دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

گرایش آنالیز

نگرشی نوین به انتگرال لبگ

اساتید راهنما

دکتر کامران شریفی و دکتر الهام دسترنج

استاد مشاور

سید رضا موسوی

نگارش:

نصراله عارفخانی

۱۳۹۳

تأییدیه‌ی هیأت داوران جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه

نام دانشکده: دانشکده ریاضی

نام دانشجو: نصراله عارفخانی

عنوان پایان‌نامه: نگرشی نوین به انتگرال لبگ

تاریخ دفاع: ۱۳۹۳

رشته: ریاضی محض

گرایش: آنالیز

تأییدیه‌ی صحت و اصالت نتایج

باسمه تعالی

اینجانب نصراله عارفخانی به شماره دانشجویی ۹۰۰۴۲۰۴ دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می‌نمایم که کلیه‌ی نتایج این پایان‌نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه‌برداری‌شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده‌ام. درصورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض درخصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می‌نمایم. در ضمن، مسؤولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی‌صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده‌ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ‌گونه مسؤولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی: نصراله عارفخانی

تاریخ و امضا:

مجوز بهره‌برداری از پایان‌نامه

بهره‌برداری از این پایان‌نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می‌شود، بلامانع است:

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه برای همگان بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه تا تاریخ .... ممنوع است.

اساتید راهنما: دکتر کامران شریفی

دکتر الهام دسترنج

تاریخ:

امضا:

تقدیم به:

پدر و مادر بزرگوار

و

همسر مهربانم

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر کامران شریفی و سرکار خانم دکتر الهام دسترنج صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای سید رضا موسوی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که بهترین پشتیبان من بود.

نصراله عارفخانی

۱۳۹۳

فرم چکیده پایان نامه تحصیلات تکمیلی

معاونت تحصیلات تکمیلی

دانشگاه صنعتی شاهرود

نام خانوادگی دانشجو: عارفخانی	**نام:** نصراله	**شماره دانشجویی:** ۹۰۰۴۲۰۴
اساتید راهنما: دکتر کامران شریفی دکتر الهام دسترنج	**استاد مشاور:** آقای سید رضا موسوی	
دانشکده: ریاضی	**رشته:** ریاضی محض	**گرایش:** آنالیز
مقطع: کارشناسی ارشد	**تاریخ دفاع:** ۱۳۹۳/۶/۱۸	**تعداد صفحات:** ۴۸
عنوان پایان نامه: نگرشی نوین به انتگرال لبگ		
کلید واژه ها: انتگرال لبگ، مسیر، انتگرال نخستین بازگشت		

چکیده:

هدف اصلی این پایان نامه نگرشی نو به انتگرال لبگ است. در واقع انتگرال لبگ را با دنباله مجموع های خاصی تقریب می زنیم. به عبارت دقیق تر فرایندی را در پیش می گیریم که انتگرال لبگ یک تابع اندازه پذیر کران دار مانند $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ روی بازه فشرده $I = [0, 1]$ را به دست می دهد. برای این منظور ابتدا مسیر را که دنباله خاصی روی I مانند $\bar{x}$ است معرفی می کنیم و با کمک انتگرال نخستین بازگشت نسبت به دنباله $\bar{x}$ نشان می دهیم که تحت شرایطی فرایند انتگرال گیری نخستین بازگشت، انتگرال لبگ تابع f را برای تقریبا هر دنباله $\bar{x}$ به دست می دهد.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیمی از نظریه اندازه و احتمال

۱ـ۱ اندازه و اندازه‌پذیری

در این فصل مفاهیم مقدماتی و مورد نیاز نظریه اندازه را به طور اختصار می‌آوریم.

تعریف ۱ـ۱ـ۱. فرض کنیم X مجموعه‌های ناتهی و C دسته‌ای ناتهی از زیر مجموعه‌های X باشد.

۱. C را یک نیم حلقه از زیرمجموعه های X گوییم هرگاه C تحت اشتراک های متناهی بسته و تفاضل هر دو عضو C برابر با اجتماع متناهی از اعضای دو به دو مجزای C باشد.

۲. C را یک حلقه از زیر مجموعه‌های X گوییم اگر C تحت اجتماع‌های متناهی و تفاضل بسته باشد.

۳. C را یک نیم میدان (نیم جبر) از زیر مجموعه‌های X گوییم اگر C تحت اشتراک های متناهی بسته و مکمل هر عضو برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دو به دو مجزای C باشد.

۴. C را یک $\sigma-$ میدان از زیرمجموعه های X گوییم اگر C تحت اجتماع شمارش پذیر و مکمل بسته باشد.

ملاحظه ۱ـ۱ـ۲. *دسته های گوناگون از بازه ها در $\mathbb{R}$ و حاصلضرب‌های دکارتی آن‌ها در سایر فضاهای اقلیدسی الگوهای مناسبی برای نیم حلقه ها هستند. همچنین دسته‌های گوناگون از بازه ها و شعاع ها و حاصلضرب های دکارتی آن‌ها الگوهای مناسبی به ترتیب برای نیم جبرها و جبرها هستند.*

تعریف ۱ـ۱ـ۳. فرض می کنیم C دسته‌ای ناتهی و دلخواه از زیر مجموعه‌ها باشد. منظور از یک اندازه روی C تابعی مانند μ با دامنه C است به طوری که در شرایط زیر صدق کند.

۱. برای هر A در C، $0 \leq \mu(A) \leq \infty$.

۲. هرگاه $\{A_n; n \geq 1\}$، دنباله‌ای (متناهی یا نامتناهی) از اعضای دوبه دو مجزای C باشد به طوری که $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in C$ آنگاه $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

خاصیت ۲ را $\sigma-$ جمع پذیری برای μ می‌گوییم.

تعریف ۱ـ۱ـ۴. فرض کنیم C دسته‌ای دلخواه از زیر مجموعه‌های X باشد.کوچکترین $\sigma-$ جبر (برحسب رابطه‌ی شمول) شامل C از زیرمجموعه های X را $\sigma-$ جبر تولید شده توسط C می‌نامیم وبه صورت $\sigma(C)$ نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که $\sigma(C)$ اشتراک تمام $\sigma-$ جبرهای شامل C است.

تعریف ۱ـ۱ـ۵. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ یا $(\mathbb{R}^n)$ و C دسته‌ی تمام بازه ها باشد. $\sigma-$ جبر تولید شده توسط C را $\sigma-$ جبر بورل گوییم و با $\mathcal{B}$ نشان می دهیم. دسته ی تمام بازه ها به صورت $[a, b)$ یا $[a, b]$ یا $(a, b]$ که در آن a و b اعداد گویا هستند و یامجموعه ی شعاع هایی که ابتدا و انتهای آن ها اعداد گویا باشند همگی مولد بورل هستند.

ملاحظه ۱ـ۱ـ۶. *به طور کلی دریک فضای توپولوژیکی $\sigma-$ جبر تولید شده توسط مجموعه های باز را $\sigma-$ جبر بورل می نامیم.*

تعریف ۱ـ۱ـ۷. هر اشتراک شمارش پذیر از مجموعه های باز یک مجموعه G_δ و هر اجتماع شمارش پذیر از مجموعه های بسته، یک مجموعه $\mathcal{F}_\delta$ نامیده می شود.

تعریف ۱ـ۱ـ۸. هر اجتماع شمارش پذیر از مجموعه های G_δ را یک مجموعه G_{δ_σ} نامیم و هر اشتراک شمارش پذیر از مجموعه‌های $\mathcal{F}_\delta$ را یک مجموعه‌ی $\mathcal{F}_{\delta_\sigma}$ می‌نامیم.

قضیه ۱ـ۱ـ۹. *$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ توسط هرکدام از مجموعه‌های زیر تولید می‌شود.*

(i) $E_1 = \{(a, b); a < b\}$

(ii) $E_2 = \{[a, b]; a < b\}$

(iii) $E_۳ = \{(a,b]; a<b\}$ یا $E_۴ = \{[a,b); a<b\}$

(iv) $E_۵ = \{(a,\infty); a\in\mathbb{R}\}$ یا $E_۶ = \{(-\infty,b); a\in\mathbb{R}\}$

(v) $E_۵ = \{[a,\infty); a\in\mathbb{R}\}$ یا $E_۶ = \{(-\infty,a]; a\in\mathbb{R}\}$

برهان. به [۱۰] رجوع کنید. ■

تعریف ۱ـ۱ـ۱۰. فرض کنیم C ساختاری (نیم حلقه، نیم میدان، حلقه یا میدان) از زیر مجموعه‌های X و μ اندازه ی روی C باشد. اندازه μ را روی C، متناهی گوییم هرگاه برای هر A در C، $\mu(A) < \infty$ و $\sigma-$ متناهی گوییم هرگاه دنباله ای مانند $\{A_n, n \geq ۱\}$ از اعضای C وجود داشته باشد به طوری که $X = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $\mu(A_n) < \infty$.

تعریف ۱ـ۱ـ۱۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{H}$ نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه‌های X و μ اندازه‌ای روی $\mathcal{H}$ باشد. همچنین فرض کنیم دنباله‌ای از اعضای $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد که اندازه‌ی هرجمله‌ی آن متناهی است و این دنباله X را بپوشاند (به عنوان الگو می‌توان X را $\mathbb{R}$ و $\mathcal{H}$ را نیم حلقه‌ی بازه‌ها درنظر گرفت.) برای زیر مجموعه‌ی دلخواه A از X اندازه‌ی خارجی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\geq ۱} \mu(I_n) : \ I_n \in H, \quad A \subset \bigcup_{n\geq ۱} I_n\}.$$

ملاحظه ۱ـ۱ـ۱۲. *الف– برای* $I \in H$، $\mu^*(I) = \mu(I)$.

ب– اگر $\{A_n\}_{n\geq ۱}$ *دنباله‌ای دلخواه از زیر مجموعه‌های* X *باشد آن‌گاه*

$$\mu^*(\bigcup A_n) \leq \sum \mu^*(A_n).$$

برهان. به [۱] رجوع کنید. ■

تعریف ۱ـ۱ـ۱۳. زیر مجموعه‌ی A از X را نسبت به μ^* (یاμ) اندازه پذیر گوییم، اگر برای هر I در $\mathcal{H}$ داشته باشیم $\mu(I) = \mu^*(I\cap A) + \mu^*(I - A)$.

ملاحظه ۱ـ۱ـ۱۴. (i) *هرعضو* $\mathcal{H}$ *و هرعضو حلقه‌ی تولید شده توسط* $\mathcal{H}$ *اندازه‌پذیرند.*

(ii) اگر A نسبت به μ^* اندازه پذیر باشد، آن‌گاه برای هر زیر مجموعه‌ی دلخواه B از X داریم.

$$\mu(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A)$$

(iii) در تحقیق تساوی بالا برای A ،مجموعه‌ی B را مجموعه‌ی آزمونی گوییم.

برهان. به [۱] رجوع کنید. ■

قضیه ۱ ـ ۱ ـ ۱۵. *دسته‌ی مجموعه های اندازه پذیر نسبت به μ^* یک $\sigma-$ جبر در X شامل $\mathcal{H}$ و μ^* یک اندازه روی این $\sigma-$ جبر است. تحدید μ^* به $\mathcal{H}$ برابر μ است.*

برهان. به [۱] رجوع کنید. ■

قضیه ۱ ـ ۱ ـ ۱۶. *(گسترش کاراتئودوری[1]) اگر $\mathcal{H}$ نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه‌های X و μ اندازه‌ای در $\mathcal{H}$ باشد به طوری که تعداد شمارش پذیر از اعضای $\mathcal{H}$ با اندازه‌ی متناهی X را بپوشاند، آن‌گاه μ گسترشی یگانه به یک اندازه روی $\sigma-$ جبر تولید شده توسط $\mathcal{H}$ در X دارد.*

برهان. به [۱] رجوع کنید. ■

تعریف ۱ ـ ۱ ـ ۱۷. اگر $X = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و H مجموعه بازه‌ها (یا جعبه‌ها) و μ تابع طول (یا تابع حجم) باشد، زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $\mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) نسبت به μ^* اصطلاحاً «اندازه پذیر لبگ» نامیده می‌شود. دسته‌ی چنین مجموعه‌هایی را $\sigma-$ جبر لبگ می‌نامیم.

تعریف ۱ ـ ۱ ـ ۱۸. منظور از یک فضای اندازه‌پذیر عبارت است از زوج $(X, \mathcal{A})$، که متشکل از یک مجموعه ناتهی مانند X و $\sigma-$ جبر $\mathcal{A}$، از زیر مجموعه‌های X می‌باشد. هرعضو $\mathcal{A}$ را یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر می‌نامیم.

تعریف ۱ ـ ۱ ـ ۱۹. منظوراز یک فضای اندازه، سه‌تایی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ است که $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و μ یک اندازه روی $\sigma-$ جبر $\mathcal{A}$ است.

ملاحظه ۱ ـ ۱ ـ ۲۰. *برای فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ،*

[1] Caratheodory extention theorem

(*i*) *برای* A *های دوبه‌دوی مجزا* $(i = ۱, ..., n)$ *، اگر* $A_۱, A_۲, ..., A_n \in \mathcal{A}$ *و* $\bigcup_{i=۱}^{n} A_i \in \mathcal{A}$. *آن‌گاه* $\mu(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i) = \sum_{i=۱}^{n} \mu(A_i)$ *. این خاصیت را متناهیاً جمع‌پذیری برای* μ *گوییم.*

(*ii*) *اگر* $B \in \mathcal{A}$ *و* $A \subset B$ *، آن‌گاه* $\mu(A) \leq \mu(B)$ *، این خاصیت را یکنوایی برای* μ *گوییم. و همچنین*

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A) \quad , \quad \mu(A) < \infty.$$

(*iii*) *اگر* $A_۱, A_۲, A_۳, \ldots \in \mathcal{A}$ *آن‌گاه داریم:*

$$\mu(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n) = \sum_{n=۱}^{\infty} \mu(A_n).$$

(*iv*) *اگر* $A \in \mathcal{A}$ *وجود داشته باشد به طوری که* $\mu(A) < \infty$ *، آن‌گاه* $\mu(\phi) = ۰$ *.*

برهان. به [۱] رجوع کنید. ■

قضیه ۱ـ۱ـ۲۱. *فرض کنید* $\{A_n\}$ *دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد به طوری که* $\forall n, \mu(A_n) < \infty$ *، آن‌گاه*

$$\mu(\bigcap_{n=۱}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

برهان. به [۱] رجوع کنید. ■

تعریف ۱ـ۱ـ۲۲. فرض کنید $(X, \mathcal{A})$ و $(Y, \mathcal{A}')$ فضاهای اندازه‌پذیر باشند. تابع $f : X \to Y$ را اندازه‌پذیر نسبت به $(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ گوییم، اگر برای هر $A' \in \mathcal{A}'$ داشته باشیم، $f^{-۱}(A') \in \mathcal{A}$. از این پس هرگاه $\sigma-$ جبرهای مفروض مشخص باشند و نیاز به تصریح نباشد، به طور ساده f را اندازه‌پذیر گوییم، هرگاه شرط یاد شده برقرار باشد.

ملاحظه ۱ـ۱ـ۲۳. *اگر* f *را یک تابع حقیقی گسترش یافته روی* X *تعریف کنیم آن‌گاه برای چهار عبارتی که به ترتیب آورده می شود معادل هایی قرارداد می کنیم که تا پایان این رساله به کار گرفته می شوند.*

(*i*) *عبارت* $\{x; f(x) < a\}$ *معادل است با* $\{f < a\}$ *.*

(ii) عبارت $\{x; f(x) \le a\}$ معادل است با $\{f \le a\}$.

(iii) عبارت $\{x; f(x) > a\}$ معادل است با $\{f > a\}$.

$(iv))$ عبارت $\{x; f(x) \ge a\}$. معادل است با $\{f \ge a\}$.

ملاحظه ۱ــ۱ــ۲۴. *اگر f یک تابع حقیقی مقدار گسترش یافته باشد که برای a حقیقی دلخواه در یکی از چهار عبارتی که در بالا آورده شد صادق باشد، آن‌گاه f یک تابع اندازه‌پذیر نامیده می‌شود.*

توجه ۱ــ۱ــ۲۵. اگر f یک تابعی حقیقی و پیوسته باشد، در این صورت f تابعی اندازه‌پذیر است. (به [۱۰] رجوع کنید.)

قضیه ۱ــ۱ــ۲۶. *اگر f و g توابع اندازه‌پذیر باشند و c ثابت باشد، آن‌گاه $f \pm g$ و $f + c$ و cf و f^2، fg نیز همگی اندازه‌پذیر هستند.*

برهان. به [۱۰] رجوع کنید. ■

قضیه ۱ــ۱ــ۲۷. *اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر روی X باشد آن‌گاه $\sup\{f_n\}$ و $\inf\{f_n\}$، $\limsup\{f_n\}$ و $\liminf\{f_n\}$ اندازه پذیرند.*

برهان. به [۱۰] رجوع کنید. ■

ملاحظه ۱ــ۱ــ۲۸. *گوییم خاصیتی که برای تمام اعضای فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{A}, \mu)$ تعریف شده است، تقریباً همه جا برقرار است، اگر وتنها اگر مجموعه‌ی نقاطی که دارای آن خاصیت نیستند، اندازه‌پذیر و دارای اندازه μی صفر باشد.*

تعریف ۱ــ۱ــ۲۹. فرض کنیم X یک فضای متریک باشد و $A \subset X$. اگر $(\bar{A})^\circ = \phi$ آن‌گاه A هیچ جا چگال نامیده می‌شود. (منظور از نماد $\bar{A}$ در حقیقت بستار مجموعه A و مقصود از $(\bar{A})^\circ$، درون بستار A است).

قضیه ۱ــ۱ــ۳۰. *(کاتگوری بئر[1]) فرض کنیم X یک فضای متری کامل باشد. آن‌گاه*

[1] Bair category

(i) اگر $\{U_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای از مجموعه‌های چگال باز در X باشد. آنگاه $\bigcap_1^\infty U_n$ در X باز است.

(ii) X اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های هیچ جا چگال نیست.

برهان. به [۱۰] رجوع کنید. ■

تعریف ۱ـ۱ـ۳۱. مجموعه‌ای چون $A \subset X$ از کاتگوری اول[1] است هرگاه A اجتماع شمارش‌پذیری‌از مجموعه‌های هیچ جا چگال باشد، در غیر اینصورت A از کاتگوری دوم[2] است.

نتیجه ۱ـ۱ـ۳۲. *هر فضای متری کامل به عنوان زیرمجموعه ای از خودش از کاتگوری دوم است.*

تعریف ۱ـ۱ـ۳۳. متمم یک مجموعه کاتگوری اول، پس مانده نامیده می‌شود.

۱ـ۲ انتگرال ریمان

از این به بعد در سراسر این پایان نامه اندازه لبگ مجموعه A را با نماد $\lambda(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱ـ۲ـ۱. افراز $\mathcal{P}$ روی $[a,b]$ عبارت است از دسته‌ی متناهی از زیر بازه‌های $[a,b]$، مانند $\{I_k \subseteq [a,b] : 1 \leq k \leq n; n \in \mathbb{N}\}$ به طوری که برای هر $1 \leq k \leq n$ $\lambda(I_k) > 0;$ و

$$\forall 1 \leq i,j \leq n;\ i \neq j,\ I_i \cap I_j = \phi, \quad \bigcup_{k=1}^{n} I_k = [a,b].$$

نرم افراز $\mathcal{P}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\|\mathcal{P}\| := \max\{\lambda(I_k)\ :\ I_k \in \mathcal{P}\}.$$

تعریف ۱ـ۲ـ۲. فرض کنید f تابعی حقیقی و کراندار و $\mathcal{P}$ افرازی روی بازه $[a,b]$ باشد. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، t_i نقطه‌ی دلخواهی از زیر بازه‌ی I_i از افراز $\mathcal{P}$ باشد، آنگاه مجموع ریمان متناظر با افراز $\mathcal{P}$

[1] First category
[2] Second category

و تابع f که آن را با نماد $S(P,f)$ نشان می‌دهیم بصورت زیر تعریف می‌شود

$$S(P,f)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\lambda(I_i).$$

گوییم تابع f انتگرال پذیر ریمان است هرگاه عددی حقیقی مانند A وجود داشته باشد که برای آن، هر $\varepsilon > 0$ افرازی مانند $\mathcal{P}_\varepsilon \subseteq \mathcal{P}$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر انتخاب t_i از زیر بازه‌های افراز $\mathcal{P}$، داشته باشیم $|s(P,f)-A| < \varepsilon$. چنین A ای در صورت وجود یکتاست و آن را انتگرال ریمان تابع f می‌نامیم و با نماد $\int_a^b f dx$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱ــ۲ــ۳. *فرض کنید f بر بازه‌ی $[a,b]$ کراندار و E مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی f روی بازه $[a,b]$ باشد. در اینصورت f انتگرال‌پذیر ریمان است، اگر وفقط اگر مجموعه‌ی E دارای اندازه لبگ صفر باشد.*

برهان. به [۲] رجوع کنید. ■

۱ــ۳ انتگرال لبگ

تعریف ۱ــ۳ــ۱. اگر A زیر مجموعه ای دلخواه از مجموعه ناتهی X باشد، تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی A را با نماد χ_A نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\chi_A(x)=\begin{cases} 1 & x\in A \\ 0 & x\notin A \end{cases}$$

تعریف ۱ــ۳ــ۲. تابع ساده، تابعی است با دامنه‌ی دلخواه و مقادیر حقیقی، که تعداد مقادیرش متناهی است. فرض کنیم φ تابعی ساده روی فضای $(X,\mathcal{A},\mu)$ با مقادیر متمایز $a_1,\ldots,a_n$ باشد. می‌توان نوشت $\varphi=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ که در آن $A_i=\{x\in X : \varphi(x)=a_i\}$ روشن است که A_i ها مجزا هستند.

اندازه‌پذیری φ معادل است با اینکه بگوییم A_i ها اندازه‌پذیرند. انتگرال φ نسبت به اندازه μ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_X \varphi d\mu=\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i).$$

تعریف ۱ـ۳ـ۳. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه‌پذیر و نامنفی باشد. انتگرال f روی هر $A \in \mathcal{A}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_A f d\mu = \sup\{\int_A \varphi d\mu; \varphi \leq f\}.$$

که در آن φ تابع ساده و نامنفی است.

قضیه ۱ـ۳ـ۴. (قضیه همگرایی یکنوا [۱]) *اگر $f_۱, f_۲, \ldots$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی و صعودی باشد و $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ آنگاه داریم*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

برهان. به [۱] رجوع کنید. ■

ملاحظه ۱ـ۳ـ۵. *اگر f تابع اندازه‌پذیر نامنفی روی مجموعه اندازه‌پذیر A و $a, b > ۰$ آنگاه*

$$\int_A (af + bg) d\mu = a \int_A f d\mu + b \int_A g d\mu$$

.

برهان. به [۱۰] رجوع کنید. ■

ملاحظه ۱ـ۳ـ۶. *فرض کنیم f تابع اندازه‌پذیر روی X و $A_۱, A_۲, \ldots$ دنباله‌ای از اعضای دو به دو مجزای A باشد و $A = \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i$. در اینصورت خواهیم داشت*

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=۱}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu.$$

برهان. به [۱] رجوع کنید. ■

[۱] Monoton convegence theorem

قرارداد ۱ــ۳ــ۷. تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f روی مجموعه‌ی اندازه‌پذیر A، انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه

$$\int_A f d\mu < \infty.$$

تعریف ۱ــ۳ــ۸. اگر f تابعی حقیقی با دامنه‌ی دلخواه باشد، متناظر با f برای هر x از دامنه‌ی f توابع f^- f^+ و، را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f^-(x) = \max\{-f(x), \circ\} \qquad , \qquad f^+(x) = \max\{f(x), \circ\}.$$

f^- و f^+ را به ترتیب جزء مثبت و جزء منفی f می‌نامیم. در اینصورت $f = f^+ - f^-$، یعنی هر تابع اندازه‌پذیر را می‌توان بصورت تفاضل دو تابع اندازه‌پذیر نامنفی نوشت. همچنین داریم $|f| = f^+ + f^-$. روشن است اگر f اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f^+ و f^- نیز اندازه‌پذیرند.

تعریف ۱ــ۳ــ۹. فرض کنید (X, A, μ) یک فضای اندازه باشد. تابع f که روی X تعریف شده است را انتگرال‌پذیر گوییم، هرگاه $\int f^+$ و $\int f^-$ هردو متناهی باشند. در اینصورت برای هر $A \in \mathcal{A}$ تعریف می کنیم

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

قضیه ۱ــ۳ــ۱۰. *فرض کنید f یک تابع حقیقی کراندار تعریف شده روی $[a, b]$ باشد. اگر f انتگرال‌پذیر ریمان روی $[a, b]$ باشد. آنگاه f انتگرال‌پذیر لبگ است.*

برهان. به [۱۰] رجوع کنید. ■

عکس قضیه بالا لزوماً برقرار نیست به عنوان مثال تابع زیر در بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان نیست ولی انتگرال لبگ آن وجود دارد.

مثال ۱ــ۳ــ۱۱.

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ \circ & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

۱ـ۴ فضا های L^p

تعریف ۱ـ۴ـ۱. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $V = v(X)$ مجموعه تمام توابع حقیقی و اندازه پذیر روی X باشد. برای $p \geq ۱$ تعریف می کنیم

$$L^p = L^p(X) = \{f \in V \ : \ \int |f|^p d\mu < \infty\}.$$

تعریف ۱ـ۴ـ۲. برای هر $f \in L^p$، نرم f به صورت زیر تعریف می شود.

$$\|f\|_p = \Big(\int |f|^p d\mu\Big)^{\frac{۱}{p}}.$$

ملاحظه ۱ـ۴ـ۳. *۱. روشن است که f دارای انتگرال متناهی است اگر و فقط اگر $|f|$ دارای انتگرال متناهی باشد.*

۲. اگر $f \in L^۱$ آنگاه $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.

۳. اگر $f, g \in L^۱$، برای هر $A \in \mathcal{A}$،

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu \Leftrightarrow \int_A |f - g| d\mu = \circ \Leftrightarrow f = g \quad a.e.$$

.

۴. اگر f_n دنباله ای از توابع انتگرال پذیر باشد که $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ و $\int f d\mu < \infty$ آنگاه

$$\int |f_n - f| d\mu \longrightarrow \circ \Leftrightarrow \int |f_n| d\mu \longrightarrow \int |f| d\mu.$$

برهان. به [۱۰] رجوع کنید. ■

قضیه ۱ـ۴ـ۴. *(نامساوی مینکوفسکی[۱]) اگر f, g برای هر $۱ \leq p \leq \infty$ متعلق به L^p باشند، آنگاه*

[۱] Minkowski

$f+g$ نیز به آن تعلق دارد و داریم

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

برهان. به [۱۰] رجوع کنید. ■

قضیه ۱ــ۴ــ۵. *در فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ اگر $\mu(X) < \infty$ و p و q اعداد حقیقی باشند که $1 \leq p \leq q$ و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$، تابعی متعلق به $L^q(X)$ باشد در این صورت $f \in L^p(X)$.*

برهان. به [۱] رجوع کنید. ■

۱ــ۵ مفاهیم مقدماتی نظریه احتمال

تعریف ۱ــ۵ــ۱. یک فضای احتمال عبارت است از فضای اندازه $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ به طوری که $P(\Omega) = 1$. بنابراین فضای احتمال یک فضای اندازه ی خاص است. Ω را فضای نمونه، اعضای $\mathcal{F}$ را پیشامد و P را اندازه احتمال می نامیم.

تعریف ۱ــ۵ــ۲. فرض کنیم $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ فضا های احتمال اندازه پذیر باشند. زیرمجموعه های $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$ از $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$ را برای $F_1 \subseteq \Omega_1, F_2 \subseteq \Omega_1, \ldots, F_n \subseteq \Omega_n$ راست گوشه و برای $F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_n,$ راست گوشه اندازه پذیر می نامیم. دسته ی راست گوشه ها و دسته ی راست گوشه های اندازه پذیر هرکدام یک نیم میدان در $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$ می باشند.

$\sigma-$جبر تولید شده در $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$ توسط نیم میدان راست گوشه های اندازه پذیر را $\sigma-$جبر حاصل ضربی $F_1, F_2, \ldots, F_n$ نامیده و با نماد $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n$ نشان می دهیم.

اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، P_i یک اندازه روی $\mathcal{F}_i$ باشد، اندازه P روی نیم حلقه راست گوشه های اندازه پذیر به صورت زیر تعریف می شود

$$P(F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n) = P_1(F_1) \times P_2(F_2) \times \ldots \times P_n(F_n).$$

اگر P_i ها متناهی باشند، P نیز $\sigma-$متناهی است و بنا بر قضیه گسترش کاراتئودوری، P گسترشی یگانه به اندازه ای روی $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n$ دارد که آن را اندازه حاصل ضربی $P_1, P_2, \ldots, P_n$ می نامیم و با نماد $P_1 \otimes P_2 \otimes \ldots \otimes P_n$ نمایش می دهیم.

فضای $(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n, P_1 \otimes P_2 \otimes \ldots \otimes P_n)$ را فضای احتمال حاصل ضربی $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1), ((\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2) \ldots, ((\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ می نامیم.

تعریف ۱ـ۵ـ۳. اگر $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ یک فضای احتمال باشد، هر تابع اندازه پذیر با دامنه Ω و مقادیر حقیقی را متغیر تصادفی می نامیم. معمولا برای نشان دادن متغیر های تصادفی از حروف بزرگ لاتین استفاده می کنیم.

تعریف ۱ـ۵ـ۴. بردار تصادفی $n-$بعدی $\bar{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ تابعی است که دامنه آن فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ و مقادیر آن در $\mathbb{R}^n$ است و بر حسب $\sigma-$جبر های $\mathcal{F}$ و $\mathcal{B}_n$، اندازه پذیر است. یعنی برای هر $A \in \mathcal{B}_n$

$$\{\omega \,:\, \bar{X}(\omega) \in A\} = \{(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in A\} \in \mathcal{F}.$$

تعریف ۱ـ۵ـ۵. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی باشد، $\sigma-$جبر تولید شده توسط X تعریف می شود

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(A) \,:\, A \in \mathcal{B}\}.$$

تعریف ۱ـ۵ـ۶. فرض کنید X متغیری تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ باشد. تابع توزیع X را با F_X نمایش داده و برای هر عدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می کنیم

$$F_X(x) = P_X(-\infty, x] = P\{X \leq x\}.$$

تعریف ۱ـ۵ـ۷. فرض کنیم P یک اندازه احتمال روی محور اعداد حقیقی باشد. تابع $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را تابع توزیع P یا تابع توزیع احتمال می نامیم و برای هر $x \in \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$F(x) = P(-\infty, x].$$

تعریف ۱ــ۵ــ۸. تابع $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع توزیع احتمال می نامیم هر گاه خواص زیر را داشته باشد:

(i) صعودی باشد.

(ii) $\lim_{x\to\infty} F(x) = ۱$ و $\lim_{x\to-\infty} F(x) = ۰$.

(iii) در هر نقطه از راست پیوسته باشد.

قضیه ۱ــ۵ــ۹. *فرض کنیم $F = F(x)$ تابع توزیع احتمال روی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت اندازه احتمال یکتای P روی $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ وجود دارد به طوری که برای هر a و b حقیقی که $a < b$ داریم*

$$P(a, b] = F(b) - F(a).$$

برهان. به [۳] رجوع کنید. ■

تعریف ۱ــ۵ــ۱۰. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی انتگرال پذیر روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. امید ریاضی X را با $E(X)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$E(X) = \int_\Omega X dP$$

امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی مثل $g(X)$ نیز به طور طبیعی به صورت زیر تعریف می شود

$$E(g(X)) = \int_\Omega g(X) dP.$$

تعریف ۱ــ۵ــ۱۱. فرض کنیم X متغیری تصادفی باشد، c یک عدد حقیقی و ثابت و $n \in \mathbb{N}$.
$E((X-c)^n)$ را در صورت وجود گشتاور nام حول c می نامیم.
گشتاور n ام حول $c = E(X)$، گشتاور n ام مرکزی نامیده می شود.
$E(X - E(X))^۲$ را گشتاور مرکزی مرتبه دوم یا واریانس X می نامیم و با $Var(X)$ یا $\sigma^۲(X)$ نشان می دهیم.

قضیه ۱ـ۵ـ۱۲. *(نامساوی چبیشف[۱]) اگر X متغیری تصادفی و $Var(X) < \infty$ در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$*

$$P(|X_E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

برهان. به [۱۱] رجوع کنید. ■

تعریف ۱ـ۵ـ۱۳. دنباله $\{X_n\,;\, n \geq 1\}$ از متغیر های تصادفی را در احتمال[۲] همگرا به متغیر تصادفی $X(X < \infty)$ گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0.$$

حال اگر $X = +\infty$، گوییم دنباله $\{X_n\,;\, n \geq 1\}$ از متغیر های تصادفی در احتمال به $+\infty$ میل می کند هرگاه برای هر $M > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n < M\} = 0.$$

تعریف ۱ـ۵ـ۱۴. دنباله $\{X_n\,;\, n \geq 1\}$ از متغیر های تصادفی را به طور قریب به یقین[۳] همگرا به متغیر تصادفی X گوییم هرگاه $P\{\omega \,:\, \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$. در این صورت می نویسیم

$$X_n \longrightarrow X \quad a.s..$$

تعریف ۱ـ۵ـ۱۵. دنباله $\{X_n\,;\, n \geq 1\}$ از متغیر های تصادفی را برای $p \in \mathbb{R}$ و $p \geq 1$، در نرم L^p همگرا به متغیر تصادفی X گوییم هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\int_\Omega |X_n - X\|^p dP \Big) = 0.$$

[۱] Chebyshev

[۲] Convergence in propability

[۳] Almost surely

قضیه ۱ـ۵ـ۱۶. *همگرایی قریب به یقین و همگرایی در نرم L^p، همگرایی در احتمال را نتیجه می دهند.*

برهان. ■

تعریف ۱ـ۵ـ۱۷. فرض کنیم $E_1, E_2, \ldots$ دنباله ای از پیشامد ها باشد، گوییم E_n بینهایت بار اتفاق می افتد و می نویسیم $E_n \quad i.o.$ هرگاه پیشامد E_n برای بینهایت اندیس، رخ دهد و تعریف می کنیم

$$E_n \quad i.o. = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right).$$

لم ۱ـ۵ـ۱۸. (*بورل*[۱] *ـ کانتلی*[۲])

(i) *اگر* $E_1, E_2, \ldots$ *پیشامد های دلخواه باشند و* $\sum_{n\geq 1} P(E_n) < \infty$ *آنگاه*

$$P(E_n, i.o.) = 0.$$

(ii) *اگر* $E_1, E_2, \ldots$ *پیشامد های دلخواه باشند و* $\sum_{n\geq 1} P(E_n) = \infty$ *آنگاه*

$$P(E_n, i.o.) = 1.$$

[۱] Borel

[۲] Cantelli

فصل ۲

تقریباً همه جا بازیافت پذیری نخستین بازگشت

در این فصل مفهوم بازیافت پذیری و انتگرال پذیری نخستین بازگشت را معرفی می‌کنیم.

۲ـ۱ مفهوم نخستین بازگشت

در سراسر این فصل منظور از I، بازه مفروض $[0,1]$ و $\sigma-$میدان مفروض روی I، $\sigma-$میدان بورل و اندازه‌ی مفروض روی آن اندازه لبگ λ می باشد.

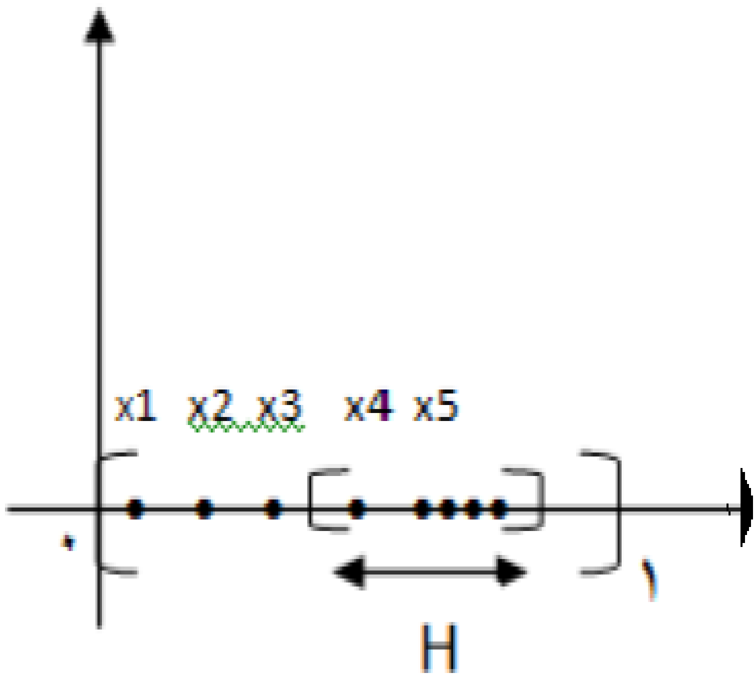
تعریف ۲ـ۱ـ۱. یک مسیر مانند $\bar{x}$، دنباله‌ای است به صورت $\{x_n\}_{n\geq 0}$ که جملات دنباله در $I=[0,1]$ چگالند.

مثال ۲ـ۱ـ۲. دنباله اعداد گویا در I یک مسیر است.

تعریف ۲ـ۱ـ۳. هر مجموعه شمارش‌پذیر و چگال S که $S\subset I$، را محمل روی I می‌نامیم.

اگر $\bar{x}=\{x_n\}_{n\geq 0}$ یک مسیر روی I و H یک بازه در I باشد، آن گاه $r(\bar{x},H)$ کوچکترین x_n ای است که $x_n\in H$.

مثال ۲ـ۱ـ۴. در دنباله زیر $r(\bar{x},H)=x_4$ است.



شکل ۲ ـ ۱:

اگر $x \in I$ و $\varrho > 0$، آن گاه $B_\varrho(x) = \{y \in I : |y-x| < \varrho\}$.

تعریف ۲ ـ ۱ ـ ۵. فرض کنید $x \in I$ و $\bar{x} = \{x_n\}_{n \geq 0}$ یک مسیر روی I باشد. مسیر نخستین بازگشت x دنباله‌ای است به صورت $R(\bar{x})_x = \{\omega_k(x)\}_{k=1}^{\infty}; k \in \mathbb{N}$ به طوری که:

$$\omega_1(x) = x_0, \quad \omega_{k+1}(x) = \begin{cases} r(\bar{x}, B_{|x-\omega_k(x)|}(x)) & x \neq \omega_k(x) \\ \omega_k(x) & x = \omega_k(x) \end{cases}.$$

از چگال بودن $\bar{x}$ در I داریم $\omega_k(x) \to \bar{x}$ (وقتی $k \to \infty$).

مثال ۲ ـ ۱ ـ ۶. اگر $\bar{x}$ یک مسیر روی I و $x = x_0$ باشد آن گاه مسیر $R(\bar{x})_x$ به صورت زیر است.

برهان.

$$\omega_1(x_0) = x_0, \omega_2(x_0) = \omega_1(x_0) = x_0, \ldots$$

در نتیجه

$$R(\bar{x})_x = \{\omega_k(x)\}_{k=۱}^{\infty}; \omega_k(x_\circ) = x_\circ \quad , k \in \mathbb{N}.$$

■

تعریف ۲ـ۱ـ۷. تابع f را در نقطه $x \in I$، $\bar{x}-$ بازیافت پذیر نخستین بازگشت گوییم، هرگاه

$$\lim_{k\to\infty} f(\omega_k(\bar{x})) = f(x)$$

تابع f، $\bar{x}-$ بازیافت نخستین بازگشت است هرگاه در هر نقطه‌ی $x \in [\circ, ۱]$، $\bar{x}-$ بازیافت پذیر نخستین بازگشت باشد.

در نهایت تابع f تقریباً همه جا بازیافت نخستین بازگشت است هرگاه مسیری روی I مانند $\bar{x}$ وجود داشته باشد که f نسبت به $\bar{x}$ تقریباً همه جا بازیافت پذیر نخستین بازگشت باشد.

مثال ۲ـ۱ـ۸. برای هر مسیری مانند $\bar{x}$ از I توابع حقیقی پیوسته روی I، $\bar{x}-$ بازیافت پذیر نخستین بازگشت هستند.

۲ـ۲ رابطه انتگرال نخستین بازگشت و انتگرال لبگ

در سراسر این فصل منظور از مجموعه اندازه پذیر، مجموعه بورل است. همچنین منظور از پیوستگی، پیوستگی نسبت به توپولوژی استاندارد روی $\mathbb{R}$ است.

تعریف ۲ـ۲ـ۱. فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ یک تابع و $\bar{t}$ یک مسیر روی I و H یک زیر بازه از I باشد. می گوییم f روی H نسبت به مسیر $\bar{t}$ انتگرال پذیر نخستین بازگشت است هرگاه عدد متناهی A موجود باشد به طوری که برای هر $\varepsilon > \circ$، δی مثبتی وجود داشته باشد که برای افراز $\mathcal{P}$ از H که $\|\mathcal{P}\| < \delta$ داشته باشیم

$$\Big|\sum_{i=۱}^{n} f(r(\bar{t}, I_i))\lambda(I_i) - A\Big| < \varepsilon.$$

که در آن I_i ها زیر بازه های افراز $\mathcal{P}$ هستند. در این صورت A را انتگرال نخستین بازگشت تابع f روی H نسبت به مسیر $\bar{t}$ که از این به بعد آن را با نماد $(fr).\int_H f$ نشان می دهیم.

تعریف ۲ـ۲ـ۲. فرض کنید تابع f، $f : I \to \mathbb{R}$، انتگرال‌پذیر لبگ باشد آن گاه گوییم مسیر $\bar{x}$ روی مجموعه اندازه‌پذیر A از I، انتگرال لبگ f را بدست می‌دهد هرگاه برای هر $\varepsilon > \circ$، δی مثبتی وجود داشته باشد که برای هر افراز $\mathcal{P}$ با نرم کمتر از δ داشته باشیم:

$$|\sum_{J\in P} f(r(\bar{x}, J))\lambda(J\cap A) - \int_A f| < \varepsilon.$$

تعریف ۲ـ۲ـ۳. فرض کنید تابع f، $f : I \to \mathbb{R}$، انتگرال‌پذیر لبگ باشد. می‌گوییم مسیر $\bar{x} = \{x_n\}$ روی I انتگرال لبگ f را بدست می‌دهد، هرگاه برای هر مجموعه اندازه‌پذیر A داشته باشیم

$$\forall \varepsilon > \circ\ \exists \delta > \circ\ |\sum_{J\in P} f(r(\bar{x}, J))\lambda(J\cap A) - \int_A f| < \varepsilon.$$

که در آن $\mathcal{P}$، هر افراز دلخواه از I با نرم کمتر از δ است.

در حقیقت می گوییم مسیر $\bar{x}$ روی I انتگرال لبگ f را بدست می‌دهد هرگاه روی هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر A از I انتگرال لبگ f را بدست دهد.

مثال ۲ـ۲ـ۴. فرض کنید f تابع همانی روی I و $\bar{x} = \{r_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ی اعداد گویا روی I باشد، آن گاه $\bar{x}$ انتگرال لبگ f را نتیجه می‌دهد.

مثال ۲ـ۲ـ۵. اگر f انتگرال‌پذیر ریمان باشد، هر مسیری روی I، انتگرال لبگ f را بدست می‌دهد.

قضیه ۲ـ۲ـ۶. *انتگرال نخستین بازگشت تابع f وجود دارد و مقدارش نسبت به هر $\bar{x}$ ثابت است اگر و تنها اگر، تابع f انتگرال‌پذیر ریمان باشد. در این حالت انتگرال نخستین بازگشت تابع f، با انتگرال‌های ریمان و لبگ f برابر است.*

برهان. به [۶] رجوع کنید. ■

لم ۲ـ۲ـ۷. *فرض کنید $\bar{x} = \{x_n\}$، یک مسیر و E مجموعه شمارش‌پذیر زیر باشد.*

$$E = \{\frac{x_n + x_m}{۲}\ ;\ n = \circ, ۱, ۲, \ldots\ ;\ m = \circ, ۱, ۲, \ldots\} \cup \{\circ, ۱\}$$

در این صورت برای هر $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$ و $t \in I - E$، ε مثبتی وجود دارد به طوری که ω_k روی همسایگی $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ ثابت است.

برهان. به [۶] رجوع کنید. ■

تعریف ۲ـ۲ـ۸. تابعی که حاصل حد نقطه به نقطه دنباله‌ای از توابع پیوسته باشد، تابع بئریک نامیده می‌شود.

ملاحظه ۲ـ۲ـ۹. *روشن است که تابع بئر یک لزوما پیوسته نیست.*

لم ۲ـ۲ـ۱۰. *فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ تابع دلخواه و $\bar{x}$ مسیری روی I باشد. برای هر k از $\mathbb{N}$، تابع $f(\omega_k)$ متعلق به کلاس بئریک است.*

برهان. به [۶] رجوع کنید. ■

لم ۲ـ۲ـ۱۱. *اگر $f : I \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $\bar{x}$ مسیری از I روی هر زیر بازه بسته از I انتگرال لبگ f را بدست بدهد، آن گاه $\bar{x}$ انتگرال لبگ f را بدست می‌دهد.*

برهان. به [۶] رجوع کنید. ■

لم ۲ـ۲ـ۱۲. *فرض کنیم f تابعی اندازه پذیر روی فضای اندازه ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد. حال اگر $f \in L^۱$ آنگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، δی مثبتی وجود دارد به طوری که اگر A مجموعه اندازه پذیر دلخواه باشد و $\mu(A) < \delta$، آنگاه*

$$\int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

برهان. قرار می دهیم $J = |f|$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض کنید $J_n = J۱_{\{J \leq n\}}$. آنگاه $J_n \longrightarrow J \quad (a.s.)$ و با استفاده از قضیه همگرایی یکنواخت لبگ اگر $n \longrightarrow \infty$ آنگاه سمت راست عبارت

$$\int_{J>n} J d\mu = \int_\Omega J(۱ - ۱_{\{J \leq n\}}) d\mu = \int_\Omega J d\mu - \int_\Omega J_n d\mu$$

به صفر میل می کند. حال $\varepsilon > ۰$ را دلخواه فرض کرده و n را به اندازه ای بزرگ در نظر می گیریم که

$$\int_{J>n} J d\mu < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

با استفاده از این مطلب و با در نظر گرفتن $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$، برای فضای اندازه پذیر A داریم

$$\begin{aligned}\int_A J d\mu &= \int_{A\cap\{J\le n\}} J d\mu + \int_{A\cap\{J>n\}} J d\mu \\ &\le \int_A n d\mu + \int_{J>n} J d\mu \\ &< n\mu(A) + \varepsilon \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

■

لم ۲ـ۲ـ۱۳. *اگر $f : I \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر و $\bar{x}$ مسیری روی I باشد که انتگرال لبگ f را بدست دهد، در این صورت برای هر مجموعه اندازه پذیر مانند A و $\varepsilon > 0$، δی مثبتی وجود دارد به طوری که اگر برای آن $C = \{J_1, \dots, J_n\}$ گردایه‌ای از بازه‌های غیر هم پوش باشد که*

$$\forall k = 1, \dots, n \quad \lambda(J_k) < \delta \ , \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda(J_k \cap A) < \delta.$$

آن گاه

$$\sum_{k=1}^{n} f(r(J_k))\lambda(J_k \cap A) < \varepsilon.$$

برهان. فرض کنیم حکم برقرار نباشد. در این صورت ε_0 مثبتی وجود دارد که برای آن هیچ δی با شرایط قضیه وجود نداشته باشد.

(فرض خلف) اگر $1 > \delta > 0$ را دلخواه و ثابت انتخاب کنیم با توجه به اینکه مسیر $\bar{x}$ انتگرال f را به دست می دهد، پس δ_1 بزرگتر از صفر وجود دارد به طوری که برای هر افراز $\mathcal{P}$ از بازه I، که $\|p\| < \delta_1$ آنگاه با توجه به تعریف ۲ـ۲ـ۳ و انتخاب $\varepsilon = \varrho\varepsilon_0$ داریم

$$\left| \sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(J))\lambda(J\cap A) - \int_A f \right| < \varrho\varepsilon. \qquad (۲ـ۱)$$

از انتگرال پذیری f و لم ۲ـ۲ـ۱۲ می توان فهمید که δ_2 ی مثبتی وجود دارد که اگر $\lambda(A\cap H) < \delta_2$

(Hبازه دلخواه باشد) آن گاه

$$|\int_{A\cap H} f| < \varrho\varepsilon_\circ. \qquad (۲ـ۲)$$

حال قرار می‌دهیم $\delta = \min\{\delta_۱, \delta_۲\}$. آن گاه گردایه‌ای از بازه‌های غیر همپوش مانند $C = \{J_۱, \dots, J_n\}$ که

$$\forall k; \lambda(J_k) < \delta \ , \sum_{k=۱}^{n} \lambda(J_k \cap A) < \delta$$

وجود دارد. در نتیجه با توجه به فرض خلف

$$\sum_{k=۱}^{n} f(r(J_k))\lambda(J_k \cap A) \geq \varepsilon_\circ.$$

فرض کنید $\{I_k; k = ۱, \dots, n+۱\}$ مجموعه‌ای از بازه‌های بسته متصل با $H = \bigcup_{k=۱}^{n} J_k$ و f روی I_k انتگرال‌پذیر باشد. بنابراین افراز $\mathcal{J}(I_k)$ برای بازه‌ی I_k که $\|\mathcal{J}(I_k)\| < \delta_۱$ وجود دارد و چون $k = ۱, \dots, n+۱$، بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۲ـ۱) اگر بازه‌ی $[\circ, ۱]$ را به بازه‌ی I_k محدود کنیم، آن گاه با در نظر گرفتن افراز $\mathcal{J}(I_k)$ برای I_k داریم:

$$|\sum_{J\in P} f(r(J))\lambda(J \cap A) - \int_A f| < \varrho\varepsilon_\circ$$

در نتیجه

$$|\sum_{J\in \mathcal{J}(I_k)} f(r(J))\lambda(J \cap A) - \int_{A\cap I_k} f| < \frac{\varrho\varepsilon_\circ}{n+۱}.$$

افراز P را بصورت $P = (\bigcup_{k=۱}^{n+۱} \mathcal{J}(I_k))\cup C$ تعریف می‌کنیم، آن گاه P افرازی از بازه I که $\|P\| < \delta_۱$. زیرا $\lambda(I_k) < \delta \leq \delta_۱$ و $\|\mathcal{J}(I_k)\| < \delta_۱$. در نتیجه $\|P\| < \delta_۱$.

از روابط (۲ـ۱) و (۲ـ۲) داریم:

$$\varrho\varepsilon_\circ > |\sum_{J\in P} f(r(J))\lambda(J \cap A) - \int_A f|$$

$$\begin{aligned}
&= |\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{J\in\mathcal{J}(I_k)} f(r(J))\lambda(J\cap A) + \sum_{J\in C} f(r(J))\lambda(J\cap A) - \int_{A-H} f - \int_{A\cap H} f|\\
&\geq |\sum_{J\in C} f(r(J))\lambda(J\cap A)| - |\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{J\in\mathcal{J}(I_k)f(r(J))}\lambda(J\cap A) - \int_{A-H} f| - |\int_{A\cap H} f|\\
&= |\sum_{J\in C} f(r(J))\lambda(J\cap A)| - |\sum_{k=1}^{n+1}(\sum_{J\in\mathcal{J}(I_k)} f(r(J))\lambda(J\cap A) - \int_{A-H} f)| - |\int_{A\cap H} f|\\
&\geq \varepsilon_0 - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varrho\varepsilon_0}{n+1} - \varrho\varepsilon_0 = (1-2\varrho)\varepsilon_0.
\end{aligned}$$

که در آن $\sum_{J\in C} f(r(J))\lambda(J\cap A) \geq \varrho\varepsilon_0$ و $\leq (\sum_{J\in\mathcal{J}}(I_k)f(r(J))\lambda(J\cap A) - \int_{A-H} f)$ $\dfrac{\varrho\varepsilon_0}{n+1}$ و $\int_{A\cap H} f \leq \varrho\varepsilon_0$ می‌باشد. در نتیجه داریم: در نتیجه برای $\varrho \leq \dfrac{1}{3}$ نامساوی به تناقض می‌انجامد. بنابراین فرض خلف باطل و چنین ε_0 ای وجود ندارد و اثبات لم کامل می‌شود. ■

لم ۲ـ۲ـ۱۴. *اگر $f : I \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر و $\bar{x}$ مسیری روی I باشد که انتگرال لبگ f را بدست دهد، در اینصورت برای هر مجموعه اندازه‌پذیر مانند A و $\varepsilon > 0$، δی مثبتی وجود دارد به طوری که برای هر گردایه $\mathcal{P}$ از بازه‌های غیر همپوش که $\lambda(A - \bigcup_{J\in\mathcal{P}} J) < \delta$ داشته باشیم*

$$\left|\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A) - \int_{A\cap\bigcup\limits_{J\in\mathcal{P}} J} f\right| < \varepsilon,$$

برهان. فرض کنیم لم صحیح نباشد. بنابراین $\varepsilon > 0$ ای وجود دارد، به طوری که برای هر n، یک گردایه ی $C_n = \{J_1^n, \ldots, J_n^{N_n}\}$ از بازه‌های غیر همپوش که $\lambda(J_k^n) < \dfrac{1}{n}$, $k = 1, \ldots, N_n$ و $\lambda(A - H_n) < \dfrac{1}{n}$ وجود دارد که $H_n = \bigcup_{k=1}^{N_n} J_k^n$. بنابراین داریم:

$$\left|\sum_{k=1}^{N_n} f\big(r(J_k)\big)\lambda(J_k^n) - \int_{A\cap H_n} J\right| \geq \varepsilon_0.$$

با انتخاب $1 > \varrho > 0$ و $0 < \delta$ داریم:

(۱): اگر $\|\mathcal{P}\| < \delta$ آن گاه با انتخاب $\varepsilon = \varrho\varepsilon_\circ$ و تعریف ۲ـ۲ـ۲

$$|\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(J))\lambda(J\cap A) - \int_A f| < \varrho\varepsilon_\circ.$$

(۲): از لم ۲ـ۲ـ۱۳ نیز با انتخاب $\varrho\varepsilon_\circ$ به جای ε استفاده می‌کنیم.

(۳): اگر $\lambda(A\cap E) < \delta$، آن گاه $|\int_{A\cap E} f| < \varrho\varepsilon_\circ$. با انتخاب $n > \frac{1}{\delta}$ و گسترش C_n به افراز $\mathcal{P}$ از بازه $[\circ, 1]$ که $\|\mathcal{P}\| < \delta$ و همچنین با تعریف $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - C_n$ و با در نظر گرفتن $\varepsilon = \varrho\varepsilon_\circ$ شرایط لم ۲ـ۲ـ۱۳ برقرار است. زیرا:

$$\|\mathcal{P}\| < \delta \longrightarrow \|\mathcal{P}'\| < \delta \to \forall j \in \mathcal{P}, \lambda(J) < \delta \tag{۲ـ۳}$$

و

$$\lambda(A - H_n) < \frac{1}{n}\lambda(A - H_n) < \delta$$

در نتیجه $\lambda(\bigcup_{J\in\mathcal{P}'}(A\cap J)) < \delta$ و از آنجا $\sum_{J\in\mathcal{P}'}\lambda(A\cap J) < \delta$. بنابراین

$$|\int_{A-H_n} f| < \varrho\varepsilon_\circ \tag{۲ـ۴}$$

از رابطه ۲ـ۳ و ۲ـ۴ و لم ۲ـ۲ـ۱۳ داریم:

$$|\sum_{J\in\mathcal{P}'} f(r(J))\lambda(J\cap A)| < \varrho\varepsilon_\circ. \tag{۲ـ۵}$$

بنابراین از (۱) و (۲) و (۳) و رابطه‌ی ۲ـ۵ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\varrho\varepsilon_\circ &> |\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(J))\lambda(J\cap A) - \int_A f| \\
&= |\sum_{J\in C_n} f(r(J))\lambda(J\cap A) + \sum_{J\in\mathcal{P}'} f(r(J))\lambda(J\cap A) - \int_{A-H_n} f - \int_{A\cap H_n} f|
\end{aligned}$$

$$\geq |\sum_{J\in C_n} f(r(J))\lambda(J\cap A) - \int_{A\cap H_n} f| - |\sum_{J\in \mathcal{P}'} f(r(J))\lambda(J\cap A) - \int_{A-H_n} f|$$
$$\geq \varepsilon_0 - \varrho\varepsilon_0 - \varrho\varepsilon_0 = (1-2\varrho)\varepsilon_0.$$

که به ازای $\varrho \leq \frac{1}{3}$ نامساوی به تناقض می‌انجامد. در نتیجه فرض خلف باطل و چنین ε_0 ای وجود ندارد و اثبات لم کامل می‌شود. ■

قضیه ۲ ـ ۲ ـ ۱۵. *فرض کنید تابع $f : I \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر لبگ باشد و مسیر $\bar{x}$ انتگرال لبگ f را بدست دهد. آن گاه مسیر $\bar{x}$، $f(x)$ را تقریباً همه جا بازیافت می‌کند.*

برهان. به [۶] رجوع کنید. ■

توجه ۲ ـ ۲ ـ ۱۶. در [۵] نشان داده شده که اگر f انتگرال‌پذیر باشد، آن گاه مسیری مانند $\bar{x}$ موجود است که انتگرال نخستین بازگشت را نتیجه می‌دهد. طبیعتاً، مسیرهایی برای توابع اندازه‌پذیر و کراندار وجود دارند که یا با بدست آوردن عدد نادرست و یا با بدست نیاوردن هیچ عددی باعث می‌شود که انتگرال نتیجه ندهد. قضیه‌ی ۲ ـ ۲ ـ ۱۵ شرط لازم را ایجاد می‌کند که $\bar{x}$ باید در آن صدق کند تا انتگرال به نتیجه برسد. همانطور که قضیه‌ی بعد ثابت می‌کند این شرط هم لازم و هم کافی است. عکس قضیه‌ی ۲ ـ ۲ ـ ۱۵ در حالت کلی برای توابع غیرکراندار برقرار نیست. برای مثال تابع زیر این ادعا را نشان می‌دهد.

مثال ۲ ـ ۲ ـ ۱۷. برای تابع زیر می‌توان مسیر $\bar{x}$ که f را همه جا بپوشاند پیدا کرد. اما $\bar{x}$، انتگرال f را نتیجه نمی‌دهد. (تابع f کراندار نیست)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x \in [0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

قضیه ۲ ـ ۲ ـ ۱۸. (*قضیه ایگوروف*[1]) *فرض کنیم X یک فضای اندازه‌پذیر، $\lambda(X) < \infty$ و $f, f_1, f_2, \ldots$ توابع مختلط اندازه‌پذیر روی X باشند به طوری که به ازای هر $\varepsilon > 0$ زیر مجموعه‌ی E از X وجود دارد به طوری که $\lambda(E) < \varepsilon$ و دنباله $\{f_n\}$ روی E^c به طور یکنواخت به f همگرا است.*

[1] Egorov's theorem

برهان. به [۱۰] رجوع کنید. ■

قضیه ۲ـ۲ـ۱۹. *(قضیه لوزین[۱]) اگر $f:[a,b]\to C$ تابع اندازه‌پذیر لبگ و $\varepsilon>0$، آن‌گاه مجموعه‌ی فشرده‌ای مانند $E\subset[a,b]$ وجود دارد به طوری که $\lambda(E^c)<\varepsilon$ و $f|_E$ پیوسته است.*

برهان. به [۱۰] رجوع کنید. ■

قضیه ۲ـ۲ـ۲۰. *فرض کنید $f:I\to\mathbb{R}$ تابع کراندار و اندازه‌پذیر باشد. مسیر $\bar{t}=\{t_n\}$ تقریباً همه جا f را بازیافت می‌کند اگر و تنها اگر مسیر $\bar{t}$ انتگرال لبگ f را نتیجه دهد.*

برهان. به [۶] رجوع کنید. ■

قضیه ۲ـ۲ـ۲۱. *تابع $f:I\to\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر f تقریباً همه جا بازیافت‌پذیر باشد.*

برهان. به [۶] رجوع کنید. ■

توجه ۲ـ۲ـ۲۲. مجموعه A را دارای خاصیت بئر گوییم اگر $A=G\Delta P$ که G باز و P کاتگوری اول و Δ نمایش دهنده‌ی تفاضل متقارن است، و $f:I\to\mathbb{R}$ دارای خاصیت بئر است اگر $f^{-1}(U)$ برای هر مجموعه باز U دارای خاصیت بئر باشد.

قضیه ۲ـ۲ـ۲۳. *تابع $f:I\to\mathbb{R}$ دارای خاصیت بئر است اگر وتنها اگر f بازیافت‌پذیر باشد. به جز روی نقاطی از مجموعه‌ی کاتگوری اول.*

برهان. به [۶] رجوع کنید. ■

۲ـ۳ پیوستگی انتگرال‌های نخستین بازگشت

لم ۲ـ۳ـ۱. *فرض کنید $f:I\to\mathbb{R}$ روی بازه I نسبت به مسیر $\bar{t}$، به صورت نخستین بازگشت انتگرال‌پذیر باشد و فرض کنید H یک زیر بازه I باشد. در نتیجه f روی بازه H نسبت به مسیر $\bar{t}$ به صورت نخستین بازگشت انتگرال‌پذیر است.*

[۱] Luzin's theorem

برهان. توجه داشته باشید چون $\bar{t}$ یک مسیر روی I است در نتیجه تحدید آن روی H نیز یک مسیر در H است. که این مسیر تحدیدی روی H را با $\bar{s}$ نمایش می‌دهیم اما چون به ازای هر زیربازه $J \subset H$، داریم:

$$r(\bar{s}, J) \subset r(\bar{t}, J)$$

ما برای راحتی کار از این به بعد از $\bar{t}$ به جای $\bar{s}$ استفاده می‌کنیم.

به برهان خلف فرض کنید f روی H نسبت به مسیر $\bar{t}$، به صورت نخستین بازگشت انتگرال‌پذیر نباشد. در نتیجه $\varepsilon_\circ > \circ$ موجود است که به ازای هر δی مثبتی، دو افراز $Q(s)$ و $R(s)$ روی H با شرط $\|Q(s)\| < \delta$ و $\|R(s)\| < \delta$ وجود دارد به طوری که

$$|\sum_{J\in Q(s)} f(r(\bar{t}, J))|J| - \sum_{J\in R(s)} f(r(\bar{t}, J))|J|| > \varepsilon_\circ$$

از طرفی چون f روی بازه I نسبت به $\bar{t}$ انتگرال‌پذیر است، در نتیجه هر $\delta_\circ$ مثبتی وجود دارد به طوری که به ازای هر افراز Q و R از I که در آن $\|Q\| < \delta_\circ$ و $\|R\| < \delta_\circ$ داریم:

$$|\sum_{J\in Q} f(r(\bar{t}, J))|J| - \sum_{J\in R} f(r(\bar{t}, J))|J|| < \varepsilon_\circ$$

حال با اضافه کردن مجموعه متناهی از نقاط I/H به افرازهای $Q(s_\circ)$ و $R(s_\circ)$ آن‌ها را به افرازهای Q و R روی I تبدیل می‌کنیم به طوری که $\|Q(s_\circ)\| < \delta_\circ$ و $\|R(s_\circ)\| < \delta_\circ$ بنابراین

$$\begin{aligned}&|\sum_{J\in Q} f(r(\bar{t}, J))|J| - \sum_{J\in R} f(r(\bar{t}, J))|J|| \\ &\qquad > |\sum_{J\in Q(s_\circ)} f(r(\bar{t}, J))|J| - \sum_{J\in R(s_\circ)} f(r(\bar{t}, J))|J|| > \varepsilon_\circ\end{aligned}$$

و این تناقض است و اثبات کامل می‌شود. ■

لم ۲ـ۳ـ۲. *فرض کنید تابع f روی بازه I نسبت به دنباله $\bar{x}$، به صورت نخستین بازگشت انتگرال پذیر*

باشد. در نتیجه به ازای هر $\varepsilon > 0$، δ ی مثبتی وجود دارد به طوری که به ازای هر زیر بازه $J \in \mathcal{P}$

$$\left|\sum_{J\in\mathcal{P}} f\big(r(J)\big)|J| - (f_r) - \int_I f\right| < \varepsilon.$$

برهان. فرض کنید $\varepsilon > 0$ و δی مثبت طوری باشد که اگر $\mathcal{T}$ یک افراز $\delta-$ظریف روی I باشد، داشته باشیم

$$\left|\sum_{J\in\mathcal{T}} f\big(r(J)\big)|J| - (f_r) - \int_I f\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

حال فرض کنید $I = [a,b] \subseteq I$ و فرض کنید $\mathcal{P}$ یک افراز $\delta-$ظریف روی I باشد. همچنین فرض کنید $I^- = [0,a]$ و $I^+ = [b,1]$ و $\mathcal{P}^-$ و $\mathcal{P}^+$ به ترتیب افرازهای از $I^- = [0,a]$ و $I^+ = [b,1]$ باشند به طوری که نرم افراز از δ کمتر باشد و داشته باشیم

$$\left|\sum_{J\in\mathcal{P}^-} f\big(r(J)\big)|J| - (f_r) - \int_I^- f\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

و

$$\left|\sum_{J\in\mathcal{P}^+} f\big(r(J)\big)|J| - (f_r) - \int_I^+ f\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\left|\sum_{J\in\mathcal{P}} f\big(r(J)\big)|J| - (f_r) - \int_I f\right| &= \Bigg|\Bigg(\sum_{J\in\mathcal{P}^-\cup\mathcal{P}\cup\mathcal{P}^+} f\big(r(J)\big)|J| - (f_r) - \int_{[0,1]} f\Bigg) \\ &\quad - \Bigg(\sum_{J\in\mathcal{P}^-} f\big(r(J)\big)|J| - (f_r) - \int_{I^-} f\Bigg) \\ &\quad - \Bigg(\sum_{J\in\mathcal{P}^+} f\big(r(J)\big)|J| - (f_r) - \int_{I^+} f\Bigg)\Bigg| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.\end{aligned}$$

و اثبات کامل می شود. ■

لم ۲ـ۳ـ۳. *فرض کنید تابع f نسبت به مسیر $\bar{x}$ روی I به صورت نخستین بازگشت انتگرال پذیر باشد.*

پس برای هر $\varepsilon > 0$ ، δی مثبتی وجود دارد به طوری که به ازای هر اجتماع H از زیر بازه های شمارای متناهی I ، اگر $\mathcal{P}$ یک افراز $\sigma-$ظریف از H باشد، آنگاه

$$\left| \sum_{J\in\mathcal{P}} f\big(r(J)\big)|J| - (f_r) - \int_H f \right| < \varepsilon.$$

قضیه ۲ــ۳ــ۴. *فرض کنید تابع f روی I نسبت به مسیر $\bar{x}$ ، به صورت اولین بازگشت انتگرال پذیر باشد. در این صورت تابع*

$$F(x) = (fr) - \int_{[0,x]} f$$

روی بازه I پیوسته است.

برهان. به برهان خلف فرض کنید F در نقطه $P \in I$ پیوسته نباشد. در نتیجه $\varepsilon > 0$ و دنباله $\{P_n\}$ همگرا به P وجود دارد به طوری که $|F(P_n) - F(P)| > \varepsilon$. بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود می توان فرض کرد $F(P) = 0$ (در غیر این صورت کافی است تابع $F' = F(x)F(P)$ را در نظر بگیریم) و $\{P_n\}$ یک دنباله نزولی یکنواخت باشد به طوری که

$$F(P_n) - F(P) = F(P_n) > \varepsilon. \tag{۲ــ۶}$$

فرض کنید δ عددی مثبت، وابسته به $\frac{\varepsilon}{4}$ تولید شده در لم ۲ــ۳ــ۲ باشد. n_1 را طوری اختیار می کنیم که $P_{n_1} - P < \delta$. حال قرار دهید $r_1 = r([P, P_{n_1}])$. با به کار گیری لم ۲ــ۳ــ۲ و نامعادله (۲ــ۶) داریم

$$f(r_1) - (P_{n_1} - P) > \frac{3\varepsilon}{4}.$$

حال فرض کنید n_2 به اندازه کافی بزرگ باشد که $P_{n_2} < r_1$ و $f(r_1) - (P_{n_1} - P_{n_2}) > \frac{3\varepsilon}{4}$. به طور مشابه با قرار دادن $r_2 = r([P, P_{n_2}])$ و اعمال لم ۲ــ۳ــ۲ و نامعادله (۲ــ۶) خواهیم داشت

$$f(r_2) - (P_{n_2} - P) > \frac{3\varepsilon}{4}.$$

حال فرض کنید n_3 به اندازه کافی بزرگ باشد به طوری که $P_{n_3} < r_2$ و $\frac{3\varepsilon}{4} < f(r_2) - (P_{n_3} - P_{n_2})$.
اگر این عمل را k بار ادامه دهیم، افراز $\mathcal{P} = \{P < P_{n_k} < \ldots < P_{n_2} < P_{n_1}\}$ از $[P, P_n]$ را بدست می آوریم به طوری که

$$\sum_{J \in \mathcal{P}} f\big(r(J)\big)|J| > k.\frac{\varepsilon}{4}.$$

این رابطه به ازای هر k برقرار است که این مطلب با انتگرال پذیر بودن f به صورت اولین بازگشت روی بازه $[P, P_n]$ در تناقض است. ■

فصل ۳

بیشتر یا کمتر، توابع بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت

در این فصل قصد داریم تا یک طبقه بندی از توابعی که در هنگام تقویت یا تضعیف مفهوم بازیافت‌پذیری نخستین بازگشت در روش‌های بدیهی مختلف بوجود می‌آیند را دنبال کنیم.

۳ـ۱ توابع بازیافت‌پذیر به جزء روی مجموعه‌های کوچک

در این بخش توابعی که $f : I \to \mathbb{R}$ به جز روی نقاطی از مجموعه‌ی کوچک بازیافت‌پذیر هستند را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۳ـ۱ـ۱. مجموعه‌ی $S \subset \mathbb{R}$ پراکنده است، اگر شامل هیچ زیر مجموعه چگال ناتهی در خودش نباشد و یا معادل با اینکه S یک G_δ شمارش‌پذیر است.

تعریف ۳ـ۱ـ۲. گوییم $f : I \to \mathbb{R}$،

(i) تقریباً بازیافت‌پذیر $(f \in \mathcal{AR})$ است، اگر مسیر $\bar{x}$ ای وجود داشته باشد که f را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می‌کند. S مجموعه‌ای با اندازه صفر است.

(ii) نوعاً بازیافت‌پذیر ($f \in \mathcal{TR}$) است، اگر مسیر $\bar{x}$ ای وجود داشته باشد که f را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می‌کند. S مجموعه‌ای از کاتگوری اول است.

(iii) تقریباً بازیافت‌پذیر ($f \in \mathcal{NR}$) است، اگر مسیر $\bar{x}$ ای وجود داشته باشد که f را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می‌کند. S مجموعه‌ای شمارش‌پذیر است.

(iv) بسیار تقریباً بازیافت‌پذیر ($f \in \mathcal{SR}$) است، اگر مسیر $\bar{x}$ ای وجود داشته باشد که f را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می‌کند. S مجموعه‌ای پراکنده است.

در فصل قبل نشان دادیم که $f \in \mathcal{AR}$ اگر و تنها اگر f اندازه‌پذیر و $f \in \mathcal{TR}$ اگر و تنها اگر f خاصیت بئر را داشته باشد. هدف اول ما در این فصل دسته‌بندی $\mathcal{NR}$ به کلاس‌های کوچکتر است. از تعدادی لم‌های ساده‌تر برای این‌کار استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳ـ۱ـ۳. تابع $f : X \to Y$ یک تابع اندازه‌پذیر بورل، از کلاس بورل اول گفته می‌شود هرگاه برای زیرمجموعه بسته H در Y، $f^{-1}(H)$ یک مجموعه G_δ در X باشد.

تعریف ۳ـ۱ـ۴. تابع $f : X \to Y$ یک تابع اندازه‌پذیر بورل، از کلاس بورل دوم گفته می‌شود هرگاه برای زیرمجموعه بسته H در Y، $f^{-1}(H)$ یک مجموعه $\mathcal{F}_{\delta_\sigma}$ در X باشد.

تعریف ۳ـ۱ـ۵. فرض کنید $\varepsilon > 0$، نقطه‌ی x از مجموعه S، $\varepsilon-$منفرد است اگر فاصله‌ی بین x و S حداقل $\varepsilon > 0$ باشد.

لم ۳ـ۱ـ۶. *اگر $E = \{e_n\}$ پراکنده و $\{y_n\}$ یک مجموعه‌ی شمارش‌پذیر باشد، آن‌گاه*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \notin E \\ y_n & x = e_n \end{cases}$$

تابع بئر یک است.

برهان. به [۶] رجوع کنید. ■

لم ۳ـ۱ـ۷. *فرض کنید f تابع بئر یک و $\{y_n\}$ شمارش‌پذیر و $E = \{e_n\}$ پراکنده باشد. آن‌گاه*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin E \\ y_n & x = e_n \end{cases}$$

تابع بئر یک است.

برهان. به [۶] رجوع کنید. ■

لم ۳ـ۱ـ۸. *اگر f متعلق به کلاس بئر دو باشد، آن گاه تابع بئر یک g^* وجود دارد به طوری که $E = \{x; f(x) \neq g^*(x)\}$ شمارش‌پذیر و چنین گرافی از g^* محصور در متمم E، چگال در گراف g^* است.*

برهان. به [۶] رجوع کنید. ■

قضیه ۳ـ۱ـ۹. *تابع $f : I \to \mathbb{R}$ متعلق به $\mathcal{NR}$ است اگر و تنها اگر f متعلق به کلاس بئر دو باشد.*

برهان. به [۶] رجوع کنید. ■

اگر محدوده مجموعه ها را گسترش دهیم به طوری که شمارش پذیر نباشد ولی بستار شمارش پذیر داشته باشد، آن گاه دقیقا به کلاس توابع بئر یک می رسیم. قضیه زیر از [۴] حالت کلی را بیان می کند.

قضیه ۳ـ۱ـ۱۰. *فرض کنید f تابعی از I به R باشد. آن گاه عبارات زیر معادل اند:*

(i) f *متعلق به کلاس بئر یک است.*

(ii) f *بازیافت پذیر است.*

(iii) f *به جز روی مجموعه های پراکنده، بازیافت پذیر است.*

۳ـ۲ توابع عموماً بازیافت‌پذیر به جزء روی مجموعه‌های کوچک

در قسمت قبلی امکان تضعیف شرط بازیافت‌پذیری را بیان کردیم. در این قسمت راه تقویت آن را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۳ـ۲ـ۱. تابع $f : I \to \mathbb{R}$، عموما، بازیافت‌پذیر نامیده می‌شود ($f \in \mathcal{UR}$) اگر برای هر مجموعه‌ی محمل D مسیر $\bar{x}$ از D وجود داشته باشد، به طوری که f نسبت به $\bar{x}$ بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت است.

در [۷] نشان داده شده که $f \in \mathcal{UR}$ اگر و تنها اگر f یک تابع شبه پیوسته در کلاس بئر یک باشد.

تعریف ۳ـ۲ـ۲. تابع $f : I \to \mathbb{R}$، تابع شبه پیوسته در نقطه‌ی x است اگرهر همسایگی از $(x, f(x))$ شامل نقاطی از گراف $f|_{C(f)}$ باشد.($C(f)$ نشان دهنده‌ی مجموعه نقاط ناپیوستگی f می‌باشد). $Q(f)$ مجموعه‌ای از نقاط شبه پیوستگی f می‌باشد و قرار می‌دهیم

$$NQ(f) = [۰, ۱] - Q(f)$$

اگر $Q(f) = I$ در اینصورت f یک تابع شبه پیوسته است. در این بخش کلاس‌های مختلف بدست آمده از ترکیب مفهوم عمومیت با نتایج قسمت قبل را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۳ـ۲ـ۳. گوییم f از I به $\mathbb{R}$

(i) تقریباً عمومی بازیافت‌پذیر ($f \in \mathcal{AUR}$) است اگر مجموعه‌ی S با اندازه صفر وجود داشته باشد به طوری که برای هر مجموعه محمل D دارای مسیری است که f را در هر نقطه $I - S$ بازیافت می‌کند.

(ii) عموماً تقریبی بازیافت‌پذیر ($f \in \mathcal{UAR}$) است اگر برای هر مجموعه محمل D مسیر $\bar{x}$ از D و مجموعه‌ی $S(\bar{x})$ با اندازه صفر وجود دارد به طوری که $\bar{x}$، f را در هر نقطه از $I - S(\bar{x})$ بازیافت می‌کند.

(iii) نوعاً عمومی بازیافت‌پذیر ($f \in \mathcal{TUR}$) است اگر مجموعه‌ی کاتگوری اول مانند S وجود داشته باشد به طوری که برای هر مجموعه محمل D دارای مسیری است که f را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می‌کند.

(iv) عموماً نوعی بازیافت‌پذیر ($f \in \mathcal{UTR}$) است اگر برای هر مجموعه محمل D مسیر $\bar{x}$ از D و مجموعه‌ی کاتگوری اول$S(\bar{x})$ وجود دارد به طوری که $\bar{x}$، f را در هر نقطه از $I - S(\bar{x})$ بازیافت

می‌کند.

(v) نزدیکاً عمومی بازیافت‌پذیر ($f \in \mathcal{NUR}$) است اگر مجموعه‌ی شمارش‌پذیر S وجود داشته باشد به طوری که هر مجموعه محمل D دارای مسیری است که f را در هر نقطه $I-S$ بازیافت می‌کند.

(vi) عموماً نزدیک بازیافت‌پذیر ($f \in \mathcal{UNR}$) است اگر برای هر مجموعه محمل D مسیر $\bar{x}$ از D و مجموعه‌ی شمارش‌پذیر $S(\bar{x})$ وجود دارد به طوری که $\bar{x}$، f را در هر نقطه از $I-S(\bar{x})$ بازیافت می‌کند.

(vii) بسیار نزدیکاً عمومی بازیافت‌پذیر ($f \in \mathcal{SUR}$) است اگر مجموعه‌ی پراکنده S وجود داشته باشد به طوری که هر مجموعه محمل D دارای مسیری است که f را در هر نقطه $I-S$ بازیافت می‌کند.

$(viii)$ عموماً بسیار نزدیک بازیافت‌پذیر ($f \in \mathcal{USR}$) است اگر برای هر مجموعه‌ی محمل D مسیر $\bar{x}$ از D و مجموعه‌ی پراکنده $S(\bar{x})$ وجود دارد به طوری که $\bar{x}$، f را در هر نقطه از $I-S(\bar{x})$ بازیافت می‌کند.

قضیه ۳ـ۲ـ۴. *فرض کنید f متعلق به $\mathcal{UAR}$ یا $\mathcal{AUR}$ و $s < r$. در اینصورت هیچ بازه‌ای مانند J در هیچ کدام از دو مجموعه‌ی $E_1 = f^{-1}((-\infty, r])$ و $E_2 = f^{-1}([s, +\infty))$ که در J چگال باشند، وجود ندارد.*

برهان. به [۶] رجوع کنید. ∎

قضیه ۳ـ۲ـ۵. *فرض کنید f متعلق به $\mathcal{UAR}$ یا $\mathcal{UTR}$ و $s < r$. آن‌گاه وجود دارد $\{x : \lim_{t\to x} f(x)\}$ پس مانده است.*

برهان. به [۶] رجوع کنید. ∎

قضیه ۳ـ۲ـ۶. *اگر متعلق به $\mathcal{UTR}$ یا $\mathcal{UAR}$ باشد، آن‌گاه $C(f)$ پس مانده است.*

برهان. به [۶] رجوع کنید. ∎

فصل ۴

دنباله های تقریبا همه جا انتگرال ده

در فصل ۲ نشان دادیم برای تابع انتگرال پذیر لبگ $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$، دنباله $\bar{x} : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1[$ وجود دارد به طوری که در انتگرال ریمان به F میل می کند. در این پایان نامه در مورد برخی از ویژگی های این دنباله ها بحث شده است. ابتدا مفاهیم و علائم قرار دادی جدید را معرفی می کنیم.

۴ـ۱ قرارداد ها

* $\Omega = \{\bar{x} : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1[\}$ را فضای دنباله های استاندارد با اندازه معمولی تولید شده μ در نظر می گیریم.

* $p-$امین عنصر دنباله $\bar{x}$ را بصورت $\bar{x}_p$ یا $\bar{x}(p)$ نمایش می دهیم.

* اگر $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$، نسبت به μ انتگرال پذیر باشد انتگرال آن را با $E(F)$ نشان می دهیم. یعنی

$$E(F) = \int_{\Omega} f d\mu.$$

* اگر S گزاره ای در مورد دنباله ها باشد، $P(S) = \mu(\{\bar{x} \,;\, \bar{x}\text{در}S\text{صدق کند}\})$ را به عنوان احتمال درست بودن S در نظر می گیریم.

* اندازه لبگ مجموعه اندازه پذیر $A \subseteq \mathbb{R}$ را با $\lambda(A)$ و انتگرال لبگ تابع حقیقی مقدار و انتگرال پذیر F روی A را با $\int_A f$ نمایش می دهیم. در حالت خاص که $A = [۰,۱]$، از نماد $\int f$ استفاده می کنیم.

* $L(I)$ را به عنوان طول بازه I در نظر می گیریم.

* فرض کنید $F : [۰,۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ لبگ انتگرال پذیر باشد. به ازای هر بازه $I \subseteq [۰,۱]$ تابع $F_I : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت

$$F_I(\bar{x}) = for\big((\bar{x}, I)\big)$$

تعریف می کنیم که در آن $r(\bar{x}, I) = x_p$ به طوری که $p = min\{n\,;\, x_n \in I\}$.

۴ـ۲ دنباله های تقریبا همه جا انتگرال ده

بازه $J \subseteq [۰,۱]$ را در نظر بگیرید، اگر P افرازی از J و $\|P\|$ نرم افراز باشد. گوییم دنباله‌ی $\bar{x} \in \Omega$، انتگرال گیر تابع F روی بازه‌ی J است اگر،

$$\lim_{\|P\| \to ۰} \sum_{I \in P} F_{I \cap J}(\bar{x}) l(I \cap J) = \int_J f \qquad (۴ـ۱)$$

اگر $\bar{x}$ روی هر بازه‌ی $J \subseteq [۰,۱]$ انتگرال گیر f باشد، آنگاه گوییم دنباله $\bar{x}$، انتگرال گیر تابع F است. در [۲] نشان داده شده است که به ازای هر تابع لبگ اندازه پذیر $F : [۰,۱] \to \mathbb{R}$ دنباله $\bar{x}$ ای وجود دارد که انتگرال گیر تابع f است.

ما قصد داریم تا اندازه μ مجموعه دنباله‌هایی که انتگرالده تابع لبگ انتگرال‌پذیر $F : [۰,۱] \to \mathbb{R}$ هستند را تعیین کنیم. در این پایان نامه حالتی که تابع $F : [۰,۱] \to \mathbb{R}$، اندازه‌پذیر کراندار است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید $\{P_n\}$ دنباله‌ای از افرازهای روی $[۰,۱]$ باشد که نرم آن‌ها به صفر میل می‌کند.

اگر به ازای هر $J \subseteq [\circ, \text{۱}]$ برای دنباله $\bar{x} \in \Omega$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{I\in P_n} F_{I\cap J}(\bar{x}) l(I\cap J) = \int_J f. \quad (\text{۲ـ۴})$$

گوییم $\bar{x}$، انتگرال گیر f نسبت به دنباله‌ی $\{P_n\}$ است. نتیجه زیر به آسانی از قضیه فشردگی لبگ نتیجه می‌شود.

تعریف ۴ـ۲ـ۱. فرض کنید λ، اندازه لبگ روی R و $M \subset R$ یک مجموعه اندازه‌پذیر و $x \in R$ باشند. گوییم x یک نقطه چگال از M است، اگر

$$\lim_{r\to \circ^+} \frac{\lambda(M\cap V(x,r))}{V(x,r)} = \text{۱}.$$

قضیه ۴ـ۲ـ۲. (*قضیه چگال لبگ*) *تقریباً همه نقاط مجموعه اندازه‌پذیر M، نقطه چگال هستند.*

قضیه زیر مستقیماً از قضیه چگال لبگ نتیجه می‌شود.

قضیه ۴ـ۲ـ۳. *فرض کنید $F : [\circ, \text{۱}] \to R$ کراندار و اندازه‌پذیر باشد. در نتیجه دنباله‌ای از افرازهای P_n وجود دارد به طوری که برای دنباله تقریباً هر $\bar{x} \in \Omega$، $\bar{x}$ انتگرال گیر f، وابسته به دنباله $\{P_n\}$ است.*

برهان. به ازای $n = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots$ و $\circ \leq k \leq \text{۲}^{\text{۲}n} - \text{۱}$ و با فرض این که $| F | < B$ باشد تعریف می‌کنیم:

$$E_n^k = f^{-\text{۱}}((\text{۲}^{-n}k, \text{۲}^{-n}(k+\text{۱})), \quad F_n = f^{-\text{۱}}((\text{۲}^n, B])$$

قرار می‌دهیم $P_n = \{E_n^k \cup F_n\}$، بنابراین برای دنباله $\bar{x} \in \Omega$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{I\in P_n} F_{I\cap J}(\bar{x}) l(I\cap J) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=\circ}^{\text{۲}n} F_{I\cap E_n}(\bar{x}) l(I\cap E_n)$$

از طرفی می‌دانیم که به ازای $x \in E_n^k$،

(چون $f \leq \text{۲}^{-n}(k+\text{۱})$ و $F_{I\cap E_n}(\bar{x}) \geq \text{۲}^{-n}$) $f - F_{I\cap E_n}(\bar{x}) \leq \text{۲}^{-n} \leq$

$$\int_I f - \sum_{k=0}^{2n} F_{I\cap E_n^k}(\bar{x}) l(I\cap E_n^k) \le 2^{-n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} F_{I\cap E_n^k}(\bar{x}) l(I\cap E_n^k) = \int_I f$$

که در آن $I = [0, 1]$ است. باید توجه داشت که چون f اندازه‌پذیر و E_n^k ها نیز اندازه‌پذیرند و I نیز اندازه‌پذیر است، لذا طبق قضیه چگال لبگ، تقریباً همه جا n ای موجود است به طوری که $\bar{x}_n \in I \cap E_n^k$. بنابراین تقریباً همه جا $F_{I\cap E_n^k}(\bar{x}_k) \neq -\infty$. پس برای دنباله تقریباً هر $\bar{x} \in \Omega$، $\bar{x}$ انتگرال گیر f، وابسته به دنباله $\{P_n\}$ است. ■

قضیه ۴ــ۲ــ۴. *(قضیه چند جمله ای ها) به ازای هر عدد مثبت m و هر عدد غیر منفی n داریم:*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{k_1,\ldots,k_m} \binom{n}{k_1,\ldots,k_m} \prod_{1\le t\le m} x_t^{k_t}$$

که در آن $\binom{n}{k_1,\ldots,k_m} = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$

قضیه ۴ــ۲ــ۵. *(گسترش قضیه چبیشف برای گشتاور های مرتبه بالاتر) فرض کنید X یک متغیر تصادفی با میانگین $E(X)$ باشد، لذا برای هر $k > 0$ داریم:*

$$P\Big(|X - E(X)| \ge k\Big) \le \frac{E(|X - E(X)|)^n}{k^n}$$

لم ۴ــ۲ــ۶. *(برل‌ـ کانتلی) فرض کنید μ یک اندازه مثبت روی مجموعه X باشد و A_n دنباله‌ای از $\sigma-$جبر F باشد اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$، آنگاه $\mu(\lim_{n\to\infty} \sup A_n) = 0$.*

قضیه ۴ــ۲ــ۷. *فرض کنید $F : [0, 1] \to R$، کراندار و اندازه‌پذیر باشد، و به ازای هر $n \in N$، فرض کنید $\mathcal{P}_n$، افرازی از $[0, 1]$ باشد که $\|P_n\| = m_n$. اگر $\{m_n\} \in \cup_{j=1}^{\infty} l^j$، در نتیجه برای تقریباً همه $\bar{x} \in \Omega$، $\bar{x}$ انتگرال گیر f، وابسته به دنباله $\{P_n\}$ است.*

برهان. فرض کنید $B > 0$، کران برای $|f|$ باشد، دنباله افرازی $\{P_n\}$ راثابت در نظر بگیرید و فرض کنید (۴ــ۲) برای هر بازه‌ی $J \subset [0, 1]$، برای تقریباً همه دنباله‌های $\bar{x} \in \Omega$ برقرار باشد. با انتگرال‌گیری تعداد شمارای مجموعه‌های با اندازه کامل، تمام بازه‌های باز ساخته می‌شود، به سادگی می‌توان دید که به ازای

هر مجموعه شمارایی از بازه‌ها رابطه (۴ـ۲) برای تقریباً همه دنباله $\bar{x} \in \Omega$ برقرار است. (هر اجتماع از بازه‌ها را می توان به صورت اجتماع مجزا نوشت). لذا کافی است که نشان دهیم که رابطه (۴ـ۲) برای حالت $J = [0, 1]$ برقرار است. توابع $f_{n,i} : \Omega \to R$ و $g_{n,i} : \Omega \to R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_{n,i} : for(\bar{x}, I_{n,i}).l(I_{n,i}) \equiv F_{I_{n,i}}(\bar{x}).l(I_{n,i})$$

$g_{n,i} : f_{n,i} - a_{n,i}$ که $a_{n,i} = \int_{I_{n,i}} f$ می باشد.

لذا داریم:

$$E(f_{n,i}) = \sum_{a.e.\ \bar{x} \in \Omega} for(\bar{x}, I_{n,i}).l(I_{n,i})$$

تقریباً همه $\bar{x} \in \Omega$، تمام $I_{n,i}$ را پوشش می‌دهد. لذا می‌توان هر یک از $r(\bar{x}, I_{n,i})$ را به عنوان ابتدای بازه‌ای از افراز در نظر گرفت که با کوچک کردن بازه‌های افراز تمام $r(\bar{x}, I_{n,i})$ را پوشش می‌دهد. لذا داریم:

$$* = \lim_{n \to \infty} \sum_{I \in P_n} for(\bar{x}, I_{n,i} \cap I).l(I_{n,i} \cap I)$$

که طبق فرض رابطه (۲) برای همه‌زیر بازه‌ها به خصوص $I_{n,i}$ برقرار است. لذا داریم:

$$= \int_{I_{n,i}} f = a_{n,i}$$

پس به راحتی می‌توان دید که $E(g_{n,i}(\bar{x})) = 0$. حال داریم:

$$E(f_{n,i}^k) = \sum_{a.e\bar{x} \in \Omega} f^k or(\bar{x}, I_{n,i}), l^k(I_{n,i}) = \sum_{a.e\bar{x} \in \Omega} f^k or(\bar{x}, I_{n,i}).l(I_{n,i}).l^{k-1}(I_{n,i})$$

$$= l^{k-1}(I_{n,i}) f^k or(\bar{x}, I_{n,i}).l(I_{n,i} \cap I)$$

حال اگر $f^k or(\bar{x}, I_{n,i})$ را به عنوان تابع جدید در نظر بگیریم مشابه بحث بالا داریم:

$$f^k or(\bar{x}, I_{n,i}) = \int_{I_{n,i}} f_{n,i}^k \Rightarrow E(f_{n,i}^k) = (\int f_{n,i}^k).l^{k-1}(I_{n,i})$$

چون $B \leq |F|$ لذا $|f_{n,i}|$ و $|a_{n,i}|$ هر دو حداکثر برابر $Bl(I_{n,i})$ هستند.

$$|a_{n,i}| = |\int_{I_{n,i}} f| \leq \int_{I_{n,i}} |f| \leq Bl(I_{n,i})$$

$$|f_{n,i}(\bar{x})| = |for(\bar{x}, I_{n,i})|.l(I_{n,i}) \leq Bl(I_{n,i})$$

بنابراین

$$|g_{n,i}(\bar{x})| = |f_{n,i} - a_{n,i}| \leq |f_{n,i}| + |a_{n,i}| \leq ۲Bl(I_{n,i})$$

در نتیجه

$$|E(g^k_{n,i})| \leq ۲^k B^k l(I^k_{n,i}) \qquad (۴\text{ـ}۳)$$

با توجه به فرض، $p \in N$ موجود است به طوری که $\{m^p_n\}$ جمع‌پذیر است. اگر $S_n = \sum_{i=۱}^{M_n} g_{n,i}$، نشان می‌دهیم که $E(S^{۲p}_n) = O(m^p_n)$. قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{K} = \{(k_۱, \ldots, k_{M_n}) \in \{۰, ۱, ۲, \ldots, ۲p\}^{M_n} \, ; \, \sum_{i=۱}^{M_n} k_i = ۲p\}$$

به ازای هر $\mathcal{K}^* = \{(k_۱, \ldots k_{M_n}) \in \mathcal{K} \, ; \, k_i \neq ۱, \quad$ برای هر $i = ۱, \ldots M_n\}$ با توجه به قضیه چندجمله‌ای‌ها و خطی بودن امید (انتگرال گسسته) و مستقل بودن توابع $g_{n,i}$ داریم:

$$E(S^{۲p}_n) = E((S_n = \sum_{i=۱}^{M_n} g_{n,i})^{۲p}) = \sum_{(k_۱,\ldots,k_m)\in K} \left(\binom{۲p}{k_۱,\ldots,k_{M_n}} \prod_{i=۱}^{M_n} E(g^k_{n,i}) \right)$$

چون به ازای هر $g_{n,i}$، $E(g_{n,i}) = ۰$ لذا باید $k_t \neq ۱$ باشد، پس داریم:

$$E(S^{۲p}_n) = \sum_{(k_۱,\ldots,k_{M_n})\in K^*} \left(\binom{۲p}{k_۱,\ldots,k_{M_n}} \prod_{i=۱}^{M_n} E(g^{k_i}_{n,i}) \right)$$

حال با توجه به رابطه (۴ــ۳) داریم:

$$|E(S^{۲p}_n)| = \left| \sum_{(k_۱,\ldots,k_m)\in K^*} \left(\binom{۲p}{k_۱,\ldots,k_{M_n}} \prod_{i=۱}^{M_n} |E(g^{k_i}_{n,i})| \right) \right|$$

$$\leq \sum_{(k_1,\dots,k_{M_n})\in K^*} \left(\binom{2p}{k_1,\dots,k_{M_n}} \prod_{i=1}^{M_n} |E(g_{n,i}^{k_i})| \right)$$

چون به ازای هر $k_1,\dots,k_{M_n} \in \mathcal{K}^*$, $\binom{2p}{k_1,\dots,k_{M_n}} \leq 2p!$. لذا داریم:

$$\leq (2p)! \sum_{(k_1,\dots,k_{M_n})\in \mathcal{K}^*} \prod_{i=1}^{M_n} |E(g_{n,i}^{k_i})|$$
$$\leq (2p)! \sum_{(k_1,\dots,k_{M_n})\in \mathcal{K}^*} (\prod_{i=1}^{M_n} 2^{k_i} B^{k_i} l^{k_i}(I_{n,i}))$$

با توجه به رابطه (۴ـ۳) چون $\sum_{i=1}^{M_n} k_i = 2p$ داریم:

$$= (2p)! 2^{2p} B^{2p} e \sum_{(k_1,\dots,k_{M_n})\in \mathcal{K}^*} \prod_{i=1}^{M_n} l^{k_i}(I_{n,i}))$$

از طرفی واضح است که:

$$\sum_{(k_1,\dots,k_{M_n})\in K^*} (\prod_{i=1}^{M_n} l^{k_i}(I_{n,i})) \leq \sum_{i_p=1}^{M_n} \dots \sum_{i_2=1}^{M_n} \sum_{i_1=1}^{M_n} (l^2(I_{n,i_1}) l^2(I_{n,i_2}) \dots l^2(I_{n,i_p}))$$

چون $||P_n|| = m_n$ پس $l(I_{n,i_j}) \leq m_n$ پس داریم:

$$* = \sum_{i_p=0}^{M_n} \left(l^2(I_{n,i_p})(\dots(\sum_{i_2=1}^{M_n} l^2(I_{n,i_2})(\sum_{i=1}^{M_n} l^2(I_{n,i_1}))\dots) \right) \leq M_n^p$$
$$\leq m_n \sum_{i_p=0}^{M_n} \left(l(I_{n,i_p})(\dots(\sum_{i=0}^{M_n} l(I_{n,i}))) \right) = M_n$$

(به ازای هر $\sum$ یک m_n قرار می‌دهیم). لذا از روابط بالا داریم:

$$|E(S_n^{2p})| \leq (2p)! 4^p B^{2p} m_n^p$$

حال برای $\varepsilon > 0$ داده شده احتمال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$p(|\sum_{i=1}^{M_n} for(\bar{x}, I_{n,i})l(I_{n,i}) - \int f| \geq \varepsilon)$$

داریم:

$$\begin{aligned} p(|\sum_{i=1}^{M_n} for(\bar{x}, I_{n,i})l(I_{n,i}) - \int f| &= p(|\sum_{i=0}^{M_n} g_{n,i}| \geq \varepsilon) \\ &= p(|S_n| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم که $E(g_{n,i}) = 0$ پس $E(S_n) = 0$. با استفاده از قضیه چبیشف گسترش یافته داریم:

$$P(|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon) = P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|S_n - E(S_n)|^{2p}}{\varepsilon^p} = \frac{E(|S_n^{2p}|)}{\varepsilon^{2p}} \leq \frac{(2p)!/4^p.B^{2p}}{\varepsilon^{2p}} m_n^p$$

لذا $\{m_n^p\}$ جمع‌پذیر است و طبق برل‌ـ کانتلی، $\lim_{n\to\infty} \sup A_n$، اندازه صفر دارد که در آن $A_n = \{\bar{x} ; |S_n(\bar{x}) > \varepsilon\}$. حال اگر $\bar{x} \notin \lim_{n\to\infty} \sup A_n$. یعنی m ای موجود است که به ازای هر $n \geq m$، $|S_n(\bar{x})| \leq \varepsilon$، حال اگر ε را به سمت صفر میل دهیم خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty} |S_n(\bar{x})| \to 0$. پس

$$\lim_{n\to\infty} |\sum_{i=0}^{M_n} for(\bar{x}, I_{n,i})|(I_{n,i}) - \int f| \to 0$$

و این به این معنی است که $\bar{x}$ انتگرال گیر f وابسته به دنباله $\{P_n\}$ است و این اثبات را کامل می‌کند. ■

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

agree .... سازگار
algebra .... جبر
$\sigma-$Algebra .... $\sigma-$جبر
almost recoverable .... تقریبا بازیافت پذیر
almost universally recoverable .... تقریبا عمومی بازیافت پذیر
bair category .... کاتگوری بئر
bair one .... بئر یک
bair property .... خاصیت بئر
borel set .... مجموعه بورل
bounded .... کراندار
caratheodory extention theorem .... قضیه گسترش کاراتئودوری
cluster set .... قضیه گسترش کاراتئودوری
co-countable .... ناشمارا
collection .... گردایه
complement .... متمم
component .... عنصر
contiquous .... متصل، مجاور
continuous .... پیوسته
covergent .... همگرا
dense .... چگال
first Borel class .... کلاس بورل اول
first category .... کاتگوری اول
first return integral .... انتگرال نخستین بازگشت
first return integrability .... انتگرال پذیری نخستین بازگشت
first return recovery .... بازیافت نخستین بازگشت
$\sigma-$finite .... $\sigma-$متناهی

فضای اندازه .... mesure space
فضای اندازه پذیر .... mesurable space
اجتماع یکنوا .... monoton unions
تقریبا بازیافت پذیر .... nearly recoverable
تقریبا عموما بازیافت پذیر .... nearly universally recoverable
هیچ جا چگال .... nowhere dense
افراز .... partition
دنباله .... sequence
زیر بازه .... subinterval

مراجع

[1] Aliprantis, D., *Principles of Real Analysis*, 3rd, Academic Press, Aug (1998).

۳، ۴، ۵، ۹، ۱۲

[2] Apostal, T. M., *Mathematical Analysis*, Addison Wesley, Publising Company, (1975).

۸، ۳۸

[3] Chang, K. L., *A Cours in Probability Theorem*. 3rd ed, Academic Press, New York, (2001).

۱۴

[4] Csornyei, M., Darji, U. B., Evans, M. J. and Humke, P. D., *First-return integrals*, J.Math Anal. Appl, 305, (2005), 546-559.

۳۴

[5] Cwiek, I., Pawlak, R. and Swiatek, B., *On some Subclass of Bair 1 Functions*, Real Anal. Extch. 27, (2001/2002), 415-422.

۲۶

[6] Darji, U. B. and Evans, M. j., *A first return examination of the Lebesgue integral*, Real Anal. Exachange 27, (2001) 573-581.

۲۰، ۲۱، ۲۶، ۲۷، ۳۳، ۳۴، ۳۶

[7] Darji, U. B. and Evans, M. j., *Recovering Bair 1 function*, Mathematika. 42 (1995) 43-48.

۳۵

[8] Evans, M. j. and Humke P. D., *Almost everywhere first-return recovery*, Bull. Pollish Acad. Sci. - Math., **52** (2004), 185-195.

[9] Evans, M. j. and Humke P. D., *Almost every sequence integrates*, Actu. Math. Hangar., **117** (1-2) (2007), 35-39.

[10] Folland, G. B., *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, A wiley Inter-science Publications.

۳، ۶، ۷، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۲۷

[11] Wild, I. F., *Stochastic*,2nd ed King's College, London, 2009.

۱۵

Abstract:

Keywords: first return integral, ,Lebesgue integral, trajectory

Shahrood University of Technology
Faculty of Mathematics

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of Master of Science in Pure Mathematics

A New Approach to the Lebesgue Integral

Supervisors:

Dr.Kamran Sharifi and Dr.Elham Dastranj Balaalami

Advisor:

Mr.Seyed Reza Musavi

By:

Nasrollah Arefkhani

September 2014

<table>
<tr><td colspan="2">Shahrood University of Technology
An Outline of MSc. Thesis</td><td>UNIVERSITY of SHAHROOD</td></tr>
<tr><td>Surname:
Arefkhani</td><td>Name:
Nasrollah</td><td>Student no:
9004204</td></tr>
<tr><td>Supervisors: Dr.Kamran Sharifi and Dr.Elham Dastranj Balaalami</td><td colspan="2">Advisor: Mr.Seyed Reza Musavi</td></tr>
<tr><td>Faculty:Mathematic</td><td>Department: Pure Mathematic</td><td>Program: Analysis</td></tr>
<tr><td>Field of study: MSc.</td><td>Date:
1393/6/18</td><td>Number of pages:
48</td></tr>
<tr><td colspan="3">Title of thesis: A New Approach to the Lebesgue Integral</td></tr>
<tr><td colspan="3">Keywords: first return integral, Lebesgue integral, trajectory.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Abstract:
The purpose of this dissertation is to discuss a first return integration process. We first define the trajectory which is an special sequence on the interval $I = [0, 1]$ and then we show under rather general circumstances this first return integration process yields the Lebesgue integral.</td></tr>
</table>