\right) &\leq c \frac{1}{n^2} 2^{-2j} \end{aligned}$$

برهان. تعریف می‌کنیم:

$$\xi_i = \phi_{j,k_1}(X_i)c_{j,k_\tau}(Y_i) - \alpha_{j,k}$$

^۴Bounded

با استفاده از لم (۱.۳.۳) داریم $E(\xi_1) = 0$ و همچنین با به کارگیری نامساوی رزنتال داریم:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left((\hat{\alpha}_{j,k} - \alpha_{j,k})^4 \right) &= \mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \right)^4 \right) \\ &\leq C \left(\frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\xi_i^4) + \frac{1}{n^4} \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\xi_i^2) \right)^2 \right) \quad (6.3) \\ &= C \left(\frac{1}{n^4} \mathbb{E}(\xi^4) + \frac{1}{n^4} (\mathbb{E}(\xi^2))^2 \right) \end{aligned}$$

طبق یافته چسنا و همکاران (۲۰۱۴) برای هر $u \in \{2, 4\}$ داریم:

$$\mathbb{E}(\xi^u) \leq 2^u \mathbb{E} \left((\phi_{j,k_1}(X_1))^u (c_{j,k_2}(Y_1))^u \right)$$

با استفاده از تغییر متغیر $y = 2^j w - k_2$ داریم:

$$\begin{aligned} |c_{j,k_2}(Y_1)| &\leq \int |\phi_{j,k_2}(y)| dy \\ &= \int \left| 2^{j/2} \phi_{j,k_2}(2^j(2^j w - k_2) - k) \right| 2^{-j} dw \quad (7.3) \\ &= 2^{-j/2} \int |\phi(w)| dw = c 2^{-j/2} \end{aligned}$$

حال g را تابع چگالی X_1 که از بالا کران دار است را در نظر می‌گیریم و همچنین با توجه به تابع ϕ که دارای محملی فشرده و $\int (\phi_{j,k_1}(x))^2 dx = 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left((\phi_{j,k_1}(X_1))^u \right) &= \int (\phi_{j,k_1}(x))^u g(x) dx \\ &\leq C \int (\phi_{j,k_1}(x))^u dx \\ &= C \int (\phi_{j,k_1}(x))^{(u-2)} (\phi_{j,k_1}(x))^2 dx \\ &= C \int \left(2^{j/2} \phi(2^j x - k) \right)^{(u-2)} (\phi_{j,k_1}(x))^2 dx \\ &\leq C 2^{j(u-2)/2} \int (\phi_{j,k_1}(x))^2 dx \\ &= C 2^{j(u-2)/2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathbb{E}(\xi^u) \leq C 2^{j(u-2)/2} 2^{-ju/2} = C 2^{-j} \quad (8.3)$$

با توجه به رابطه‌های (۲.۳)، (۳.۳) و شرط $2^j \leq n$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left((\hat{\alpha}_{j,k} - \alpha_{j,k})^4 \right) &\leq C \left(\frac{1}{n^4} 2^{-j} + \frac{1}{n^4} 2^{-2j} \right) \\ &\leq C \frac{1}{n^4} 2^{-2j} \end{aligned}$$

□

لم ۳.۳.۳. فرض کنید تابع چگالی X از بالا کران دار باشد و $j \geq \tau$ به طوری که $2^j \leq n/\ln n$ همچنین $\ell \in \{1, 2, 3\}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ در این صورت عدد ثابتی مانند $k > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$\mathbb{P} \left(|\hat{\alpha}_{j,k} - \alpha_{j,k}| \geq \frac{k}{2} 2^{-j/2} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right) \leq 2 \frac{1}{n^2}$$

$$\mathbb{P} \left(|\hat{\beta}_{j,k,\ell} - \beta_{j,k,\ell}| \geq \frac{k}{2} 2^{-j/2} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right) \leq 2 \frac{1}{n^2}$$

برهان. فرض می‌کنیم c_{j,k_2} همانند رابطه (۵.۳) تعریف شده باشد و ξ_i را برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\xi_i = \phi_{j,k_1}(X_i) c_{j,k_2}(Y_i) - \alpha_{j,k}$$

آن‌گاه:

- ۱- از آن جایی که X_1, \dots, X_n مستقل و هم توزیع هستند پس ξ_1, \dots, ξ_n نیز مستقل و هم توزیع می‌باشند.
- ۲- با استفاده از لم (۱.۳.۳)، $\mathbb{E}(\xi_1) = 0$ می‌باشد.
- ۳- با استفاده از رابطه (۷.۳) رابطه زیر برقرار است:

$$|\xi_1| \leq |\phi_{j,k_1}(X_1)| |c_{j,k_2}(Y_1)| + |\alpha_{j,k}|$$

$$\leq C 2^{j/2} 2^{-j/2} + C \leq C$$

۴- با استفاده از رابطه‌ی (۸.۳) داریم:

$$\mathbb{E}(\xi_1^2) \leq C 2^{-j}$$

حال با توجه به نامساوی برنشتاین و این که $2^j \leq n/\ln n$ داریم:

$$\mathbb{P} \left(|\hat{\alpha}_{j,k} - \alpha_{j,k}| \geq \frac{k}{2} 2^{-j/2} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right) = \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \right| \geq \frac{k}{2} 2^{-j/2} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right)$$

$$\leq 2 \exp \left(-C \frac{k^2 2^{-j} \ln n}{2^{-j} + k 2^{-j/2} \sqrt{\ln n/n}} \right)$$

$$\leq 2 \exp \left(-C \frac{k^2 \ln n}{1 + k 2^{j/2} \sqrt{\ln n/n}} \right)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$2^j \leq \frac{n}{\ln n} \Rightarrow 2^j \frac{\ln n}{n} \leq 1 \Rightarrow 2^{j/2} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \leq 1$$

داریم

$$\begin{aligned} \Psi \exp \left(-C \frac{k^\nu \ln n}{1 + k^{2j/\nu} \sqrt{\ln n/n}} \right) &\leq \Psi \exp \left(-C \frac{k^\nu \ln n}{1 + k} \right) \\ &= \Psi \exp \left(-\ln n \left(\frac{Ck^\nu}{1 + k} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n^{h(k)}} \end{aligned}$$

که در آن $h(k) = Ck^\nu/(1+k)$ ، به طوری که $\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = \infty$ و همچنین $k > 0$ وجود دارد به طوری که $h(k) = 2$. \square

اثبات رابطه‌ی دوم نیز مشابه اثبات فوق می‌باشد.

قضیه ۴.۳.۳. (کران بالا برای \hat{f}^L)

فرض کنید در رابطه (۱.۳) چگالی X از بالا کران دار و $f_* \in \mathbf{B}_{p,r}^s(M, Q)$ با شرایط $s > 0, p \geq 1, Q \geq m$ ، $r \geq 1$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم \hat{f}^L مطابق رابطه (۳.۳) باشد. عدد ثابت $C > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$\mathbb{E} \left(\int \int \left(\hat{f}^L(x, y) - f_*(x, y) \right)^2 dx dy \right) \leq C n^{-2s/(2s+1)}$$

برهان. از آنجایی که f_* یک تابع مربع انتگرال پذیر است داریم:

$$f_*(x, y) = \sum_{k \in \Lambda_{J_0}} \alpha_{J_0, k} \Phi_{J_0, k}(x, y) + \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_0}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j, k, \ell} \Psi_{j, k, \ell}(x, y)$$

که در آن $\alpha_{J_0, k}$ و $\beta_{j, k, \ell}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \alpha_{J_0, k} &= \int \int f_*(x, y) \Phi_{J_0, k}(x, y) dx dy \\ \beta_{j, k, \ell} &= \int \int f_*(x, y) \Psi_{j, k, \ell}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

بنابراین

$$\hat{f}^L(x, y) - f_*(x, y) = \sum_{k \in \Lambda_{J_0}} (\hat{\alpha}_{J_0, k} - \alpha_{J_0, k}) \Phi_{J_0, k}(x, y) - \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_0}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j, k, \ell} \Psi_{j, k, \ell}(x, y)$$

حال برای به دست آوردن کران برای عبارت $\mathbb{E} \left(\int \int \left(\hat{f}^L(x, y) - f_*(x, y) \right)^2 dx dy \right)$ از سمت چپ

شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \left(\hat{f}^L(x, y) - f_*(x, y) \right)^2 &= \left(\sum_{k \in \Lambda_{J_0}} (\hat{\alpha}_{J_0, k} - \alpha_{J_0, k}) \Phi_{J_0, k}(x, y) \right)^2 \\ &\quad - 2 \left(\sum_{k \in \Lambda_{j_0}} (\hat{\alpha}_{J_0, k} - \alpha_{J_0, k}) \Phi_{J_0, k}(x, y) \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_0}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j, k, \ell} \Psi_{j, k, \ell}(x, y) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_0}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j, k, \ell} \Psi_{j, k, \ell}(x, y) \right)^2 \end{aligned}$$

حال با استفاده از خاصیت متعامدیکه بودن توابع پایه و انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$\int \int \left(\hat{f}^L(x, y) - f_*(x, y) \right)^2 dx dy = \sum_{k \in \Lambda_{J_0}} (\hat{\alpha}_{J_0, k} - \alpha_{J_0, k})^2 + \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_0}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j, k, \ell}^2$$

در این صورت از طرفین امید می‌گیریم و با توجه به خاصیت $f_* \in \mathbf{B}_{p, r}^s(M) \subseteq \mathbf{B}_{2, \infty}^s(M)$ به طوری که $p \geq 2$ داریم:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int \int \left(\hat{f}^L(x, y) - f_*(x, y) \right)^2 dx dy \right) &= \sum_{k \in \Lambda_{J_0}} \mathbb{E} \left((\hat{\alpha}_{J_0, k} - \alpha_{J_0, k})^2 \right) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_0}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j, k, \ell}^2 \\ &= \sum_{k \in \Lambda_{J_0}} \mathbb{V}(\hat{\alpha}_{J_0, k}) + \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_0}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j, k, \ell}^2 \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳.۲) به جای $\sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j, k, \ell}^2$ مقدار آن را قرار می‌دهیم و داریم:

$$\leq \sum_{k \in \Lambda_{J_0}} \mathbb{V}(\hat{\alpha}_{J_0, k}) + \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_0}^{\infty} 2^{-2js}$$

چون $\sum_{j=J_0}^{\infty} 2^{-2js}$ یک سری هندسی است لذا مقدار آن را محاسبه کرده و در عبارت فوق قرار می‌دهیم که نتیجه می‌دهد:

$$= \sum_{k \in \Lambda_{J_0}} \mathbb{V}(\hat{\alpha}_{J_0, k}) + \sum_{\ell=1}^3 \frac{2^{-2J_0 s}}{1 - 2^{-2s}} \leq C \left(2^{2J_0} \frac{2^{-J_0}}{n} + 2^{-2J_0 s} \right) \leq C n^{-2s/(2s+1)}$$

□

قضیه ۵.۳.۳. (کران بالا برای \hat{f}^H) رابطه‌ی (۱.۳) و \hat{f}^H که به صورت رابطه‌ی (۴.۳) تعریف شده را در نظر بگیرید. فرض کنید چگالی X از بالا کران دار بوده و $f_* \in \mathbf{B}_{p,r}^s(M, Q)$ و $\{p \geq 2, s > 0\}$ و $r \geq 1$ یا $\{p \in [1, 2), s > 2/p\}$ و $Q \geq m$ باشد. در این صورت عدد ثابت $C > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\mathbb{E} \left(\int \int (\hat{f}^H(x, y) - f_*(x, y))^2 dx dy \right) \leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{2s/(2s+1)}$$

برهان. از آنجایی که $f_* \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ می‌توان نوشت:

$$f_*(x, y) = \sum_{k \in \Lambda_\tau} \alpha_{\tau,k} \Phi_{\tau,k}(x, y) + \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=\tau}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell} \Psi_{j,k,\ell}(x, y)$$

که در آن $\alpha_{\tau,k}$ و $\beta_{j,k,\ell}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha_{\tau,k} = \int \int f_*(x, y) \Phi_{\tau,k}(x, y) dx dy$$

$$\beta_{j,k,\ell} = \int \int f_*(x, y) \Psi_{j,k,\ell}(x, y) dx dy$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \hat{f}^H(x, y) - f_*(x, y) &= \sum_{k \in \Lambda_\tau} (\hat{\alpha}_{\tau,k} - \alpha_{\tau,k}) \Phi_{\tau,k}(x, y) \\ &+ \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=\tau}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} \left(\hat{\beta}_{j,k,\ell} \mathbb{1}_{\{|\hat{\beta}_{j,k,\ell}| \geq k\theta_j\}} - \beta_{j,k,\ell} \right) \times \Psi_{j,k,\ell}(x, y) \\ &- \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_1+1}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell} \Psi_{j,k,\ell}(x, y) \end{aligned}$$

طبق پایه‌های متعامدیکه موجکی داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int \int (\hat{f}^H(x, y) - f_*(x, y))^2 dx dy \right) &= \sum_{k \in \Lambda_\tau} \mathbb{E} \left((\hat{\alpha}_{\tau,k} - \alpha_{\tau,k})^2 \right) \\ &+ \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=\tau}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} \mathbb{E} \left(\left(\hat{\beta}_{j,k,\ell} \mathbb{1}_{\{|\hat{\beta}_{j,k,\ell}| \geq k\theta_j\}} - \beta_{j,k,\ell} \right)^2 \right) \\ &+ \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_1+1}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell}^2 \end{aligned} \quad (9.3)$$

حال، در این قسمت، برای هر یک از این ۳ جمله یک کران بالا به دست می‌آوریم:
با استفاده از لم (۲.۳.۳) داریم:

$$\sum_{k \in \Lambda_\tau} \mathbb{E} \left((\hat{\alpha}_{\tau,k} - \alpha_{\tau,k})^2 \right) \leq C 2^{2\tau} \frac{2^{-\tau}}{n} \leq C \frac{1}{n} \leq C n^{-2s/(2s+1)} \quad (10.3)$$

برای به دست آوردن کران برای جمله سوم ۲ حالت در نظر می‌گیریم:
حالت اول

برای $r \geq 1$ و $p \geq 2$ داریم $\mathbf{B}_{p,r}^s(M) \subseteq \mathbf{B}_{2,\infty}^s(M)$ بنابراین:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_1+1}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell}^2 &\leq C \sum_{j=J_1+1}^{\infty} 2^{-2js} \\ &\leq C 2^{-2J_1 s} \\ &\leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{2s} \\ &\leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{2s/(2s+1)} \end{aligned}$$

حالت دوم

برای $r \geq 1$ و $p \in [1, 2)$ داریم $\mathbf{B}_{p,r}^s(M) \subseteq \mathbf{B}_{2,\infty}^{s+1-2/p}(M)$ و از آن جای که $s > 2/p$ داریم
بنابراین $s + 1 - 2/p > s/(2s+1)$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_1+1}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell}^2 &\leq C \sum_{j=J_1+1}^{\infty} 2^{-2j(s+1-2/p)} \\ &\leq C 2^{-2J_1(s+1-2/p)} \\ &\leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{2(s+1-2/p)} \\ &\leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{2s/(2s+1)} \end{aligned}$$

چون در هر دو حالت به کران واحدی برای $\sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_1+1}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell}^2$ رسیدیم در نتیجه برای $r \geq 1$ ، $\{p \geq 2 \text{ و } s > 0\}$ یا $\{p \in [1, 2) \text{ و } s > 2/p\}$ داریم:

$$\sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_1+1}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell}^2 \leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{2s/(2s+1)} \quad (11.3)$$

در نهایت، برای به دست آوردن کران بالا برای جمله دوم می‌نویسیم:

$$\sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=\tau}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} \mathbb{E} \left(\left(\hat{\beta}_{j,k,\ell} \mathbb{1}_{\{|\hat{\beta}_{j,k,\ell}| \geq k\theta_j\}} - \beta_{j,k,\ell} \right)^2 \right) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \quad (12.3)$$

که در آن

$$A_1 = \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=\tau}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} \mathbb{E} \left(\left(\hat{\beta}_{j,k,\ell} - \beta_{j,k,\ell} \right)^2 \mathbb{1}_{\{|\hat{\beta}_{j,k,\ell}| \geq k\theta_j\}} \mathbb{1}_{\{|\beta_{j,k,\ell}| < k\theta_j/2\}} \right),$$

$$A_2 = \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=\tau}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} \mathbb{E} \left(\left(\hat{\beta}_{j,k,\ell} - \beta_{j,k,\ell} \right)^2 \mathbb{1}_{\{|\hat{\beta}_{j,k,\ell}| \geq k\theta_j\}} \mathbb{1}_{\{|\beta_{j,k,\ell}| \geq k\theta_j/2\}} \right),$$

$$A_3 = \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=\tau}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} \mathbb{E} \left(\beta_{j,k,\ell}^2 \mathbb{1}_{\{|\hat{\beta}_{j,k,\ell}| < k\theta_j\}} \mathbb{1}_{\{|\beta_{j,k,\ell}| \geq 2k\theta_j\}} \right),$$

و

$$A_4 = \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=\tau}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} \mathbb{E} \left(\beta_{j,k,\ell}^2 \mathbb{1}_{\{|\hat{\beta}_{j,k,\ell}| < k\theta_j\}} \mathbb{1}_{\{|\beta_{j,k,\ell}| < 2k\theta_j\}} \right),$$

برای به دست آوردن کران برای A_1 و A_3 از نامساوی‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \left\{ |\hat{\beta}_{j,k,\ell}| < k\theta_j, |\beta_{j,k,\ell}| \geq 2k\theta_j \right\} &\subseteq \left\{ |\hat{\beta}_{j,k,\ell} - \beta_{j,k,\ell}| > k\theta_j/2 \right\}, \\ \left\{ |\hat{\beta}_{j,k,\ell}| \geq k\theta_j, |\beta_{j,k,\ell}| < k\theta_j/2 \right\} &\subseteq \left\{ |\hat{\beta}_{j,k,\ell} - \beta_{j,k,\ell}| > k\theta_j/2 \right\}, \\ \left\{ |\hat{\beta}_{j,k,\ell}| < k\theta_j, |\beta_{j,k,\ell}| \geq 2k\theta_j \right\} &\subseteq \left\{ |\beta_{j,k,\ell}| \leq 2|\hat{\beta}_{j,k,\ell} - \beta_{j,k,\ell}| \right\}, \end{aligned}$$

بنابراین

$$\max(A_1, A_3) \leq C \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=\tau}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} \mathbb{E} \left(\left(\hat{\beta}_{j,k,\ell} - \beta_{j,k,\ell} \right)^2 \mathbb{1}_{\{|\hat{\beta}_{j,k,\ell} - \beta_{j,k,\ell}| > k\theta_j/2\}} \right)$$

با استفاده از نامساوی کوشی - شوارتز و لم‌های (۲.۳.۳) و (۳.۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(\hat{\beta}_{j,k,\ell} - \beta_{j,k,\ell} \right)^2 \mathbb{1}_{\{|\hat{\beta}_{j,k,\ell} - \beta_{j,k,\ell}| > k\theta_j/2\}} \right) &\leq \left(\mathbb{E} \left(\left(\hat{\beta}_{j,k,\ell} - \beta_{j,k,\ell} \right)^4 \right) \right)^{1/2} \\ &\quad \left(\mathbb{P} \left(|\hat{\beta}_{j,k,\ell} - \beta_{j,k,\ell}| > k\theta_j/2 \right) \right)^{1/2} \\ &\leq C 2^{-j} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

بنابراین برای $2^{J_1} \leq n$ داریم:

$$\max(A_1, A_3) \leq C \frac{1}{n^2} \sum_{j=\tau}^{J_1} 2^{2j} 2^{-j} \leq C \frac{1}{n^2} 2^{J_1} \leq C \frac{1}{n} \leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{2s/(2s+1)} \quad (13.3)$$

حال، با استفاده از لم (۲.۳.۳) کرانی برای A_2 به دست می‌آوریم. با استفاده از قضیه‌ی ینسن، $\mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}^2(X)$

با اعمال تغییر متغیر $X = (\hat{\beta} - \beta)^2$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\mathbb{E} \left((\hat{\beta} - \beta)^4 \right) \geq \mathbb{E}^2 \left((\hat{\beta} - \beta)^2 \right) \Rightarrow \mathbb{E}^2 \left((\hat{\beta} - \beta)^2 \right) \leq \mathbb{E} \left((\hat{\beta} - \beta)^4 \right) \leq C \frac{1}{n^2} 2^{-2j}$$

با استفاده از نامساوی ینسن داریم:

$$\mathbb{E}(\hat{\beta} - \beta)^2 \leq C \frac{1}{n} \tau^{-j}$$

از آن جایی که

$$A_{\tau} \leq C \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{j=\tau}^{J_1} \tau^{-j} \sum_{k \in \Lambda_j} \mathbb{1}_{\{|\beta_{j,k,\ell}| > k\theta_j/\tau\}}$$

فرض کنید J_{τ} عدد صحیحی باشد که در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{1}{\tau} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/(\tau s+1)} < \tau^{J_{\tau}} \leq \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/(\tau s+1)} \quad (14.3)$$

کران A_{τ} را به دو بخش $A_{\tau,1}$ و $A_{\tau,2}$ افراز می‌کنیم:

$$A_{\tau} \leq A_{\tau,1} + A_{\tau,2}$$

که در آن

$$A_{\tau,1} = C \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{j=\tau}^{J_{\tau}} \tau^{-j} \sum_{k \in \Lambda_j} \mathbb{1}_{\{|\beta_{j,k,\ell}| > k\theta_j/\tau\}}$$

و

$$A_{\tau,2} = C \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{\tau} \sum_{j=J_{\tau}+1}^{J_1} \tau^{-j} \sum_{k \in \Lambda_j} \mathbb{1}_{\{|\beta_{j,k,\ell}| > k\theta_j/\tau\}}$$

کران بالای $A_{\tau,1}$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$A_{\tau,1} \leq C \frac{1}{n} \sum_{j=\tau}^{J_{\tau}} \tau^{-j} \tau^{2j} \leq C \frac{1}{n} \tau^{J_{\tau}} \leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\tau s/(\tau s+1)}$$

حال برای پیدا کردن کران برای $A_{\tau,2}$ دو حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: برای $r \geq 1$ و $p \geq 2$ از آنجایی که $f_* \in \mathbf{B}_{p,r}^s(M) \subseteq \mathbf{B}_{2,\infty}^s(M)$

$$\begin{aligned} A_{2,2} &\leq C \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_{\tau+1}}^{J_1} 2^{-j} \sum_{k \in \Lambda_j} \left\{ \frac{|\beta_{j,k,\ell}|}{k\theta_j/2} > 1 \right\} \\ &= C \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_{\tau+1}}^{J_1} 2^{-j} \sum_{k \in \Lambda_j} \left\{ \frac{\beta_{j,k,\ell}^2}{k^2\theta_j^2/4} > 1 \right\} \\ &= C \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_{\tau+1}}^{J_1} 2^{-j} \frac{1}{\theta_j^2} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell}^2 \\ &\leq C \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_{\tau+1}}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell}^2 \\ &\leq C \sum_{j=J_{\tau+1}}^{\infty} 2^{-2js} \\ &\leq C 2^{-2J_{\tau}s} \\ &\leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{2s/(2s+1)} \end{aligned}$$

حالت دوم: برای $p \in [1, 2)$ و $r \geq 1$ و $s > 2/p$ از آنجایی که $f_* \in \mathbf{B}_{p,r}^s(M)$ داریم $(2s+1)(2-p)/2 + (s+1/2 - 1/p)p = 2s$

$$\begin{aligned} A_{2,2} &\leq C \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_{\tau+1}}^{J_1} 2^{-j} \frac{1}{\theta_j^p} \sum_{k \in \Lambda_j} |\beta_{j,k,\ell}|^p \\ &\leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{(2-p)/2} \sum_{j=J_{\tau+1}}^{\infty} 2^{-j(1-p/2)} 2^{-j(s+1-2/p)p} \\ &\leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{(2-p)/2} 2^{-J_{\tau}(s+1-2/p)p} \\ &\leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{2s/(2s+1)} \end{aligned}$$

چون در هر دو حالت به کران واحدی برای $A_{2,1}$ و $A_{2,2}$ رسیدیم در نتیجه برای $\{p \geq 2 \text{ و } s > 0\}$ ، $r \geq 1$ یا $\{p \in [1, 2) \text{ و } s > 2/p\}$ داریم:

$$A_2 \leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{2s/(2s+1)} \quad (15.3)$$

سپس کران بالای A_4 به صورت زیر داریم:

$$A_4 \leq \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=\tau}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell}^2 \mathbf{1}_{\{|\beta_{j,k,\ell}| < 2k\theta_j\}}$$

فرض کنید J_2 عدد صحیحی باشد که در رابطه‌ی (۱۴.۳) صدق می‌کند. A_4 را به دو جمله‌ی $A_{4,1}$ و $A_{4,2}$ افراز می‌کنیم:

$$A_4 \leq A_{4,1} + A_{4,2}$$

که در آن:

$$A_{4,1} = \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=\tau}^{J_2} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell}^2 \mathbb{1}_{\{|\beta_{j,k,\ell}| < 2k\theta_j\}}$$

$$A_{4,2} = \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_2+1}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell}^2 \mathbb{1}_{\{|\beta_{j,k,\ell}| < 2k\theta_j\}}$$

ابتدا برای $A_{4,1}$ کران به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} A_{4,1} &\leq C \sum_{j=\tau}^{J_2} 2^{2j} \theta_j^2 = C \frac{\ln n}{n} \sum_{j=\tau}^{J_2} 2^{2j} 2^{-j} \\ &\leq C \frac{\ln n}{n} 2^{J_2} \\ &\leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{2s/(2s+1)} \end{aligned}$$

برای به دست آوردن کران برای $A_{4,2}$ دو حالت در نظر می‌گیریم:
حالت اول:

برای $r \geq 1$ و $p \geq 2$ از آنجایی که $f_* \in \mathbf{B}_{p,r}^s(M) \subseteq \mathbf{B}_{2,\infty}^s(M)$ لذا داریم:

$$\begin{aligned} A_{4,2} &\leq \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=J_2+1}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell}^2 \leq C \sum_{j=J_2+1}^{\infty} 2^{-2js} \\ &\leq C 2^{-2J_2 s} \\ &\leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{2s/(2s+1)} \end{aligned}$$

حالت دوم:

برای $p \in [1, 2)$ و $r \geq 1$ و $s > 2/p$ از آنجایی که $f_* \in \mathbf{B}_{p,r}^s(M)$ و $(2s+1)(2-p)/2 + (s+1/2 - 1/p)p = 2s$ داریم:

$$\begin{aligned}
 A_{\varphi, \varpsilon} &= \sum_{\ell=1}^{\varrho} \sum_{j=J_{\varphi}+1}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} \beta_{j,k,\ell}^{\varphi} \mathbb{1}_{\{|\beta_{j,k,\ell}| < \varrho k \theta_j\}} \\
 &= \sum_{\ell=1}^{\varrho} \sum_{j=J_{\varphi}+1}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} |\beta_{j,k,\ell}|^p |\beta_{j,k,\ell}|^{\varphi-p} \mathbb{1}_{\{|\beta_{j,k,\ell}| < \varrho k \theta_j\}} \\
 &\leq \sum_{\ell=1}^{\varrho} \sum_{j=J_{\varphi}+1}^{J_1} \sum_{k \in \Lambda_j} |\beta_{j,k,\ell}|^p (\varrho k \theta_j)^{\varphi-p} \\
 &= C \sum_{\ell=1}^{\varrho} \sum_{j=J_{\varphi}+1}^{J_1} \theta_j^{\varphi-p} \sum_{k \in \Lambda_j} |\beta_{j,k,\ell}|^p \\
 &= C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{(\varphi-p)/\varphi} \sum_{\ell=1}^{\varrho} \sum_{j=J_{\varphi}+1}^{J_1} \varrho^{-j(1-p/\varphi)} \sum_{k \in \Lambda_j} |\beta_{j,k,\ell}|^p \\
 &\leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{(\varphi-p)/\varphi} \sum_{j=J_{\varphi}+1}^{\infty} \varrho^{-j(1-p/\varphi)} \varrho^{-j(s+1-\varphi/p)p} \\
 &\leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{(\varphi-p)/\varphi} \varrho^{-J_{\varphi}(s+1/\varphi-1/p)p} \\
 &\leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\varphi s/(\varphi s+1)}
 \end{aligned}$$

چون در هر دو حالت به کرانی واحد برای $A_{\varphi,1}$ و $A_{\varphi,2}$ رسیدیم در نتیجه برای $\{p \geq 2 \text{ و } s > 0\}$ ، $r \geq 1$ یا $\{p \in [1, 2) \text{ و } s > 2/p\}$ داریم:

$$A_{\varphi} \leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\varphi s/(\varphi s+1)} \quad (16.3)$$

با جایگذاری رابطه‌های (13.3)، (15.3) و (16.3) در رابطه‌ی (12.3) داریم:

$$\sum_{\ell=1}^{\varrho} \sum_{j=J_{\varphi}+1}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \mathbb{E} \left(\left(\hat{\beta}_{j,k,\ell} \mathbb{1}_{\{|\hat{\beta}_{j,k,\ell}| \geq k \theta_j\}} - \beta_{j,k,\ell} \right)^2 \right) \leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\varphi s/(\varphi s+1)} \quad (17.3)$$

با جایگذاری رابطه‌های (10.3)، (11.3) و (17.3) در رابطه‌ی (9.3) برای $\{p \geq 2 \text{ و } s > 0\}$ ، $r \geq 1$ یا $\{p \in [1, 2) \text{ و } s > 2/p\}$ داریم:

$$\mathbb{E} \left(\int \int \left(\hat{f}^H(x, y) - f_*(x, y) \right)^2 dx dy \right) \leq C \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\varphi s/(\varphi s+1)}$$

□

فصل ۴

شبیه‌سازی

۱.۴ مقدمه

در این فصل ابتدا موضوع برآورد ناپارامتری تابع چگالی دوبعدی پیوسته - گسسته به روش هسته را بیان می‌کنیم و در ادامه به بیان خصوصیات برآوردگر به دست آمده برای حجم‌های بزرگ در قالب ۲ قضیه می‌پردازیم. در پایان با استفاده از یک مثال شبیه‌سازی شده توسط معیار $MISE$ دقت روش‌های موجک و هسته را در برآورد ناپارامتری تابع چگالی دوبعدی پیوسته - گسسته را محاسبه و مقایسه می‌کنیم. مطالب این فصل برگرفته از احمد و سریتو (۱۹۹۲) و چسنوا و همکاران (۲۰۱۴) می‌باشد.

۲.۴ هسته دوبعدی

فرض کنیم (X, Y) یک نمونه تصادفی از متغیرهای X (گسسته) و Y (پیوسته) باشند همچنین فرض کنید مقادیر X از مجموعه $J = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ انتخاب می‌شود. برای تابع توزیع

$$F(i, y) = P(X = i, Y \leq y)$$

تابع چگالی توأم X, Y به صورت زیر می‌باشد.

$$f(i, y) = \frac{\partial}{\partial y} F(i, y)$$

در این قسمت هدف ما برآورد تابع چگالی توأم بر اساس نمونه تصادفی $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ می‌باشد. بدین منظور فرض می‌کنیم:

$$\hat{p}_i = \frac{n_i}{n}$$

که در آن n_i تعداد مولفه‌های مجموعه $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ متناظر با $X_j = i$ می‌باشد و $\hat{f}_i(y)$ برآورد شرطی چگالی

$$f(y|x = i) = f_i(y)$$

می‌باشد. بنابراین ما برای به دست آوردن برآورد $f_i(y)$ از روش هسته‌ی شناخته شده استفاده می‌کنیم و تعریف می‌کنیم:

$$\hat{f}_i(y) = (n_i a_n)^{-1} \sum_{l \in C_n(i)} k\left(\frac{y - Y_l}{a_n}\right)$$

که در آن $C_n(i)$ مجموعه‌ای از Y هاست به طوری که X های متناظرش از مقوله i هستند و a_n ها یک دنباله از اعداد مثبت است به طوری که $a_n \searrow 0$ در جایی که $n \nearrow \infty$ و $k(\cdot)$ یک تابع اندازه‌پذیر بول شناخته شده است که معمولاً از یک تابع چگالی احتمال گرفته می‌شود به طوری که

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} |u|k(u) = 0, \quad k(u) = k(-u)$$

بنابراین ما برآورد زیر را به دست آوردیم:

$$\hat{f}(i, y) = (n a_n)^{-1} \sum_{l \in C_n(i)} k\left(\frac{y - Y_l}{a_n}\right)$$

چون n_i یک متغیر تصادفی است از این به بعد آن را با نماد $Z_n(i)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین ما برآورد زیر را برای $f(i, y)$ پیشنهاد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(i, y) &= (n a_n)^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} W(\hat{s}_n, i, j) \sum_{l \in C_n(j)} k\left(\frac{y - Y_l}{a_n}\right) \\ &= n^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} W(\hat{s}_n, i, j) Z_n(j) \hat{f}_j(y) \end{aligned}$$

چون انتخاب بهینه s_n وابسته به فراوانی احتمال نامعلوم X است لذا ما در رابطه فوق برآورد s_n را قرار دادیم.

۳.۴ برآورد ناپارامتری تابع چگالی دوبعدی به روش هسته

تعریف ۱.۳.۴. $W(s, i, j)$ یک تابع وزن گسسته بر روی $S \times J \times J$ که S تمام فاصله‌ها بر روی اعداد حقیقی و $J = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ می‌باشد هرگاه به ازای هر $i, j \in J$ و $s \in S$ داشته باشیم:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} W(s, i, j) = 1, \quad W(s, i, j) \geq 0$$

همچنین $W(0, i, j) = I(i, j) = 1$ است هرگاه $i = j$ و در سایر نقاط $W(0, i, j) = 0$ می‌باشد.

تابع $W(s, i, j)$ به ازای هر $i, j \in J$ در نقطه صفر پیوسته است. تابع وزن یکنواخت یک مثال از این نوع تابع می‌باشد که به صورت زیر است:

$$W(s, i, j) = \begin{cases} \frac{s}{2k} & |i - j| = 1, \dots, k \quad k \geq 1 \\ 1 - s & i = j \\ 0 & |i - j| \geq k + 1 \quad s = [0, 1] \end{cases}$$

که در آن k یک عدد صحیح و ثابت می‌باشد.

قضیه ۲.۳.۴. اگر چنانچه $n \rightarrow \infty$ آن‌گاه $\hat{s}_n \xrightarrow{P} 0$ سپس $\hat{f}_n(i, y) \xrightarrow{P} 0$ در نتیجه اگر $n \rightarrow \infty$ آن‌گاه $na_n \rightarrow \infty$ می‌باشد.

□

برهان. به احمد و سریتو (۱۹۹۴) رجوع کنید.

قضیه ۳.۳.۴. اگر علاوه بر شرایط قضیه قبل شرط $\sup_{i,y} f_i(y) < \infty$ و پیوسته یکنواخت بودن $f_i(y)$ را اضافه کنیم آن‌گاه $\hat{f}_n(i, y)$ یک برآوردگر یکنواخت برای $f(i, y)$ می‌باشد.

برهان. می‌دانیم که

$$f_i(y) = f(y|x=i) = \frac{f(y, x=i)}{p(x=i)} = \frac{f(i, y)}{p_i}$$

و

$$\hat{f}_n(i, y) = \frac{1}{n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} W(\hat{s}_n, i, j) Z_n(j) \hat{f}_j(y)$$

همچنین با توجه به تعریف تابع وزن داریم:

$$W(0, i, j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 \left| \hat{f}_n(i, y) - f(i, y) \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_j W(\hat{s}_n, i, j) Z_n(j) \hat{f}_j(y) - p_i f_i(y) \right| \\
 &= \left| \sum_j [W(\hat{s}_n, i, j) - W(\circ, i, j) + W(\circ, i, j)] \frac{Z_n(j)}{n} \hat{f}_j(y) - p_i f_i(y) \right| \\
 &= \left| \sum_j [W(\hat{s}_n, i, j) - W(\circ, i, j)] \frac{Z_n(j)}{n} \hat{f}_j(y) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_j W(\circ, i, j) \frac{Z_n(j)}{n} \hat{f}_j(y) - p_i f_i(y) \right| \\
 &= \left| \sum_j [W(\hat{s}_n, i, j) - W(\circ, i, j)] \frac{Z_n(j)}{n} \hat{f}_j(y) + \frac{Z_n(j)}{n} \hat{f}_j(y) - p_i f_i(y) \right| \\
 &= \left| \sum_j [W(\hat{s}_n, i, j) - W(\circ, i, j)] \frac{Z_n(j)}{n} \hat{f}_j(y) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Z_n(j)}{n} (\hat{f}_j(y) - f_i(y)) + \frac{Z_n(i)}{n} f_i(y) - p_i f_i(y) \right| \\
 &= \left| \sum_j [W(\hat{s}_n, i, j) - W(\circ, i, j)] \frac{Z_n(j)}{n} \hat{f}_j(y) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Z_n(j)}{n} (\hat{f}_j(y) - f_i(y)) + f_i(y) \left[\frac{Z_n(i)}{n} - p_i \right] \right|
 \end{aligned}$$

با استفاده از خواص قدرمطلق و سوپریمم گرفتن از طرفین داریم:

$$\begin{aligned}
 &\sup_{i,y} \left| \hat{f}_n(i, y) - f(i, y) \right| \\
 &\leq \sup_{i,y} \left| \sum_j [W(\hat{s}_n, i, j) - W(\circ, i, j)] \frac{Z_n(j)}{n} \hat{f}_j(y) \right| + \frac{Z_n(j)}{n} \sup_{i,y} \left| \hat{f}_j(y) - f_i(y) \right| \\
 &\quad + \sup_{i,y} |f_i(y)| \left| \frac{Z_n(i)}{n} - p_i \right| \\
 &\leq \sum_j |W(\hat{s}_n, i, j) - W(\circ, i, j)| \frac{Z_n(j)}{n} \left\{ \sup_{i,y} \left| \hat{f}_j(y) \right| \right\} + \frac{Z_n(j)}{n} \sup_{i,y} \left| \hat{f}_j(y) - f_i(y) \right| \\
 &\quad + \sup_{i,y} |f_i(y)| \left| \frac{Z_n(i)}{n} - p_i \right| = I_1 + I_2 + I_3.
 \end{aligned}$$

از آن جایی که $\sup_{i,y} |f_i(y)| < \infty$ ، بنابراین زمانی که $n \rightarrow \infty$ ، در احتمال به سمت صفر میل می‌کند. هم‌چنین پارزن (۱۹۶۲) ثابت کرد با معلوم بودن $Z_n(i)$ ، $\sup_{i,y} |\hat{f}_i(y) - f_i(y)|$ در احتمال به صفر میل می‌کند و از آن جایی که $Z_n(i)/n$ در احتمال به p_i میل می‌کند بنابراین زمانی که $n \rightarrow \infty$ ، I_2 در احتمال به صفر میل می‌کند.

برای I_1 داریم

$$I_1 \leq \sup_j |W(\hat{s}_n, i, j) - W(\circ, i, j)| \left\{ \sup_{i,y} |\hat{f}_j(y)| \right\} \sum_j \frac{Z_n(j)}{n}$$

برای تمام j ها، $\frac{Z_n(j)}{n}$ در احتمال به p_j میل می‌کند و از آن جایی که سری $\sum_j \frac{Z_n(j)}{n}$ نامنفی است پس زمانی که $n \rightarrow \infty$ ، $\sum_j \frac{Z_n(j)}{n}$ در احتمال به ۱ میل می‌کند. همچنین $\sup_{j,y} |\hat{f}_j(y)|$ در احتمال کران دار و طبق تعریف (۱.۳.۴) زمانی که $n \rightarrow \infty$ ، $\sup_j |W(\hat{s}_n, i, j) - W(\circ, i, j)|$ در احتمال به صفر میل می‌کند. در نتیجه زمانی که $n \rightarrow \infty$ ، I_1 در احتمال به صفر میل می‌کند. \square

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنید به ازای $j \in \mathbb{R}$ ، $f_j(y)$ بر حسب y دو بار مشتق‌پذیر باشد. در این صورت برای n های بزرگ

$$\begin{aligned} MSE(\hat{f}(i, y)) &\simeq (na_n)^{-1} \int k^2(u) du \sum_j W^2(s_n, i, j) f(i, y) \\ &+ \left[\frac{a_n^2}{2} \int u^2 k(u) du \sum_j W(s_n, i, j) p_j f_j''(y) \right]^2 = \frac{C_1}{na_n} + \frac{C_2 a_n^4}{4} \end{aligned}$$

\square برهان. به سریتو و احمد (۱۹۹۴) رجوع کنید.

احمد و سریتو (۱۹۹۴) مقدار بهینه a_n را به صورت زیر ارائه کردند:

$$a_n = \left(\frac{C_1}{nC_2} \right)^{1/5} \quad (۱.۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[\sum_j W^2(s_n, i, j) f(i, y) \right] \int k^2(u) du \\ C_2 &= \left\{ \int u^2 k(u) du \sum_j W(s_n, i, j) p_j f_j''(y) \right\}^2 \end{aligned}$$

در این صورت مقدار کمینه MSE ^۱ به صورت زیر خواهد بود:

$$MSE = \frac{5}{4} [C_2 C_1^4 / n^4]^{1/5} \quad (۲.۴)$$

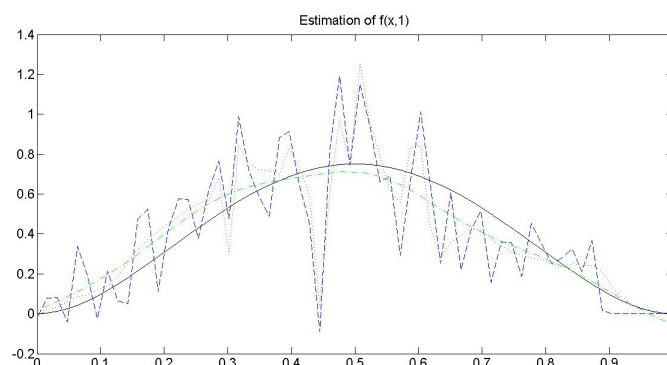
^۱Mean square Error

۴.۴ مثال شبیه‌سازی

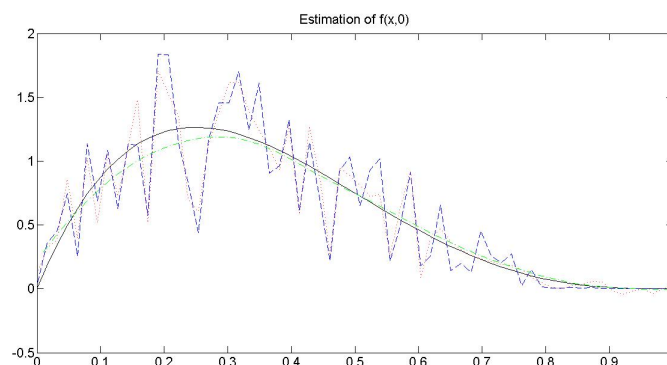
در این قسمت میزان دقت برآوردگرهای (۳.۳) و (۴.۳) در فصل ۳، نسخه هموار برآوردگر خطی (۳.۳) که در رامیرز و ویداکوویک (۲۰۱۰) آمده و برآوردگر هسته را محاسبه و باهم مقایسه می‌کنیم. در یک مطالعه شبیه‌سازی نمونه‌های ۲۰، ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ۵۰۰ و ۱۰۰۰ تایی تولید می‌کنیم که در آن نمونه‌ی X_1, \dots, X_n از توزیع پیوسته بتا با پارامترهای (۲، ۳) و نمونه‌ی Y_1, \dots, Y_n از توزیع گسسته دوجمله‌ای با پارامترهای $(1, x_i)$ می‌باشند. بنابراین تابع چگالی توأم (x, y) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(y|x)f(x) \quad x \in [0, 1], \quad y \in \{0, 1\} \\ &= x^y(1-x)^{1-y} \frac{1}{B(2, 3)} x(1-x)^2 \\ &= 12x^{1+y}(1-x)^{3-y} \end{aligned}$$

در این مطالعه ما از موجک دوبشی ۳ که در دوبشی (۱۹۹۱) می‌باشد و از $j_0 = 6$ استفاده می‌کنیم. پس از اجرای کد ۱ در نرم‌افزار MATLAB خروجی برنامه شکل (۱.۴) و (۲.۴) می‌باشد.



شکل ۱.۴: نمودار برآوردهای تابع $f(x, 1)$



شکل ۲.۴: نمودار برآوردهای تابع $f(x, 0)$

در شکل (۱.۴) و (۲.۴) منحنی سیاه رنگ مربوط به تابع چگالی توأم، منحنی سبز رنگ (نقطه - خط) متعلق به برآوردگر نسخه هموار، منحنی آبی رنگ (خط) متعلق به برآوردگر خطی موجک و منحنی قرمز رنگ (نقطه) متعلق به برآوردگر آستانه سخت موجک می‌باشد.

نمودار برآوردگرهای خطی موجک، آستانه سخت و نسخه هموار برآوردگر خطی به صورت مجزا در پیوست وجود دارند. در شکل‌های فوق مشخص است که برآوردگر نسخه هموار با دقت بهتری نسبت به دو برآوردگر دیگر تابع چگالی را برآورد کرده است. همچنین با استفاده از معیار $MISE$ که فرمول آن در (۲.۴) می‌باشد میزان دقت برآوردگرها را محاسبه و در جدول زیر گردآوری کردیم.

جدول ۱.۴: مقادیر خطای برآوردگرها

حجم نمونه						تابع چگالی	برآوردگر
$n = 1000$	$n = 500$	$n = 200$	$n = 100$	$n = 50$	$n = 20$		
۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۷۰	۰/۰۱۴۲	۰/۰۲۹۳	$f(x, 0)$	هسته
۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۳۶	۰/۰۰۵۵	۰/۰۱۳۷	$f(x, 1)$	هسته
۰/۰۰۰۳۸	۰/۰۰۰۷۴	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۷۳	۰/۰۱۸۳	$f(x, 0)$	خطی
۰/۰۰۰۲۶	۰/۰۰۰۵۱	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۵۲	۰/۰۱۳۰	$f(x, 1)$	خطی
۰/۰۰۰۲۹	۰/۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۱۶	۰/۰۰۰۳۰	۰/۰۰۰۶۵	۰/۰۱۷۴	$f(x, 0)$	آستانه سخت
۰/۰۰۰۱۷	۰/۰۰۰۰۳۶	۰/۰۰۰۰۹۲	۰/۰۰۰۲۰	۰/۰۰۰۴۵	۰/۰۱۲۲	$f(x, 1)$	آستانه سخت
۰/۰۰۰۰۹	۰/۰۰۰۰۱۲	۰/۰۰۰۰۱۸	۰/۰۰۰۰۲۶	۰/۰۰۰۰۴۵	۰/۰۰۰۰۹۹	$f(x, 0)$	نسخه هموار
۰/۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۰۰۷	۰/۰۰۰۰۱۵	۰/۰۰۰۰۲۸	۰/۰۰۰۰۰۷	$f(x, 1)$	نسخه هموار

۵.۴ نتیجه‌گیری

همان‌طور که در جدول ۱.۴ ملاحظه می‌شود میزان دقت برآوردگر هسته نسبت به برآوردگرهای موجک (خطی موجک، آستانه سخت و نسخه هموار) ضعیف‌تر می‌باشد. طبق جدول ۱.۴ هر چه حجم نمونه زیاد می‌شود مقادیر خطای برآوردگرها کاهش می‌یابد. همچنین در بین برآوردگرهای موجک نیز نسخه هموار برآوردگر خطی دارای دقت بیشتری یا به عبارتی خطای کمتری می‌باشد.

۶.۴ پیشنهادات

در این پایان‌نامه در فصل دوم برآورد ناپارامتری تابع چگالی را به دو روش موجک و هسته بیان کردیم و در فصل سوم موضوع برآورد ناپارامتری تابع چگالی را در حالت دو بعدی پیوسته - گسسته به روش موجک بیان کردیم. ما می‌توانیم این موضوع را در حالت وابسته و همچنین در ابعاد بالاتر مورد بررسی قرار دهیم و علاوه بر این می‌توانیم از توابع موجک سیمپلت و دیگر موجک‌های مادر استفاده کنیم.

پیوست آ

MATLAB کدهای برنامه در نرم افزار

آ. ۱ کد شماره ۱

```
% Example "Nonparametric estimation
% of two dimensional discrete-continuous density function by wavelets;
%with an application to competing risks"
% by Christophe Chesneau, Isha Dewan and Hassan Doosti.
% In this example we consider a two dimensional discrete-continuous density;
%f(t, delta)=12t^(1+delta)(1-t)^(3-delta)
% underlying distribution and we estimate subdensities for delta=0, 1.
%
% The program calls to:
% 1) Phijk.m — Daubechies-Lagarias Algorithm.
% 2) dwtr.m and idwtr.m — forward and inverse wavelet transform.
% 3) loc_lin.m and kernel.m — local linear smoother with a
% Gaussian kernel.
% 4) fijk.m — integrate of scale function on [delta-0.5,delta+0.5]

close all;
clear all;
lw=2;
set(0, 'DefaultAxesFontSize', 16);
fs=14;
msize=5;
n=50;%sample size
```

```

N=100;% number of replications
rep1=zeros(1,N);
rep2=zeros(1,N);
% Choose an orthonormal QMF Filter for the D-L algorithm
% for example 'Daubechies' 3:
%To try another filter: wf = MakeONFilterExt(Type, Par)
filter = [-0.07576571478934, -0.02963552764595, 0.49761866763246,
  0.80373875180522,... , 0.29785779560554, -0.09921954357694,
  -0.01260396726226, 0.03222310060407];
filter=[ 0.2303778133088965, 0.7148465705529158, ...
  0.630880767929859, -0.02798376941686011, ...
  -0.1870348117190932, 0.0308413818355608, ...
  0.03288301166688522, -0.01059740178506904 ];
wf = [0.0386 -0.1270 -0.0772 0.6075 0.7457 0.2266]; % For example, filter
% Coiflet(1).

for rep=1:N
%simulation from  $T_i \sim \text{Gamma}(2,3)$ ,  $\delta_i \sim B(1, t_i | (t_i + 1))$ ,  $i = 1, \dots, n$ 

t=betarnd(2,3,n,1);
delta=binornd(1,t,n,1);
%fxy=betapdf(x,2,3).*binopdf(y,1,x);

%-----
% Apply Daubechies Lagarias to obtain the linear wavelet
estimate (equation 4)

j0=6; % default coarsest level
%calculation of  $\hat{\alpha}_{j_0, k_1, k_2}$ 
ahat=zeros(2^j0,2^j0);
for k1=0:2^j0-1
for k2=0:2^j0-1
%ahat(k1,k2)=0;
for i=1:n
ahat(k1+1,k2+1)=ahat(k1+1,k2+1)+Phijk(t(i),j0,k1,filter,25)*fijk(delta(i),
j0,k2,filter,25);

```

```

end
ahat(k1+1,k2+1)=ahat(k1+1,k2+1)/n;
end
end
linear_est1=zeros(2^j0,1);
linear_est2=zeros(2^j0,1);

linear_est=2^j0*ahat;
for k=1:2^j0/2
linear_est1=linear_est1+linear_est(:,k);
linear_est2=linear_est2+linear_est(:,k+2^j0/2);
end
linear_est1=2^(1-j0)*linear_est1';
linear_est2=2^(1-j0)*linear_est2';

% How does the linear estimator look like?
a = linspace(0,1, length(linear_est));

csw1 = dwtr(linear_est1, 3, wf); % Forward wavelet transformation
csw2 = dwtr(linear_est2, 3, wf); % Forward wavelet transformation
nn = length(csw1);
nn2 = nn/2;
finest1 = csw1(nn2+1:nn); %finest details
sigma1 = 1.4826*median(abs(finest1 - median(finest1)));
lambda1 = sqrt(log(nn)/n) * sigma1;
finest2 = csw2(nn2+1:nn); %finest details
sigma2 = 1.4826*median(abs(finest2 - median(finest2)));
lambda2 = sqrt(log(nn)/n) * sigma2;

cswt1 = csw1 .* (abs(csw1) > lambda1); %hard threshold
smooth_th1 = idwtr(cswt1, 3, wf); % Inverse wavelet transformation
cswt2 = csw2 .* (abs(csw2) > lambda2); %hard threshold
smooth_th2 = idwtr(cswt2, 3, wf); % Inverse wavelet transformation

```

```

%
% How does it look like after local linear smoothing?
h = 0.080; % bandwidth
smooth_1l = [];
smooth_2l = [];

for j=1:100
smooth_1l = [smooth_1l loc_lin(j/100, a, linear_est1, h)];
smooth_2l = [smooth_2l loc_lin(j/100, a, linear_est2, h)];

end
a1=linspace(0,1,100);
f1=12*a1.*((1-a1).^3);
f2=12*(a1.^2).*((1-a1).^2);
rep1(rep)=norm(f1-smooth_1l);
rep2(rep)=norm(f2-smooth_2l);
rep
end
ise1=(rep1.^2)*(a1(100)-a1(1))*(a1(2)-a1(1));
ise2=(rep2.^2)*(a1(100)-a1(1))*(a1(2)-a1(1));
mean(ise1)
mean(ise2)
save('d:\Chesneau-Dewan-Doosti\competn50.mat');
%Estmation of subdensity, f(t,0) and f(t,1)
figure(1);
plot(a, linspace(1,1,length(a)), 'k-');% underlying unobserved density f^X
hold on
plot(a, 12*a.*((1-a).^3), 'k-.' ) % observed f^Y
hold on
plot(a, linear_est1, 'k: ')
title('Linear wavelet f(t,0),n=1000')

figure(11);
plot(a, linspace(1,1,length(a)), 'k-');% underlying unobserved density f^X
hold on
plot(a, 12*(a.^2).*((1-a).^2), 'k-.' ) % observed f^Y
hold on
plot(a, linear_est2, 'k: ')
title('Linear wavelet f(t,1),n=1000')

```


% How does the linear estimators of subdensities look like after hard thresholding?

figure (2);

plot(a, linspace(1,1,length(a)), 'k-');% underlying unobserved density f^X

hold on

*plot(a, 12*a.*((1-a).^3), 'k-.') % observed f^Y*

hold on

plot(a, smooth_th1, 'k--')

title('Linear wavelet estimator after thresholding- $f(t,0),n=1000$ ')

figure (22);

plot(a, linspace(1,1,length(a)), 'k-');% underlying unobserved density f^X

hold on

plot(a, 12(a.^2).*((1-a).^2), 'k-.') % observed f^Y*

hold on

plot(a, smooth_th2, 'k--')

title('Linear wavelet estimator after thresholding- $f(t,1),n=1000$ ')

figure (3)

plot(a, linspace(1,1,length(a)), 'k-');% underlying unobserved density f^X

hold on

*plot(a, 12*a.*((1-a).^3), 'k-.') % observed f^Y*

hold on

plot((1:100)/100, smooth_11, 'k--')

title('Smoothed linear wavelet estimator- $f(t,0)-n=1000$ ')

figure (33)

plot(a, linspace(1,1,length(a)), 'k-');% underlying unobserved density f^X

hold on

plot(a, 12(a.^2).*((1-a).^2), 'k-.') % observed f^Y*

hold on

plot((1:100)/100, smooth_22, 'k--')

title('Smoothed linear wavelet estimator- $f(t,1)-n=1000$ ')

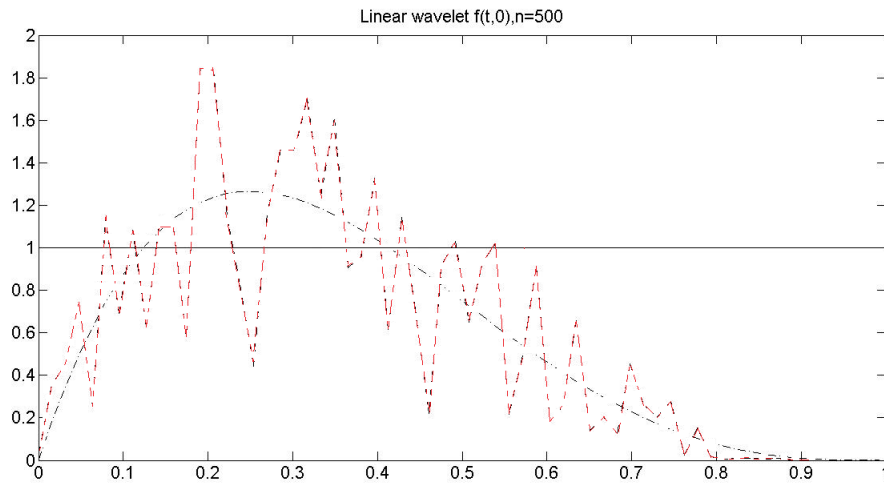
%

```
for ll = 1:1:n
    for jj = 1:1:length(J)
        C_1=sum(W(jj)^2).*f(ll)*answer
        C_22=sum(W(jj)^2)*p.*ff(ll)*answer1
    end
end
C_1;
C_2=C_22^2;

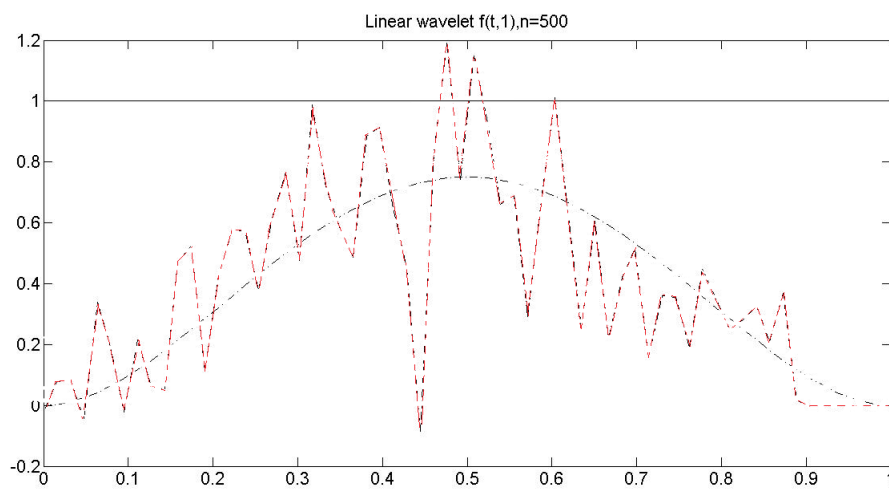
MISE=(5/4)*(((C_2*C_1^4)/n^4)^(1/5))
```

۳. آ. شکلها

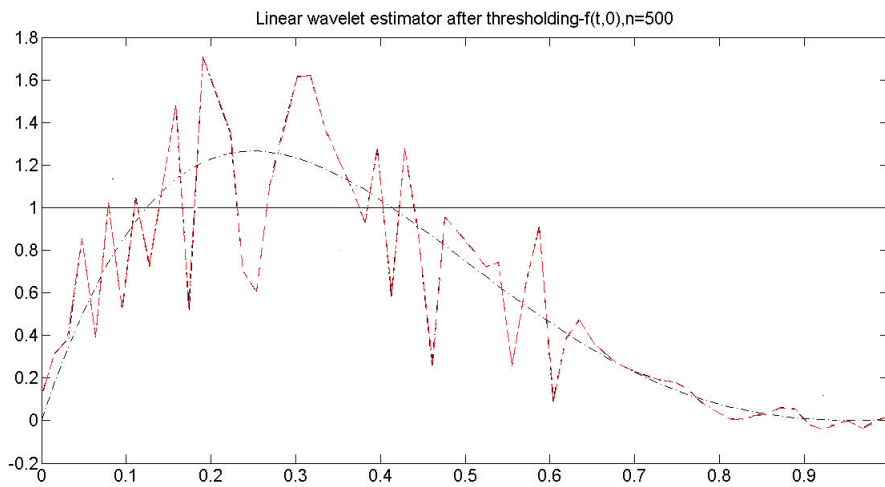
در این نمودارها خطوط قرمز رنگ برآوردهای تابع مورد نظر هستند که در حجم نمونه 500 به دست آمده اند.



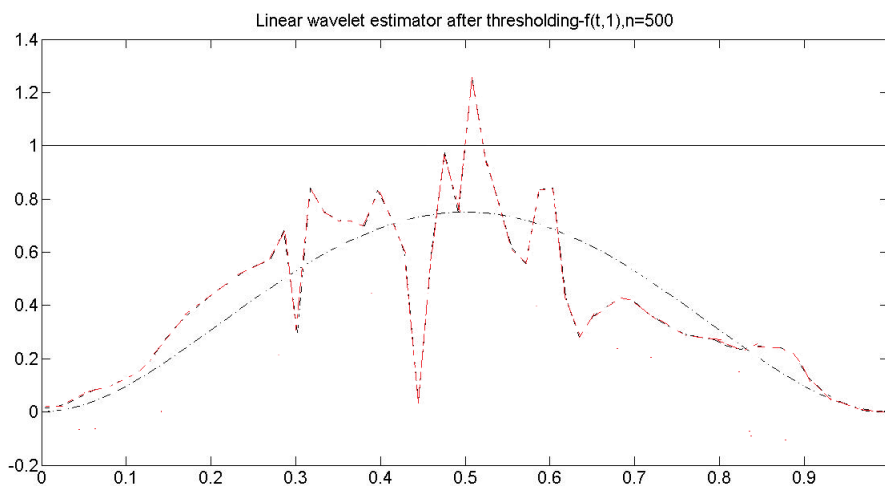
شکل ۱.۰: نمودار برآوردگر خطی موجک تابع $f(x,0)$



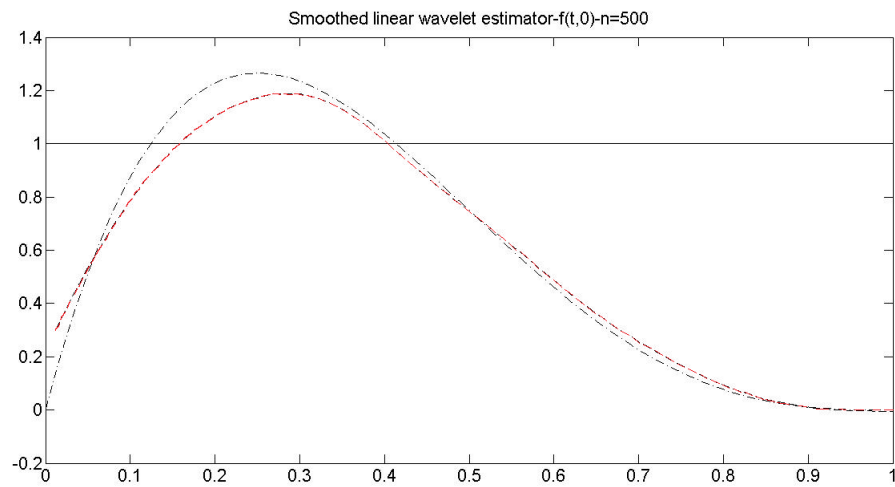
شکل ۲.۰: نمودار برآوردگر خطی موجک تابع $f(x,1)$



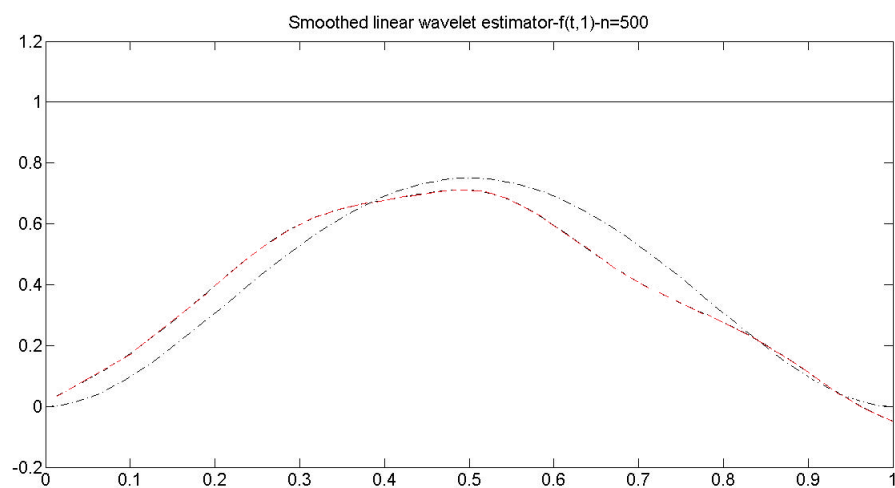
شکل ۳.آ: نمودار برآوردگر آستانه سخت موجک تابع $f(x, 0)$



شکل ۴.آ: نمودار برآوردگر آستانه سخت موجک تابع $f(x, 1)$



شکل آ.۵: نمودار نسخه هموار برآوردگر خطی موجک تابع $f(x, 0)$



شکل آ.۶: نمودار نسخه هموار برآوردگر خطی موجک تابع $f(x, 1)$

مراجع

- [1] Ahmad, I. A., Cerrito, P. B. (1994) Nonparametric estimation of joint discrete–continuous probability densities with applications, *Journal of Statistical Planning and Inference* 41, 349–364.
- [2] Antoine, J. P., Murenzi, R., Vandergheynst, P. and S.T. Ali (2004) Two–dimensional wavelets and their relatives, *Cambridge*, United Kingdom.
- [3] Chaubey, Y. P., Chesneau, C. and Doosti, H. (2011) Wavelet linear density estimation: a review, *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics* 65, 169–179.
- [4] Chesneau, C., Dewan, I. and Doosti, H. (2014) Nonparametric estimation of a two dimensional continuous–discrete density function by wavelets, *Statistical Methodology*, 18, 64–78
- [5] Chow, Y. S., and Teicher, H. (1978) Probability Theory, *Springer, New York*.
- [6] Daubechies, I. (1988) Orthogonal bases of compactly supported wavelets, *Communication in pure and applied mathematics*, Vol. 41, pp. 909 – 996.
- [7] Daubechies, I. (1992) Ten Lectures on Wavelets, in: CBMS–NSF Regional Conferences Series in Applied Mathematics, *SIAM, Philadelphia*.
- [8] Dong, J., and Jiang, R. (2009) Multinomial probability estimation by wavelet thresholding, *Communication in Statistics, Theory and Methods* 38, 1486–1507.
- [9] Donoho, D. L., and Johnston, I. M. (1992) Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage, *preprint Department of Statistics Tecnical Report* 400.
- [10] doosti, H. and Nezakati, A. (2008) Wavelet Linear Density Estimation for M–Dependent Random Variables, *Journal of Damghan University of Basic Sciences* Volume 1, Number 2, 51 – 55.
- [11] Fan, J. (1992) Design–adaptative nonparametric regression, *Journal of the American Statistical Association* 87, 998–1004.
- [12] Gut, A. (1994) Probability: A Graduate Course, *Springer Texts in Statistics*.
- [13] Hardle, W. Kerkyacharian, G. Picard, D. and Tsybakov, A. (1998) Wavelets: Approximation and Statistical Applications, *New York: Springer-Verlag*.

- [14] Jones, D. (1978) Non Linear Regressive Processes, *Proceeding of the Royal Society of London*, Series A 360, 71 – 95.
- [15] Leblance, F. (1996) Wavelet Linear Density Estimation For a Discrete – time Stochastic Process: L_p Losses, *Statistics & Probability, Letters* ٢٧, ٧١ – ٨٤.
- [16] Morlet, J., Arens, G., Fouregau, E. and Giard, D. (1982) Wave propagation and sampling theory, *Geophysic*, Vol. 47, pp. 203 – 236.
- [17] Mallat, S. (2009) A Wavelet Tour of Signal Processing, *the Sparse Way*, third ed., Academic Press.
- [18] Meyer, Y. (1990) Ondelettes et Operateurs, *Herman, Paris*.
- [19] Nason, G. P. (2006) Wavelet methods in statistics with R, *springer*.
- [20] Persival, D. P. and Walden, A. T. (2000) Wavelets in Time Series Analysis, *Cambridge: Cambridge University Press*.
- [21] Petrov, V. V. (1995) Limit Theorems of Probability Theory: Sequences of Independent Random Variables, *Clarendon Press, Oxford*.
- [22] Prakasa Rao, B. L. S. (1996) Nonparametric Regression of the Derivatives of a Density by the Method of Wavelet, *Bull Inform*, Cyub 28, 91 – 100.
- [23] Parzen, E. (1962) On estimation of a probability density and mode., *Ann. Math. Statist*, 33, 1065–1076.
- [24] Ramirez, P., and Vidakovic, B. (2010) Wavelet density estimation for stratified size–biased sample, *Journal of Statistical Planning and Inference* , 140, 419–432.
- [25] Rosenthal, H. P. (1970) On the subspaces of L_p ($p \geq 2$) spanned by sequences of independent random variables, *Israel Journal of Mathematics* 8, 273–303.
- [26] Silverman, B. W. (1998) Density Estimation of Statistics and Data Analysis, *Chapman and Hall, London*.
- [27] Simonoff, J. S. (1996) Smoothing Methods in Statistics, *Springer Series in Statistics, New York – Verlay*.
- [28] Vidakovic, B. (1999) Statistical modeling by wavelets, *Wiley, New York*.
- [29] Walter, G. G. (1994) Wavelets and other orthogonal systems with applications, *Florida: CRC Press, Boca Raton*.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

<i>Multiresolution Analysis</i>	آنالیز چندرئزه ساز
<i>Translation</i>	انتقال
<i>Haar Scaling Function</i>	تابع مقیاس هار
<i>Wavelet Transform</i>	تبدیل موجکی
<i>Almost Everywhere</i>	تقریباً همه جا
<i>Compact Support</i>	تکیه‌گاه فشرده
<i>Constant</i>	ثابت
<i>Coefficient</i>	ضریب
<i>Bound</i>	کران
<i>Orthogonal</i>	متعامد
<i>Wavelet</i>	موجک
<i>Doubechies Wavelet</i>	موجک دوبشی
<i>Mother Wavelet</i>	موجک مادر
<i>Orthonormal</i>	یکای متعامد
<i>Mean Integrated Square Error</i>	میانگین مربعات خطا

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

<i>Bernstein's Inequality</i>	نامساوی برن اشتاین
<i>Box Function</i>	تابع جعبه‌ای
<i>Discrete Wavelet Transform</i>	تبدیل موجک گسسته
<i>Dimensional</i>	بعد
<i>Father Wavelet</i>	موجک پدر
<i>Generate</i>	شبیه‌سازی
<i>Histogram</i>	بافت‌نگار
<i>Holder's Inequality</i>	نامساوی هولدر
<i>Kernel</i>	هسته
<i>Kernel Estimator</i>	برآوردگر هسته
<i>Kroneker Delta</i>	دلتای کرونکر
<i>Order</i>	مرتبه
<i>Rosental's Inequality</i>	نامساوی رزنتال
<i>Soft Thresholding</i>	آستانه‌سازی نرم

Abstract

We can rewrite joint probability density estimation $f(x, \nu)$, as $f(x, \nu) = f(x|Y = \nu)\mathbb{P}(Y = \nu)$, using the ordinary method for estimating density function f . We should estimate $\mathbb{P}(Y = \nu)$ and $f(x|Y = \nu)$ to find an estimator for $f(x, \nu)$. For this aim, we use corresponding proportion and kernel method, respectively, to estimate $\mathbb{P}(Y = \nu)$ and $f(x|Y = \nu)$. Since in kernel method, some assumption on f and its derivatives decrease the attention of estimator. However, the optimal and adaptive choice of its bandwidth remains an open question. In this thesis, we estimate $f(x|Y = \nu)$ by wavelet method. both linear and hard threshold wavelet estimator are used and investigate the MISE of the linear estimator and the hard threshold estimator. In the end of a simulation study carefully the wavelet estimation accuracy compared with the kernel estimator.

Key Words: Estimation density function, Wavelet, Hard threshold, Kernel



University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Nonparametric estimation of a two dimensional density function by wavelets

Hossein Mansoori

Supervisor

Dr. Ahmad Nezakati Rezazadeh

Advisor

Dr. Mohammad Arashi

November 2015