دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

احاطه‌گری دلپذیر در گراف‌ها

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

دانشجو

رقیه قزل سفلی

دی ۱۳۹۳

تقدیم به

پدر فداکار و مادر عزیزم

آنانکه وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر. توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند.

تقدیم به

تکیه گاه و همراه همیشگیم، همسر مهربان و فداکارم

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که فراگیری علم و دانش را تا این مقطع برای اینجانب فراهم ساخت و خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادر دومی نصیبم ساخت تا در سایه ی درخت پربار وجودشان بیاسایم و خواهران و برادرانی که بودنشان به من آرامش و شادی می دهد.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی ایشان با زبان قاصر و دست ناتوان چیزی بنگارم. اما از آن جا که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه از استاد با کمالات و شایسته ام، جناب آقای دکتر نادر جعفری راد که در کمال سعه ی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند و همچنین از اساتید محترم که زحمت داوری این رساله را تقبل نمودن، کمال تشکر و قدردانی دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

رقیه قزل سفلی

دی ۱۳۹۳

تعهدنامه

اینجانب **رقیه قزل‌سفلی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **احاطه‌گری دلپذیر در گراف‌ها** ، تحت راهنمایی **دکتر نادر جعفری راد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

رقیه قزل سفلی

دی ۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

زیرمجموعه D از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر نامیم، هرگاه D دارای همسایه‌های یکسان در D باشند. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر در گراف G را عدد احاطه‌گری دلپذیر G نامیده و آن را با $fd\left(G\right)$ نشان می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر از اندازه $fd\left(G\right)$ را به اختصار با $fd\left(G\right)$−مجموعه نشان می‌دهیم. در فصل اول این پایان‌نامه مفاهیم و مقدمات نظریه گراف که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیازمندیم را یادآوری می‌کنیم. در فصل دوم مفهوم احاطه‌گری دلپذیر در گراف‌ها را بیان کرده و به مسائل مربوط به آن می‌پردازیم. در فصل سوم هدف ما اثبات تساوی بین عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری دلپذیر می‌باشد. بدین منظور تعدادی عملگر را تعریف نموده و با توجه به آن‌ها در صدد اثبات قضیه هستیم. در فصل چهارم تساوی قدرتمند بین عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری دلپذیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نتایج حاصله در فصل‌های سوم و چهارم برای اولین بار در این پایان‌نامه انجام شده است.

کلمات کلیدی: احاطه‌گری، احاطه‌گری دلپذیر.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. بررسی تساوی بین عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری دلپذیر در درخت‌ها

۲. بررسی تساوی قدرتمند بین عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری دلپذیر در درخت‌ها

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

در این فصل به تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه گراف و هم‌چنین قضایایی که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم، می‌پردازیم. تعاریف و قضایای این فصل برگرفته از مراجع [۲] و [۱۱] می‌باشند.

۱.۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. گراف G یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \Psi_G)$ است که $V(G)$ مجموعه راس‌ها، $E(G)$ مجموعه یال‌ها و Ψ_G تابع وقوع است، که به هر یال G یک زوج نامرتب (نه لزوما مجزا) را نسبت می‌دهد. اگر e یک یال و u و v راس‌هایی باشند به قسمی که $\Psi_G(e) = uv$، آن‌گاه می‌گویند e، u را به v وصل می‌کند و راس‌های u و v را دو انتهای e می‌نامند.

معمولا گراف $G = (V(G), E(G), \Psi_G)$ را به‌طور خلاصه با $(V(G), E(G))$ یا $G = (V, E)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱. مرتبه گراف G تعداد رئوس گراف G می‌باشد و با $n(G)$ یا n نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. یک گشت به طول k، یک دنباله متناوب $v_۰, e_۱, v_۱, e_۲, \ldots, e_k, v_k$ از راس‌ها و یال‌هاست، به‌طوریکه به ازای هر $i = ۱, \ldots, k$، $e_i = v_{i-۱}v_i$ یک یال باشد.

تعریف ۴.۱.۱. یک مسیر، گشتی است که هیچ راس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به‌صورت فهرست مرتبی از راس‌های متمایز $v_۰, v_۱, \ldots, v_n$ در نظر می‌گیریم، به‌طوریکه به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $v_{i-۱}v_i$ یک یال باشد. یک مسیر n راسی را با P_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. یک دور، مسیری به طول حداقل یک است که در آن راس ابتدایی و راس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ راس تکراری دیگری نداریم. یک دور n راسی را با C_n نشان می‌دهیم.

طوقه دوری به طول یک است.

تعریف ۶.۱.۱. یک گراف ساده، گرافی است که هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو راس آن بیش از یک یال موجود نباشد.

در این پایان‌نامه، منظور از گراف G، گراف ساده می‌باشد.

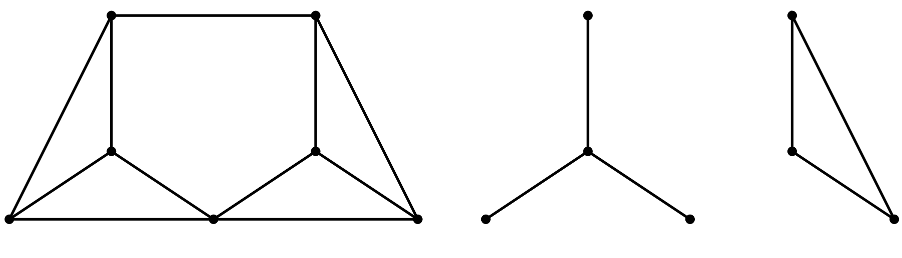
تعریف ۷.۱.۱. درجه راس v در G تعداد یال‌های گراف G می‌باشد که v بر آن‌ها واقع است و آن را با $d_G(v)$ نمایش می‌دهیم. بزرگترین درجه در میان درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچکترین درجه را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. نسبت دو برابر تعداد یال‌ها به تعداد رئوس را میانگین درجه گراف G می‌گوییم و با $\overline{d}(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱. گراف G را یک گراف $k-$منتظم می‌نامیم، هرگاه درجه هر راس آن k باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. مجموعه‌ای از رئوس گراف G که با راس v مجاور باشند را همسایگی باز راس v نامیده و با $N(v)$ نمایش می‌دهیم. $N(v) \cup \{v\}$ را همسایگی بسته راس v نامیده و با $N[v]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. گراف G همبند نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دو راس متمایز u و v از G مسیری از u به v موجود باشد. در غیر این صورت گراف G ناهمبند است. بدیهی است که هر گراف ناهمبند را می‌توان به‌صورت اجتماع تعداد متناهی از گراف‌های همبند با مجموعه رئوس مجزا در نظر گرفت. به هر یک از این گراف‌های همبند، یک مولفه از گراف G می‌نامیم. (شکل (۱.۱))



(الف) (ب)

شکل ۱.۱: (الف) گراف همبند و (ب) گراف ناهمبند دو مولفه‌ای

تعریف ۱۲.۱.۱. فاصله بین دو راس u و v در گراف G که با $d_G(u,v)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو راس u و v.

تعریف ۱۳.۱.۱. در بین کوتاه‌ترین مسیرها، طول بزرگترین مسیر را قطر گراف G نامیده و با $\mathrm{diam}(G)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۴.۱.۱. [۱۱] برای گراف دلخواه $G=(V,E)$ داریم، $\sum_{v\in V} d_G(v) = ۲|E(G)|$.

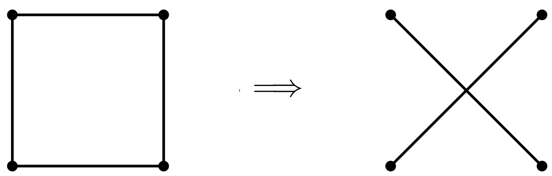
اصل ۱۵.۱.۱. اصل لانه کبوتر. اگر تعداد n کبوتر تعداد k لانه را اشغال کنند که $k<n$، آن‌گاه لانه‌ای با حداقل ۲ کبوتر موجود است.

تعریف ۱۶.۱.۱. گرافی که در آن هر دو راس متمایز توسط یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، گراف کامل نامیده می‌شود. یک گراف کامل n راسی را با K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. گراف دوبخشی گرافی است که مجموعه راس‌های آن به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز شود، که یک سر تمام یال‌های G در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y، که در آن هر راس X، به هر راس Y وصل شده باشد، گراف دو بخشی کامل نامیده می‌شود. اگر $|X|=m$ و $|Y|=n$، آن‌گاه گراف دو بخشی کامل با بخش‌های X و Y را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $|X|=۱$ و یا $|Y|=۱$ باشد، گراف ستاره نامیده می‌شود و با $K_{۱,n}$ یا $K_{m,۱}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید G گرافی n راسی باشد، متمم (یا مکمل) گراف G را با $\overline{G}$ نشان داده و بدین‌صورت تعریف می‌کنیم، $V(G)=V(\overline{G})$ و هر دو راس مانند u و v در $\overline{G}$ مجاور هستند اگر و فقط اگر در G مجاور نباشند.

شکل (۲.۱) گراف G و متمم آن را نشان می‌دهد.



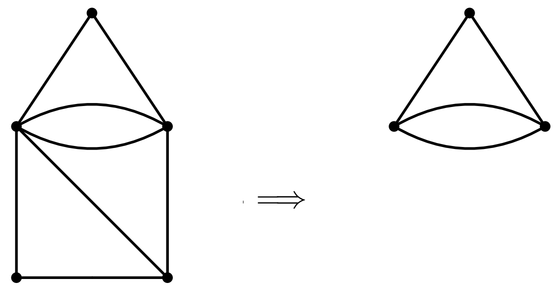
(الف) (ب)

شکل ۲.۱: (الف) گراف G و (ب) گراف $\bar{G}$

تعریف ۱۹.۱.۱. یک زیرگراف از گراف G، گرافی مانند H است که $V(H)\subseteq V(G)$ و $E(H)\subseteq E(G)$ به‌طوریکه $V(H)\neq\emptyset$.

تعریف ۲۰.۱.۱. H را زیرگراف القایی G نامیده و با $G[V(H)]$ نمایش می‌دهیم، هرگاه H زیرگرافی از G باشد و برای هر دو راس x و y از H، اگر $xy\in E(G)$ آن‌گاه $xy\in E(H)$.

شکل(۳.۱) گراف G و یک زیرگراف القایی آن را نشان می‌دهد.



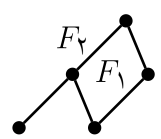
(الف) (ب)

شکل ۳.۱: (الف) گراف G و (ب) یک زیرگراف القایی G

تعریف ۲۱.۱.۱. گراف مسطح، گرافی است که بتوان آن‌را طوری بر روی صفحه ترسیم کرد که یال‌ها به‌جز تلاقی در رئوس، همدیگر را قطع نکنند.

تعریف ۲۲.۱.۱. ناحیه‌هایی از صفحه که توسط یال‌های یک گراف مسطح شده افراز شده‌اند را وجه‌های یک گراف مسطح می‌نامیم. وجه بیرونی یک گراف مسطح را وجه بیکران می‌نامیم.

در شکل (۴.۱)، F_1 وجه کراندار و F_2 وجه بیکران است.

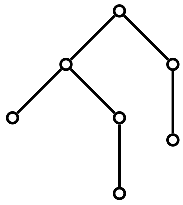


شکل ۴.۱:

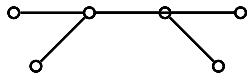
تعریف ۲۳.۱.۱. گراف مسطح خارجی، گرافی است که بتوان آن‌را به طور مسطح شده طوری در صفحه ترسیم کرد که هر راس آن، روی مرز وجه بیکران باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. گراف همبند و فاقد دور درخت نامیده می‌شود. یک برگ (راس آویزان) راسی از درجه یک است. هم‌چنین مجموعه برگ‌ها را با $L(T)$ نمایش می‌دهیم.(شکل(۵.۱))

تعریف ۲۵.۱.۱. برای $r, s \geq 1$، یک ۲−ستاره $S(r, s)$، درختی با دو راس غیر برگ است، به‌طوریکه یک راس مجاور به r برگ و راس دیگر غیر برگ، مجاور به s برگ است.(شکل(۶.۱))



شکل ۵.۱: درخت T



شکل ۶.۱: $S(۲,۲)$

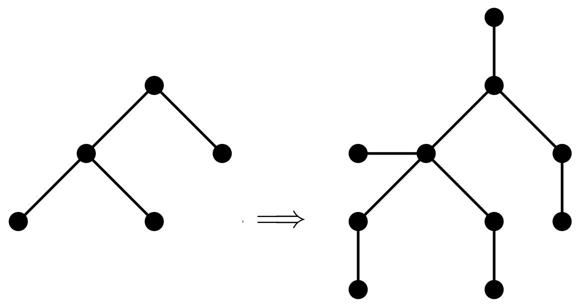
تعریف ۲۶.۱.۱. درخت جهت‌دار، درختی است که مجموعه یال‌های آن مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب باشد.

تعریف ۲۷.۱.۱. درخت ریشه‌دار، درختی جهت‌دار است که درجه ورودی یک راس به نام ریشه صفر و درجه ورودی سایر راس‌ها غیرصفر است.

از این پس ریشه را قسمت بالای درخت در نظر گرفته و جهت رشد را رو به پایین در نظر می‌گیریم، همچنین از رسم فلش (جهت) خودداری می‌کنیم.

تعریف ۲۸.۱.۱. راسی که در همسایگی یک برگ قرار داشته باشد، راس پشتیبان نام دارد. مجموعه رئوس پشتیبان در درخت T را با $S(T)$ نمایش می‌دهند. هم‌چنین راسی که در همسایگی حداقل دو برگ قرار داشته باشد، راس پشتیبان قوی نام دارد.

تعریف ۲۹.۱.۱. تاج در یک گراف مانند H که با $\mathrm{cor}(H)$ نمایش داده می‌شود، گرافی از مرتبه $۲|V(H)|$ است که با اضافه کردن یک برگ به هر راس از گراف H به‌دست می‌آید. هم‌چنین به خاطر می‌سپاریم که هر راس از $\mathrm{cor}(H)$ یا یک برگ است و یا راس پشتیبان که با دقیقا یک برگ همسایه است. شکل (۷.۱) گراف H و $\mathrm{cor}(H)$ را نشان می‌دهند.



(الف) (ب)

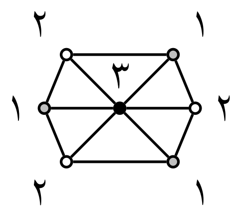
شکل ۷.۱: (الف) درخت H و (ب) $\text{cor}(H)$

تعریف ۳۰.۱.۱. یک مجموعه مستقل در گراف G، مجموعه‌ای از رئوس می‌باشد که هیچ دو راس از آن مجاور نباشد. ماکزیمم اندازه یک چنین مجموعه‌ای را عدد استقلال گراف G نامیده و با $\alpha(G)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۳۱.۱.۱. تابع $f : V(G) \longrightarrow A \neq \emptyset$ را یک رنگ‌آمیزی راسی برای گراف G نامیم و همچنین A را مجموعه رنگ‌ها می‌نامیم. رنگ‌آمیزی f را معتبر نامیم، هرگاه برای هر دو راس مجاور x و y $f(x) \neq f(y)$.

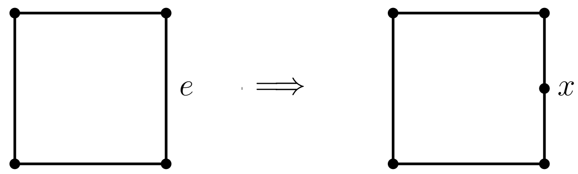
گراف G را $k-$رنگ‌پذیر نامیم، هرگاه یک رنگ‌آمیزی معتبر f موجود باشد که $|f(V(G))| = k$.
عدد رنگی گراف G عبارت است از مینیمم مقدار k که G، $k-$رنگ پذیر باشد و آن را با $\chi(G)$ نشان می‌دهیم.

توجه شود که راس‌های هم رنگ در یک رنگ‌آمیزی معتبر گراف G، مجموعه مستقل تشکیل می‌دهند.
شکل(۸.۱) رنگ‌آمیزی گراف G را نشان می‌دهد که به راحتی می‌توان دید در این گراف عدد رنگی برابر ۳ می‌باشد.



شکل ۸.۱: $\chi(G) = ۳$

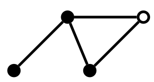
تعریف ۳۲.۱.۱. یک زیرتقسیم [۱] یال e عبارت است از حذف یال e، اضافه کردن راس جدید y و مجاور کردن y با دو سر e.(شکل ۹.۱)



شکل ۹.۱: زیرتقسیم یال e

تعریف ۳۳.۱.۱. به تعداد درجه راس‌های متمایز بدون تکرار در دنباله درجات، گستردگی[۲] در G گوییم و با $Span(G)$ نمایش می‌دهیم.

در شکل (۱۰.۱) دنباله درجات راس‌ها عبارت است از، ۳۲۲۱ و در نتیجه $\text{span}(G) = ۳$.



شکل ۱۰.۱: $\text{span}(G) = ۳$

تعریف ۳۴.۱.۱. به ماکزیمم تکرار در دنباله درجات راسی، عدد تکرار[۳] گوییم و به اختصار با $\text{rep}(G)$ نمایش می‌دهیم.

در مثال قبل $\text{rep}(G) = ۲$.

تعریف ۳۵.۱.۱. به مجموعه‌ای از رئوس در گراف G پوشش راسی گوییم، هرگاه هر یال دارای حداقل یک انتها در آن باشد. مینیمم اندازه یک پوشش راسی را عدد پوششی راسی G نامیده و با $\beta(G)$ نمایش می‌دهیم.

۲.۱ احاطه‌گری

در سال‌های اخیر، مفهوم احاطه‌گری در گراف‌ها به دلیل کاربردهای زیاد آن در زمینه‌های مختلف همچون علوم کامپیوتر و شبکه‌های الکترونیکی مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته و رشد چشمگیری داشته

[۱] Subdividing
[۲] Span(G)
[۳] Repetition number

است. این مفهوم برای نخستین بار در سال ۱۸۶۲ توسط دوجکنیش[۴] روی صفحه شطرنج مورد استفاده قرار گرفت. اما بعدها به عنوان یک بحث نظری در نظریه گراف‌ها بررسی و مطالعه گردید و تاکنون مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است.

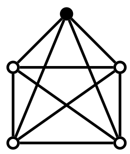
در سال ۱۸۶۲ بال[۵] مساله کمترین تعداد مهره‌های وزیر مورد نیاز جهت قرار گرفتن روی صفحه شطرنج را به قسمی که هر خانه‌ای مورد حمله یک وزیر قرار گرفته و هیچ وزیری مورد حمله وزیر دیگری نباشد، مطرح کرد. این مساله به مساله ۵−وزیر مشهور شد. از جمله کاربردهای دیگر آن می‌توان در مخابرات برای نصب دکل‌های آنتن در مناطقی از شهر یا انتخاب بهترین مکان‌ها برای احداث بیمارستان یا مراکز آتش‌نشانی و ... اشاره نمود.

تعریف ۱.۲.۱. زیرمجموعه D از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر نامیم، هرگاه برای هر راس $v \in V$، یا آن راس در D باشد و یا در همسایگی یک راس از D قرار داشته باشد.

کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر در گراف G را عدد احاطه‌گری G نامیده و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌هیم.

یک مجموعه احاطه‌گر از اندازه $\gamma(G)$ را به اختصار با یک $\gamma(G)$−مجموعه نشان می‌دهیم.

شکل(۱۱.۱) کوچکترین مجموعه احاطه‌گر را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱.۱: $\gamma(G) = 1$

[۴] De Jacnish

[۵] W. W. Rouse Ball

فصل ۲

احاطه‌گری دلپذیر در گراف‌ها

۱.۲ مقدمه

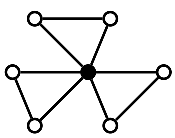
در این فصل احاطه‌گری دلپذیر را بر روی انواعی از گراف‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین منظور ابتدا به تعریف احاطه‌گری دلپذیر می‌پردازیم و سپس روابط و قضایای مربوط به آن‌را مطرح می‌کنیم. این فصل برگرفته از مرجع [۱۲] می‌باشد.

۲.۲ تعاریف و نتایج مقدماتی

تعریف ۱.۲.۲. زیرمجموعه D از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر[1] نامیم، هرگاه D یک مجموعه احاطه‌گر باشد و هر دو راس خارج D دارای تعداد یکسانی همسایه در D باشند.

کوچک‌ترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر در گراف G را عدد احاطه‌گری دلپذیر G نامیده و آن را با $fd\,(G)$ نشان می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر از اندازه $fd\,(G)$ را به اختصار با یک $fd\,(G)$– مجموعه نشان می‌دهیم.

شکل (۱.۲) کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر دلپذیر در گراف مورد نظر را نشان می‌دهد.

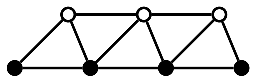


شکل ۱.۲: $fd(G) = 1$

[1]Fair dominating set

تعریف ۲.۲.۲. زیرمجموعه D از رئوس گراف G را یک مجموعه k−احاطه‌گر دلپذیر[۲] نامیم، هرگاه D یک مجموعه احاطه‌گر باشد و هر دو راس خارج D دارای دقیقا k همسایه در D باشند.

کوچک‌ترین اندازه یک مجموعه k−احاطه‌گر دلپذیر در گراف G را عدد k−احاطه‌گری دلپذیر G نامیده و آن را با $fd_k\left(G\right)$ نشان می‌دهیم.
یک مجموعه k−احاطه‌گر دلپذیر از اندازه $fd_k\left(G\right)$ را به اختصار با یک $fd_k\left(G\right)$−مجموعه نشان می‌دهیم.
شکل (۲.۲) مجموعه ۲-احاطه‌گر دلپذیر در گراف مورد نظر را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۲: $fd_۲ = ۴$

در این پایان‌نامه منظور از $fd\left(G\right)$− مجموعه، مینیمم مجموعه احاطه‌گر دلپذیر و منظور از $FD\left(G\right)$−مجموعه، مجموعه احاطه‌گر دلپذیر خواهد بود.

نتیجه ۳.۲.۲. اگر $G = \overline{K_n}$، آن‌گاه $fd\left(G\right) = n$.

قضیه ۴.۲.۲. اگر G یک گراف از مرتبه n باشد، آن‌گاه روابط زیر برقرار خواهند بود.

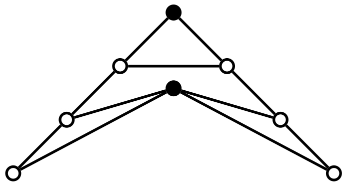
الف) $\gamma\left(G\right) \leq fd\left(G\right)$.

ب) $fd\left(G\right) \leq n$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G = \overline{K_n}$.

برهان. الف) چون یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر خود یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا حکم برقرار است.
ب) بوضوح مجموعه $V\left(G\right)$ یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر است، لذا $fd\left(G\right) \leq n$. برای اثبات حالت تساوی، فرض کنید G گرافی با $fd\left(G\right) = n$ باشد. اگر $G \neq \overline{K_n}$، آن‌گاه راسی مانند x از درجه حداقل یک را در نظر بگیرید. در این‌صورت $V\left(G\right) - \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر است که تناقض است. لذا $G = \overline{K_n}$. بالعکس، با توجه به قرارداد ۳.۲.۲ برقرار است. □

تعریف ۵.۲.۲. زیرمجموعه D از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر تام[۳] نامیم، هرگاه D یک مجموعه احاطه‌گر باشد و هر راس خارج D دقیقا یک همسایه در D داشته باشد. بنابراین یک $FD(G)$۱−مجموعه، یک مجموعه احاطه‌گر تام خواهد بود.(شکل (۳.۲))

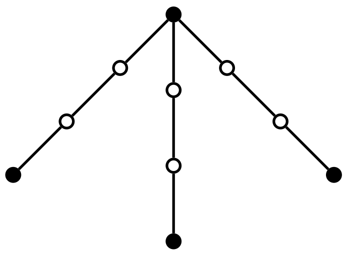
[۲] K-Fair dominating set
[۳] Perfect dominating set



شکل ۳.۲: $fd_1 = 2$

تعریف ۶.۲.۲. S را یک بسته‌بندی[۴] نامیم، هرگاه به‌ازای هر دو راس که متعلق به S هستند، فاصله آن‌ها حداقل ۳ باشد.

تعریف ۷.۲.۲. زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر کارامد[۵] نامیم، هرگاه S یک مجموعه احاطه‌گر تام باشد و برای هر دو راس $u, \nu \in S$، فاصله آن‌ها حداقل ۳ باشد. بنابراین یک مجموعه احاطه‌گر کارآمد، یک $FD(G)$ ۱– مجموعه خواهد بود. (شکل (۴.۲))



شکل ۴.۲: مجموعه احاطه‌گر کارآمد

لم ۸.۲.۲. [۱] اگر G دارای یک مجموعه احاطه‌گر کارامد باشد، آن‌گاه اندازه هر مجموعه کارامد برابر با $\gamma(G)$ است.

قضیه ۹.۲.۲. اگر گراف G دارای یک مجموعه احاطه‌گر کارامد باشد، آن‌گاه
$$\gamma(G) = fd_1(G) = fd(G).$$

برهان. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر کارامد برای G باشد. طبق تعریف، S یک FD۱– مجموعه نیز می‌باشد، لذا خواهیم داشت $fd(G) \leq fd_1(G) = |S|$. از طرفی طبق لم ۸.۲.۲ داریم، $|S| = \gamma(G)$. در این‌صورت خواهیم داشت، $fd(G) \leq fd_1(G) = |S| = \gamma(G)$. اثبات عکس رابطه نیز با توجه به قضیه ۴.۲.۲ برقرار خواهد بود. در نتیجه تساوی برقرار است. □

قضیه ۱۰.۲.۲. برای $m, n \geq 1$، اگر $G \in \{K_n, \overline{K_n}, K_{m,n}\}$، آن‌گاه $fd(G) = \gamma(G)$.

[۴] Packing

[۵] Efficient dominating set

برهان. برای اثبات $K_{m,n}$، فرض کنید $m = n = ۱$ یا $m = ۱$ و یا $n = ۱$ باشد. در این‌صورت به‌راحتی می‌توان دید که $fd(G) = \gamma(G) = ۱$. حال فرض کنید $m \geq n \geq ۲$. می‌دانیم $\gamma(K_{m,n}) = ۲$، از طرفی $fd(K_{m,n}) \leq fd_۱(K_{m,n}) = ۲$، لذا خواهیم داشت $fd(K_{m,n}) \leq \gamma(K_{m,n})$. بالعکس، با توجه به قضیه ۴.۲.۲ قسمت (الف) داریم، $\gamma(K_{m,n}) \leq fd(K_{m,n})$. در نتیجه حکم برای $K_{m,n}$ به اثبات می‌رسد.

برای اثبات $\overline{K_n}$، می‌دانیم گراف $\overline{K_n}$ یالی ندارد، بنابراین $\gamma(\overline{K_n}) = n$. از طرفی طبق قرارداد ۳.۲.۲ داریم، $fd(\overline{K_n}) = n$. در نتیجه اثبات واضح است.

برای اثبات K_n، می‌دانیم $\gamma(K_n) = ۱$. از طرفی $fd(K_n) \leq fd_۱(K_n) = ۱$، لذا خواهیم داشت $fd(K_n) \leq \gamma(K_n)$. از طرفی با توجه به قضیه ۴.۲.۲ قسمت (الف) داریم، $\gamma(K_n) \leq fd(K_n)$. در نتیجه حکم برای K_n نیز به اثبات می‌رسد.

□

قضیه ۱۱.۲.۲. [۱] اگر $n \geq ۳$ و $n \not\equiv ۲ \pmod{۳}$، آنگاه $fd(C_n) = \gamma(C_n)$ و اگر $n \geq ۵$ و $n \equiv ۲ \pmod{۳}$، آنگاه $fd(C_n) = \gamma(C_n) + ۱$.

قضیه ۱۲.۲.۲. هرگاه G گرافی همبند از مرتبه $n \geq ۲$ باشد، در این‌صورت خواهیم داشت:

الف) اگر $\overline{G}$ همبند باشد، آنگاه $fd(G) = fd(\overline{G})$.

ب) اگر $\overline{G}$ دارای $q \geq ۲$ مولفه باشد، آنگاه $fd(G) \leq \frac{n}{q} \leq \frac{n}{۲}$.

برهان. الف) فرض کنید $\overline{G}$ همبند باشد و فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر در G باشد. در این‌صورت هر راس $v \in V \setminus D$ دقیقا k همسایه در D دارد، که $۱ \leq k \leq |D|$. اگر $k = |D|$، آنگاه در گراف $\overline{G}$ هیچ یالی بین D و $V \setminus D$ وجود ندارد و این متناقض با همبند بودن $\overline{G}$ است، بنابراین $k < |D|$. اما در این‌صورت در گراف $\overline{G}$ هر راس خارج D دقیقا $|D| - k > ۰$ همسایه در D دارد، بنابراین D یک FD-مجموعه برای $\overline{G}$ است، بنابراین $fd(\overline{G}) \leq |D| = fd(G)$. بالعکس، همانند اثبات بالا می‌توان ثابت کرد، $fd(G) \leq fd(\overline{G})$. در نتیجه $fd(G) = fd(\overline{G})$.

ب) فرض کنید $\overline{G}$ ناهمبند است و q بخش دارد. بوضوح کوچک‌ترین بخش $\overline{G}$ برابر با حداکثر n/q است. حال فرض کنید F کوچک‌ترین بخش در $\overline{G}$ باشد و فرض کنید $D = V(F)$. در این‌صورت هر راس $V \setminus D$ در G با همه راس‌های D مجاور است. بنابراین D یک FD-مجموعه برای G خواهد بود، در نتیجه $fd(G) \leq |D| \leq n/q \leq n/۲$. □

۳.۲ کران‌هایی روی احاطه‌گری دلپذیر

قضیه ۱.۳.۲. اگر G گرافی از مرتبه $n \geq ۳$ با $\delta(G) \geq ۱$ باشد، آنگاه $fd(G) \leq n - ۲$ و این کران، یک کران قابل دسترس می‌باشد.

برهان. به استقرا روی $n \geq ۳$ ثابت می‌کنیم. آزمون استقرا، اگر $n \in \{۳, ۴\}$ به‌راحتی می‌توان نشان داد که $fd\left(G\right) \leq n - ۲$. فرض استقرا، فرض کنید $n \geq ۵$ و حکم برای گراف G' از مرتبه n' که $۳ \leq n' \leq n$ و هیچ راس منفردی ندارد، برقرار باشد. یعنی $fd\left(G'\right) \leq n' - ۲$. حکم استقرا، فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی از مرتبه n بدون راس منفرد باشد. بوضوح G دارای حداقل دو راس با درجه یکسان است. در این‌صورت فرض کنید u و v دو راس با درجه یکسان در G باشند، در این‌صورت $d_G\left(u\right) = d_G\left(v\right) = k$ که در آن $۱ \leq k \leq n - ۱$. حال اگر دو راس u و v در G مجاور نباشند و یا اگر این دو راس در G مجاور باشند و $k \geq ۲$ باشد، آنگاه $D = V \setminus \{u, v\}$ یک FD-مجموعه است، بنابراین $fd\left(G\right) \leq |D| = n - ۲$. حال فرض کنید u و v در G مجاورند و $k = ۱$. این بدان معناست که گراف G ناهمبند است. در این‌صورت گراف $G' = G - \{u, v\}$ از مرتبه $n' = n - ۲ \geq ۳$ را در نظر بگیرید. طبق فرض استقرا برای گراف G' داریم، $fd\left(G'\right) \leq n' - ۲$. حال می‌توان با افزودن رئوس u و v، هر $fd\left(G'\right)$-مجموعه را به یک FD-مجموعه در G تعمیم داد و این می‌رساند که $fd\left(G\right) \leq fd\left(G'\right) + ۲ \leq n' = n - ۲$ و این یک کران بالاست.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که کران قضیه بالا تیز است. بدین منظور ساختاری از خانواده نامتناهی از گراف‌های G از مرتبه $n \geq ۳$ با $\delta(G) \geq ۱$ را در نظر می‌گیریم و سپس نشان می‌دهیم که ، $fd\left(G\right) = n - ۲$.

ادعا ۲.۳.۲. خانواده‌ای نامتناهی از گراف‌های H از مرتبه زوج موجودند که $fd\left(H\right) = |V(H)| - ۲$.

اثبات. برای $n \geq ۳$ گراف $H = H_n$ از مرتبه $n(H) = ۲n$ راس را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $V\left(H\right) = X \cup Y$ که $X = \{x_۱, \ldots, x_n\}$ و $Y = \{y_۱, \ldots, y_n\}$ و x_i و y_j با هم مجاورند اگر و فقط اگر $j \geq i$. به‌علاوه Y یک مجموعه مستقل است و برای $i, j > ۱$، x_i و x_j مجاورند. بنابراین برای $۱ < i < n$، $d_H\left(x_۱\right) = ۱$ و $d_H\left(x_i\right) = i + n - ۲$، در حالی‌که برای $۱ \leq j \leq n$، $d_H\left(y_j\right) = n - j + ۱$. لذا خواهیم داشت $d_H\left(x_۱\right) = d_H\left(y_n\right) = ۱$ و $d_H\left(y_۱\right) = d_H\left(x_۲\right) = n$ و درجه همه راس‌ها در H متمایزند. شکلی کلی از گراف H را در شکل (۵.۲) مشاهده می‌کنید. حال ما می‌خواهیم نشان دهیم $fd\left(H\right) = ۲n - ۲ = n(H) - ۲$. فرض کنید S یک fd-مجموعه دلخواه در H باشد. ما نشان می‌دهیم که $|S| \geq n(H) - ۲$. بدین منظور سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

۱) $x_۱ \notin S$. در این‌صورت $y_۱ \in S$ و S یک $۱FD$-مجموعه برای H_n است. اگر برای $i \geq ۲$، $x_i \notin S$ آنگاه $N\left(x_i\right) \cap S = \{y_۱\}$ و بنابراین $y_۲ \notin S$. هنگامی‌که $y_۲$ توسط S احاطه می‌شود، تعدادی $l \geq ۲$ وجود دارد به‌طوریکه $l \neq i$. بنابراین $x_l \in S$ و این می‌رساند که $y_۱, x_l \in N\left(x_i\right) \cap S$ و این یک تناقض است. بنابراین $X \setminus \{x_۱\} \subseteq S$. علاوه‌براین، برای $۱ < j < n$، $y_j \in S$، زیرا در غیر این‌صورت تناقض ایجاد می‌شود، لذا $|N\left(y_j\right) \cap S| \geq ۲$ $|N\left(y_j\right) \cap \left(X \setminus \{x_۱\}\right)| = n - j + ۱ \geq ۲$ و S یک $۱FD$-مجموعه است. در نتیجه $V \setminus \{x_۱, y_n\} \subseteq S$ و $|S| \geq n(H) - ۲$.

۲) $x_۱ \in S$ و $y_n \notin S$. در این‌صورت $x_n \in S$ و S یک $۱FD$-مجموعه برای H_n است. هنگامی‌که $x_۱, x_n \in N\left(y_۱\right) \cap S$ این نتیجه می‌دهد که $y_۱ \in S$، زیرا در غیر این‌صورت $y_۱$ توسط دو راس

احاطه می‌شود، که این تناقض است. بنابراین برای هر $۱ < i < n$، $x_n, y_۱ \in N(x_i) \cap S$.
لذا می‌توان نتیجه گرفت $X \subseteq S$. این می‌رساند که برای هر $۱ < j < n$، $y_j \in S$ و بنابراین $V \setminus \{y_n\} \subseteq S$. در نتیجه خواهیم داشت $|S| \geq n(H) - ۱ \geq n(H) - ۲$.

۳) $x_۱, y_n \in S$. این حالت را در سه قسمت بررسی می‌کنیم.

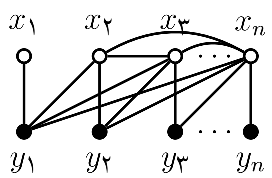
الف) فرض کنید $y_۱ \notin S$، در این‌صورت برای هر $۱ < j < n$، $y_j \in S$. بنابراین تا زمانی که $N(y_j) \subset N(y_۱)$ و $x_۱ \in N(y_۱) \setminus N(y_j)$ خواهیم داشت، $|N(y_۱) \cap S| > |N(y_j) \cap S|$. لذا برای هر $۱ < i < n - ۱$، $N(x_i) \subset N(x_{i+۱})$ و این می‌رساند که حداکثر یک اندیس $۱ < i < n$ وجود دارد، به‌طوریکه $x_i \notin S$. در نتیجه خواهیم داشت $|S| \geq n(H) - ۲$.

ب) فرض کنید $y_۱ \in S$ و $x_n \notin S$، در این‌صورت برای هر $۱ < i < n$، $N(x_i) \subset N(x_n)$ و $y_n \in S \cap (N(x_n) - N(x_i))$ و این می‌رساند که $X \setminus \{x_n\} \subset S$، زیرا در غیر این‌صورت x_n توسط n راس و x_i برای $۱ < i < n$ توسط $n - ۱$ راس احاطه می‌شوند و این تناقض است. بنابراین برای هر y_j یک مقدار متفاوتی از همسایگی‌ها در $X \setminus \{x_n\}$ وجود دارد، لذا برای هر $۱ < j < n$، $y_j \in S$، زیرا در غیر این‌صورت هر y_j توسط تعداد متفاوتی از x_iها احاطه می‌شود و این تناقض است. در نتیجه خواهیم داشت، $|S| \geq n(H) - ۱$.

ج) فرض کنید $y_۱ \in S$ و $x_n \in S$. اگر برای تعدادی $۱ < i < n$، $x_i \notin S$ آن‌گاه برای هر $۱ < j < n$، تا زمانی که $N(y_j) \subset N(x_i)$ و $y_۱ \in S \cap (N(x_i) - N(y_j))$، خواهیم داشت $y_j \in S$. در این‌صورت $X - \{x_i\} \subset S$ و $|S| \geq n(H) - ۱$. لذا اثبات برقرار شد.

بنابراین به نظر می‌رسد که $X \subset S$، آنگاه $|Y \cap S| \geq n - ۱$، در غیر این‌صورت دو راس متفاوت از Y نمی‌توانند توسط S به‌صورت دلپذیر احاطه شوند. بنابراین $|S| \geq n(H) - ۱$.

در هر سه حالت توانستیم ثابت کنیم $|S| \geq n(H) - ۲$. تا زمانی که S یک fd-مجموعه دلخواه برای H است، خواهیم داشت $fd(H) \geq n(H) - ۲$. از طرفی طبق قضیه ۱.۳.۲ داریم، $fd(H) \leq n(H) - ۲$. در نتیجه $fd(H) = n(H) - ۲$. لذا اثبات کامل شد.



شکل ۵.۲: گراف H

ادعا ۳.۳.۲. خانواده‌ای نامتناهی از گراف‌های F از مرتبه فرد موجودند که $fd\,(F) = |V(F)| - ۲$.

اثبات. برای $n \geq ۳$، گراف $F = F_n$ با $n(F) = ۲n + ۱$ راس را در نظر بگیرید. فرض کنید F از گراف H_n از مرتبه زوج $n(H) = ۲n$ که در قضیه ۲.۳.۲ تعریف شد، با اضافه کردن یک راس جدید $x_{n+۱}$ و ملحق شدن آن به هر راس $X \setminus \{x_۱, y_n\}$ به‌دست آید. فرض کنید $X_F = X \cup \{x_{n+۱}\}$. برای یک FD-مجموعه دلخواه S از F، مشابه برهان قضیه ۲.۳.۲ خواهیم داشت $|S| \geq n(F) - ۲$. زیرا $x_{n+۱}$ به هر راس $X \setminus \{x_۱, y_n\}$ وصل شود، تحت پوشش آن راس قرار می‌گیرد. از طرفی طبق قضیه ۱.۳.۲ داریم، $fd\,(H) \leq n(H) - ۲$. در نتیجه $fd\,(H) = n(H) - ۲$. لذا حکم ثابت می‌شود. □

فرض کنید G گرافی از مرتبه n با حداقل دو یال باشد. فرض کنید G^* زیرگرافی از G است که با حذف رئوس منفرد در G به‌دست می‌آید. در این‌صورت $\gamma(G^*) \geq ۱$ و $n^* \geq ۳$. با توجه به قضیه ۱.۳.۲ برای گراف G^* خواهیم داشت، $fd(G^*) \leq n^* - ۲$. حال می‌توان با افزودن رئوس منفرد، هر $fd\,(G^*)$-مجموعه را به یک FD-مجموعه در G تعمیم داد. لذا $fd(G) \leq n - ۲$. بنابراین نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۴.۳.۲. اگر G گرافی از مرتبه $n \geq ۲$ باشد، آن‌گاه $fd\,(G) \leq n - ۲$.

لم ۵.۳.۲. [۳، ۱۰] برای هر گراف G از مرتبه n،

$$\alpha\,(G) \geq \sum_{u \subset V(G)} \frac{۱}{۱ + d_G(v)} \geq \frac{n}{\overline{d}\,(G) + ۱}$$

لم ۶.۳.۲. [۴] اگر G گرافی از مرتبه n باشد، آن‌گاه $rep(G) \geq n/\left(۲\overline{d}(G) - ۲\delta(G) + ۱\right)$.

لم ۷.۳.۲. [۱۱] اگر G گرافی از مرتبه n باشد، آن‌گاه $\alpha(G) \geq \dfrac{n}{\chi(G)}$.

گزاره ۸.۳.۲. فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد، در این‌صورت نتایج زیر برقرار خواهند بود.

(الف) اگر $n \geq ۲$ و $\delta(G) \geq ۱$، آن‌گاه $fd(G) \leq n - n/\left(\left(\overline{d}(G) + ۱\right)\Delta(G)\right)$.

(ب) $fd(G) \leq n - n/\left(\left(۲\overline{d}(G) - ۲\delta(G) + ۱\right)\chi(G)\right)$.

(ج) برای $r \geq ۲$، اگر G یک گراف r-منتظم باشد، آن‌گاه $fd(G) \leq rn/r + ۱$.

برهان. الف) فرض کنید B بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در G باشد. هنگامی‌که G راس منفردی ندارد، مجموعه $V \setminus B$ یک مجموعه احاطه‌گر در G خواهد بود. حال درجات رئوس B را در نظر بگیرید. حداکثر $\text{span}(G)$، مقادیر متمایز ممکن برای درجات وجود دارد، بنابراین طبق اصل لانه کبوتری یک مقدار مانند q وجود دارد که حداقل $\alpha(G)/\text{span}(G)$ بار در دنباله درجات راس‌های واقع در B ظاهر شده است. فرض کنید Q مجموعه‌ای از همه رئوس در B با درجه q باشد، آن‌گاه $Q \subseteq B$. فرض کنید $D = V - Q$، آن‌گاه D یک FD-مجموعه خواهد بود. بنابراین

$$fd(G) \leq n - |Q| \leq n - \frac{\alpha(G)}{\text{span}(G)} \tag{۱.۲}$$

لذا با توجه به اینکه $\mathrm{span}(G) \leq \Delta(G)$ و قضیه ۵.۳.۲ خواهیم داشت:

$$\frac{\alpha(G)}{\mathrm{span}(G)} \geq \frac{n}{(\overline{d}+۱)\,\mathrm{span}(G)} \geq \frac{n}{(\overline{d}+۱)\,\Delta(G)} \tag{۲.۲}$$

بنابراین با توجه به روابط (۱.۲) و (۲.۲) اثبات کامل می‌شود.

ب) فرض کنید $\mathrm{rep}(G) = m$ و $X = \{v_۱, \ldots, v_m\}$ مجموعه‌ای از رئوس با درجه یکسان در G باشند. هرگاه $H = G[X]$ زیرگراف القایی توسط مجموعه X باشد، بوضوح $\chi(H) \leq \chi(G)$ و بنابراین با توجه به لم ۶.۳.۲ و لم ۷.۳.۲ خواهیم داشت:

$$\alpha(H) \geq \frac{m}{\chi(H)} \geq \frac{m}{\chi(G)} \geq \frac{n}{(۲\overline{d}(G) - ۲\delta(G) + ۱)\,\chi(G)}$$

حال فرض کنید Q مجموعه مستقل ماکزیمم در H باشد، بنابراین $\alpha(H) = |Q|$. فرض کنید $D = V(G) - Q$، در این‌صورت D یک FD-مجموعه برای G خواهد بود. بنابراین $fd(G) \leq n - |Q| \leq n - \alpha(H)$. لذا حکم ثابت می‌شود.

ج) فرض کنید G یک گراف r-منتظم باشد. متذکر می‌شویم که در گراف‌های r-منتظم $\overline{d}(G) = \delta(G)$ و $\chi(G) \leq r + ۱$. لذا با توجه به قسمت (ب) خواهیم داشت:

$$fd(G) \leq n - \frac{n}{(۲\overline{d}(G) - ۲\delta(G) + ۱)\,\chi(G)} \leq n - \frac{n}{r+۱} \leq \frac{rn}{(r+۱)}$$

در نتیجه حکم ثابت شد.

□

۴.۲ درخت‌ها

در این بخش احاطه‌گری بر روی درخت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین منظور در ابتدا نتیجه‌ای از اور [۶]
را یادآوری می‌کنیم، بدین‌صورت که اگر گرافی از مرتبه n بدون راس تنها باشد، آنگاه خواهیم داشت $\gamma(G) \leq n/۲$ [۸]. به‌علاوه پایان [۷] و زنون[۸] نشان دادند که تنها گراف‌های همبندی که رابطه بالا برای آن‌ها به‌صورت تساوی برقرار است، گراف $C_۴$ و $\mathrm{cor}(H)$ در یک گراف همبند H است [۹]. در ادامه نیز کرانی‌هایی برای احاطه‌گری دلپذیر بر روی درخت‌ها را مورد بررسی قرار داده و نتایج و قضایای مربوط به آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۴.۲. هر $۱FD$-مجموعه در یک گراف شامل تمام رئوس پشتیبان قوی است.

برهان. گراف G را در نظر بگیرید. فرض کنید D یک $۱FD$-مجموعه در G باشد. فرض کنید v یک راس پشتیبان قوی دلخواه در G باشد. اگر $v \notin D$، آنگاه v توسط برگ همسایه‌اش احاطه می‌شود،

[۶] Ore

[۷] Payan

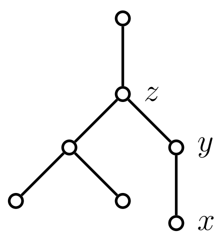
[۸] xoung

لذا هر برگ همسایه از v متعلق به D است. اگر v دارای حداقل دو برگ همسایه باشد، آن‌گاه خواهیم داشت $|N(v) \cap D| \geq ۲$ و این تناقض است، بنابراین $v \in D$. □

قضیه ۲.۴.۲. اگر T تاجی از یک درخت و از مرتبه n باشد، آن‌گاه $fd(T) = n/۲$. به‌علاوه، $V(T)$ می‌تواند به دو fd−مجموعه افراز شود.

برهان. نتیجه برای $n = ۲$ بدیهی است. بنابراین T را تاجی از یک درخت و از مرتبه $n \geq ۴$ در نظر می‌گیریم. در این‌صورت با توجه به نتایج زنون و پایان داریم، $\gamma(T) = n/۲$ و یادآور می‌شویم که $|S(T)| = |L(T)| = n/۲$. به‌علاوه هر دو مجموعه $S(T)$ و $L(T)$ متعلق به یک $۱FD$−مجموعه از T هستند. بنابراین $fd(T) \leq fd_۱(T) \leq n/۲ = \gamma(T)$. از طرفی تازمانی‌که هر FD−مجموعه برای T یک مجموعه احاطه‌گر باشد، خواهیم داشت $n/۲ = \gamma(T) \leq fd(T) \leq n/۲$. در نتیجه $fd(T) = n/۲$. در این حالت خاص که $fd(T) = n/۲$ هر دو مجموعه $S(T)$ و $L(T)$، $fd(T)$−مجموعه‌ها هستند. □

تعریف ۳.۴.۲. ۳−مسیر نهایی[۹]، مسیری مانند xyz در درخت T است، به‌طوریکه x یک برگ و $N(y) = \{x, z\}$ و $d_T(z) \geq ۲$ است. هم‌چنین z را راس پایه‌ای برای ۳−مسیر نهایی می‌نامیم. (شکل(۶.۲))



شکل ۶.۲: ۳− مسیر نهایی در گراف G

قضیه ۴.۴.۲. اگر T درختی از مرتبه $n \geq ۲$ باشد، آن‌گاه $fd_۱(T) \leq n/۲$ و هم‌چنین تساوی برقرار است اگر و فقط اگر T تاجی از یک درخت باشد.

[۹] 3-end-path

برهان. با توجه به قضیه ۲.۴.۲ اگر T تاجی از یک درخت باشد، آنگاه $fd(T) = n/۲$. حال به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. آزمون استقرا، اگر $۲ \leq n \leq ۷$، در این‌صورت به وسیله چک کردن درخت‌های احتمالی نتیجه برقرار خواهد شد. فرض استقرا، فرض کنید $n \geq ۸$ و برای هر درخت T' از مرتبه n' که $۲ \leq n' \leq n$، داریم $fd_۱(T) \leq n'/۲$ و حالت تساوی زمانی برقرار است که T' تاجی از درخت باشد. حکم استقرا، فرض کنید T درختی از مرتبه n باشد. اگر T یک ستاره $K_{۱,n}$ باشد، آنگاه راس مرکزی ستاره یک $۱FD$-مجموعه است. در این‌صورت $fd_۱(T) = ۱ \leq n/۲$. حال فرض کنید T ستاره نباشد. در این‌صورت T شامل راسی مانند w است که همه همسایه‌هایش بجز یکی از آن‌ها که y می‌نامیم، برگ باشد. فرض کنید تعداد برگ‌های همسایه w برابر با t باشد، یعنی $t = d(w) - ۱$. حال دو حالت زیر را در نظر بگیرید.

۱) فرض کنید $t = ۱$، آنگاه $d(w) = ۲$. فرض کنید z برگی باشد که به w متصل است. در این‌صورت ywz یک ۳-مسیر نهایی در T است که y راس پایه‌ای آن است. فرض کنید $T^* = T - \{w, z\}$ و T^* از مرتبه $n^* = n - ۲$ باشد. با در نظر گرفتن فرض استقرا روی T^* خواهیم داشت، $fd_۱(T^*) \leq n^*/۲ = (n-۲)/۲ = (n/۲ - ۱)$. حالت تساوی نیز زمانی برقرار است که T^* تاجی از یک درخت باشد. فرض کنید D^* یک $fd(T^*)$-مجموعه باشد. در ابتدا فرض کنید T^* تاجی از یک درخت نباشد، در این‌صورت $|D^*| < n/۲ - ۱$. بعلاوه T نیز تاجی از یک درخت نیست. اگر $y \in D^*$ آنگاه $D = D^* \cup \{w\}$. اگر $y \notin D^*$ آنگاه $D = D^* \cup \{z\}$. در هر دو حالت D یک $۱FD$-مجموعه برای T خواهد بود، بنابراین $fd_۱(T) \leq |D| < (n/۲ - ۱) + ۱ = n/۲$. حال ما فرض می‌کنیم که T^* تاجی از یک درخت باشد. در این‌صورت y یا یک برگ است و یا یکی از رئوس پشتیبان T^* است. فرض کنید y برگی از T^* باشد. زمانی که T^* حداقل پنج راس دارد، آن شامل حداقل دو تا ۳-مسیر نهایی، با راس‌های مجزا یا حداکثر رئوس پایه‌ای مشترک است. بنابراین T^* شامل یک ۳-مسیر نهایی مانند abc است که c پایه‌ای برای مسیر است و هیچ اشتراکی با $N[y]$ ندارد. حال درخت $T^{**} = T - \{a, b\}$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که در T^{**} راس y از درجه دو است و برگ همسایه ندارد. از این رو T^{**} تاجی از درخت نیست، چون هر راس باید یک برگ آویزان داشته باشد تا تاج محسوب شود، در حالی‌که y هیچ برگ آویزانی ندارد و خود نیز برگ نمی‌باشد. حال با در نظر گرفتن فرض استقرا روی T^{**} خواهیم داشت، $fd_۱(T^{**}) \leq n/۲ - ۱$ و همان‌طور که در بالا اشاره شد، هر $fd_۱(T^{**})$ از طریق اضافه شدن به a یا b می‌تواند به یک $۱FD$-مجموعه برای T تعمیم داده شود و این موضوع اشاره بر این دارد که $fd_۱(T) < n/۲$. حال فرض کنید که y یک راس پشتیبان برای T^* است. بنابراین T نیز تاجی از یک درخت است و با استفاده از قضیه ۲.۴.۲ خواهیم داشت $fd(T) = n/۲$. لذا حکم در خصوص این مورد به اثبات رسید.

۲) فرض کنید $t \geq ۲$، بنابراین T تاجی از یک درخت نیست. فرض کنید $x_۱, \ldots, x_t$، t برگ همسایه برای w باشند و فرض کنید $T^* = T - \{x_۱, \ldots, x_t\}$. ابتدا فرض کنید T^* تاجی از یک درخت نباشد، با استفاده از فرض استقرا برای T^* خواهیم داشت، $fd_۱(T^*) < (n-t)/۲$. حال فرض کنید D^* یک $fd_۱(T^*)$-مجموعه باشد. اگر $y \in D^*$، آنگاه $D = D^* \cup \{w\}$. حال

اگر $y \notin D^*$، در این‌صورت $w \in D^*$، بنابراین خواهیم داشت $D = D^*$. در هر دو مورد D یک FD۱-مجموعه برای T خواهد بود.
بنابراین $fd_۱(T) \le |D| \le |D^*| + ۱ < (n-t)/۲ + ۱ \le n/۲$. حال ما فرض می‌کنیم T^* تاجی از درخت باشد، با استفاده از قضیه۲.۴.۲، $fd_۱(T^*) = (n-t)/۲$ و $L(T^*)$ یک $fd_۱(T^*)$-مجموعه خواهد بود. چون $w \in L(T^*)$، پس $L(T^*)$ یک FD۱-مجموعه برای T نیز می‌باشد. بنابراین $fd_۱(T) \le (n-t)/۲ < n/۲$. در نتیجه حکم ثابت شد.

□

حال با توجه به قضیه ۲.۴.۲ و قضیه ۴.۴.۲ ، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۵.۴.۲. اگر T درختی از مرتبه $n \ge ۲$ باشد، آن‌گاه $fd(G) \le n/۲$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر T تاجی از یک درخت باشد.

فینک[۱۰] و جیکوبسن[۱۱] نشان دادند که برای هر درخت T با n راس رابطه $\gamma_۲(T) \ge \lceil (n+۱)/۲ \rceil$ برقرار است [۷]. این رابطه و قضیه ۴.۴.۲ به ما کمک می‌کند تا ثابت کنیم که مینیمم هر FD-مجموعه در یک درخت، یک FD۱-مجموعه است.

نتیجه ۶.۴.۲. در یک درخت، مینیمم هر FD-مجموعه یک FD۱-مجموعه است.

برهان. فرض کنید T یک درخت و D یک $fd(T)$-مجموعه باشد. بنابراین برای $k \ge ۱$، D یک kFD-مجموعه خواهد بود. فرض کنید $k \ge ۲$، در این‌صورت به‌ازای تمام $x \in V \setminus D$، خواهیم داشت $|N(x) \cap D| = k \ge ۲$ و این می‌رساند که D یک مجموعه ۲-احاطه‌گر برای T است و بنابراین $|D| \ge \gamma_۲(T)$. از این‌رو توسط نتیجه فینک و جیکوبسن خواهیم داشت،
$fd(T) = |D| \ge \gamma_۲(T) \ge \lceil (n+۱)/۲ \rceil > n/۲$ و این متناقض با قضیه ۴.۴.۲ است. در نتیجه $k = ۱$ و D یک FD۱-مجموعه است. □

همانطور که در فصل اول بیان شد، یک FD۱-مجموعه به‌طور صریح یک مجموعه احاطه‌گر تام است، بنابراین با استفاده از نتیجه قبل می‌توان همه نتایج روی احاطه‌گری دلپذیر در خصوص درختان را به‌صورت معادل برای احاطه‌گری تام نیز بیان کرد. مجموعه رئوس داخلی یک درخت، یک FD-مجموعه در درخت است، که این اشاره به نتیجه زیر دارد.

نتیجه ۷.۴.۲. اگر T درختی با $n \ge ۳$ راس و L برگ باشد، آن‌گاه $fd(T) \le n - L$.

برهان. فرض کنید مجموعه برگ‌ها را با A نشان می‌دهیم. در این‌صورت $V(T) - A$ یک FD-مجموعه برای T خواهد بود، در نتیجه $fd(T) \le n - L$. □

[۱۰] Fink

[۱۱] Jacobson

متذکر می‌شویم که اگر درختی برگ‌هایی بیش از رئوس داخلی داشته باشد، آن‌گاه کران بالا روی مقدار احاطه‌گری دلپذیر از درختی که از نتیجه ۷.۴.۲ حاصل شد بهتر از کران قضیه ۴.۴.۲ خواهد بود. قضیه بعدی مشخصه درختانی است که در آن مجموعه غیربرگ‌ها مینیمم FD-مجموعه نیستند.

قضیه ۸.۴.۲. اگر $T=(V,E)$ درختی با $n\geq ۳$ راس و L برگ باشد، آن‌گاه احکام زیر معادلند.

الف) $fd(T)<n-L$.

ب) برای هر $fd(T)$-مجموعه مانند D دو راس در $V\setminus D$ موجودند که با هم مجاور هستند.

ج) درخت T شامل یک زیردرخت تاجی ویژه است.

برهان. فرض کنید D یک $fd(T)$-مجموعه دلخواه باشد. با توجه به نتیجه ۶.۴.۲، مجموعه D یک ۱FD-مجموعه برای T است. حال ثابت می‌کنیم که احکام بالا معادلند.

الف $\Leftarrow$ ب) فرض کنید $fd(T)<n-L$، در این‌صورت $D\neq V\setminus L(T)$. بنابراین یا $D\subset V\setminus L(T)$ $(D\neq V-L(T))$ و یا $L(T)\cap D\neq\emptyset$. فرض کنید $D\subset V\setminus L(T)$ و فرض کنید $x\in V\setminus(D\cup L(T))$. زمانی‌که $d_T(x)\geq ۲$ و $|N(x)\cap D|=۱$، یک راس مانند y وجود دارد به‌طوریکه $y\in N(x)-D$ و بنابراین (ب) برقرار است. حال فرض کنید $L(T)\cap D\neq\emptyset$. فرض کنید $z\in L(T)\cap D$ و فرض کنید $N(z)=\{y\}$. اگر $y\in D$، آن‌گاه $D\setminus\{z\}$ یک ۱FD-مجموعه برای T خواهد بود و این تناقض با مینیمم بودن D دارد. بنابراین $y\notin D$، در این‌صورت $N(y)\cap D=\{z\}$. زمانی‌که $n\geq ۳$، وجود دارد راس $x\in N(y)\setminus D$. بنابراین (ب) به اثبات می‌رسد.

ب $\Leftarrow$ ج) فرض کنید برای هر fd-مجموعه مانند D دو راس در $V-D$ وجود دارند که با هم مجاورند. فرض کنید x و y دو راس مجاور در $V-D$ باشند. یادآوری می‌کنیم که $x,y\in V-L(T)$. فرض کنید $x'\in N(x)\cap D$ و $y'\in N(y)\cap D$. همچنین زیردرخت $T'=T[\{x,x',y,y'\}]$ از T را در نظر بگیرید. لذا $L(T')=V(T')\cap D=\{x',y'\}$ و $S(T')=V(T')-L(T')=\{x,y\}$. در این میان همه زیردرخت‌های T که شامل x و y هستند و با این احتمال که برگ‌های زیردرخت راس‌هایی از D هستند، فرض کنید که H یکی از زیردرخت‌هایی از مرتبه ماکزیمم باشد. بنابراین $\{x,y\}\subset V(H)$ و $L(H)=V(H)\cap D$ و H یک درخت از مرتبه ماکزیمم است. فرض کنید $S=V(H)-L(H)$. ما نشان می‌دهیم که H تاجی از یک درخت است. یعنی باید نشان دهیم که برای هر $u\in S$ داریم، $|N(u)\cap L(H)|=۱$. در ابتدا فرض کنید $N(u)\cap L(H)=\emptyset$. هنگامی‌که $L(H)=V(H)\cap D$، راسی مانند $y\in V-V(H)$ وجود دارد، به‌طوریکه $y\in D$ و $y\in N(u)$. اما با افزودن راس y و یال uy به درخت H، درخت H' حاصل می‌شود به‌طوریکه $\{x,y\}\subset V(H')$ و $L(H')=V(H')\cap D$ و این در تناقض با ماکزیمم بودن H است. بنابراین برای هر $u\in S$ داریم $|N(u)\cap L(H)|\geq ۱$. اگر برای هر $u\in S$، $|N(u)\cap L(H)|>۱$. در این‌صورت $|N(u)\cap D|>۱$ و این در تناقض

با $1FD$-مجموعه بودن D دارد. بنابراین برای هر $u \in S$، $|N(u) \cap L(H)| = 1$. لذا H تاجی از یک درخت است و $S(H) = S$. اگر T تاجی از یک درخت باشد، در این‌صورت طبق قضیه ۲.۴.۲ مجموعه $S(T)$ یک $fd(T)$-مجموعه خواهد بود که این با قسمت (ب) در تناقض است. بنابراین T تاجی از یک درخت نیست. لذا $H \neq T$. حال فرض کنید $z \in V(H)$ و فرض کنید یک راس مانند v وجود دارد، به‌طوریکه $v \in N(z) \cap S$. فرض کنید w راسی از D باشد که در همسایگی z در T است. وقتی T بدون دور است، $w \in V - V(H)$. اما با اضافه کردن راس z و یال wz به درخت H، درخت H' حاصل می‌شود به‌طوریکه $\{x, y\} \subset V(H')$ و $L(H') = V(H') \cap D$ و این در تناقض با ماکزیمم بودن H است. بنابراین $N(z) \cap S = \emptyset$. این حقیقت برای هر راس $z \in V - V(H)$ صادق است. در نتیجه H یک زیردرخت تاجی ویژه است و بنابراین اثبات کامل می‌شود.

ج $\Leftarrow$ الف) فرض کنید درخت T شامل یک زیردرخت تاجی ویژه مانند H است.
فرض کنید $D = (V - (L(T) \cup S(H)) \cup (L(H) \cap L(T))$ و فرض کنید $v \in V - D = S(H) \cup (L(T) - V(H))$. اگر $v \in S(H)$، در این‌صورت وقتی‌که H یک زیردرخت تاجی ویژه از T است و $L(H) \subseteq D$، داریم $|N_T(v) \cap D| = |N_T(v) \cap L(H)| = 1$. اگر $v \in L(T) - V(H)$، در این‌صورت وقتی‌که همسایه v در T متعلق به D است، مجددا داریم $|N_T(v) \cap D| = 1$. بنابراین D یک $1FD$-مجموعه برای T است و
$fd(T) \leq |D| = |V - L(T)| - |S(H)| + |L(H) \cap L(T)|$. وقتی‌که H یک زیردرخت تاجی ویژه از T است حداقل یک برگ از T وجود دارد که برگی از H نمی‌باشد. بنابراین
$|L(H) \cap L(T)| < |L(H)| = |S(H)|$. این می‌رساند که $fd(T) < |V - L(T)| = n - L$ و در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

□

ما یک نتیجه‌گیری براساس قضیه ۸.۴.۲، برای درختانی که مجموعه غیربرگ‌های آن، مینیمم FD-مجموعه هستند، به‌دست می‌آوریم.

نتیجه ۹.۴.۲. اگر $T = (V, E)$ درختی با $n \geq 3$ راس و L برگ باشد، آن‌گاه احکام زیر معادلند.

الف) $fd(T) = n - L$.

ب) یک $fd(T)$-مجموعه مانند D وجود دارد، به‌طوریکه D یک پوشش راسی است.

ج) درخت T شامل هیچ زیردرخت تاجی ویژه‌ای نیست.

۵.۲ گراف‌های مسطح بیرونی ماکسیمال

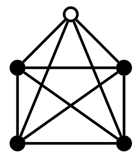
در این بخش، ما مقدار احاطه‌گری دلپذیر بر روی گراف‌های مسطح بیرونی ماکسیمال را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بدین منظور، ابتدا مفهوم یک مجموعه منظم بیرونی را بیان می‌کنیم و سپس به مفهوم و

قضایای مربوط به گراف‌های مسطح بیرونی ماکسیمال می‌پردازیم.

تعریف ۱.۵.۲. زیرمجموعه Q از رئوس گراف G را یک مجموعه منظم بیرونی[۱۲] نامیم، هرگاه برای هر دو راس $u, v \in Q$ داشته باشیم، $|N(u) \cap (V \setminus Q)| = |N(v) \cap (V \setminus Q)| > ۰$. که به اختصار آن را با OR-مجموعه نمایش می‌دهیم.

بزرگ‌ترین اندازه یک مجموعه منظم بیرونی را عدد منظم بیرونی نامیده و آن را با ξ_{or} نمایش می‌دهیم. مجموعه منظم بیرونی از اندازه ξ_{or} را به اختصار با یک ξ_{or}- مجموعه نشان می‌دهیم.

شکل (۷.۲) گراف کامل $K_۵$ را نشان می‌دهد که در آن $\xi_{or}(K_۵) = ۴$.



شکل ۷.۲: $\xi_{or}(K_۵) = ۴$

نتیجه ۲.۵.۲. اگر $G = \overline{K_n}$، آن‌گاه $\xi_{or}(G) = ۰$.

قضیه ۳.۵.۲. هرگاه G گرافی از مرتبه n باشد، آن‌گاه $\xi_{or} \geq ۰$، تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G = \overline{K_n}$.

قضیه ۴.۵.۲. برای هر گراف G از مرتبه $n \geq ۲$ داریم، $fd(G) + \xi_{or}(G) = n$.

برهان. اگر $G = \overline{K_n}$، آن‌گاه $fd(G) = n$ و طبق قرارداد ۲.۵.۲، $\xi_{or}(G) = ۰$. لذا نتیجه حاصل می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم $G \neq \overline{K_n}$. فرض کنید D یک $fd(G)$-مجموعه باشد. طبق قضیه ۴.۲.۲ قسمت (ب) خواهیم داشت، $fd(G) < n$. فرض کنید $Q = V - D$، در این‌صورت Q یک OR-مجموعه در G خواهد بود. لذا خواهیم داشت

$$\xi_{or}(G) \geq |Q| = n - fd(G) \Rightarrow fd(G) + \xi_{or}(G) \geq n. \tag{۳.۲}$$

بالعکس، فرض کنید Q یک $\xi_{or}(G)$-مجموعه باشد. طبق قضیه ۳.۵.۲، $\xi_{or}(G) > ۰$ از طرفی با استفاده از تعریف، داریم $\xi_{or}(G) < n$. فرض کنید $D = V - Q$، در این‌صورت D یک FD-مجموعه برای گراف G خواهد بود. لذا خواهیم داشت

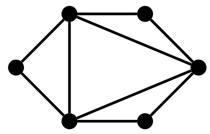
$$fd(G) \geq |D| = n - \xi_{or}(G) \Rightarrow fd(G) + \xi_{or}(G) \leq n. \tag{۴.۲}$$

در نتیجه با توجه به روابط (۳.۲) و (۴.۲) خواهیم داشت، $fd(G) + \xi_{or}(G) = n$. □

[۱۲] Out-regular set

تعریف ۵.۵.۲. یک گراف مسطح بیرونی ماکسیمال[۱۳] که به اختصار با MOP نمایش می‌دهیم، مثلثی کردن یک گراف چند ضلعی منتظم است که هر وجه کران‌دار آن یک مثلث است.
حداقل درجه روی هر MOP برابر ۲ است و رئوس از درجه دو زمانی مستقل خواهند بود که $n \geq ۴$ باشد. تعداد یال‌های یک MOP برابر با $۲n - ۳$ و $\bar{d}(G) = ۴ - ۶/n$ است.

شکل(۸.۲) یک گراف مسطح بیرونی برای یک شش ضلعی منتظم را نشان می‌دهد.



شکل ۸.۲: گراف مسطح بیرونی ماکسیمال

لم ۶.۵.۲. [۱۲] اگر G یک MOP روی $n \geq ۳$ باشد، آن‌گاه رئوس از درجه سه یک گراف دوبخشی را القا می‌کنند.

قضیه ۷.۵.۲. اگر G یک MOP روی $n \geq ۳$ باشد، آن‌گاه $fd(G) < ۱۷n/۱۹$.

برهان. برای $n = ۳$، $fd(G) = ۱ < ۱۷n/۱۹$. بنابراین ما فرض می‌کنیم که $n \geq ۴$. فرض کنید مجموعه رئوس از درجه i در G را با V_i نمایش می‌دهیم که $i = ۲, ۳, ۴, ۵$ و فرض می‌کنیم $|V_i| = n_i$.
علاوه‌براین فرض کنید t تعداد رئوس از درجه حداقل ۶ در G باشد، آن‌گاه برای تعداد رئوس و یال‌ها به‌ترتیب خواهیم داشت، $n_۲ + n_۳ + n_۴ + n_۵ + t = n$ و $۲n_۲ + ۳n_۳ + ۴n_۴ + ۵n_۵ + ۶t \leq ۲m = ۲(۲n - ۳) = ۴n - ۶$، که تعداد یال‌ها با توجه به قضیه ۱۴.۱.۱ در فصل اول محاسبه می‌شود. اگر $n_۲ \leq ۲n/۱۹$، $n_۳ \leq ۴n/۱۹$، $n_۴ \leq ۶n/۱۹$ و $n_۵ \leq ۶n/۱۹$، آن‌گاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
۴n - ۶ &\geq ۲n_۲ + ۳n_۳ + ۴n_۴ + ۵n_۵ + ۶t \\
&= ۲n_۲ + ۳n_۳ + ۴n_۴ + ۵n_۵ + ۶(n - (n_۲ + n_۳ + n_۴ + n_۵)) \\
&= ۶n - ۴n_۲ - ۳n_۳ - ۲n_۴ - n_۵ \\
&\geq ۶n - \frac{۸}{۱۹}n - \frac{۱۲}{۱۹}n - \frac{۱۲}{۱۹}n - \frac{۶}{۱۹}n \\
&= ۴n.
\end{aligned}$$

و این تناقض است. بنابراین $n_۲ > ۲n/۱۹$، $n_۳ > ۴n/۱۹$، $n_۴ > ۶n/۱۹$ و $n_۵ > ۶n/۱۹$. در این‌صورت ابتدا فرض‌کنید که $n_۲ > ۲n/۱۹$، بنابراین وقتی‌که $n \geq ۴$، مجموعه $V_۲$ طبق تعریف MOP یک مجموعه مستقل است و بنابراین یک مجموعه منظم بیرونی را تشکیل می‌دهد، لذا خواهیم داشت

[۱۳] Maximal Outerplanar

$\xi_{or}(G) \geq n_۲ > ۲n/۱۹$. بنابراین طبق قضیه ۴.۵.۲ داریم، $fd(G) = n - \xi_{or}(G) < ۱۷n/۱۹$.
فرض کنید $n_۳ > ۴n/۱۹$. فرض کنید $V'_۳$ یک زیرمجموعه مستقل ماکسیمال از $V_۳$ باشد. طبق لم ۶.۵.۲، گراف $G[V_۳]$ یک گراف دوبخشی خواهد بود، بنابراین $|V'_۳| \geq |V_۳|/۲ > ۲n/۱۹$. بنابراین $V'_۳$ یک مجموعه منظم بیرونی خواهد بود، لذا خواهیم داشت $\xi_{or}(G) \geq |V'_۳| > ۲n/۱۹$. بنابراین طبق قضیه ۴.۵.۲ داریم، $n - \xi_{or}(G) = fd(G) < ۱۷n/۱۹$. حال فرض کنید $n_۴ > ۶n/۱۹$، فرض کنید $V'_۴$ یک مجموعه مستقل ماکسیمال از $V_۴$ باشد. زمانی‌که G ۳-رنگ‌پذیر باشد، خواهیم داشت $|V'_۴| \geq |V_۴|/۳ > ۲n/۱۹$. بنابراین مجموعه $V'_۴$ یک مجموعه منظم بیرونی خواهد بود، لذا $\xi_{or}(G) \geq$ $|V'_۴| > ۲n/۱۹$. لذا طبق قضیه ۴.۵.۲ می‌توان نتیجه گرفت که $n - \xi_{or}(G) = fd(G) < ۱۷n/۱۹$.
به‌طور مشابه اگر $n_۵ > ۶n/۱۹$، آن‌گاه $fd(G) < ۱۷n/۱۹$. در هر چهار مورد داریم $fd(G) < ۱۷n/۱۹$. □

۶.۲ کران‌های نردهوس گادوم

در این بخش ما کران‌های نردهوس گادوم[۱۴] را برای عدد احاطه‌گری دلپذیر در گراف G، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۱.۶.۲. هرگاه G یک گراف روی n راس باشد، آن‌گاه نتایج زیر را خواهیم داشت.

الف) اگر $n \geq ۵$، آن‌گاه $۳ \leq fd(G) + fd(\overline{G}) \leq ۲n - ۴$ و هر دو کران تیز هستند.

ب) اگر $n \geq ۴$، آن‌گاه $۲ \leq fd(G) \cdot fd(\overline{G}) \leq (n-۲)^۲$ و هر دو کران تیز هستند.

برهان. ابتدا دو کران بالا را ثابت می‌کنیم. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم G همبند باشد و هم‌چنین طبق قضیه ۱.۳.۲ داریم، $fd(G) \leq n - ۲$. اگر در گراف $\overline{G}$، $m(\overline{G}) \geq ۲$، آن‌گاه طبق نتیجه ۴.۳.۲، $fd(\overline{G}) \leq n - ۲$ و بنابراین $fd(G) + fd(\overline{G}) \leq ۲n - ۴$ و $fd(G) \cdot fd(\overline{G}) \leq (n-۲)^۲$.
اگر $m(\overline{G}) = ۱$، آن‌گاه برای یال مشخص e از K_n داریم، $\overline{G} = \overline{K}_{n-۲} \cup K_۲$ و $G = K_n - e$. بنابراین $fd(G) = ۱$ و $fd(\overline{G}) = n - ۱$، در نتیجه هنگامی‌که $n \geq ۴$، $fd(G) + fd(\overline{G}) = n \leq ۲n - ۴$ و $fd(G) \cdot fd(\overline{G}) = n - ۱ \leq (۲n-۴)^۲$. در انتها، اگر $m(\overline{G}) = ۰$، آن‌گاه $\overline{G} = \overline{K_n}$ و $G = K_n$.
در این‌صورت برای $n \geq ۵$ داریم، $fd(G) + fd(\overline{G}) = ۱ + n \leq ۲n - ۴$ و برای $n \geq ۴$ داریم، $fd(G) \cdot fd(\overline{G}) = n \leq (n-۲)^۲$. در همه حالت‌ها، برای $n \geq ۵$ داریم، $fd(G) + fd(\overline{G}) \leq ۲n - ۴$ و برای $n \geq ۴$ داریم، $fd(G) \cdot fd(\overline{G}) \leq (n-۲)^۲$.

حال نشان می‌دهیم که کران‌های بالا تیز هستند. بدین منظور برای $n \geq ۶$ که زوج باشند، فرض کنید $G = H_{n/۲}$، در حالی‌که برای $n \geq ۷$ فرد داشته باشیم، $G = F_{(n-۱)/۲}$، به‌طوری‌که گراف‌های H_n و F_n همانند برهان قضیه ۱.۳.۲ تعریف شوند، آن‌گاه G از مرتبه n خواهد بود، چنانچه در قضیه ۱.۳.۲ نشان دادیم، $fd(G) = n - ۲$. زمانی‌که گراف $\overline{G}$ همبند است، طبق قضیه ۱۲.۲.۲ قسمت (الف) داریم $fd(\overline{G}) = n - ۲$. بنابراین $fd(G) + fd(\overline{G}) = ۲n - ۴$ و $fd(G) \cdot fd(\overline{G}) = (n-۲)^۲$.

[۱۴] Nordhaus-Gaddum

برای $n = ۴,۵$، کافیست $G = C_n$ را در نظر بگیریم که $fd(G) = fd(\overline{G}) = n - ۲$. بنابراین کران‌های بالای دو قسمت اثبات شد.

برای کران پایین بدون کاستن از کلیت فرض کنید، $۱ \leq fd(\overline{G})$. اگر $fd(G) \geq ۲$، در این‌صورت $fd(G) + fd(\overline{G}) \geq ۳$ و $fd(G) \cdot fd(\overline{G}) \geq ۲$. بنابراین فرض کنید $fd(G) = ۱$. اما در این‌صورت یک راس از G از درجه $n - ۱$ است، بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\overline{G}$ همبند نیست. بنابراین $fd(\overline{G}) \geq ۲$ و بنابراین خواهیم داشت، $fd(G) + fd(\overline{G}) \geq ۳$ و $fd(G) \cdot fd(\overline{G}) \geq ۲$. حال برای آن‌که نشان دهیم کران‌های پایین تیز هستند، گراف $G = K_{۱,n-۱}$ را در نظر می‌گیریم، که در آن $fd(\overline{G}) = ۲$ و $fd(G) = ۱$. بنابراین برای کران پایین خواهیم داشت، $fd(G)+fd(\overline{G}) = ۳$ و $fd(G)\cdot fd(\overline{G}) = ۲$.
در نتیجه حکم ثابت شد. □

یادآوری می‌کنیم که در قضیه ۱.۶.۲ شرط‌های $n \geq ۵$ و $n \geq ۴$ باید وجود داشته باشند، زیرا در غیر این‌صورت برای حالت(الف) فرض کنید $G = K_۴$، که G از مرتبه ۴ است. در این‌صورت خواهیم داشت، $fd(G) + fd(\overline{G}) = ۱ + ۴ = ۵ > ۲n - ۴ = ۴$. لذا شرط $n \geq ۵$ در قسمت(الف) نمی‌تواند حذف شود. علاوه‌براین برای قسمت(ب) نیز اگر $G = K_۳$ را در نظر بگیریم، در این‌صورت خواهیم داشت $fd(G) = ۱$ و $fd(\overline{G}) = ۳$. بنابراین $fd(G) \cdot fd(\overline{G}) = ۳ > (n - ۲)^۲ = ۱$. لذا این شرط نیز نمی‌تواند حذف شود.

فصل ۳

بررسی تساوی بین عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری دلپذیر در درخت‌ها

در این فصل ابتدا ساختاری از درخت‌هایی که در آن‌ها $fd(T) = \gamma(T)$ را مشخص می‌کند را ارائه می‌دهیم و سپس به تعریف عملگرها و نتایج مربوط به آن‌ها می‌پردازیم.

بدین منظور خانواده‌ای از درخت‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{T}$ خانواده‌ای از درخت‌های T باشد که می‌تواند از دنباله‌ای از درخت‌های $T_1, T_2, \ldots, T_k = T (k \geq 1)$ به‌دست آید. در اینجا T_1 ستاره‌ای $K_{1,t}$ با $t \geq 1$ خواهد بود. همچنین T_{i+1} می‌تواند به‌صورت بازگشتی از T_i توسط یکی از عملگرهای زیر برای $1 \leq i \leq k - 1$ به‌دست آید.

۱.۳ تعاریف و نتایج

- خانواده $\mathcal{F}_0$ کلاسی از درخت‌های ریشه‌داری است که هر برگ به فاصله ۲ از ریشه قرار گرفته‌اند و درجه همه پشتیبان‌ها ۲ است.

- خانواده $\mathcal{F}_1$ کلاسی از درخت‌های ریشه‌دار به‌صورت $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_a \cup \mathcal{F}_b$ است، به‌طوریکه

  - $\mathcal{F}_a$ کلاسی از درخت‌های ریشه‌داری است که هر برگ به فاصله ۲ از ریشه قرار گرفته‌اند و درجه هر پشتیبان حداقل ۲ است.

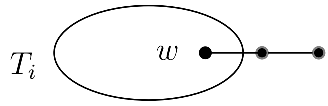
  - هر درخت $\mathcal{F}_b$ از اضافه کردن برگ‌هایی به ریشه $\mathcal{F}_a$ به‌دست آمده باشد.

- خانواده $\mathcal{F}_2$ کلاسی از درخت‌های ریشه‌دار به‌صورت $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_c \cup \mathcal{F}_d$ است، به‌طوریکه

  - $\mathcal{F}_c$ کلاسی از درخت‌های ریشه‌داری است که هر برگ به فاصله ۲ از ریشه قرار گرفته‌اند و درجه هر پشتیبان برابر ۲ است.

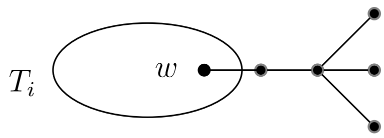
- هر درخت $\mathcal{F}_d$ از اضافه کردن یک برگ به ریشه $\mathcal{F}_c$ به‌دست آمده باشد.

عملگر $\mathcal{O}_1$. فرض کنید T_i درختی باشد و $w \in V(T_i)$ راسی باشد که $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_i - w)$. در این‌صورت یک راس از ستاره $K_{1,1}$ را به w وصل می‌کنیم تا درخت T_{i+1} به‌دست آید، که در شکل (۱.۳) مشاهده می‌کنید.



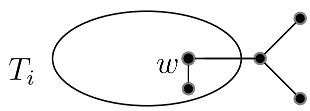
شکل ۱.۳: درخت T_{i+1}

عملگر $\mathcal{O}_2$. فرض کنید T_i درختی باشد و $w \in V(T_i)$ که w متعلق به هیچ $\gamma(T_i)$−مجموعه نباشد و $\gamma(T_i) - 1 \leq \gamma(T_i - w)$. در این‌صورت یک برگ از ستاره $K_{1,r}(r \geq 2)$ را به w وصل می‌کنیم تا درخت T_{i+1} به‌دست آید، که در شکل (۲.۳) مشاهده می‌کنید.



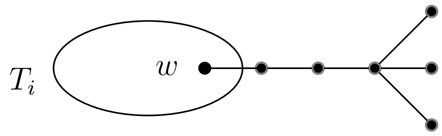
شکل ۲.۳: درخت T_{i+1}

عملگر $\mathcal{O}_3$. فرض کنید T_i درختی باشد و $w \in V(T_i)$ راسی پشتیبان باشد که یا $d_{T_i}(w) \geq 3$ و یا $d_{T_i}(w) = 2$ و w در هر $\gamma(T_i)$−مجموعه باشد. در این‌صورت مرکز ستاره $K_{1,r}(r \geq 2)$ را به w وصل می‌کنیم تا درخت T_{i+1} به‌دست آید، که در شکل (۳.۴) مشاهده می‌کنید.



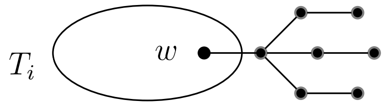
شکل ۳.۳: درخت T_{i+1}

عملگر $\mathcal{O}_4$. فرض کنید T_i درختی باشد و $w \in V(T_i)$ که w در حداقل یک $\gamma(T_i)$−مجموعه باشد و راسی باشد که $\gamma(T_i) - 1 \leq \gamma(T_i - w)$. در این‌صورت یک برگ از ستاره $K_{1,r}(r \geq 2)$ را به w وصل می‌کنیم، سپس یال جدید را زیرتقسیم می‌کنیم تا درخت T_{i+1} به‌دست آید، که در شکل (۴.۳) مشاهده می‌کنید.



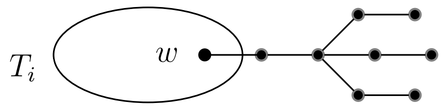
شکل ۴.۳: درخت T_{i+1}

عملگر $\mathcal{O}_5$. فرض کنید T_i درختی باشد و $w \in V(T_i)$ که w متعلق به یک $\gamma(T_i)$−مجموعه باشد و راسی باشد که $\gamma(T_i - w) \leq \gamma(T_i)$. در این‌صورت مرکز درختی از $\mathcal{F}_0$ را به w وصل می‌کنیم تا درخت T_{i+1} به‌دست آید، که در شکل (۵.۳) مشاهده می‌کنید.



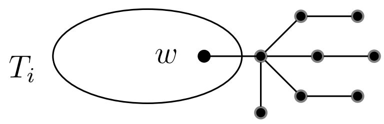
شکل ۵.۳: درخت T_{i+1}

عملگر $\mathcal{O}_6$. فرض کنید T_i درختی باشد و $w \in V(T_i)$ که w متعلق به هیچ $\gamma(T_i)$−مجموعه نباشد و راسی باشد که $\gamma(T_i - w) \leq \gamma(T_i)$. در این‌صورت مرکز درختی از $\mathcal{F}_0$ را به w وصل می‌کنیم، سپس یال جدید را زیرتقسیم می‌کنیم تا درخت T_{i+1} به‌دست آید، که در شکل (۶.۳) مشاهده می‌کنید.



شکل ۶.۳: درخت T_{i+1}

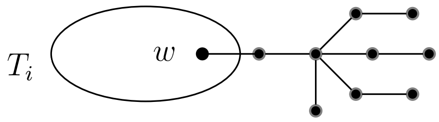
عملگر $\mathcal{O}_7$. فرض کنید T_i درختی باشد و $w \in V(T_i)$ که w متعلق به حداقل یک $\gamma(T_i)$−مجموعه باشد و راسی باشد که $\gamma(T_i - w) \leq \gamma(T_i)$. در این‌صورت مرکز درختی از $\mathcal{F}_2$ را به w وصل می‌کنیم تا درخت T_{i+1} به‌دست آید، که در شکل (۷.۳) مشاهده می‌کنید.



شکل ۷.۳: درخت T_{i+1}

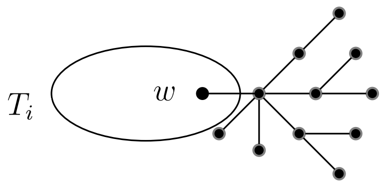
عملگر $\mathcal{O}_8$. فرض کنید T_i درختی باشد و $w \in V(T_i)$ که w متعلق به هیچ $\gamma(T_i)$−مجموعه نباشد

و راسی باشد که $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_i - w)$. در این‌صورت مرکز درختی از $\mathcal{F}_۲$ را به w وصل می‌کنیم، سپس یال جدید را زیرتقسیم می‌کنیم تا درخت $T_{i+۱}$ به‌دست آید، که در شکل (۸.۳) مشاهده می‌کنید.



شکل ۸.۳: درخت $T_{i+۱}$

عملگر $\mathcal{O}_۹$. فرض کنید T_i درختی باشد و $w \in V(T_i)$ که w در حداقل یک $\gamma(T_i)$–مجموعه باشد و راسی باشد که $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_i - w)$. در این‌صورت مرکز درختی از $\mathcal{F}_۱$ را به w وصل می‌کنیم تا درخت $T_{i+۱}$ به‌دست آید، که در شکل (۹.۳) مشاهده می‌کنید.



شکل ۹.۳: درخت $T_{i+۱}$

در این فصل به‌دنبال اثبات تساوی $fd_۱(T) = \gamma(T)$ هستیم، زیرا با توجه به قضیه ۶.۴.۲ در فصل دوم در یک درخت، مینیمم هر FD–مجموعه یک ۱FD–مجموعه است.

لم ۱.۱.۳. اگر $fd(T_i) = \gamma(T_i)$ و $T_{i+۱}$ از T_i تحت **عملگر** $\mathcal{O}_۱$ به‌دست آمده باشد، آن‌گاه
$$fd(T_{i+۱}) = \gamma(T_{i+۱}).$$

برهان. فرض کنید راسی از ستاره $K_{۱,r}$ که به w متصل می‌شود را x و راس دیگر را y بنامیم. فرض کنید S یک $fd(T_i)$–مجموعه باشد، در این‌صورت دو مورد زیر را خواهیم داشت:

۱) اگر $w \in S$، در این‌صورت $S \cup \{x\}$ یک FD–مجموعه برای $T_{i+۱}$ خواهد بود، لذا $fd(T_{i+۱}) \leq fd(T_i) + ۱$.

۲) اگر $w \notin S$، در این‌صورت $S \cup \{y\}$ یک FD–مجموعه برای $T_{i+۱}$ خواهد بود، لذا $fd(T_{i+۱}) \leq fd(T_i) + ۱$.

حال فرض کنید D یک $fd(T_{i+۱})$–مجموعه باشد، در این‌صورت موارد زیر را خواهیم داشت:

مورد۱. $y \in D$. اگر $w \in D$، آنگاه $x \in D$ و در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود، لذا $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 2 \leq fd(T_{i+1}) - 1$ و این یک تناقض است.

لذا فرض کنید $w \notin D$. در این‌صورت اگر $x \in D$، آنگاه $D \cap V(T_i)$ نیز یک FD-مجموعه برای $T_i - w$ خواهد بود، لذا $fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - 2$. از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_1$ و $fd(T) \geq \gamma(T)$ داریم، $fd(T_i) = \gamma(T_i) \leq \gamma(T_i - w) \leq fd(T_i - w)$. لذا خواهیم داشت، $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 2$. و این یک تناقض است. بنابراین $x \notin D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود، لذا $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 1$.

مورد۲. $y \notin D$. در این‌صورت $x \in D$. اگر $w \in D$، آنگاه $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود، لذا $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 1$. حال فرض کنید $w \notin D$. در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای $T_i - w$ خواهد بود، لذا $fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - 1$. اما از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_1$ و $fd(T) \geq \gamma(T)$ داریم، $fd(T_i) = \gamma(T_i) \leq \gamma(T_i - w) \leq fd(T_i - w)$. لذا خواهیم داشت، $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 1$.

بنابراین ما ثابت کردیم $fd(T_{i+1}) = fd(T_i) + 1$. حال ثابت می‌کنیم $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + 1$. فرض کنید S' یک $\gamma(T_i)$-مجموعه باشد، در این‌صورت $S' \cup \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_{i+1} خواهد بود. لذا خواهیم داشت، $\gamma(T_{i+1}) \leq \gamma(T_i) + 1$. حال فرض کنید D' یک $\gamma(T_{i+1})$-مجموعه باشد. بوضوح $\{x, y\} \cap D' \neq \phi$. در این‌صورت اگر $w \notin D'$ ، آنگاه $D' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $T_i - w$ خواهد بود، لذا $\gamma(T_i - w) \leq \gamma(T_{i+1}) - 1$. اما از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_1$ داریم، $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_i - w)$. در نتیجه $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+1}) - 1$.

حال اگر فرض کنیم $w \in D'$، در این‌صورت $D' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i خواهد بود، لذا $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+1}) - 1$. در این‌صورت خواهیم داشت $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + 1$. بنابراین توانستیم ثابت کنیم $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + 1 = fd(T_i) + 1 = fd(T_{i+1})$. لذا حکم ثابت شد. □

لم ۲.۱.۳. اگر $fd(T_i) = \gamma(T_i)$ و T_{i+1} از T_i تحت **عملگر** $\mathcal{O}_2$ به‌دست آمده باشد، آنگاه
$$fd(T_{i+1}) = \gamma(T_{i+1}).$$

برهان. فرض کنید x ریشه ستاره $k_{1,r}$ و y برگی از آن باشد که به w متصل می‌شود. فرض کنید S یک $fd(T_i)$-مجموعه باشد که شامل w نیست، در این‌صورت $S \cup \{x\}$ یک FD-مجموعه برای T_{i+1} خواهد بود، لذا $fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + 1$.

حال فرض کنید D یک $fd(T_{i+1})$-مجموعه باشد. در این‌صورت موارد زیر را خواهیم داشت:

مورد۱. فرض کنید $x \notin D$. در این‌صورت الزاما $d_{T_{i+1}}(x) = d_{T_{i+1}}(y) = 2$. حال اگر x_1 برگ مجاور به x باشد، آنگاه $x_1 \in D$ و چون D یک $fd(T_{i+1})$-مجموعه است، بنابراین y نمی‌تواند متعلق به D باشد، لذا $w \in D$. در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود، لذا $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 1$. در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک $fd(T_i)$-مجموعه خواهد بود که شامل w است و این متناقض با **عملگر** $\mathcal{O}_2$ است، لذا این حالت رخ نمی‌دهد.

مورد۲. $x \in D$. فرض کنید $y \notin D$، آنگاه $w \notin D$، زیرا در غیر این صورت اگر $x_۱$ برگی از ستاره $k_{۱,r}$ باشد، آنگاه $|N(x_۱) \cap D| \neq |N(y) \cap D|$. بنابراین $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود، لذا $fd(T_i) \leq fd(T_{i+۱}) - ۱$.

حال فرض کنید $y \in D$. اگر $w \in D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود، لذا $fd(T_i) \leq fd(T_{i+۱}) - ۲ \leq fd(T_{i+۱}) - ۱$ و این تناقض است. بنابراین $w \notin D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای $T_i - w$ خواهد بود، لذا $fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+۱}) - ۲$. اما از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_۲$ و $\gamma(T) \leq fd(T)$ داریم، $fd(T_i) - ۱ = \gamma(T_i) - ۱ \leq \gamma(T_i - w) \leq fd(T_i - w)$. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+۱}) - ۱$.

در نتیجه ثابت کردیم $fd(T_{i+۱}) = fd(T_i) + ۱$.

حال نشان می‌دهیم که $\gamma(T_{i+۱}) = \gamma(T_i) + ۱$. لذا فرض کنید S' یک $\gamma(T_i)$-مجموعه باشد، لذا خواهیم داشت $S' \cup \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $T_{i+۱}$ است، لذا $\gamma(T_{i+۱}) \leq \gamma(T_i) + ۱$.

حال فرض کنید D' یک $\gamma(T_{i+۱})$-مجموعه باشد. بوضوح $N[x] \cap D' \neq \emptyset$، بنابراین اگر $x \in D'$، در این‌صورت $D' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i خواهد بود، لذا $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+۱}) - ۱$.

حال اگر $x \notin D'$. در این‌صورت $N(x) - \{y\} \subseteq D'$، در نتیجه $d_{T_{i+۱}}(x) = ۲$ و $x_۱ \in D'$. بنابراین اگر $y \notin D'$، آنگاه $w \in D'$. در نتیجه $D' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i خواهد بود، لذا $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+۱}) - ۱$. در این‌صورت $D' \cap V(T_i)$ یک $\gamma(T_i)$-مجموعه خواهد بود که شامل w است و این متناقض با **عملگر** $\mathcal{O}_۲$ است، لذا این حالت رخ نمی‌دهد. بنابراین $y \in D'$، اگر $w \in D'$ در این‌صورت مجددا به تناقض بالا می‌رسیم. لذا $w \notin D'$، آنگاه $D' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $T_i - w$ خواهد بود، لذا $\gamma(T_i - w) \leq \gamma(T_{i+۱}) - ۲$. اما از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_۲$ داریم، $\gamma(T_i) - ۱ \leq \gamma(T_i - w)$. بنابراین $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+۱}) - ۱$. لذا $\gamma(T_{i+۱}) = \gamma(T_i) + ۱$.

در نتیجه ثابت کردیم $\gamma(T_{i+۱}) = \gamma(T_i) + ۱ = fd(T_i) + ۱ = fd(T_{i+۱})$. لذا حکم ثابت شد. □

لم ۳.۱.۳. اگر $fd(T_i) = \gamma(T_i)$ و $T_{i+۱}$ از T_i تحت **عملگر** $\mathcal{O}_۳$ به‌دست آمده باشد، آنگاه

$$fd(T_{i+۱}) = \gamma(T_{i+۱}).$$

برهان. فرض کنید x مرکز ستاره $K_{۱,r}$ باشد. فرض کنید S یک $fd(T_i)$-مجموعه باشد که شامل w است، در این‌صورت $S \cup \{x\}$ یک FD-مجموعه برای $T_{i+۱}$ خواهد بود، بنابراین خواهیم داشت:

$$fd(T_{i+۱}) \leq fd(T_i) + ۱. \tag{۱.۳}$$

حال فرض کنید D یک $fd(T_{i+۱})$-مجموعه باشد. در این‌صورت اگر $x \notin D$، آنگاه الزاما $d_{T_{i+۱}}(x) = ۲$ و این تناقض است، زیرا طبق **عملگر** $\mathcal{O}_۳$، $r \geq ۲$. بنابراین $x \in D$. بوضوح $w \in D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یکFD-مجموعه برای T_i خواهد بود، در این‌صورت خواهیم داشت، $fd(T_i) \leq fd(T_{i+۱}) - ۱$، لذا با توجه به رابطه (۱.۳) می‌توان نتیجه گرفت که $fd(T_{i+۱}) = fd(T_i) + ۱$. حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T_{i+۱}) = \gamma(T_i) + ۱$. بدین منظور با توجه به رابطه

(۱.۳) و $\gamma(T) \leq fd(T)$ خواهیم داشت، $\gamma(T_{i+1}) \leq fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i)+1 = \gamma(T_i)+1$. حال فرض کنید D' یک $\gamma(T_{i+1})$−مجموعه باشد که شامل w است، در این‌صورت $D' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای برای T_i خواهد بود، بنابراین $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+1}) - 1$. لذا $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + 1$. در نتیجه ثابت کردیم که $fd(T_{i+1}) = fd(T_i) + 1 = \gamma(T_i) + 1 = \gamma(T_{i+1})$. لذا حکم ثابت شد. □

لم ۴.۱.۳. اگر $fd(T_i) = \gamma(T_i)$ و T_{i+1} از T_i تحت **عملگر** $\mathcal{O}_4$ به‌دست آمده باشد، آن‌گاه
$$fd(T_{i+1}) = \gamma(T_{i+1}).$$

برهان. فرض کنید x ریشه ستاره $k_{1,r}$ و y برگی از آن باشد که به w وصل می‌شود و راسی که از زیرتقسیم کردن یال wy به‌دست می‌آید را z بنامیم. حال فرض کنید S یک $fd(T_i)$−مجموعه باشد که شامل w است، در این‌صورت $S \cup \{x\}$ یک FD−مجموعه برای T_{i+1} خواهد بود، لذا
$$fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + 1. \tag{۲.۳}$$

حال فرض کنید D یک $fd(T_{i+1})$−مجموعه باشد. در این‌صورت موارد زیر را خواهیم داشت:

مورد۱. فرض کنید $x \notin D$، در این‌صورت الزاما $d_{T_{i+1}}(x) = d_{T_{i+1}}(y) = 2$، حال اگر x_1 برگ مجاور به x در ستاره $k_{1,r}$ باشد، آن‌گاه $x_1 \in D$. بوضوح $y \notin D$ و $z \in D$. اگر $w \in D$ ، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD−مجموعه برای T_i خواهد بود، بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 2 \leq fd(T_{i+1}) - 1$ و این یک تناقض است.

بنابراین فرض کنید $w \notin D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD−مجموعه برای $T_i - w$ خواهد بود، بنابراین $fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - 2$. اما از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_4$ و $\gamma(T) \leq fd(T)$ داریم، $fd(T_i) - 1 = \gamma(T_i) - 1 \leq \gamma(T_i - w) \leq fd(T_i - w)$. لذا خواهیم داشت $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 1$.

حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i)+1$. بدین منظور طبق رابطه (۲.۳) و $\gamma(T) \leq fd(T)$ خواهیم داشت، $\gamma(T_{i+1}) \leq fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + 1 = \gamma(T_i) + 1$. حال فرض کنید D' یک $\gamma(T_{i+1})$−مجموعه باشد که شامل x_1 و z است، در این‌صورت $D' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $T_i - w$ خواهد بود. لذا $\gamma(T_i - w) \leq \gamma(T_{i+1}) - 2$. از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_3$ داریم، $\gamma(T_i) - 1 \leq \gamma(T_i - w)$. لذا خواهیم داشت، $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+1}) - 1$. در نتیجه ثابت کردیم $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + 1$. بنابراین $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + 1 = fd(T_i) + 1 = fd(T_{i+1})$.

مورد۲. فرض کنید $x \in D$. اگر $y \notin D$، بوضوح $w \in D$. در نتیجه $D \cap V(T_i)$ یک FD−مجموعه برای T_i خواهد بود، بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 1$. حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i)+1$. بدین منظور با توجه به رابطه (۲.۳) و $\gamma(T) \leq fd(T)$ خواهیم داشت، $\gamma(T_{i+1}) \leq fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + 1 = \gamma(T_i) + 1$. حال فرض کنید D'' یک $\gamma(T_{i+1})$−مجموعه باشد که شامل x و w است، در این‌صورت $D'' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i خواهد بود، لذا $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+1}) - 1$. در نتیجه ثابت کردیم $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + 1$. بنابراین $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + 1 = fd(T_i) + 1 = fd(T_{i+1})$.

اگر $y \in D$. فرض کنید $z \notin D$، در این‌صورت $w \notin D$. لذا $D \cap V(T_i)$ یک FD−مجموعه برای T_i خواهد بود. حال فرض کنید D_1 یک $fd(T_i)$−مجموعه باشد که شامل w است. در این‌صورت $|D_1| \leq fd(T_{i+1}) - 2$. اما $D_1 \cup \{x\}$ یک FD−مجموعه برای T_{i+1} با اندازه حداکثر $fd(T_{i+1}) - 1$ است و این تناقض است. بنابراین $z \in D$. در این‌صورت اگر $w \in D$، آن‌گاه $D \cap V(T_i)$ یک FD−مجموعه برای T_i خواهد بود، بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 3$. حال فرض کنید D_2 یک $fd(T_i)$−مجموعه باشد که شامل w است، در این‌صورت $|D_2| \leq fd(T_{i+1}) - 3$، اما $D_2 \cup \{x\}$ یک FD−مجموعه برای T_{i+1} با اندازه حداکثر $fd(T_{i+1}) - 1$ است و این یک تناقض است. بنابراین $w \notin D$. آن‌گاه $D \cap V(T_i)$ یک FD−مجموعه برای $T_i - w$ خواهد بود، لذا $fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - 3$ اما از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_4$ و $\gamma(T) \leq fd(T)$ داریم، $fd(T_i) - 1 = \gamma(T_i) - 1 \leq \gamma(T_i - w) \leq fd(T_i - w)$. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 2$. حال فرض کنید D_3 یک $fd(T_i)$−مجموعه باشد که شامل w است، در این‌صورت $|D_3| \leq fd(T_{i+1}) - 2$ اما $D_3 \cup \{x\}$ یک FD−مجموعه برای T_{i+1} با اندازه حداکثر $fd(T_{i+1}) - 1$ است، لذا این حالت رخ نمی‌دهد.

در نتیجه ثابت کردیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + 1 = fd(T_i) + 1 = fd(T_{i+1})$. لذا حکم ثابت شد. □

لم ۳.۱.۵. اگر $fd(T_i) = \gamma(T_i)$ و T_{i+1} از T_i تحت **عملگر** $\mathcal{O}_5$ به‌دست آمده باشد، آن‌گاه
$$fd(T_{i+1}) = \gamma(T_{i+1}).$$

برهان. فرض کنید x مرکز درختی باشد که از خانواده $\mathcal{F}_0$ در نظر گرفتیم و مجموعه فرزندان x را A و مجموعه برگ‌ها را B بنامیم. فرض کنید S یک $fd(T_i)$−مجموعه باشد که شامل w است. در این‌صورت $S \cup B$ یک FD−مجموعه برای T_{i+1} است، بنابراین
$$fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + |B|. \tag{۳.۳}$$

حال فرض کنید D یک $fd(T_{i+1})$−مجموعه باشد. در این‌صورت موارد زیر را خواهیم داشت:

مورد۱. فرض کنید $x \notin D$. اگر $A \cap D \neq \emptyset$، در این‌صورت $w \notin D$ و B نیز بجز تک راسی که توسط یک راس از A احاطه می‌شود، در D خواهد بود. لذا $D \cap V(T_i)$ یک FD−مجموعه برای T_i خواهد بود. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 1 - |B| + 1$. لذا $D \cap V(T_i)$ یک fd−مجموعه برای T_i خواهد بود که شامل w نیست و این متناقض با **عملگر** $\mathcal{O}_5$ است.

حال اگر $A \cap D = \emptyset$، در این‌صورت $B \subseteq D$ و $w \in D$. لذا $D \cap V(T_i)$ یک FD−مجموعه برای T_i خواهد بود. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |B|$.

حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |B|$. بدین منظور طبق رابطه (۳.۳) و $\gamma(T) \leq fd(T)$ خواهیم داشت، $\gamma(T_{i+1}) \leq fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + |B| = \gamma(T_i) + |B|$. حال فرض کنید D'' یک $\gamma(T_{i+1})$−مجموعه باشد که شامل w و B است، در این‌صورت $D'' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i خواهد بود، لذا $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+1}) - |B|$. در نتیجه ثابت کردیم

$\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |B|$. بنابراین $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |B| = fd(T_i) + |B| = fd(T_{i+1})$.

مورد۲. فرض کنید $x \in D$. در این‌صورت الزاما $A \subseteq D$. اگر $w \in D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 1$ و این یک تناقض است.

حال اگر $w \notin D$، آن‌گاه $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای $T_i - w$ خواهد بود. بنابراین $fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 1$. اما از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_5$ و $\gamma(T) \leq fd(T)$ داریم، $fd(T_i) = \gamma(T_i) \leq \gamma(T_i - w) \leq fd(T_i - w)$. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 1$ و این یک تناقض است.

در نتیجه ثابت کردیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |B| = fd(T_i) + |B| = fd(T_{i+1})$. لذا حکم ثابت شد. □

لم ۶.۱.۳. اگر $fd(T_i) = \gamma(T_i)$ و T_{i+1} از T_i تحت عملگر **عملگر** $\mathcal{O}_6$ به‌دست آمده باشد، آن‌گاه $fd(T_{i+1}) = \gamma(T_{i+1})$.

برهان. فرض کنید x مرکز درختی باشد که از خانواده $\mathcal{F}_0$ در نظر گرفتیم و مجموعه فرزندان x را A و مجموعه برگ‌ها را B بنامیم و راسی که از زیرتقسیم کردن یال wx به‌دست می‌آید را y بنامیم. فرض کنید S یک $fd(T_i)$-مجموعه باشد که شامل w نیست. در این‌صورت $S \cup A \cup \{x\}$ یک FD-مجموعه برای T_{i+1} است، بنابراین

$$fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + |A| + 1. \quad (۴.۳)$$

حال فرض کنید D یک $fd(T_{i+1})$ باشد. در این‌صورت موارد زیر را خواهیم داشت:

مورد۱. فرض کنید $x \in D$. در این‌صورت $A \subseteq D$. اگر $y \notin D$، آن‌گاه $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 1$.

حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + 1$. بدین منظور با توجه به رابطه (۴.۳) و $\gamma(T) \leq fd(T)$ داریم، $\gamma(T_{i+1}) \leq fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + |A| + 1 = \gamma(T_i) + |A| + 1$. حال فرض کنید D' یک $\gamma(T_{i+1})$-مجموعه باشد که شامل x و A است، در این‌صورت $D' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i خواهد بود، لذا $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+1}) - |A| - 1$. در نتیجه ثابت کردیم $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + 1$. بنابراین $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + 1 = fd(T_i) + |A| + 1 = fd(T_{i+1})$.

حال اگر $y \in D$، آن‌گاه $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای $T_i - w$ خواهد بود. بنابراین $fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 2$. اما از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_6$ و $\gamma(T) \leq fd(T)$ داریم، $fd(T_i) = \gamma(T_i) \leq \gamma(T_i - w) \leq fd(T_i - w)$. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 2 \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 1$ و این تناقض است.

مورد۲. فرض کنید $x \notin D$. اگر $A \cap D \neq \emptyset$، در این‌صورت $y \notin D$ و $w \in D$ و B نیز تک راسی که توسط یک راس از A احاطه می‌شود، در D خواهد بود، لذا $D \cap V(T_i)$ یک FD–مجموعه برای T_i خواهد بود. بنابراین $fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) - |A|$ و این تناقض است.

بنابراین $A \cap D = \emptyset$. در این‌صورت $B \subseteq D$ و $y \in D$. اگر $w \in D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD–مجموعه برای T_i خواهد بود. بنابراین $fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) - |A| - ۱$. در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک $fd(T_i)$–مجموعه خواهد بود که شامل w است و این متناقض با **عملگر** $\mathcal{O}_۶$ است.

بنابراین $w \notin D$، آن‌گاه $D \cap V(T_i)$ یک FD–مجموعه برای $T_i - w$ خواهد بود. بنابراین $fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - |B| - ۱$. اما از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_۶$ و $\gamma(T) \leq fd(T)$ داریم، $fd(T_i) = \gamma(T_i) \leq \gamma(T_i - w) \leq fd(T_i - w)$. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |B| - ۱ = fd(T_{i+1}) - |A| - ۱$.

حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + ۱$. بدین منظور با توجه به رابطه (۴.۳) و $\gamma(T) \leq fd(T)$، $\gamma(T_{i+1}) \leq fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + |B| + ۱ = \gamma(T_i) + |A| + ۱$. حال فرض کنید D'' یک $\gamma(T_{i+1})$–مجموعه باشد که شامل y و B است، در این‌صورت $D'' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i خواهد بود، لذا $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+1}) - |B| - ۱ = \gamma(T_{i+1}) - |A| - ۱$. بنابراین $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + ۱$. در نتیجه ثابت کردیم $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + ۱ = fd(T_i) + |A| + ۱ = fd(T_{i+1})$. لذا حکم ثابت شد.

□

لم ۷.۱.۳. اگر $fd(T_i) = \gamma(T_i)$ و T_{i+1} از T_i تحت **عملگر** $\mathcal{O}_۷$ به‌دست آمده باشد، آن‌گاه
$$fd(T_{i+1}) = \gamma(T_{i+1}).$$

برهان. فرض کنید x مرکز درختی باشد که از خانواده $\mathcal{F}_۲$ در نظر گرفتیم و مجموعه فرزندان x را A و مجموعه برگ‌هایی که به A متصل هستند را B و تک‌برگی که به x متصل می‌باشد را $x_۱$ بنامیم. حال فرض کنید S یک $fd(T_i)$–مجموعه باشد. در این‌صورت $S \cup A \cup \{x\}$ یک FD–مجموعه برای T_{i+1} است، بنابراین

$$fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + |A| + ۱. \tag{۵.۳}$$

حال فرض کنید D یک $fd(T_{i+1})$–مجموعه باشد. در این‌صورت موارد زیر را خواهیم داشت:

مورد۱. فرض کنید $x \notin D$. آن‌گاه $x_۱ \in D$ و $B \subseteq D$ و $w \notin D$. در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD–مجموعه برای T_i خواهد بود، بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |B| - ۱$. حال با توجه به رابطه (۵.۳) خواهیم داشت، $fd(T_i) + |A| + ۱ = fd(T_{i+1})$. در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک fd–مجموعه برای T_i خواهد بود که شامل w نیست و این متناقض با **عملگر** $\mathcal{O}_۷$ است.، لذا این حالت رخ نمی‌دهد.

مورد۲. فرض کنید $x \in D$. بوضوح $A \subseteq D$. اگر $w \notin D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای $T_i - w$ خواهد بود. بنابراین $fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - ۱$. اما از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_۷$ و $\gamma(T) \leq fd(T)$ داریم، $fd(T_i) = \gamma(T_i) \leq \gamma(T_i - w) \leq fd(T_i - w)$. حال $fd(T_i) \leq fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - ۱$ و بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - ۱$. حال با توجه به رابطه (۵.۳) خواهیم داشت، $fd(T_i) + |A| + ۱ = fd(T_{i+1})$. در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک fd-مجموعه برای T_i خواهد بود که شامل w نیست و این متناقض با **عملگر** $\mathcal{O}_۷$ است.، لذا این حالت رخ نمی‌دهد.

حال اگر $w \in D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - ۱$. حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + ۱$. بدین منظور با توجه به رابطه (۵.۳) و $\gamma(T) \leq fd(T)$ خواهیم داشت، $\gamma(T_{i+1}) \leq fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + |A| + ۱ = \gamma(T_i) + |A| + ۱$. حال فرض کنید D' یک $\gamma(T_{i+1})$-مجموعه باشد که شامل x و w و A است، در این صورت $D' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i خواهد بود، لذا $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+1}) - |A| - ۱$. بنابراین $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + ۱$.

در نتیجه ثابت کردیم که $fd(T_{i+1}) = fd(T_i) + |A| + ۱ = \gamma(T_i) + |A| + ۱ = \gamma(T_{i+1})$. لذا حکم ثابت شد. □

لم ۸.۱.۳. اگر $fd(T_i) = \gamma(T_i)$ و T_{i+1} از T_i تحت **عملگر** $\mathcal{O}_۸$ به‌دست آمده باشد، آن‌گاه
$$fd(T_{i+1}) = \gamma(T_{i+1}).$$

برهان. فرض کنید x مرکز درختی باشد که از خانواده $\mathcal{F}_۲$ در نظر گرفتیم و مجموعه فرزندان x را A و مجموعه برگ‌هایی که به A متصل هستند را B و تک‌برگی که به x متصل می‌باشد را $x_۱$ و راسی که از زیرتقسیم کردن یال wx به‌دست می‌آید را y بنامیم. حال فرض کنید S یک $fd(T_i)$-مجموعه باشد که شامل w نیست. در این‌صورت $S \cup A \cup \{x\}$ یک FD-مجموعه برای T_{i+1} است، بنابراین
$$fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + |A| + ۱. \tag{۶.۳}$$

حال فرض کنید D یک $fd(T_{i+1})$-مجموعه باشد. در این‌صورت موارد زیر را خواهیم داشت:

مورد۱. فرض کنید $x \notin D$. آن‌گاه $x_۱ \in D$ و $B \subseteq D$ و $w \in D$. در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |B| - ۱ = fd(T_{i+1}) - |A| - ۱$. در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک $fd(T_i)$-مجموعه خواهد بود که شامل w است و این یک تناقض است.

مورد۲. فرض کنید $x \in D$. بوضوح $A \subseteq D$. اگر $y \notin D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - ۱$.

حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + ۱$. بدین منظور با توجه به رابطه (۶.۳) و $\gamma(T) \leq fd(T)$ داریم، $\gamma(T_{i+1}) \leq fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + |A| + ۱ = \gamma(T_i) + |A| + ۱$. حال فرض کنید D' یک $\gamma(T_{i+1})$-مجموعه باشد که شامل x و A است، در این‌صورت $D' \cap V(T_i)$

یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i خواهد بود، لذا $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+1}) - |A| - 1$. در نتیجه $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + 1$.

بنابراین $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + 1 = fd(T_i) + |A| + 1 = fd(T_{i+1})$.

حال اگر $y \in D$. فرض کنید $w \notin D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD–مجموعه برای $T_i - w$ خواهد بود. بنابراین $fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 2$. اما از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_8$ و $\gamma(T) \leq fd(T)$ داریم، $fd(T_i) = \gamma(T_i) \leq \gamma(T_i - w) \leq fd(T_i - w)$. در نتیجه $fd(T_i) \leq fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 2$ و این یک تناقض است.

بنابراین $w \in D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD–مجموعه برای T_i خواهد بود. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 2$ و این در تناقض با **عملگر** $\mathcal{O}_8$ است.

در نتیجه ثابت کردیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + 1 = fd(T_i) + |A| + 1 = fd(T_{i+1})$. لذا حکم ثابت شد. □

لم ۹.۱.۳. اگر $fd(T_i) = \gamma(T_i)$ و T_{i+1} از T_i تحت **عملگر** $\mathcal{O}_9$ به‌دست آمده باشد، آن‌گاه
$$fd(T_{i+1}) = \gamma(T_{i+1}).$$

برهان. فرض کنید x مرکز درختی باشد که از خانواده $\mathcal{F}_1$ در نظر گرفتیم و مجموعه فرزندان x را A و مجموعه برگ‌هایی که به A متصل هستند را B بنامیم. فرض کنید x پشتیبان است، زیرا اگر x پشتیبان نباشد و $|A| = |B|$، این حالت را در لم ۵.۱.۳ مورد بررسی قرار دادیم. بنابراین فرض کنید S یک $fd(T_i)$–مجموعه باشد. در این‌صورت $S \cup A \cup \{x\}$ یک FD–مجموعه برای T_{i+1} است، بنابراین
$$fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + |A| + 1. \qquad (۷.۳)$$

حال فرض کنید D یک $fd(T_{i+1})$–مجموعه باشد. در این‌صورت موارد زیر را خواهیم داشت:

مورد۱. فرض کنید $x \in D$. در این‌صورت $A \subseteq D$. اگر $w \in D$، لذا می‌توان نتیجه گرفت که $D \cap V(T_i)$ یک FD–مجموعه برای T_i خواهد بود، بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 1$.

حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + 1$. بدین منظور با توجه به رابطه (۷.۳) و $\gamma(T) \leq fd(T)$ داریم، $\gamma(T_{i+1}) \leq fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + |A| + 1 = \gamma(T_i) + |A| + 1$. حال فرض کنید D' یک $\gamma(T_{i+1})$–مجموعه باشد که شامل x، w و A است، در این‌صورت $D' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i خواهد بود، لذا $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+1}) - |A| - 1$. در نتیجه ثابت کردیم $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + 1$. بنابراین $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + |A| + 1 = fd(T_i) + |A| + 1 = fd(T_{i+1})$.

حال اگر $w \notin D$، آن‌گاه $D \cap V(T_i)$ یک FD–مجموعه برای $T_i - w$ خواهد بود، بنابراین $fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 1$. اما از طرفی طبق **عملگر** $\mathcal{O}_9$ و $\gamma(T) \leq fd(T)$ داریم، $fd(T_i) = \gamma(T_i) \leq \gamma(T_i - w) \leq fd(T_i - w)$. بنابراین $fd(T_i) \leq fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 1$، در نتیجه $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - |A| - 1$.

لذا $D \cap V(T_i)$ یک $fd(T_i)-$مجموعه خواهد بود که شامل w نیست و این در تناقض با **عملگر** $\mathcal{O}_9$ است.

مورد۲. حال اگر $x \notin D$، آن‌گاه دقیقا یک برگ مجاور به x داریم که بوضوح متعلق به D است. در این‌صورت الزاما $|B| = |A|$، که این حالت را در لم۷.۱.۳ مورد بررسی قرار گرفت.

در نتیجه ثابت کردیم $fd(T_{i+1}) = fd(T_i) + |A| + 1 = \gamma(T_i) + |A| + 1 = \gamma(T_{i+1})$. لذا حکم ثابت شد. □

حال با یک استقرا ساده بر روی تعداد عملگرهای به کار رفته برای ساخت درخت T و لم‌های بالا نتیجه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۱۰.۱.۳. فرض کنید T یک درخت باشد. اگر $T \in \mathcal{T}$، آن‌گاه $fd(T) = \gamma(T)$.

فصل ۴

تساوی قدرتمند بین عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری دلپذیر در درخت‌ها

در این فصل ابتدا تعریف تساوی قدرتمند را بیان کرده و ساختاری از درخت‌هایی که در آن‌ها رابطه $fd(T) \equiv \gamma(T)$ برقرار است را ارائه می‌دهیم. سپس به تعریف عملگرها و نتایج مربوط به آن‌ها می‌پردازیم.

۱.۴ تعاریف و قضایا

اگر $fd(G) = \gamma(G)$، آن‌گاه هر $\gamma(G)$-مجموعه لزوما یک $fd(G)$-مجموعه نیست. برای مثال گراف P_4 را در نظر بگیرید. همانطور که در شکل(۱.۴) مشاهده می‌کنید، P_4 یک γ-مجموعه است که

شکل ۱.۴: $fd(P_4) \not\equiv \gamma(P_4)$

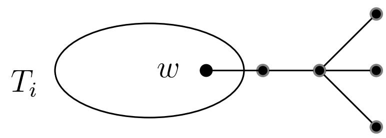
fd-مجموعه نیست. بنابراین تساوی قدرتمند[1] بین عدد احاطه‌گری دلپذیر و عدد احاطه‌گری که با $fd(G) \equiv \gamma(G)$ نمایش داده می‌شود، زمانی برقرار است که $fd(G) = \gamma(G)$ و هر γ-مجموعه یک fd-مجموعه باشد.

حال ساختاری از درخت‌هایی که در آن‌ها $fd(T) \equiv \gamma(T)$ را مشخص می‌کنند، ارائه می‌دهیم. بدین منظور خانواده‌ای از درخت‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{T}$ خانواده‌ای از درخت‌های T باشد که می‌تواند از دنباله‌ای از درخت‌های $T_1, T_2, \ldots, T_k = T (k \geq 1)$ به‌دست آید. در اینجا T_1 یا ستاره‌ای $K_{1,t}$ با $t \geq 2$ خواهد بود و یا یک ۲-ستاره که یک مرکز آن از درجه ۳ و مرکز دیگر از درجه

[1] Strongly equal

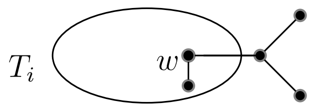
حداقل ۳ است، خواهد بود. همچنین T_{i+1} می‌تواند به‌صورت بازگشتی از T_i توسط یکی از عملگرهای زیر برای $1 \leq i \leq k-1$ به‌دست آید.

- **عملگر** $\mathcal{O}_1$. فرض کنید T_i درختی باشد و $w \in V(T_i)$ که w متعلق به هیچ $\gamma(T_i)$–مجموعه نباشد و $\gamma(T_i - w) \geq \gamma(T_i) - 1$. در این‌صورت یک برگ از ستاره $K_{1,r}(r \geq 2)$ را به w وصل می‌کنیم تا درخت T_{i+1} به‌دست آید، که در شکل (۲.۴) مشاهده می‌کنید.



شکل ۲.۴: درخت T_{i+1}

- **عملگر** $\mathcal{O}_2$. فرض کنید T_i درختی باشد و $w \in V(T_i)$ راسی پشتیبان باشد که یا $d_{T_i}(w) \geq 3$ و یا $d_{T_i}(w) = 2$ و w در هر $\gamma(T_i)$–مجموعه باشد. در این‌صورت مرکز ستاره $K_{1,r}(r \geq 2)$ را به w وصل می‌کنیم تا درخت T_{i+1} به‌دست آید، که در شکل (۳.۴) مشاهده می‌کنید.



شکل ۳.۴: درخت T_{i+1}

در این فصل به‌دنبال اثبات تساوی $fd_1(T) \equiv \gamma(T)$ هستیم، زیرا با توجه به قضیه ۶.۴.۲ در فصل دوم در یک درخت، مینیمم هر FD–مجموعه یک $1FD$–مجموعه است.

لم ۱.۱.۴. اگر $fd(T_i) \equiv \gamma(T_i)$ و T_{i+1} از T_i تحت **عملگر** $\mathcal{O}_1$ به‌دست آمده باشد، آن‌گاه
$$fd(T_{i+1}) \equiv \gamma(T_{i+1}).$$

برهان. فرض کنید y برگی از ستاره $K_{1,r}$ باشد، که طبق **عملگر** $\mathcal{O}_1$ به w وصل می‌شود و x مرکز ستاره $K_{1,r}$ باشد. فرض کنید S یک $fd(T_i)$–مجموعه باشد که طبق فرض **عملگر** $\mathcal{O}_1$، شامل w نیست. در این‌صورت $S \cup \{x\}$ یک FD–مجموعه برای T_{i+1} خواهد بود، بنابراین خواهیم داشت
$$fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + 1. \qquad (۱.۴)$$

حال فرض کنید D یک $fd(T_{i+1})$–مجموعه باشد، در این‌صورت موارد زیر را خواهیم داشت:

۱) $x \notin D$. بوضوح $d_{T_{i+1}}(x) = d_{T_{i+1}}(y) = 2$. فرض کنید x_1 برگ مجاور به x در درخت T_{i+1} باشد، آن‌گاه بدیهی است که $x_1 \in D$ و چون D یک FD-مجموعه است، بنابراین $y \notin D$، آن‌گاه $w \in D$. بنابراین $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود، در نتیجه $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 1$. از طرفی با توجه به رابطه (۱.۴) می‌توان نتیجه گرفت که $D \cap V(T_i)$ یک $fd(T_i)$-مجموعه است که شامل w است و این متناقض با **عملگر** $\mathcal{O}_1$ است. لذا این حالت رخ نمی‌دهد.

۲) $x \in D$. فرض کنید $y \notin D$. در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود، لذا $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 1$. لذا با توجه به رابطه (۱.۴) می‌توان نتیجه گرفت که $fd(T_{i+1}) = fd(T_i)+1$. حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i)+1$. بدین منظور با توجه به رابطه (۱.۴) و $\gamma(T) \leq fd(T)$ داریم، $\gamma(T_{i+1}) \leq fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + 1 = \gamma(T_i) + 1$. حال فرض کنید D' یک $\gamma(T_{i+1})$-مجموعه باشد که شامل x است، در این‌صورت $D' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i خواهد بود، لذا $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+1}) - 1$.
در نتیجه ثابت کردیم $fd(T_{i+1}) = fd(T_i) + 1 = \gamma(T_i) + 1 = \gamma(T_{i+1})$. حال فرض کنید $y \in D$. اگر $w \in D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود، لذا $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 2 \leq fd(T_{i+1}) - 1$ و این یک تناقض است، پس فرض کنید $w \notin D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD-مجموعه برای T_i خواهد بود، لذا $fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - 2$. اما $fd(T_i - w) \geq \gamma(T_i - w) \geq \gamma(T_i) - 1 = fd(T_i) - 1$. بنابراین $fd(T_i) - 1 \leq fd(T_i - w) \leq fd(T_{i+1}) - 2$، در نتیجه خواهیم داشت $fd(T_i) \leq fd(T_{i+1}) - 1$. لذا با توجه به رابطه (۱.۴) می‌توان نتیجه گرفت که $fd(T_{i+1}) = fd(T_i) + 1$. حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + 1$. بدین منظور طبق رابطه (۱.۴) و $\gamma(T) \leq fd(T)$ خواهیم داشت، $\gamma(T_{i+1}) \leq fd(T_{i+1}) \leq fd(T_i) + 1 = \gamma(T_i) + 1$. حال فرض کنید D' یک $\gamma(T_{i+1})$-مجموعه باشد که شامل x و y است، در این‌صورت $D' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $T_i - w$ خواهد بود، بنابراین خواهیم داشت $\gamma(T_i - w) \leq \gamma(T_{i+1}) - 2$. اما $\gamma(T_i - w) \geq \gamma(T_i) - 1$. بنابراین $\gamma(T_i) - 1 \leq \gamma(T_i - w) \leq \gamma(T_{i+1}) - 2$. در نتیجه $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+1}) - 1$. لذا ثابت کردیم که $\gamma(T_{i+1}) = \gamma(T_i) + 1$. یعنی $fd(T_{i+1}) = fd(T_i) + 1 = \gamma(T_i) + 1 = \gamma(T_{i+1})$.

حال ثابت می‌کنیم $fd(T_{i+1}) \equiv \gamma(T_{i+1})$. بدین منظور فرض کنید $fd(T_{i+1}) \not\equiv \gamma(T_{i+1})$. حال فرض کنید S_1 یک $\gamma(T_{i+1})$-مجموعه باشد که $fd(T_{i+1})$-مجموعه نیست. فرض کنید $x \in S_1$. فرض کنید $y \notin S_1$. اگر $w \in S_1$، آن‌گاه $S_1 \cap V(T_i)$ یک $\gamma(T_i)$- مجموعه است که $fd(T_i)$-مجموعه نیست و این یک تناقض است. بنابراین $w \notin S_1$، آن‌گاه $S_1 \cap V(T_i)$ یک $\gamma(T_i)$- مجموعه است که $fd(T_i)$-مجموعه نیست و این یک تناقض است، چون $\gamma(T_i) \equiv fd(T_i)$. بنابراین $y \in S_1$ و درمی‌یابیم که $w \notin S_1$، آن‌گاه $N(x) \cap S_1 = \{y\}$ و $(S_1 \cap V(T_i)) \cup \{w\}$ یک $\gamma(T_i)$-مجموعه است که $fd(T_i)$-مجموعه نیست و این یک تناقض است. حال فرض کنید $x \notin S_1$، در این‌صورت الزاما $d_{T_{i+1}}(x) = 2$. فرض کنید x_1 برگی از T_{i+1} باشد که مجاور به x است، بوضوح $x_1 \in S_1$. اگر $y \notin S_1$، آن‌گاه

$S_۱ \cap V(T_i)$ یک $\gamma(T_i)$– مجموعه است که $fd(T_i)$–مجموعه نیست و این یک تناقض است. بنابراین $y \in S_۱$. اگر $w \in S_۱$، آنگاه $S_۱ \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i خواهد بود، لذا خواهیم داشت $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+۱}) - ۲$ و این یک تناقض است. بنابراین $w \notin S_۱$. اگر $N(w) \cap S_۱ \neq \{y\}$، آنگاه $S_۱ \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i با اندازه حداقل $\gamma(T_i)$ خواهد بود و این یک تناقض است. بنابراین $N(w) \cap S_۱ = \{y\}$، آنگاه $(S_۱ \cap V(T_i)) \cup \{w\}$ یک $\gamma(T_i)$–مجموعه است که شامل w است و این یک تناقض است. بنابراین ثابت کردیم که $fd(T_i) \equiv \gamma(T_i)$. □

لم ۲.۱.۴. اگر $fd(T_i) \equiv \gamma(T_i)$ و $T_{i+۱}$ از T_i تحت **عملگر** $\mathcal{O}_۲$ بدست آمده باشد، آنگاه
$$fd(T_{i+۱}) \equiv \gamma(T_{i+۱}).$$

برهان. فرض کنید x مرکز ستاره $K_{۱,r}$ باشد. فرض کنید S یک $fd(T_i)$–مجموعه باشد که شامل w است، در این‌صورت $S \cup \{x\}$ یک FD–مجموعه برای $T_{i+۱}$ خواهد بود، بنابراین خواهیم داشت.
$$fd(T_{i+۱}) \leq fd(T_i) + ۱. \tag{۲.۴}$$

حال فرض کنید D یک $fd(T_{i+۱})$–مجموعه باشد. در این‌صورت اگر $x \notin D$، آنگاه الزاما $d_{T_{i+۱}}(x) = ۲$ و این تناقض است، زیرا طبق **عملگر** $\mathcal{O}_۲$، $r \geq ۲$. بنابراین $x \in D$. بوضوح $w \in D$، در این‌صورت $D \cap V(T_i)$ یک FD–مجموعه برای T_i خواهد بود، در این‌صورت خواهیم داشت، $fd(T_i) \leq fd(T_{i+۱}) - ۱$. لذا با توجه به رابطه (۲.۴) می‌توان نتیجه گرفت که $fd(T_{i+۱}) = fd(T_i) + ۱$. حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T_{i+۱}) = \gamma(T_i) + ۱$. بدین منظور با توجه به رابطه (۲.۴) و $\gamma(T) \leq fd(T)$ خواهیم داشت، $\gamma(T_{i+۱}) \leq fd(T_{i+۱}) \leq fd(T_i) + ۱ = \gamma(T_i) + ۱$.
حال فرض کنید D' یک $\gamma(T_{i+۱})$–مجموعه باشد که شامل w است، در این‌صورت $D' \cap V(T_i)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i خواهد بود، بنابراین $\gamma(T_i) \leq \gamma(T_{i+۱}) - ۱$. لذا $\gamma(T_{i+۱}) = \gamma(T_i) + ۱$.
در نتیجه ثابت کردیم که $fd(T_{i+۱}) = fd(T_i) + ۱ = \gamma(T_i) + ۱ = \gamma(T_{i+۱})$.

حال ثابت می‌کنیم $fd(T_{i+۱}) \equiv \gamma(T_{i+۱})$. بدین منظور فرض کنید $fd(T_{i+۱}) \not\equiv \gamma(T_{i+۱})$. حال فرض کنید $D_۱$ یک $\gamma(T_{i+۱})$–مجموعه باشد که $fd(T_{i+۱})$–مجموعه نیست. بوضوح $x \in D_۱$. اگر $w \in D_۱$، آنگاه $D_۱ \cap V(T_i)$ یک $\gamma(T_i)$–مجموعه است که $fd(T_i)$مجموعه نیست و این یک تناقض است. بنابراین $w \notin D_۱$. اگر w یک راس پشتیبان قوی باشد، آنگاه $((D_۱ \cap V(T_i)) - L(w)) \cup \{w\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T_i با اندازه حداقل $\gamma(T_i)$ خواهد بود و این یک تناقض است. بنابراین w یک راس پشتیبان قوی نیست. فرض کنید $w_۱$ برگ مجاور به w باشد. بوضوح $w_۱ \in D_۱$ و $D_۱ \cap V(T_i)$ یک $\gamma(T_i)$–مجموعه است. حال $D_۱ \cap V(T_i)$ یا $D_۲ = ((D_۱ \cap V(T_i)) - \{w_۱\}) \cup \{w\}$ یک $\gamma(T_i)$–مجموعه است که $fd(T_i)$–مجموعه نیست و این یک تناقض است. بنابراین ما ثابت کردیم که $fd(T_i) \equiv \gamma(T_i)$. □

حال با یک استقرا ساده بر روی تعداد عملگرهای به کار رفته برای ساخت درخت T و لم‌های ۱.۱.۴ و ۲.۱.۴ نتیجه زیر که به‌صورت لم آورده شده است، حاصل می‌شود.

لم ۳.۱.۴. فرض کنید T یک درخت باشد. اگر $T \in \mathcal{T}$، آنگاه $fd(T) \equiv \gamma(T)$.

قضیه ۴.۱.۴. فرض کنید T یک درخت از مرتبه $n \geq 3$ باشد، آن‌گاه $fd(T) \equiv \gamma(T)$ اگر و فقط اگر $T \in \mathcal{T}$.

برهان. فرض کنید T یک درخت از مرتبه $n \geq 3$ با $fd(T) \equiv \gamma(T)$ باشد. به استقرا روی n نشان می‌دهیم که $T \in \mathcal{T}$. اگر $\mathrm{diam}(T) = 2$، آن‌گاه T یک ستاره است و بنابراین $T \in \mathcal{T}$. اگر $\mathrm{diam}(T) = 3$، آن‌گاه T یک ۲−ستاره است و ما به‌راحتی می‌توانیم نشان دهیم که درجه هر دو مرکز آن حداقل ۳ است. فرض کنید x و y مرکزهای T باشند. اگر $d_T(x) = 3$ یا $d_T(y) = 3$، آن‌گاه طبق فرض $T \in \mathcal{T}$. بنابراین ما فرض می‌کنیم که $d_T(x) \geq 4$ و $d_T(y) \geq 4$. فرض کنید T_1 جزئی از $T - xy$ باشد که شامل x است، آن‌گاه T از T_i توسط **عملگر** $\mathcal{O}_2$ به‌دست می‌آید.
بنابراین فرض کنید $\mathrm{diam}(T) \geq 4$. فرض کنید $d = \mathrm{diam}(T)$ و $x_0, x_1, \ldots, x_d$ یک مسیر قطری در T باشد که x_0 و x_d دو برگ از T باشند. بنابراین درخت T را از x_0 ریشه‌دار می‌کنیم. حال فرض کنید S یک $fd(T)$−مجموعه باشد. در این‌صورت موارد زیر را خواهیم داشت:

مورد۱. $d_T(x_{d-1}) \geq 3$. بوضوح $x_{d-1} \in S$. فرض کنید که $d_T(x_{d-2}) = 2$. اگر $x_{d-2} \in S$، آن‌گاه می‌توان فرض کرد $x_{d-3} \notin S$، آن‌گاه $(S - \{x_{d-2}\}) \cup \{x_{d-3}\}$ یک $\gamma(T)$−مجموعه است که $fd(T)$−مجموعه نیست و این تناقض است، چون $\gamma(T) \equiv fd(T)$. بنابراین $x_{d-2} =\notin S$. فرض کنید $T_1 = T - T_{x_{d-2}}$، در این‌صورت $S \cap V(T_1)$ یک FD−مجموعه برای T_1 خواهد بود، لذا

$$fd(T_1) \leq fd(T) - 1. \tag{۳.۴}$$

از طرفی هر $fd(T_1)$ را با اضافه کردن x_{d-1} می‌توان به یک FD−مجموعه برای T تبدیل کرد، لذا $fd(T) \leq fd(T_1) + 1$. در نتیجه $fd(T) = fd(T_1) + 1$. حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T) = \gamma(T_1) + 1$. بدین منظور طبق رابطه (۳.۴) و $\gamma(T) \leq fd(T)$ خواهیم داشت، $\gamma(T_1) \leq fd(T_1) \leq fd(T) - 1 = \gamma(T) - 1$. حال فرض کنید D' یک $\gamma(T_1)$−مجموعه باشد، در این‌صورت $D' \cup \{x_{d-1}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T خواهد بود، بنابراین $\gamma(T) \leq \gamma(T_1) + 1$. لذا $\gamma(T) = \gamma(T_1) + 1$. در نتیجه ثابت کردیم که $fd(T_1) + 1 = fd(T) = \gamma(T) = \gamma(T_1) + 1$. یعنی $fd(T_1) = \gamma(T_1)$.

حال ثابت می‌کنیم $fd(T_1) \equiv \gamma(T_1)$. بدین منظور فرض کنید $fd(T_1) \not\equiv \gamma(T_1)$. حال فرض کنید D_1 یک $\gamma(T_1)$−مجموعه باشد که $fd(T_1)$−مجموعه نیست. در این‌صورت $D_1 \cup \{x_{d-1}\}$ یک $\gamma(T)$−مجموعه است که $fd(T)$−مجموعه نیست و این یک تناقض است. بنابراین $fd(T_1) \equiv \gamma(T_1)$. در نتیجه بنا به فرض استقرا $T_1 \in \mathcal{T}$، لذا می‌توان نتیجه گرفت T از T_1 تحت **عملگر** $\mathcal{O}_2$ به‌دست می‌آید.

حال فرض کنید $d_T(x_{d-2}) \geq 3$. فرض کنید x_{d-2} فرزندی مانند $u \neq x_{d-1}$ با

$d_T(u) \geq 2$ داشته باشد. فرض کنید u_1 برگ مجاور به u باشد. اگر $d_T(u) = 2$، آن‌گاه $(S - \{u_1\}) \cup \{u\}$ یک $\gamma(T)$−مجموعه است که $fd(T)$−مجموعه نیست و این یک تناقض است. بنابراین $d_T(u) \geq 3$، لذا $u \in S$. بوضوح $x_{d-2} \in S$. اگر x_{d-2} راس پشتیبان نباشد،

آن‌گاه $(S-\{x_{d-2}\})\cup\{x_{d-3}\}$ یک $\gamma(T)$-مجموعه است که $fd(T)$-مجموعه نیست و این یک تناقض است، بنابراین x_{d-2} راس پشتیبان است. فرض کنید $T_2=T-T_{x_{d-1}}$، آن‌گاه $S\cap V(T_2)$ یک FD-مجموعه برای T_2 است، لذا خواهیم داشت

$$fd(T_2)\leq fd(T)-1. \tag{۴.۴}$$

از طرفی هر $fd(T_2)$ را با اضافه کردن x_{d-1} می‌توان به یک FD-مجموعه برای T تبدیل کرد، لذا خواهیم داشت $fd(T)\leq fd(T_2)+1$. در نتیجه $fd(T)=fd(T_1)+1$. حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T)=\gamma(T_2)+1$. بدین منظور طبق رابطه (۴.۴) و $\gamma(T)\leq fd(T)$ خواهیم داشت، $\gamma(T_2)\leq fd(T_2)\leq fd(T)-1=\gamma(T)-1$. حال فرض کنید S' یک $\gamma(T_2)$-مجموعه باشد، در این‌صورت $S'\cup\{x_{d-1}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T خواهد بود. بنابراین $\gamma(T)\leq\gamma(T_2)+1$، لذا $\gamma(T)=\gamma(T_2)+1$. در نتیجه ثابت کردیم که $fd(T_2)+1=fd(T)=\gamma(T)=\gamma(T_2)+1$، یعنی $fd(T_2)=\gamma(T_2)$.

حال ثابت می‌کنیم $fd(T_2)\equiv\gamma(T_2)$. بدین منظور فرض کنید $fd(T_2)\not\equiv\gamma(T_2)$. حال فرض کنید D_2 یک $\gamma(T_2)$-مجموعه باشد که $fd(T_2)$-مجموعه نیست. در این‌صورت $D_2\cup\{x_{d-1}\}$ یک $\gamma(T)$-مجموعه است که $fd(T)$-مجموعه نیست و این یک تناقض است. بنابراین $fd(T_2)\equiv\gamma(T_2)$. در نتیجه بنا به فرض استقرا $T_2\in\mathcal{T}$، لذا می‌توان نتیجه گرفت T از T_2 تحت **عملگر** $\mathcal{O}_2$ به‌دست می‌آید.

حال فرض کنید هر فرزند x_{d-2} غیر از x_{d-1} برگ باشد. بوضوح $x_{d-2}\in S$. همانند قبل اگر $T_2=T-T_{x_{d-1}}$، آن‌گاه به‌راحتی می‌توان دید که $T_2\in\mathcal{T}$. اگر $d_T(x_{d-2})\geq 4$، آن‌گاه T از T_2 توسط **عملگر** $\mathcal{O}_2$ به‌دست می‌آید. بنابراین فرض کنید که $d_T(x_{d-2})=3$. اگر یک $\gamma(T_2)$-مجموعه مانند D'_1 وجود داشته باشد که شامل x_{d-2} نباشد، آن‌گاه $D'_1\cup\{x_{d-1}\}$ یک $\gamma(T)$-مجموعه است که $fd(T)$-مجموعه نیست و این یک تناقض است. بنابراین هر $\gamma(T_2)$-مجموعه شامل x_{d-2} است. در نتیجه T از T_2 تحت **عملگر** $\mathcal{O}_2$ بدست می‌آید.

مورد۲. $d_T(x_{d-1})=2$. فرض کنید $d_T(x_{d-2})\geq 3$. اگر x_{d-1} فرزندی مانند $v\neq x_{d-1}$ داشته باشد که برگ نباشد، آن‌گاه مطابق مورد (۱) فرض کنید که $d_T(v)=2$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $v,x_{d-1}\in S$ چون S یک FD-مجموعه است، بنابراین $x_{d-2}\in S$. در این‌صورت $(S-\{x_{d-1}\})\cup\{x_d\}$ یک $\gamma(T)$-مجموعه است که $fd(T)$-مجموعه نیست و این یک تناقض است. بنابراین هر فرزند x_{d-2} به‌جز x_{d-1} برگ است. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $x_{d-2}\in S$. بنابراین $(S-\{x_{d-1}\})\cup\{x_d\}$ یک $\gamma(T)$-مجموعه است که $fd(T)$-مجموعه نیست و این یک تناقض است. بنابراین فرض کنید $d_T(x_{d-2})=2$. اگر $x_{d-2}\in S$، آن‌گاه $(S-\{x_{d-1}\})\cup\{x_d\}$ یک $\gamma(T)$-مجموعه است که $fd(T)$-مجموعه نیست و این یک تناقض است. بنابراین $x_{d-2}\notin S$. بنابر تعریف FD-مجموعه $|N(x_{d-2})\cap S|=|N(x_d)\cap S|$، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $x_{d-3}\notin S$. در این‌صورت $x_{d-1}\in S$ و $x_d\notin S$.

فرض کنید $T_3=T-T_{x_{d-2}}$. در این‌صورت $S\cap V(T_3)$ یک FD-مجموعه برای T_3 است،

لذا خواهیم داشت

$$fd(T_۳) \leq fd(T) - ۱. \qquad (۵.۴)$$

از طرفی هر $fd(T_۳)$−مجموعه را با اضافه کردن $x_{d-۱}$ می‌توان به یک FD−مجموعه برای T تبدیل کرد، بنابراین $fd(T) \leq fd(T_۳) + ۱$. در نتیجه $fd(T) = fd(T_۳) + ۱$. حال ثابت می‌کنیم که $\gamma(T) = \gamma(T_۳) + ۱$. بدین منظور طبق رابطه (۵.۴) و $\gamma(T) \leq fd(T)$ خواهیم داشت، $\gamma(T_۳) \leq fd(T_۳) \leq fd(T) - ۱ = \gamma(T) - ۱$. حال فرض کنید D' یک $\gamma(T_۳)$−مجموعه باشد، در این‌صورت $D' \cup \{x_{d-۱}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T خواهد بود، بنابراین $\gamma(T) \leq \gamma(T_۳) + ۱$. لذا $\gamma(T) = \gamma(T_۳) + ۱$. در نتیجه ثابت کردیم که $fd(T_۳) + ۱ = fd(T) = \gamma(T) = \gamma(T_۳) + ۱$، یعنی $fd(T_۳) = \gamma(T_۳)$.

حال ثابت می‌کنیم $fd(T_۳) \equiv \gamma(T_۳)$. بدین منظور فرض کنید $fd(T_۳) \not\equiv \gamma(T_۳)$. حال فرض کنید R یک $\gamma(T)$−مجموعه است که $fd(T)$−مجموعه نیست. در این‌صورت $R \cup \{x_{d-۱}\}$ یک $\gamma(T)$−مجموعه است که $fd(T)$−مجموعه نیست و این یک تناقض است. بنابراین

$fd(T_۳) \equiv \gamma(T_۳)$. در نتیجه بنا به فرض استقرا $T_۳ \in \mathcal{T}$، لذا می‌توان نتیجه گرفت T از $T_۳$ تحت **عملگر** $\mathcal{O}_۱$ به‌دست می‌آید.

از طرفی عکس این قضیه توسط لم ۳.۴ اثبات می‌شود. □

پیوست آ

جدول نمادها

$n(G)$	مرتبه گراف G
$d_G(v)$	درجه در گراف G
Δ	ماکزیمم درجه در گراف
δ	مینیمم درجه در گراف
$\overline{d}$	میانگین درجه در گراف
$d_G(u,v)$	فاصله بین دو راس در گراف (G)
$diam$	قطر گراف
P_n	مسیر n راسی
C_n	دور n راسی
χ	عدد رنگی
α	عدد استقلال
$span$	گستردگی
rep	عدد تکرار
$H \subseteq G$	H زیرگراف G
$G[V(H)]$	H زیرگراف القایی G
$K_{m,n}$	گراف دوبخشی کامل با بخش‌های X و Y که $\|X\| = n$ و $\|Y\| = m$
K_n	گراف کامل n راسی
$\overline{G}$	مکمل گراف G

$S(r,s)$	۲-ستاره برای $r, s \geq ۱$
$L(T)$	مجموعه برگ‌ها در درخت T
$S(T)$	مجموعه رئوس پشتیبان در درخت T
cor	تاج
$\gamma(G)$	عدد احاطه‌گری در گراف (G)
$fd(G)$	عدد احاطه‌گری دلپذیر در گراف (G)
$fd_k(G)$	عدد k-احاطه‌گری دلپذیر در گراف (G)
$OR-set$	مجموعه منظم بیرونی
ξ_{or}	عدد منظم بیرونی
MOP	گراف مسطح بیرونی ماکسیمال
$\equiv$	تساوی قدرتمند

مراجع

[1] D.W. Bange, A.E. Barkauskas, and P.J. Slater, Disjoint dominating sets in trees, Technical Report 78-1087 J, Sandia Laboratories, 1978.

[2] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory with applications*, Springer, 2008.

[3] Y, Caro, New results on the independence number, Tech Report, Tel-Aviv university, 1979.

[4] Y, Caro, D.B. West, Reportition number of graphs, Electron, J, Combin. 16 (2009) ,R7.

[5] M. Chellali and N. Jafari Rad, Strong equality between the Roman Domination and independent Roman domination numbers in trees, Discuss. Math. Graph Theory 33 (2013), 337-346.

[6] B. Chaluvaraju, K. Vidya, Perfect dominating set graph of a graph G, Adv. Appl. 432. (9) (2010) 2409-2417.

[7] J.F. Fink, M.S. Jacobson, n-domination in graphs, in: Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, John Wiley and Sons, New York, 1985, pp. 282-300.

[8] O. Ore, Theory of Graphs, in: Amer. Math, Soc. Transl. Vol, 38, Amer, Math, Soc. Providence, RI, 1962, pp. 206-212.

[9] C. Payan, N.H. Xuong, Domination-balanced graphs, J. Graph Theory 6 (1982) 23-32.

[10] V.K. Wei, A lower bound on the stability number of a simple graph, Bell Lap. Tech. Memo, (81-11217-9) (1981)

[11] D.B. West, *Introduction to graph theory*, Prentice Hall, 2000.

[12] Yair Caro, Adriana Hansberg, and Michael Henning, Fair domination in Graphs, Discrete mathematics 312 (2012) 2905-2014.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

احاطه‌گری .... domination

احاطه‌گری دلپذیر .... fair domination

ب

برگ .... leaf

بدون دور .... cycle-free

ت

تاج .... corona

تکرار .... repetition

تیز .... sharp

چ

چند ضلعی منتظم .... polygon

د

دور .... cycle

درخت .... tree

دلپذیر .... fair

ر

راس آویزان .... pendant vertex

راس پشتیبان .... support vertex

راس تنها .... isolated vertex

رنگ آمیزی .... coloring

رنگ آمیزی واقعی .... proper coloring

ریشه .... root

ز

زیرتقسیم .... subdividing

زیردرخت .... subtree
زیرگراف .... subgraph
زیرگراف القایی .... induced subgraph

س

ستاره .... star

ع

عدد استقلال .... independence number

ک

کران بالا .... upper bound

گ

گراف k−بخشی .... k-partite graph
گراف k−بخشی کامل .... complete k-partite graph
گراف k−منتظم .... k-regular graph
گراف تهی .... empty graph
گراف دوبخشی .... bipartite graph
گراف دوبخشی کامل .... complete bipartite graph
گراف ساده .... simple graph
گراف کامل .... complete graph
گراف کلی .... total graph
گراف مسطح بیرونی .... outerplanar graph
گراف مکمل .... complement graph
گراف منتظم .... regular graph
گراف نامتناهی .... infinity graph
گراف ناهمبند .... disconnected graph
گراف همبند .... connected graph
گستردگی .... span

م

مثلث .... triangle
مجاور .... adjacent
مجموعه مستقل .... independent set
مسیر .... path
مولفه .... component

ه

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

adjacent .... مجاور

B

bipartite graph .... گراف دوبخشی

C

chromatic number .... عدد رنگی

coloring .... رنگ آمیزی

complement graph .... گراف مکمل

complete bipartite graph .... گراف دوبخشی کامل

complete graph .... گراف کامل

complete k-partite graph .... گراف $k-$بخشی کامل

component .... مولفه

connected graph .... گراف همبند

corona .... تاج

cycle .... دور

cycle-free .... بدون دور

D

disconnected graph .... گراف ناهمبند

domination .... احاطه‌گری

E

empty graph .... گراف تهی

E

fair .... دلپذیر

fair domination .... احاطه‌گری دلپذیر

I

independence number .... عدد استقلال
independent set .... مجموعه مستقل
induced subgraph .... زیرگراف القایی
infinity graph .... گراف نامتناهی
isolated vertex .... راس تنها

K

k-partite graph .... گراف $k-$بخشی
k-regular graph .... گراف $k-$منتظم

L

leaf .... برگ

N

neighborhood .... همسایگی

O

outerplanar graph .... گراف مسطح بیرونی

P

path .... مسیر
pendant vertex .... راس آویزان
polygon .... چند ضلعی منتظم
proper coloring .... رنگ آمیزی واقعی

R

regular graph .... گراف منتظم
repetition .... تکرار
root .... ریشه

S

sharp .... تیز
simple graph .... گراف ساده
span .... گستردگی
star .... ستاره
subdividing .... زیرتقسیم
subgraph .... زیرگراف
support vertex .... راس پشتیبان

T

درخت .... tree

مثلث .... triangle

U

کران بالا .... upper bound

نمایه

Abstract

A fair dominating set in a graph G (or FD-set) is a dominating set D such that all vertices not in D are dominated by the same number of vertices from D; that is, every two vertices not in D have the same number of neighbors in D. The fair domination number, $fd(G)$, of G is the minimum cardinality of a FD-set. A fair dominating set of cardinality $fd(G)$ is called a $fd(G)$-set. In chapter 1, we review theory graph concepts that we need them in the future chapters. In chapter 2, we represent fair domination concepts in graphs and we prover problems about it. In chapter 3, our purpose is to present equality between the domination number and fair domination number. Therefore we define some operations and we want to prover this theorem. In chapter 4, our purpose is to present strong equality between the domination number and fair domination number. Results in chapter 3 and 4 are presented for first time in this thesis.

Keywords: Domination, Fair domination.

Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Fair domination in graphs

Supervisor

Dr.N. Jafari Rad

by

Roqayyeh Qezel Sofla

December 2014