دانشگاه صنعتی شاهرود

حوزه معاونت پژوهشی و فناوری

گزارش پایانی طرح پژوهشی

گرافهای احاطه کلی بحرانی مکانی

کد ۲۳۰۳۲

مجری: نادر جعفری راد

عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی شاهرود

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده و تاریخ های تصویب و خاتمه آن به ترتیب ۸۷/۱۰/۳۰ و ۱۳۸۸/۲/۲۰می باشد.

بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده:

راس v در یک گراف G را یک راس احاطه بحرانی نامیم هرگاه عدد احاطه کنندگی گراف G-v حاصل از حذف راس v کوچکتر از عدد احاطه کنندگی گراف G باشد. در این طرح مقوله بحرانی بودن را برای احاطه گری کلی مکانی توسعه داده و با معرفی گرافهای احاطه کلی بحرانی مکانی نتایج به دست آمده در احاطه گری را به احاطه گری کلی مکانی تعمیم می دهیم. نتایج این طرح پژوهشی جهت چاپ در مجله *Australasian Journal of Combinatorics* پذیرفته شده اند.

کلمات کلیدی: احاطه گری، احاطه گری کلی مکانی، بحرانی

فهرست مطالب

الف ب ج د

فصل اول

مفاهیم اولیه و مقدمات

در این فصل به ارائه برخی از تعاریف، مفاهیم و قضایای نظریه گراف که از آنها استفاده می‌کنیم می پردازیم. منظور از یک گراف، همواره یک گراف ساده است. یک گراف ساده زوجی به صورت $G=(V,E)$ است که در آن V مجموعه ای از نقاط موسوم به راسها و E مجموعه ای از زیر مجموعه های دو عضوی V است. هر عنصر $e=\{u,v\}$ از E را یک یال نامیده و آن را برای سادگی با uv نشان می دهیم.

۱-۱ احاطه‌کنندگی راسی

تعریف ۱-۱-۱: در یک گراف G مجموعه $S \subseteq V(G)$ را یک مجموعه احاطه‌کننده می‌نامیم هرگاه هر راس از $V(G)-S$ با حداقل یکی از راسهای S مجاور باشد. عدد احاطه‌کنندگی گراف G کمترین اندازه در میان اندازه‌های مجموعه‌های احاطه‌کننده برای G است و آن را با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم. هم چنین بزرگترین اندازه در بین مجموعه‌های احاطه‌کننده می‌نیمال برای گراف G را با $\Gamma(G)$ نشان می دهیم.

برای راس x از گراف G منظور از همسایگی x که با $N(x)$ نشان داده می‌شود مجموعه تمام راسهای مجاور با x در گراف G است و همسایگی بسته x به صورت زیر $N[x]=N(x)\bigcup\{x\}$ تعریف می‌شود.

هم‌چنین برای یک زیرمجموعه S از راسهای G همسایگی S در G عبارتست از

$$N(S)=x\in S\bigcup N(x)$$

و همسایگی بسته S عبارتست از $N[S]=N(S)\bigcup S$.

بنابراین مجموعه S یک مجموعه احاطه‌کننده است هرگاه $N[S]=V(G)$.

قضیه ۱-۱-۲: اگر G گرافی بدون راس تنها باشد آنگاه $\gamma(G)\leq\frac{|V(G)|}{2}$.

برای یک زیر مجموعه S از راسهای گراف G فرض کنید $G[S]$ زیرگراف القایی توسط S باشد.

زیرمجموعه S از مجموعه راسهای گراف G را مستقل نامیم هرگاه هیچ دو راسی از S در گراف G مجاور نباشند.

تعریف ۱-۱-۳: فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌کننده در گراف G باشد در این صورت S را مجموعه‌ای احاطه‌کننده باز یا کلی نامیم هرگاه $G[S]$ راس تنها نداشته باشد.

کوچکترین اندازه مجموعه S در تعریف فوق را عدد احاطه‌کنندگی باز یا کلی گراف G نامیده و با $\gamma_t(G)$ نشان می‌دهیم.

گراف $K_{1,3}$ را پنجه می‌نامیم و منظور از یک گراف بدون پنجه گرافی است که هیچ زیرگرافی القایی یکریخت با $K_{1,3}$ نداشته باشد.

قضیه ۱-۱-٤ : هرگراف بدون پنجه G دارای یک مجموعه احاطه‌کننده مستقل با اندازه $\gamma(G)$ است.

اندازه بزرگترین مجموعه مستقل در گراف G را با $\beta_o(G)$ نشان می‌دهیم.

ویزینگ در سال ۱۹۶۸ مجموعه‌های احاطه‌کننده را در گرافهای حاصل‌ضربی بررسی کرده و حدس زیر را ارائه داد:

حدس ۱-۱-۵(ویزینگ): برای هر دو گراف G و H،

$$.\gamma(G\times H)\geq\gamma(G)\gamma(H)$$

درستی حدس فوق برای بسیاری از دسته‌های گراف‌ها ثابت شده است. اما در حالت کلی هنوز این حدس اثبات یا رد نشده است.

تعریف ۱-۱-٦: گراف G در حدس ویزینگ صدق می‌کند هرگاه برای هر گراف H،

$$.\gamma(G\times H)\geq\gamma(G)\gamma(H)$$

قضیه ۱-۱-۷: اگر $\gamma(G)=$ ۱ یا ۲ آن گاه G در حدس ویزینگ صدق می‌کند.

تعریف ۱-۱-۸: مجموعه احاطه‌کننده S را مجموعه‌ای احاطه‌کننده قوی نامیم هرگاه هر راس x در $V(G)-S$ توسط راسی مانند y از S احاطه شود به طوریکه $deg(y)\geq deg(x)$ کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌کننده قوی در گراف G را با $\gamma_s(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۹: یک ۲ بسته‌بندی از گراف G، زیر مجموعه‌ای از راسها مانند S است که برای هر $x,y\in S$ داشته باشیم

$$.N[x]\cap N[y]=\phi$$

عدد ۲ بسته‌بندی G که با $\rho_2(G)$ نشان داده می‌شود کوچکترین اندازه یک ۲ بسته‌بندی گراف G می باشد.

قضیه ۱-۱-۱۰: برای هر گراف G، $\rho(G)\leq\gamma(G)$.

منظور از یک $\gamma(G)-$ مجموعه، مجموعه‌ای احاطه‌کننده از اندازه $\gamma(G)$ خواهد بود و منظور از یک $\gamma_c(G)-$ مجموعه، مجموعه‌ای احاطه‌کننده همبند از اندازه $\gamma_c(G)$ خواهد بود. به همین ترتیب عبارتهای $\gamma_t(G)-$ مجموعه، $i(G)-$ مجموعه، $\beta_0(G)-$ مجموعه و $\Gamma(G)-$ مجموعه با مفاهیم مربوطه به کار می‌روند. برای مطالعه بیشتر در زمینه مجموعه‌های احاطه‌کننده و انواع آن خواننده را به مرج *[8]* ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۱: در یک گراف G مجموعه $S\subseteq V(G)$ را یک مجموعه احاطه‌کننده کلی مکانی می نامیم هرگاه S مجموعه ای احاطه کننده کلی بوده و برای هر دو راس x,y از $V(G)\setminus S$ داشته باشیم

$$.N(x)\cap S\neq N(y)\cap S$$

عدد احاطه‌کنندگی کلی مکانی گراف G کمترین اندازه در میان اندازه‌های مجموعه‌های احاطه‌کننده کلی مکانی برای G است و آن را با $\gamma_t^l(G)$ نشان می‌دهیم.

1-۲- گرافهای احاطه بحرانی

در سال ۱۹۹۱ فرانک هرری و سایرین مسئله دسته‌بندی شش رده زیر از گرافها را بررسی کردند[8].

فرض کنید $G\text{-}v$ (و به صورت مشابه $G\text{-}e$) گراف بدست آمده از G با حذف راس v (و یا با حذف یال e) باشد. می‌توان راسهای گراف G را بصورت زیر افراز کرد

$$V(G)=V^{\cdot}\cup V^{+}\cup V^{-}$$

که در آن

$$V^{\cdot}=\{v\in V(G):\ \gamma(G-v)=\gamma(G)\}$$

$$V^{+}=\{v\in V(G):\ \gamma(G-v)>\gamma(G)\}$$

$$V^{-}=\{v\in V(G):\ \gamma(G-v)<\gamma(G)\}$$

بسیاری از پژوهشهای جدید نظریه گراف پیرامون این دسته بندی هاست که ما در این نوشتار به چند مورد از آنها اشاره می کنیم.

تعریف *1*-۲-۱: گراف G را احاطه بحرانی نامیم هرگاه $V^{-}=V(G)$. همچنین هر راس در V^{-} را یک راس احاطه بحرانی می نامیم. لذا یک گراف G احاطه بحرانی است هرگاه هر راس آن احاطه بحرانی باشد.

برای راس v از گراف G و مجموعه احاطه کننده S همسایگی اختصاصی v در S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$.P_n[v,S]=\{u:N[u]\cap S=\{v\}\}$$

قضیه *1*-۲-*3* : $v\in V^{-}$ اگر و تنها اگر به ازای یک مجموعه احاطه کننده می‌نیمم S داشته باشیم

$$.P_n[v,S]=\{v\}$$

نتیجه ۱-۲- *4*: گراف G احاطه بحرانی است اگر و تنها اگر برای هر راس v مجموعه احاطه کننده می نیمم S موجود باشد به طوری که $P_n[v,S]=\{v\}$.

قضیه *1*–۲–*5* : اگر G گرافی احاطه بحرانی از مرتبه

$$n=(\Delta(G)+1)(\gamma(G)-1)+1$$

باشد آن‌گاه G گرافی منتظم است.

1–۳ گرافهای احاطه کلی بحرانی

Haynes و سایرین در سال ۲۰۰۴ مفهوم احاطه بحرانی را به احاطه کلی بحرانی تعمیم دادند. فرض کنید *S(G)* مجموعه راسهای پشتیبان گراف G باشند که بنا به تعریف راسهایی هستند که دارای مجاوری با درجه یک در گراف G می‌باشند.

تعریف *1*–۳–۱: گراف G را احاطه کلی بحرانی یا احاطه مطلق بحرانی نامیم هرگاه برای هر راس $v\in V(G)-S(G)$ داشته باشیم

$$.\gamma_t(G-v)<\gamma_t(G)$$

اگر گراف G احاطه کلی بحرانی باشد و $G,\gamma_t(G)=k$ را k–احاطه کلی بحرانی می‌نامیم.

در ذیل مثالهایی از این گرافها را داریم. لازم به ذکر است که یک دور $n-$ راسی با C_n نمایش داده می شود.

مثال *1*–۳–۲: دور C_5 گرافی ۳- احاطه کلی بحرانی است.

مثال *1*–۳–۳: دور C_6 گرافی ۴- احاطه کلی بحرانی است.

گزاره *1*–۳–*4*: اگر G گـرافی احاطه کلی بحـرانی باشد آن گاه برای هر راس $v\in V(G)-S(G)$ داریم

$$.\gamma_t(G-v)=\gamma_t(G)-1$$

به علاوه یک $\gamma_t(G-v)-$ مجموعه شامل هیچ راسی مجاور با v نمی‌باشد.

گزاره *1*-۳-۵: اگر v,u دو راس غیرمجاور در گراف G باشند به طوریکه v راسی غیر پشتیبان بوده و $N(u)\subseteq N(v)$ آن‌گاه G گرافی احاطه کلی بحرانی نیست.

تعریف *1*-۳-٦: تاج یک گراف G گرافی است حاصل از G به طوری که به هر راس یک یال آویزان مجاور شده است و آن را با *Cor(G)* نشان می‌دهیم. در سال ۲۰۰۴ میلادی ***Goddard*** و همکاران گرافهای احاطه کلی بحرانی که دارای راس آویزان هستند را دسته‌بندی کردند

قضیه *1*-۳-۸: فرض کنید G گرافی با حداقل سه راس باشد که دارای راس آویزان است. در این صورت گراف *k,G*– احاطه کلی بحرانی است اگر و تنها اگر *G=Cor(H)* که در آن H گرافی همبند از مرتبه k با $\delta(H)\geq ۲$ باشد.

بنابر این نتیجه قوی زیر برای یک درخت حاصل می شود.

نتیجه *1*-۳-۹: هیچ درختی احاطه کلی بحرانی نیست.

نتیجه دیگر در مورد قطر یک گراف *k*– احاطه کلی بحرانی با حداقل یک راس آویزان به صورت زیر است .

نتیجه *1*-۳-۱۰: اگر G گرافی *k*– احاطه کلی بحرانی با حداقل یک راس آویزان باشد آن گاه:

۱) اگر $k\in\{۳,۴\}$ آن‌گاه $diam(G)\leq k$.

۲) اگر $k\geq ۵$ آن‌گاه $diam(G)\leq k-1$

سپس گرافهای فاقد راس آویزان مورد بررسی واقع شده و نتایج زیر حاصل شد.

گزاره *1*-۳-۱۱: دور C_n گرافی احاطه کلی بحرانی است اگر و تنها اگر $n\equiv 1,2$ (پیمانه ۴).

گزاره *1*-۳-۱۲: قطر یک گراف *k*– احاطه کلی بحرانی حداکثر ۲*k*–۳ است.

کران فوق برای قطر یک گراف *k*– احاطه کلی بحرانی به ازای $k\leq ۸$ به صورت زیر ترمیم یافت.

قضیه*1*-۳-۱۳: برای $k\leq ۸$ قطر یک گراف *k*– احاطه کلی بحرانی حداکثر بصورت زیر است.

k	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$diam$	۳	۴	۶	۷	۹	۱۱

لازم به ذکر است که مساله تعیین قطر در گرافهای k–احاطه کلی بحرانی برای سایر مقادیر k تا کنون باز مانده است. همچنین با توجه به گزاره زیر آنها گرافهایی ساختند که کران‌های قضیه ۵-۲-۱۳ برای آنها قابل دسترسی باشد.

گزاره 1-۳-۱٤: فرض کنید F و H به ترتیب گرافهایی k–احاطه کلی بحرانی و j–احاطه کلی بحرانی با می‌نیمم درجه حداقل ۲ باشند و فرض کنید یک راس از F را بر یک راس از H منطبق نموده و گراف دیگری مانند G بدست آورده‌ایم. اگر $\gamma_t(G)=j+k-1$، آن‌گاه G گرافی احاطه کلی بحرانی است.

کاربرد دیگر گزاره فوق آن است که از گرافهایی احاطه کلی بحرانی مرتبه های کوچکتر می توان گرافهایی احاطه کلی بحرانی مرتبه های بزرگتر به دست آورد.

فصل دوم

نتایج در خصوص احاطه گری کلی مکانی

2-1 گرافهای احاطه کلی بحرانی مکانی راسی

تعریف ۲-۱ : گراف G را احاطه کلی بحرانی مکانی نامیم هر گاه بـرای هـر رأس غیـر پشـتیبان v عـدد احاطه گری کلی مکانی گراف $G\text{-}v$ کمتر از عدد احاطه‌گری کلی مکانی G باشد.

گزاره ۲-۲ : اگر v راسی پشتیبان در گراف Gباشد در این صورت v به هر یک از مجموعه‌های احاطه گر کلی مکانی می‌نیمم تعلق دارد. هم چنین هر مجموعه احاطه‌گر کلی مکانی شامل همه برگهای مجاور با v جز حداکثر یکی از آنها می‌باشد.

اثبات : برای اینکه هر برگ مجاور v توسط یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی، احاطه شود لازم است همسایه هر برگ عضوی از آن مجموعه باشد. در این صورت حـداکثر یـک بـرگ مـی‌توانـد خـارج آن مجموعه باشد. . ■

قضیهٔ ۲-۳ : فرض کنید G' گرافی باشد که با حذف یک راس غیر پشتیبان v از گراف G حاصل شـده باشد. در این صورت

$$\gamma_t^L(G-v) \leq \gamma_t^L(G')+1$$

به علاوه تفاضل $\gamma_t^L(G')-\gamma_t^L(G)$ می‌تواند به اندازه کافی بزرگ باشد.

اثبات : فرض کنید G' گراف حاصل از حذف راس غیر پشتیبان v از گراف G باشـد و فـرض کنیـد S' یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی می‌نیمم برای G' باشد. حالتهای زیر را داریم :

حالت ۱ : اگر $N_G(x)\cap S'=\phi$ باشد آن‌گاه $S=S'\cup\{y\}$ یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی می نیمم برای Gاست. لذا

$$\gamma_t^L(G)\le|S|=|S'|+1=\gamma_t^L(G')+1$$

حالت ۲ : اگر $|N_G(x)\cap S'|\ge 1$ باشد آن گاه $S=S'\cup\{x\}$ یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی می نیمم برای G است. در نتیجه

$$.\gamma_t^L(G)\le\gamma_t^L(G')+1$$

حال فرض کنید $P\ge 1$ باشد و pستارهٔ با مرکزهای v_1 , v_2و ... و v_p و سه برگ را در نظر می‌گیریم یک ستارهٔ با مرکز x و برگهای y_1 , y_2و ... و y_{P+1}را نیز در نظر می‌گیریم. فرض کنید G از این ستاره ها با اضافه کردن یالهای y_1v_1 , y_2v_2و ... و y_pv_pو زیر تقسیم کردن یال xy_{p+1} حاصل شده باشد. در این صورت G درختی است که در آن $\gamma_t^L(G)=3p+2$. اگر راس x را از درخت G حذف کنیم تا به گراف G' برسیم آن‌گاه $\gamma_t^L(G')=4p+2$. لذا

$$.\gamma_t^L(G')-\gamma_t^L(G)=p \quad \blacksquare$$

نتیجه ۲-٤ : برای هر راس غیر پشتیبان v در یک گراف احاطه کلی بحرانی مکانی

$$.\gamma_t^L(G-v)=\gamma_t^L(G)-1$$

تعریف ۲-۵ : گراف Gرا k–احاطه کلی بحرانی مکانی نامیم هر گاه G گرافی احاطه کلی بحرانی مکانی بوده و $\gamma_t^L(G)=k$.

لم ۲-٦ : یک گراف ناهمبند احاطه کلی بحرانی مکانی است هر گاه هر یک از مولفه‌های آن احاطه کلی بحرانی مکانی باشد.

لذا ما در این پروژه فقط گرافهای همبند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. حال سعی می‌کنیم برخی از گرافهای کلی را بررسی کنیم.

گزارهٔ ۲-۷ : گراف کامل K_n احاطه کلی بحرانی مکانی است اگر و تنها اگر $n \geq 4$.

اثبات : بدیهی است . ■

گزاره ۲-۸ : هیچ مسیر n راسی احاطه کلی بحرانی مکانی نمی‌باشد.

اثبات : با برهان خلف فرض کنید مسیر n راسی P_n احاطه کلی بحرانی مکانی است. واضح است که $n \geq 5$.

فرض کنید v راسی باشد که برگ نبوده و مجار با یک راس پشتیبان باشد. فرض کنید D مجموعه‌ای احاطه گر کلی بحرانی مکانی می‌نیمم برای $G\text{-}v$ باشد. در این صورت D یک مجموعه احاطه گر کلی بحرانی مکانی برای G نیز می‌باشد. لذا

$$\gamma_t^L(P) \leq \gamma_t^L(P_n - v)$$

که یک تناقض می‌باشد. . ■

گزاره ۲-۹ : یک دور C_n احاطه کلی بحرانی مکانی است اگر و تنها اگر $n \equiv 1,2 \pmod{4}$.

اثبات : می‌دانیم برای هر $n \geq 2$،

$$\gamma_t^L(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor .$$

در این صورت نتیجه به وضوح برقرار است.

به صورت مشابه گزاره زیر را داریم :

گزاره ۲-۱۰ : گراف دو بخشی کامل $K_{m,n}$ احاطه کلی بحرانی مکانی است اگر و تنها اگر یا $\min\{m,n\} \geq 3$ و یا $\min\{m,n\} = 1$ و $\max\{m,n\} \geq 3$.

حال گرافهای اکسترمال G با $\gamma_t^L(G) = 2$ را ارائه می‌دهیم. خانواده

$$\varepsilon = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \{P_2, P_3, P_4, C_4, K_4 - \{e\}\}$$

را در نظر بگیرید که در آن e یالی از K_4 بوده و

F_1 خانواده همه گرافهایی است که از یک مسیر P_4 با اضافه کردن یک راس جدید x و وصل کردن x به راسهای مرکزی P_4 و حداقل یک برگ از P_4 بدست آمده‌اند.

F_2 خانواده همه گرافهایی است که از یک دور C_4 با اضافه کردن یک راس جدید x و مجاور کردن x به حداقل دو راس مجاور C_4 بدست آمده‌اند.

F_3 خانواده همه گرافهایی است که از $Cor(C_3)$ با حذف حداقل یک یال آویزان بدست آمده‌اند.

قضیهٔ ۲-۱۱ : برای گراف G، $\gamma_t^L(G)=2$ اگر و تنها اگر $G\in\varepsilon$.

حال اگر در گرافهای خانواده ε یک راس جدید را به هر یک اضافه کرده و حالتهای مختلف مجاورت را در نظر بگیریم می‌توانیم بحرانی بودن یا نبودن گرافهای حاصل را تشخیص دهیم. لذا قضیه زیر را داریم.

قضیهٔ ۲-۱۲ : گراف G گرافی ۳-احاطه کلی بحرانی مکانی است اگر و تنها اگر

$$G\in\{K_4, K_{1,3}, Cor\,(C_3)\}\ .$$

حال آماده‌ایم تا درختهای احاطه کلی بحرانی مکانی را استخراج کنیم. فرض کنیم F خانواده همه درختهایی مانند T باشد که هر راس T یا یک برگ است و یا یک راس پشتیبان، و هر راس پشتیبان از درجه حداقل سه باشد.

قضیهٔ ۲-۱۳ : یک درخت T احاطه کلی بحرانی مکانی است اگر و تنها اگر $T\in F$.

اثبات : فرض کنید T درختی احاطه کلی بحرانی مکانی باشد. به کمک استقراء روی مرتبه T ثابت می کنیم $T\in F$. به راحتی می‌توان دید که اگر قطر درخت احاطه کلی بحرانی مکانی T کمتر یا مساوی ۳ باشد آنگاه $T\in F$. فرض کنیدهر درخت احاطه کلی بحرانی مکانی T' با مرتبه $n'\le n$ عضو F باشد. فرض کنید T درختی احاطه کلی بحرانی مکانی از مرتبه n باشد که قطر آن حداقل ۴ باشد.

ادعای ۱ : هیچ راسی از T که پشتیبان نیست به حداقل دو راس پشتیبان وصل نیست.

اثبات : فرض کنید b راسی غیر پشتیبان باشدکه به دو راس پشتبان v,uوصل است. در این صورت v,u به هر مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای T-b تعلق دارد. در نتیجه چنین مجموعه هایی یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای T نیز می‌باشند. این یک تناقض است.

ادعای ۲: هر راس پشتیبان دارای درجه حداقل ۳ است.

اثبات: با برهان خلف فرض کند y راسی پشتیبان بوده و درجه آن ۲ باشد. فرض کنید x برگ منحصر به فرد مجاور با y بوده و z نیز راسی غیر برگ مجاور با y باشد. اگر z راسی پشتیبان نباشد آن گاه هر مجموعه احاطه گر کلی مکانی می‌نیمم برای T-z شامل y,x بوده و در نتیجه یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای T خواهد بود. این یک تناقض است. لذا z راسی پشتیبان است. فرض کنید w یک برگ همسایه z بوده و S' یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای t-x باشد. در این صورت

$$\{y, w\} \cap S' \neq \phi \ .$$

اگر $e \in S'$ آن گاه S' یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای T خواهد بود که تناقض می‌باشد. پس $y \notin S'$ و در نتیجه $w \in S$. اما در این صورت

$$\{y\} \cup (S - \{w\})$$

یک مجموعه احاطه گر کلی برای T است. این یک تناقض می‌باشد.

حال یک مسیر قطری $u_0 - u_1 - u_2 - \ldots - u_{diam(T)}$ را در نظر می گیریم. بنابر ادعای ۲، u_1 راسی پشتیبان با حداقل دو برگ می‌باشد و بنابر ادعای ۱، u_2 یا راسی پشتیبان است و یا راسی از درجه ۲.

حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: u_2 دارای درجه ۲ است. در این صورت طبق ادعای ۱، u_3 راس پشتیبان نمی‌باشد. فرض کنید D' یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای $T - u_3$ باشد. در این صورت

$$(N[u_1] - \{u_0\}) \subset D'$$

و بنابراین D' یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای T است. این یک تناقض است.

حالت ۲: u_2 راسی پشتیبان است. فرض کنید T' درختی باشد که از T با حذف همه برگهای مجاور با u_1 بدست آمده باشد. در این صورت u_2 یک راس پشتیبان با درجه حداقل ۳ در T' است. به آسانی می توان دید که

$$.\gamma_t^L(T) = \gamma_t^L + \left|L_{u_1}(T)\right| - 1$$

حال فرض کنید T' احاطه کلی بحرانی مکانی نباشد. پس به ازای یک راس w،

$$.\gamma_t^L(T'-w) \geq \gamma_t^L(T')$$

اگر $w \in L_{u_2}(T')$ آن گاه همه راسهای L_{u_2} (T') دارای یک نقش هستند می‌توان فرض کرد $w \neq u_1$. در این صورت

$$.w \in V(T) - \left(L_{u_1}(T) \cup \{u_1\}\right)$$

فرض کنید S یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای T-w باشد. اگر $w \notin L_{u_2}(T')$ آن گاه S شامل u_1, u_2 و همه برگهای u_2 جز یکی مانند u_0 است.

در این صورت $S - L_{u_1}(T)$ یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای T'-w بوده و در نتیجه

$$.\gamma_t^L(T'-w) \leq \gamma_t^L(T-w) - \left(\left|L_{u_1}(T)\right| - 1\right)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\gamma_t^L(T-w) - \left(\left|L_{u_1}(T)\right| - 1\right) \geq \gamma_t^L(T'-w) \geq$$
$$\gamma_t^L(T') = \gamma_t^L(T) - \left(\left|L_{u_1}(T)\right| - 1\right)$$

و بنابراین

$$.\gamma_t^{;}(T-w) \geq \gamma_t^L(T)$$

این یک تناقض می‌باشد زیرا T درختی احاطه کلی بحرانی مکانی است. لذا $w \in L_{u_1}(T') - \{u_1\}$. واضح است که u_1 و همه برگهای آن جز u_0 عضو S هستند. اگر $u_2 \in S$ آنگاه $S - L_{u_1}(T)$ یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای T'-w خواهد بود. اگر $u_2 \notin S$ آن گاه $u_3 \in S$ و در نتیجه

$$(\{u_2\} \cup S) - (L_{u_1}(T) \cup \{u_1\})$$

یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای T'-w است. در هر دو حالت

$$\gamma_t^L(T'-w) \le \gamma_t^L(T-w) - (|L_{u_1}(T)| - 1)$$

که نتیجه می دهد $\gamma_t^L(T-w) \ge \gamma_t^L(T)$. این یک تناقض است. لذا T' درختی احاطه کلی بحرانی مکانی می‌باشد. حال فرض استقراء را برای T' به کار می‌بریم. در این صورت $T' \in F$. در نتیجه $T \in F$ و اثبات کامل خواهد شد. ■

در ادامه ما گرافهای احاطه کلی بحرانی مکانی را از گرافهای کوچکتر بدست می‌آوریم.

قضیه ۲-۱٤: فرض کنید H,G گرافهایی به ترتیب k–احاطه کلی بحرانی مکانی و k'–احاطه کلی بحرانی مکانی باشند که می‌نیمم درجه آنها حداقل ۲ است. فرض کنید F گراف حاصل از آنها با یکی فرض کردن یکی راس از G با یک راس از H و انطباق آن ها بر هم باشد . اگر

$$\gamma_t^L(F) = K + K' - 1$$

آن گاه F گرافی احاطه کلی مکانی بحرانی است.

اثبات: به وضوح H,G فاقد راس آویزان هستند. فرض کنید x راس جدیدی باشد که با یکی فرض کردن راسی از G با راسی از H حاصل شده باشد. فرض کنید y راسی از F باشد و

$$\gamma_t^L(F) = K + K' + 1.$$

نشان می‌دهیم $\gamma_t^L(F-y) < K + K' - 1.$

اگر $y=x$ باشد آن گاه $y \in V(G) \cap V(H)$. اما چون هر دوی H,G بحرانی هستند داریم

$$.\gamma_t^L(G-Y)=K-1, \gamma_t^L(H-Y)=K'-1$$

در نتیجه

$$.\gamma_t^L(F-y) \le K-K'-2$$

بنابراین فرض کنید $y \ne x$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $y \in V(G)$ باشد. یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی S با اندازه $K\text{-}1$ در $G\text{-}y$ داریم که هم چنین x را احاطه می‌کند. حال در گراف H یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی می‌نیمم برای $H\text{-}x$ باید پیدا کنیم. اما چون

$$\gamma_t^L(H-x)=K'-1$$

این نتیجه به طور بدیهی بدست می‌آید. بنابراین F بحرانی است.. ■

2-2 گرافهای احاطه کلی بحرانی مکانی یالی

حال گرافهای احاطه کلی بحرانی مکانی یالی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۲-۱۵: برای هر یال غیر آویزان $e=xy$ در یک گراف G داریم

$$.\gamma_t^L(G)-1 \le \gamma_t^L(G-e) \le \gamma_t^L(G)+2$$

اثبات: فرض کنید S_1 یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای $G\text{-}e$ باشد. اگر

$$\{X,Y\} \subseteq S_1 \text{ یا } S_1 \cap \{X,Y\}=\phi$$

آن گاه S_1 یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای G می‌باشد و در نتیجه

$$.\gamma_t^L(G) \le \gamma_t^L(G-e)$$

لذا بدون این که به کلیت خللی وارد شود فرض کنید $y \notin S_1, x \in S_1$. در ایـن صـورت $S_1 \cup \{y\}$ یـک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای G بوده و در نتیجه

$$.\gamma_t^L(G) \le \gamma_t^L(G-e)+1$$

در هر دو حالت کران بالا حاصل می‌شود.

حال فرض کنید S_2 یک مجموعه احاطه گر مکانی برای G-e باشد. اگـر $S_2 \cap \{x,y\} = \phi$. آن گـاه بـه وضوح

$$.\gamma_t^L(G-e) \le \gamma_t^L(G)$$

فرض کنید $|S_2 \cap \{x,y\}| = 1$ و فرض کنید $x \in S_2$.

اگر y دارای دو همسایه در S_2 باشد آن گاه $S_2 \cup \{y\}$ یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی بـرای G-e است. لذا x تنها همسایه y در S_2 است. چون e یال آویزان نمی‌باشد فرض کنید $z \in V(G) - S_2$ همسایه ای از y باشد. در این صورت $S_2 \cup \{z\}$ یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای G-e است. در هـر دو حالت

$$.\gamma_t^L(G-e) \le \gamma_t^L(G)+1$$

در پایان فرض کنید $\{x,y\} \subseteq S_2$. اگر درجـه x,y در گـراف $G[S_2]$ حـداقل ۲ باشـد آن گـاه S_2 یـک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای G-e است. لـذا حـداقل یکـی از راسـهای x,y آویـزان اسـت. اگـر $N(x) \cap N(y) \ne \phi$ باشد آن گاه $S_2 \cup \{w\}$ یک مجموعه احاطه گر کلی مکـانی بـرای G-e اسـت در آن $W \in N(x) \cap N(y)$. حال فرض $N(x) \cap N(y) = \phi$. چون e یـال غیـر آویـزان اسـت فـرض کنیـد $.y_1 \in N(y) - S_2, x_1 \in N(x) - S_2$

در این صورت $S_2 \cup \{x_1, y_1\}$ یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای G-e است. در نتیجه

$$\gamma_t^L(G-e) \le \gamma_t^L(G) + 2 .$$

■ .

تعریف ۲-۱۶: گراف G را احاطه کلی بحرانی مکانی یالی نامیم هر گاه برای هر یال غیر آویزان e،

$$.\gamma_t^L(G-e) < \gamma_t^L(G)$$

نتیجه ۲-۱۷: به ازای هر یال غیر آویزان e در یک گراف احاطه کلی بحرانی مکانی یالی

$$.\gamma_t^L(G-e) = \gamma_t^L(G) - 1$$

چون گرافهای ستاره احاطه کلی بحرانی مکانی یالی هستند لذا ما تنها گرافهایی را بررسی می‌کنیم که حداقل یک یال غیر آویزان داشته باشند.

لم ۲-۱۸: (۱) برای هر $n \le 4$ گراف کامل K_n احاطه کلی بحرانی مکانی یالی است.

(۲) برای $m,n \ge 3$ گراف کامل دو بخش $K_{m,n}$ احاطه کلی بحرانی مکانی یالی است.

لم ۲-۱۹: فرض کنید $e=xy$ یالی غیر آویزان در یک گراف احاطه کلی بحرانی مکانی یالی G باشد. اگر S یک مجموعه احاطه گر کلی برای G-e باشد آن گاه $|S \cap \{x,y\}| = 1$.

اثبات: اگر

$$|S \cap \{x,y\}| \in \{0,2\}$$

باشد آن گاه S یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی برای G خواهد بود که یک تناقض است.

قضیه ۲-۲۰: هر یال غیر آویزان در یک گراف احاطه کلی بحرانی مکانی متعلق به دوری با طول حداقل ۴ است.

اثبات: فرض کنید $e=xy$ یالی غیر آویزان در گراف بحرانی G بوده و S مجموعه ای احاطه گر کلی مکانی برای G-e باشد. بنابر لم قبل فرض کنید $y \notin S, x \in S$. در این صورت راس $z \in V(G)-S$ موجود است که

$$.N(y) \cap S = N(z) \cap S$$

هم چنین $|N(y) \cap S| \geq 2$ و در نتیجه برای هر راس

$$w \in N(Y) \cap S \text{ که } w \neq x$$

زیر گراف القا شده توسط $\{x, y, z, w\}$ K_4, C_4 و یا K_4 منهای یک یال می باشد.

در هر دو حالت یک تناقض ایجاد می‌شود.

■

نتیجه ۲-۲۱: کمر یک گراف احاطه کلی بحرانی مکانی یالی حداقل ۴ است.

نتیجه ۲-۲۲: یک درخت T احاطه کلی بحرانی مکانی یالی است اگر و تنها اگر T یک ستاره باشد.

فصل سوم

ترمیم کران بالا برای قطر یک گراف احاطه کلی بحرانی

در این فصل کران بالا برای قطر یک گراف احاطه کلی بحرانی را از ۳–۲k بـه ۵–۲k بهبـود مـی‌بخشـیم.

برای یک راس v در گراف G منظور از S_v یک $\gamma(G-v)-$ مجموعه می‌باشد.

قضیه ۳–۱: قطر یک گراف k– احاطه کلی بحرانی حداکثر ۵–۲k است.

اثبات: برای دو زیرمجموعه S و T از راسهای گراف G منظور از نماد $S >_t T$ آن است که S به طور بـاز راسهای T را احاطه می‌کند. فرض کنید $d = diam(G)$ و $d \geq ۲k-۴$.

فرض کنید v راسی قطری در G باشد. برای $i = ۰,۱,۲,\ldots,d$. فرض کنید V_i مجموعـه راسـهایی از G باشـند که تا راس v فاصله i داشته باشند. برای $L \in \{۰,۱,۲,\ldots,d\}$ تعریف می‌کنیم

$$V_{\leq L} = V_۰ \cup V_۱ \cup \ldots \cup V_L$$

$$V_{\geq L} = V_۰ \cup V_{L+۱} \cup \ldots \cup V_d$$

حالتهای زیر را داریم:

حالت ۱: k فرد است.

فرض کنید $u \in V_۱$ و $w \in V_{۲K-۵}$ باشند در این صورت $|S_u| = k-۱$ و برای $t = ۰,۱,۲,\ldots,k'$ داریم

$$|S_u \cap (V_{۲t} \cup V_{۲t+۱} \cup V_{۲t+۲})| \geq ۲$$

که در آن $۴k' = ۲k-۶$. اما $|S_u| = ۲(k'+۱) = k-۱$ در نتیجه برای $t = ۰,۱,۲,\ldots,k'$ خواهیم داشت:

$$|S_u \cap (V_{۴t} \cup V_{۴t+۱} \cup V_{۴t+۲})| = ۲$$

به صورت مشابه برای $t = ۰,۱,۲,\ldots,k'$ داریم

$$|S_w \cap (V_{۲t} \cup V_{۲t+۱} \cup V_{۲t+۲})| = ۲$$

هم چنین $S_w \cap V_{\leq ۲k-۸}$ به طور کلی $V_{\leq ۲k-۸}$ را احاطه می‌کند و $S_u \cap V_{\geq ۲k-۶}$ به طور کلی $V_{\geq ۲k-۶}$ را احاطه می‌کند. حال حالتهای زیر را داریم:

الف- اگر $S_u \cap V_{۲k-۸} = \phi$ آنگاه:

$$(S_u \cap V_{\geq ۲k-۶}) \cup (S_w \cap V_{\leq ۲k-۸})$$

به طور کلی $V(G)$ را احاطه می‌کند که یک تناقض می‌باشد.

ب- اگر $S_u \cap V_{۲k-۸} \neq \phi$، آنگاه:

$|S_u \cap V_{۲k-۸}| = ۱$ و $|S_u \cap V_{۲k-۹}| = ۱$.

اگر $|S_w \cap V_{۲k-۸}| = |S_w \cap V_{۲k-۹}| = ۹$ آنگاه

$$(S_w \cap V_{\leq ۲k-۸}) \cup (S_u \cap V_{\geq ۲k-۶})$$

به طور کلی $V(G)$ را احاطه می‌کند که یک تناقض می‌باشد. لذا

$|S_w \cap V_{۲k-۱۰}| = |S_w \cap V_{۲k-۹}| = ۱$.

ادعا ۱: $|V_{۲k-۹}| = ۱$

اثبات: فرض کنید $x \in V_{۲k-۹}$. اگر $|V_{۲k-۹}| \geq ۲$، آنگاه برای $t = ۰,۱,۲,\ldots,k'$ داریم:

$$|S_x \cap (V_{۲t} \cup V_{۲t+۱} \cup V_{۲t+۲})| = ۲$$

حال اگر $S_x \cap V_{۲k-۸} = \phi$ باشد،آنگاه

$$(S_x \cap V_{\leq ۲k-۱۲}) \cup (S_u \cap V_{\geq ۲k-۹})$$

به طور کلی $V(G)$ را احاطه می‌کند و اگر $S_x \cap V_{۲k-۸} \neq \phi$ آنگاه

$$(S_x \cap V_{\geq ۲k-۶}) \cup (S_w \cap V_{\leq ۲k-۹})$$

به طور کلی $V(G)$ را احاطه می‌کند که هر دو منجر به یک تناقض می‌گردند.

ادعا ۲: $|V_{2k-8}|=1$

اثبات: فرض کنید $x\in V_{2k-9}$، $y\in V_{2k-8}$ و $|V_{2k-8}|\geq 2$، در اینصورت $x\notin S_y$ زیرا:

$$|S_w\cap V_{2k-9}|=|S_w\cap V_{2k-10}|=1$$

حال دو حالت زیر را داریم:

الف- اگر $S_y\cap V_{2k-8}\neq\phi$ آنگاه $|S_y\cap V_{2k-8}|\geq 4$ و برای اینکه V_{2k-10} به طور کلی احاطه شود خواهیم داشت: $(V_{2k-10}\cup V_{2k-11})\cap S_y\neq\phi$ که مغایر با $|S_y|=k-1$ می‌باشد.

ب- اگر $S_y\cap V_{2k-8}=\phi$، آنگاه

$$|S_y\cap V_{\geq 2k-7}|\geq 3 \text{ و } |S_y\cap V_{\leq 2k-10}|\geq k-2$$

درنتیجه: $|S_y|\geq k+1$ که یک تناقض می‌باشد. لذا $|V_{2k-8}|=1$. بنابراین $V_{2k-8}=\{y\}$ و در این صورت

$$(S_w\cap V_{\leq 2k-9})\cup(S_y\cap V_{\geq 2k-6})$$

به طور کلی $V(G)$ را احاطه می‌کند که یک تناقض می‌باشد.

حالت ۲: k زوج است.

فرض کنید $u\in V_1$ در این صورت به سادگی دیده می‌شود $S_u\cap V_o=S_u\cap V_{2k-4}=\phi$. هم‌چنین عددی مانند i_u وجود دارد به طوری که

$$|S_u\cap V_{i_u}|=|S_u\cap V_{i_u+1}|=|S_u\cap V_{i_u+2}|=1$$

به علاوه هیچ عدد صحیح i موجود نیست که

$$|S_u\cap(V_i\cup V_{i+1}\cup V_{i+2}\cup V_{i+3})|\geq 4$$

حال فرض کنید $w\in V_{2k-5}$ در این‌صورت عدد صحیح i_w موجود است به طوری که:

$$|S_u\cap V_{i_w}|=|S_u\cap V_{i_w+1}|=|S_u\cap V_{i_w+2}|=1$$

اگر $i_u = i_w$، آن‌گاه

$$|(V_{i_w-1} \cup V_{i_w+2}) \cap S_u| = |(V_{i_w-1} \cup V_{i_w+2}) \cap S_w| = 0$$

در نتیجه

$$(S_w \cap V_{\leq i_w-1}) \cup (S_u \cap V_{\geq i_w})$$

به طور باز $V(G)$ را احاطه می‌کند که یک تناقض می‌باشد. بنابراین بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد $i_u < i_w$. حال به سادگی داریم:

$$|S_w \cap (V_{i_u} \cup V_{i_u+1})| = 2 \text{ و } S_w \cap (V_{i_u-1} \cup V_{i_u+2}) = \phi$$

ادعا ۳: $i_u = 2$ و $i_w = 2k-7$.

اثبات: اگر $i_u \neq 2$، آن‌گاه

$$(S_w \cap V_{\leq 2}) \cup (S_u \cap V_{\geq 4})$$

به طور کلی $V(G)$ را احاطه می‌کند که یک تناقض می‌باشد. اگر $i_w \neq 2k-7$، آن‌گاه

$$(S_w \cap V_{\leq 2k-8}) \cup (S_u \cap V_{\geq 2k-6})$$

به طور کلی $V(G)$ را احاطه می‌کند که مجدداً یک تناقض می‌باشد.

چون $k \geq 7$، لذا

$$|S_u \cap V_6| = |S_u \cap V_7| = |S_w \cap V_5| = |S_w \cap V_6| = 1 \text{ و}$$

$$S_u \cap V_5 = S_u \cap V_8 = S_w \cap V_4 = S_w \cap V_7 = \phi.$$

فرض کنید $x \in V_4$، در این‌صورت $|S_x| = k-1$ و دو حالت زیر را داریم:

الف- $|V_4| \geq 2$.

اگر $|S_x \cap V_{\leq 3}| = 3$، آن‌گاه

$$(S_x \cap V_{\leq 3}) \cup (S_u \cap V_{\geq 5})$$

به طور کلی $V(G)$ را احاطه می‌کند که یک تناقض می‌باشد. بنابراین می‌توان فرض کرد که

$$|S_x \cap V_{\leq ۳}| = ۲.$$

اما در این صورت

$$|S_x \cap V_۱| = |S_x \cap V_۲| = |S_x \cap V_۵| = |S_x \cap V_۶| = ۱.$$

حال اگر $|S_x \cap (V_۵ \cup V_۶ \cup V_۷)| \neq ۳$، آن‌گاه

$$((S_x \cap V_{\leq ۲}) \cap (S_w \cap (V_۵ \cup V_۶))) \cup (S_x \cap V_{\geq ۹})$$

به طور کلی $V(G)$ را احاطه می‌کند و اگر $|S_x \cap (V_۵ \cup V_۶ \cup V_۷)| = ۳$، آن‌گاه

$$(S_x \cap V_{\leq ۲}) \cup (S_w \cap V_۵) \cup (S_u \cap V_{\geq ۶})$$

به طور کلی $V(G)$ را احاطه می‌کند که هر دو منجر به تناقض می‌شوند.

ب- $V_۴ = \{x\}$

در این‌صورت به سادگی دیده می‌شود که $S_u \cap V_{\geq ۶}$ به‌طور کلی $V_{\geq ۵}$ را احاطه می‌کند. فرض کنید $z \in V_۳$ باشد آنگاه

$$(S_w \cap V_{\leq ۲}) \cup (S_u \cap V_{\geq ۶}) \cup \{z\}$$

به طور کلی $V(G)$ را احاطه می‌کند که یک تناقض می‌باشد. بنابراین $d \leq ۲k - ۵$. ■

فهرست منابع و ماخذ

1) T. Burtone and D. P. Sumner*, Domination dot-critical graphs, Discrete Mathematics, 306 (2006), 11-18.*

2) T. U. Chang, W. E. Clark and E. O. Hare*, Domination numbers of complete grid graphs, I, Ars Combinatoria 38 (1994), 97-111.*

3) Z. Chengye, Y. Yuansheng, and S. Linlin*, Domination dot-critical graphs with no critical vertices, Discrete Mathematics, In press.*

4) R. Cherifi, S. Gravier and I. Zighem*, Bounds on domination number of complete grid graphs, Ars Combinatoria 60 (2001), 307-311.*

5) W. Goddard, T. W. Haynes, M. A. Henning and Lucas C. Vander Merwe*, The diameter of total domination vertex critical graphs, Discrete Mathematics 286 (2004), 255-261.*

6) S. Gravier and M. Mollard*, On domination numbers of Cartesian product of paths, Discrete Mathematics 80 (1997), 247-250.*

7) T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater*, editors. Domination in graphs: Advanced Topics. Marcel Dekker, Inc, New York, NY, 1997.*

8) T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater*, editors. Fundamental of Domination in graph: Advanced Topics. Marcel Dekker, Inc, New York, NY, 1998.*

9) D. A. Mojdeh and N. Jafari Rad*, On an open problem concerning total domination critical graphs, Exposition Mathematicai, 25 (2007), 2, 175-179.*

10) D. A. Mojdeh and N. Jafari Rad*, On the total domination critical graphs, Electronic Notes in Discrete Mathematics 24 (2006), 89-92.*

11) R. S. Shaheen*, On the domination number of $m\times n$ toroidal grid graphs, J. Congr Numer. 146 (2000), 187-200.*

12) L. Sun*, A result on Vizing's conjecture, Discrete Math. 275 (2004), 363-366.*

13) D. B. West*, Introduction to graph theory, (2nd edition), Prentice-Hall, USA, 2001.*

واژه نامه انگلیسی–فارسی

Claw	پنجه
Claw – free	پنجه آزاد
Critical	بحرانی
Domination	احاطه‌گری
Domination critical	احاطه بحرانی
Domination number	عدد احاطه کنندگی
Dominating set	مجموعه احاطه کننده
k – *domination*	k – احاطه‌گری
Pendant	آویزان
Total domination	احاطه کنندگی کلی
Total domination number	عدد احاطه کنندگی کلی
Total domination critical	احاطه کلی بحرانی