



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

کدهای r -شناسایی و تراکم آنها در برخی گراف‌های خاص

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

دانشجو

غلامرضا وحدانی

تیر ۱۳۹۳

به نام آن که جان را فکرت آموخت

پروردگارا...!

نه می توانم مویشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست های
پینه بسته شان که شمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که
هر سحر خط سگر گزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذارم.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه ندانستن هاست...

تقدیم بہ خانوادہ عزیزم

سپاس‌گزاری

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند، و سلام و مورد بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است. به نشانه سپاس از الطافش، دستان مهربان‌ترین بندگانش، پدر و مادر عزیزم را بوسه می‌زنم.

اینک که این مرحله را پشت سر می‌گذارم، از تلاش‌ها، زحمات و راهنمایی‌های ظریف و ارزشمند استاد فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب دکتر نادر جعفری راد کمال تشکر را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

غلامرضا وحدانی
سیر ۱۳۹۳

تعمدنامه

اینجانب غلامرضا وحدانی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان کدهای r -شناسایی و تراکم آن‌ها در برخی گراف‌های خاص، تحت راهنمایی دکتر نادر جعفری راد متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

غلامرضا وحدانی
سیر ۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی همبند و بدون جهت باشد و $r \geq 1$ عددی صحیح باشد. زیرمجموعه‌ای از رئوس مانند $C \subseteq V$ را در نظر بگیرید. به ازای هر رأس $v \in V$ مجموعه $B_r(v)$ را به صورت $B_r(v) = \{u \in V : d(v, u) \leq r\}$ تعریف می‌کنیم. اگر به ازای هر رأس $v \in V$ ، همه مجموعه‌های $C \cap B_r(v)$ ناتهی و دو به دو از هم متمایز باشند، آن‌گاه C را کد r -شناسایی می‌نامیم. اگر به ازای هر رأس $v \in V \setminus C$ ، همه مجموعه‌های $C \cap B_r(v)$ ناتهی و دو به دو از هم متمایز باشند، آن‌گاه C را کد r -احاطه‌گر مکانی می‌نامیم. کمترین اندازه یا تراکم این کدها در این پایان‌نامه بررسی می‌شود.

در فصل اول این پایان‌نامه، تعاریف و قضایایی از نظریه گراف را بیان می‌کنیم که در فصل‌های بعدی لازم هستند. در فصل ۲ ویژگی‌هایی از انتقال در \mathbb{Z}^2 را توصیف می‌کنیم که در بررسی کدهای متناوب مفیدند و با استفاده از آن به مطالعه کدهای r -شناسایی با مقادیر r کوچک در چهار شبکه‌ی شش‌گوشه، مثلث، مربع و شاهوار می‌پردازیم. در فصل ۳ ثابت می‌کنیم که کمترین تراکم در شبکه شاهوار برای $r > 1$ برابر $\frac{1}{4r}$ است. در فصل ۴ مقدار دقیق بهترین تراکم ممکن در زنجیرهای متناهی و نامتناهی و همچنین در دوره‌ها را ارائه می‌نماییم.

کلمات کلیدی: کد شناسایی، کد احاطه‌گر مکانی، گراف

فهرست مطالب

د	فهرست تصاویر
۱	۱ تعاریف و قضایای مقدماتی گراف
۱	۱.۱ مقدمه
۹	۲ کدهای شناسایی با شعاع کوچک در برخی از گراف‌های منتظم
۹	۱.۲ مقدمه
۹	۲.۲ اهمیت و کاربرد کدهای شناسایی و کدهای احاطه‌گر مکانی
۱۰	۳.۲ تعاریف مقدماتی
۱۱	۴.۲ کاشی‌ها و مستطیل‌ها
۱۵	۵.۲ کدهای متناوب و کاشی‌ها
۱۶	۶.۲ تشریح یک ابتکار
۱۷	۷.۲ کران‌های بالا و پایین
۱۷	۱.۷.۲ کران‌های پایین
۲۵	۸.۲ کران‌های بالا
۲۶	۹.۲ نتایج
۲۷	۱۰.۲ ساختار برخی کدها
۲۷	۱.۱۰.۲ شبکه شاهوار
۲۸	۲.۱۰.۲ شبکه مثلث
۳۱	۳.۱۰.۲ شبکه مربع
۳۴	۴.۱۰.۲ شبکه شش‌گوشه
۴۳	۳ کمترین تراکم کد شناسایی در شبکه شاهوار
۴۳	۱.۳ مقدمه
۴۳	۲.۳ ساختارهای عمومی
۴۷	۳.۳ کران‌های پایین کلی

۵۹	۴	کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی در زنجیرها و دورها
۵۹	۱.۴	مقدمه
۵۹	۲.۴	زنجیر نامتناهی
۶۰	۱.۲.۴	کدهای شناسایی در زنجیر نامتناهی
۶۱	۲.۲.۴	کدهای احاطه‌گر مکانی در زنجیر نامتناهی
۶۳	۳.۴	زنجیرهای متناهی
۶۴	۱.۳.۴	کدهای شناسایی در زنجیرهای متناهی
۶۷	۲.۳.۴	کدهای احاطه‌گر مکانی در زنجیرهای متناهی
۷۰	۴.۴	دورها
۷۱	۱.۴.۴	کدهای شناسایی در دورها
۷۴	۲.۴.۴	کدهای احاطه‌گر مکانی در دورها
۷۵	۵.۴	گوی‌های جدید
۷۵	۱.۵.۴	کدهای شناسایی
۷۶	۲.۵.۴	کدهای احاطه‌گر مکانی
۷۸	۶.۴	نتایج
۸۰		مراجع
۸۳		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۸۵		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۸۷		نمایه

فهرست تصاویر

۱	گراف $G = (V, E, \psi(G))$	۱.۱
۲	دو نمایش گرافیکی برای یک گراف	۲.۱
۲	گراف‌های مسطح و نامسطح	۳.۱
۶	گراف $G = (V, E)$ کد ۱-شناسایی ندارد	۴.۱
۱۲	بخشی از مشبکه شش گوشه	۱.۲
۱۲	بخشی از مشبکه مربع	۲.۲
۱۲	بخشی از مشبکه مثلث	۳.۲
۱۳	بخشی از مشبکه شاهوار	۴.۲
۲۰	مثلث	۵.۲
۲۰	(مثلث) H_r در مشبکه مثلث	۶.۲
۲۳	(مثلث) H_r در مشبکه شش گوشه	۷.۲
۲۳	مربع	۸.۲
۲۴	(مربع) K_r در مشبکه مربع	۹.۲
۲۹	کد ۱-شناسایی در مشبکه شاهوار	۱۰.۲
۲۹	کد ۲-شناسایی در مشبکه شاهوار	۱۱.۲
۲۹	کد ۳-شناسایی در مشبکه شاهوار	۱۲.۲
۳۰	کد ۴-شناسایی در مشبکه شاهوار	۱۳.۲
۳۰	کد ۲-شناسایی در مشبکه مثلث	۱۴.۲
۳۲	کد ۳-شناسایی در مشبکه مثلث	۱۵.۲
۳۲	کد ۴-شناسایی در مشبکه مثلث	۱۶.۲
۳۳	کد ۵-شناسایی در مشبکه مثلث	۱۷.۲
۳۳	کد ۶-شناسایی در مشبکه مثلث	۱۸.۲
۳۵	کد ۳-شناسایی در مشبکه مربع	۱۹.۲
۳۵	کد ۴-شناسایی در مشبکه مربع	۲۰.۲
۳۶	کد ۵-شناسایی در مشبکه مربع	۲۱.۲

۳۶	۲۲.۲	کد ۶-شناسایی در شبکه مربع.
۳۸	۲۳.۲	کد ۲-شناسایی در شبکه شش گوشه.
۳۸	۲۴.۲	کد ۳-شناسایی در شبکه شش گوشه.
۳۸	۲۵.۲	کد ۴-شناسایی در شبکه شش گوشه.
۳۸	۲۶.۲	کد ۵-شناسایی در شبکه شش گوشه.
۳۹	۲۷.۲	کد ۶-شناسایی در شبکه شش گوشه.
۳۹	۲۸.۲	کد ۷-شناسایی در شبکه شش گوشه.
۳۹	۲۹.۲	کد ۸-شناسایی در شبکه شش گوشه.
۴۱	۳۰.۲	کد ۲-شناسایی در شبکه مثلث.
۴۴	۱.۳	کد ۳-شناسایی در شبکه شاهوار. کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.
۴۹	۲.۳	$K_r((0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1))$ برای شبکه شاهوار در حالت $r = 2$.
۵۰	۳.۳	جفت‌های تفاضل متقارن برای مربع (x, y, z, t) در شبکه شاهوار به ازای $r = 2$.
۵۱	۴.۳	$K \in \mathcal{E}'_r$ و شریک بالای آن برای $r = 2$. کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.
۵۱	۵.۳	$K \in \mathcal{E}'_r$ و شریک راست آن برای $r = 2$.
۵۵	۶.۳	$K \in \mathcal{E}_r$ و شریک بالای آن برای $r = 2$.
۵۶	۷.۳	$K \in \mathcal{E}''_r$ و شریک‌های آن.
۵۷	۸.۳	$K \in \mathcal{E}''_r$ شریک‌های آن.
۵۸	۹.۳	$K \in \mathcal{E}_r$ و شریک راست و بالای آن برای $r = 2$.
۶۱	۱۰.۴	دو کد r -شناسایی متناوب با تراکم $\frac{1}{p}$ در \mathcal{CH}_∞ . کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.
	۲.۴	کد r -احاطه‌گر مکانی متناوب با تراکم $\frac{1}{5}$ ($r = 1$) و $\frac{1}{p}$ ($r > 1$) در \mathcal{CH}_∞ . کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.
۶۳		به رنگ سیاه‌اند.
۶۷	۳.۴	کد ۱-احاطه‌گر مکانی در \mathcal{CH}_n . کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.
۶۸	۴.۴	کدهای r -احاطه‌گر مکانی در \mathcal{CH}_n . کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.
۶۹	۵.۴	الگوهای برای کدهای r -احاطه‌گر مکانی در \mathcal{CH}_n . کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.
۷۱	۶.۴	کدهایی که r -شناسایی نیستند. کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.
۷۵	۷.۴	کدهای شناسایی بهینه در \mathcal{CH}_∞ . کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.
۷۷	۸.۴	دو راه برای انتخاب یک کدواژه در قطعه‌ای به طول چهار. کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی گراف

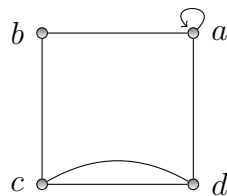
۱.۱ مقدمه

تعریف ۱.۱.۱. به سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi(G))$ ، که $V(G)$ مجموعه ناتهی از رئوس، $E(G)$ مجموعه‌ای از یال‌ها و $\psi(G)$ تابع وقوع است که به هر یال G یک جفت نامرتب و نه لزوماً متمایز از $V(G)$ را متناظر می‌کند گراف گوئیم.

اگر e یک یال u و v دو رأس باشند به طوری که $\psi_G(e) = uv$ باشد، در این صورت گفته می‌شود e ، رئوس u و v را به هم وصل کرده است و رئوس u و v ، دو سر یال e نامیده می‌شود.

دلیل نامگذاری گراف‌ها بدین نام، این است که می‌توان آن‌ها را به صورت گرافیکی نمایش داد و همین نمایش گرافیکی است که ما را در درک بسیاری از خواص گراف‌ها یاری می‌کند. در این گونه نمایش گرافیکی، هر رأس با یک نقطه و هر یال با یک خط، که نقاط نمایانگر دو سر خود را به یکدیگر وصل می‌کند، نمایش داده می‌شود.

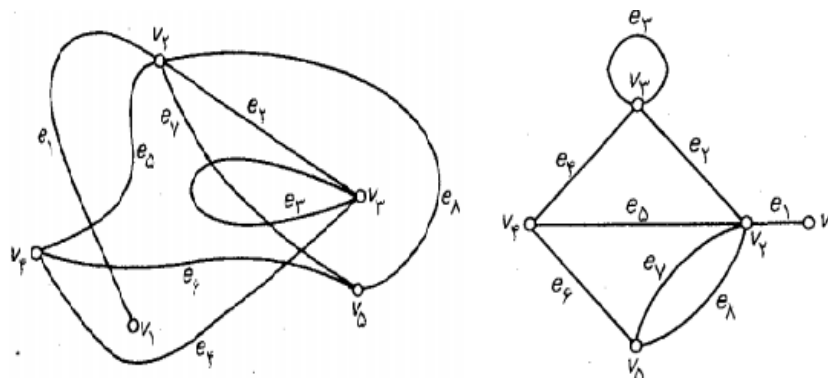
مثال ۲.۱.۱. گراف $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ که در آن $V(G) = \{a, b, c, d\}$ و $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ و $\psi_G(e_1) = ab, \psi_G(e_2) = bc, \psi_G(e_3) = \psi_G(e_4) = cd, \psi_G(e_5) = ad, \psi_G(e_6) = aa$ دارای نمایش گرافیکی زیر است.



شکل ۱.۱: گراف $G = (V, E, \psi(G))$

چون با مشخص بودن $V(G)$ و $E(G)$ تابع $\psi(G)$ به طور ضمنی تعریف شده است از این پس گراف را به صورت زوج $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم.

برای رسم یک گراف، روش یکتایی وجود ندارد، بدین دلیل که موقعیت نسبی نقاط و خطوط که به ترتیب نمایانگر رأس‌ها و یال‌های گراف هستند، برای ما اهمیتی ندارد. به عنوان مثال دو نمودار زیر نمایش گرافیکی، یک گراف هستند.

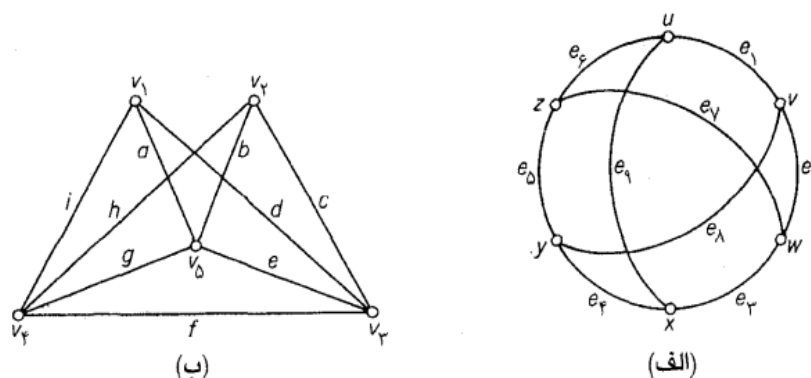


شکل ۲.۱: دو نمایش گرافیکی برای یک گراف

توجه داشته باشید که در نمودار یک گراف، ممکن است دو یال، یکدیگر را در نقطه‌ای که یک رأس نیست، قطع کنند.

تعریف ۳.۱.۱. اگر یک گراف نموداری داشته باشد که در آن، یال‌ها تنها در رأس‌های دو سر خود متقاطع باشند، گراف مسطح^۱ نامیده می‌شود، چون می‌توان به سادگی این گونه گراف‌ها را روی یک صفحه مسطح رسم کرد.

شکل ۳.۱ الف نامسطح است. در عوض شکل ۳.۱ ب مسطح است، گرچه این مطلب از روی نمایش خاص نشان داده شده در شکل، چندان مشخص نیست.



شکل ۳.۱: گراف‌های مسطح و نامسطح

^۱planar graph

تعریف ۴.۱.۱. اگر مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های یک گراف، متناهی باشند، گراف مزبور را متناهی^۱ می‌نامند.

گرافی که متناهی نباشد را گراف نامتناهی^۲ می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. به گرافی که رأس‌های آن k -تایی مرتبی از 0 و 1 هستند و در آن دو رأس به یکدیگر متصلند، اگر و تنها اگر دقیقاً در یک مولفه با یکدیگر تفاوت داشته باشند، k -مکعب^۳ می‌گوییم.

تعریف ۶.۱.۱. دو رأس v_1 و v_2 را مجاور^۴ گوییم هرگاه بین آن‌ها یک یال موجود باشد و دو یال e_1 و e_2 را مجاور گوییم هرگاه در یک رأس مشترک باشند.

تعریف ۷.۱.۱. در گراف $G = (V, E)$ ، به یالی که دو رأس انتهایی‌اش بر هم منطبق باشند طوقه^۵ گوییم. هرگاه در یک گراف بین دو رأس u و v دو یا بیش از دو یال وجود داشته باشد یال‌های موجود را یال‌های چندگانه^۶ می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. یک گراف ساده، گرافی است که در آن یال چندگانه و طوقه وجود نداشته باشد.

تعریف ۹.۱.۱. گراف جهت‌دار^۷ عبارت است از زوج $D = (V, A)$ که در آن V مجموعه متناهی و غیرتهی از رئوس و A خانواده متناهی (نه لزوماً ناتهی) از زوج‌های مرتب و نه لزوماً متمایز از عناصر V به نام کمان است.

در گراف‌های جهت‌دار چنانچه کمانی یک رأس را با خودش مجاور سازد، آن را طوقه می‌نامیم و اگر بین دو رأس بیش از یک کمان هم جهت باشد آن را کمان‌های چندگانه می‌نامیم. به گرافی که جهت دار نباشد گراف بدون جهت می‌گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱. گراف جهت‌دار ساده، گرافی است که در آن کمان چندگانه و طوقه وجود نداشته باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. به تعداد یال‌های واقع بر رأس v در گراف $G = (V, E)$ ، درجه رأس^۸ v می‌گوییم. اگر یال مذکور طوقه باشد در محاسبه‌ی درجه رأس دو بار محسوب گردد.

تعریف ۱۲.۱.۱. فاصله^۹ دو رأس u و v ، را کمترین تعداد یال بین u و v تعریف می‌کنیم و با نماد $d(u, v)$ نشان می‌دهیم.

^۱ finite graph
^۲ infinite graph
^۳ k -cube
^۴ adjacent
^۵ loop
^۶ parallel
^۷ Digraph
^۸ degree
^۹ distance

تعریف ۱۳.۱.۱. گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ با n رأس را کامل^۱ گوئیم هرگاه درجه‌ی تمام رئوس آن $n - 1$ باشد. به عبارت دیگر گراف کامل، گراف ساده‌ای است که همه رأس‌های آن با هم مجاور باشند. گراف کامل با n رأس را با K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۱.۱. یک گشت^۲ از گراف $G = (V, E)$ ، دنباله ناصفر متناهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$ است به طوری که جملات آن یک در میان از رأس‌ها و یال‌ها بوده و به ازای $1 \leq i \leq k$ ، v_i و v_{i-1} دو سر e_i باشند. در این صورت می‌گوئیم W ، یک گشت از v_0 تا v_k است. رأس‌های v_0 و v_k به ترتیب رأس ابتدا و انتهای W و v_1, v_2, \dots, v_{k-1} رأس‌های داخلی W نامیده می‌شوند. همچنین عدد صحیح k را طول^۳ W می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. یک گذر^۴ در یک گراف گشتی است که در آن یالی تکرار نشده باشد. یک مسیر^۵ در یک گراف گذری است که در آن هیچ رأسی (در نتیجه هیچ یالی) به جز احتمالاً رأس آغازین و پایانی گذر تکرار نشده باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. یک گشت، گذر یا مسیر $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$ را بسته^۶ گوئیم هرگاه $v_0 = v_k$ باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱. یک مسیر بسته شامل حداقل یک یال را یک دور^۷ و گذر بسته شامل حداقل یک یال را یک مدار می‌نامیم.

تعریف ۱۸.۱.۱. گراف $G = (V, E)$ را همبند^۸ می‌نامیم هرگاه به ازای هر $u, v \in V$ مسیری از u به v موجود باشد. گرافی که همبند نباشد را ناهمبند می‌نامیم.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف و $v \in V(G)$ باشد. همسایگی^۹ v را که با $N(v)$ نشان می‌دهیم مجموعه‌ی تمام رئوسی تعریف می‌کنیم که با v مجاور هستند. به عبارت دیگر

$$N(v) = \{u \mid u \in V(G), uv \in E(G)\}.$$

تعریف ۲۰.۱.۱. گراف همبند و فاقد دور را درخت^۹ می‌نامیم.

تعریف ۲۱.۱.۱. درخت ریشه‌دار یک درخت جهت‌دار است، که در آن تعداد یال‌هایی که به یک رأس v از درخت وارد می‌شوند را درجه‌ی ورودی رأس v می‌نامیم و با $\deg^-(v)$ نشان می‌دهیم، و تعداد یال‌هایی که از رأس v خارج می‌شوند را درجه‌ی خروجی رأس v نامیده و با $\deg^+(v)$ نشان می‌دهیم، و رأس یکتای r از درخت که $\deg^-(r) = 0$ است را ریشه‌ی درخت نامند.

^۱ complete graph

^۲ walk

^۳ length

^۴ trail

^۵ path

^۶ close

^۷ cycle

^۸ connected

^۹ tree

تعریف ۲۲.۱.۱. درخت ریشه‌داری که هر رأس آن، دقیقاً k همسایه دارد درخت کامل k -تایی^۱ نامیده می‌شود.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید زوج $G = (V, E)$ گرافی همبند و بدون جهت باشد و $r \geq 1$ عددی صحیح باشد. به ازای هر رأس $v \in V$ گوی به شعاع r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B_r(v) = \{x \in V : d(x, v) \leq r\}.$$

تعریف ۲۴.۱.۱. اگر $x, y \in V(G)$ و $d(x, y) \leq r$ باشد، آنگاه گوییم رئوس x و y ، r -پوشش^۲ همدیگرند و اگر ابهامی در مقدار r نباشد گوییم x و y پوشش همدیگرند. مجموعه $X \subseteq V(G)$ ، r -پوششی برای $Y \subseteq V(G)$ است هرگاه به ازای هر رأس $y \in Y$ حداقل یک رأس مانند $x \in X$ موجود باشد به طوری که x ، r -پوشش y باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱. هر زیرمجموعه ناتهی از رئوس گراف را کد^۳ می‌نامیم و با نماد C نمایش می‌دهیم. اعضای C را کدواژه^۴ می‌نامیم و رئوسی که در C نیستند را غیرکدواژه^۵ می‌نامیم. به علاوه، هر زیرمجموعه از یک کد را زیرکد می‌نامیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. مجموعه $B_r(v) \cap C$ را مجموعه شناسایی رأس v می‌نامیم و با نماد $K_{C,r}(v)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۷.۱.۱. اگر به ازای هر دو رأس متمایز $v_1, v_2 \in V$ شرط $K_{C,r}(v_1) \neq K_{C,r}(v_2)$ برقرار باشد آنگاه می‌گوییم رئوس v_1 و v_2 توسط مجموعه‌ی C ، r -مجزا^۶ شده‌اند.

تعریف ۲۸.۱.۱. کد C را r -شناسایی نامیم هرگاه اولاً هر رأس دلخواه از $V(G)$ دارای مجموعه شناسایی ناتهی باشد و ثانیاً هر دو رأس دلخواه و متمایز از $V(G)$ دارای مجموعه شناسایی دو به دو متمایز از هم باشند.

تعریف ۲۹.۱.۱. کد C را r -احاطه‌گر مکانی نامیم هرگاه اولاً هر رأس دلخواه از $V(G) \setminus C$ دارای مجموعه شناسایی ناتهی باشد و ثانیاً هر دو رأس دلخواه و متمایز از $V(G) \setminus C$ دارای مجموعه شناسایی دو به دو متمایز از هم باشند.

قرارداد: اگر ابهامی در مقدار r نباشد در عبارات مجموعه r -شناسایی و مجموعه r -احاطه‌گر مکانی از آوردن حرف r خودداری می‌کنیم.

^۱ complete k -ary

^۲ R -cover

^۳ Code

^۴ Codeword

^۵ Noncodeword

^۶ r -separated

ملاحظه ۳۰.۱.۱. برای گراف داده شده $G = (V, E)$ و عدد صحیح r ، کد r -شناسایی $C \subseteq V$ وجود دارد اگر و تنها اگر به ازای هر دو رأس متمایز $v_1, v_2 \in V(G)$ شرط $B_r(v_1) \neq B_r(v_2)$ برقرار باشد.

برهان. لزوم: به برهان خلف، فرض کنید حداقل دو رأس متمایز مانند v_1 و v_2 وجود دارند به طوری که $B_r(v_1) = B_r(v_2)$ است. در این صورت به ازای هر کد $C \subseteq V$ ، تساوی $K_{C,r}(v_1) = K_{C,r}(v_2)$ برقرار است. عبارت اخیر یعنی اینکه هیچ کد شناسایی وجود ندارد و این در تناقض با وجود کد شناسایی است و در نتیجه برهان باطل و حکم ثابت می‌گردد.

کفایت: فرض کنید به ازای هر $v_1, v_2 \in V$ ، مجموعه‌های $B_r(v_1)$ و $B_r(v_2)$ دو به دو متمایز باشند و کد C را به صورت $C = V$ قرار دهید. در این صورت به ازای هر دو رأس $v_1, v_2 \in V(G)$ شرط $K_{C,r}(v_1) \neq K_{C,r}(v_2)$ برقرار است. در نتیجه C کد شناسایی است. \square

ملاحظه ۳۱.۱.۱. برای گراف داده شده $G = (V, E)$ و عدد صحیح $r \geq 1$ ، کد r -احاطه‌گر مکانی وجود دارد که با قرار دادن $C = V$ حاصل می‌گردد. به علاوه هر کد r -شناسایی یک کد r -احاطه‌گر مکانی است.

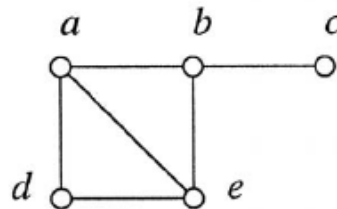
مثال ۳۲.۱.۱. گراف $G = (V, E)$ در شکل (۴.۱) را در نظر بگیرید. در این شکل مجموعه‌های زیر را داریم:

$$B_1(a) = \{a, b, d, e\}, B_1(b) = \{a, b, c, e\}, B_1(c) = \{b, c\}, B_1(d) = \{a, d, e\}, B_1(e) = \{a, b, d, e\}$$

همان‌طور که می‌بینید $B_1(a) = B_1(e)$ است. بنابراین کد ۱-شناسایی برای گراف $G = (V, E)$ وجود ندارد.

اما می‌توان $C = \{a, b\}$ را کد ۱-احاطه‌گر مکانی برای گراف $G = (V, E)$ معرفی نمود زیرا

$$K_{C,1}(c) = \{b\}, K_{C,1}(e) = \{a, b\}, K_{C,1}(d) = \{a\}.$$



شکل ۴.۱: گراف $G = (V, E)$ کد ۱-شناسایی ندارد

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. مجموعه رئوس Q_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Q_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x| \leq n, |y| \leq n\}$$

با تعریف فوق تراکم کد C در چهار مشبکه‌ی شش‌گوشه، مثلث، مربع و شاهوار و همچنین در دورها و زنجیرها به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$D(C) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|C \cap Q_n|}{|Q_n|}$$

ملاحظه ۳۴.۱.۱. در برخی از گراف‌های ذکر شده در تعریف فوق تراکم به شعاع r ، وابسته است به همین دلیل ممکن است به جای نماد $D(C)$ از نماد $D(G, r)$ استفاده نماییم.

ملاحظه ۳۵.۱.۱. در زنجیرهای متناهی و نامتناهی که $V(G) \subseteq \mathbb{Z}$ است، مجموعه Q_n به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$Q_n = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq n\}$$

فصل ۲

کدهای شناسایی با شعاع کوچک در برخی از گراف‌های منتظم

۱.۲ مقدمه

کدهای شناسایی^۱ اولین بار در مرجع [۱۴] توسط کارپوسکی^۲، چاکرابارتی^۳ و لویتین^۴ و کدهای احاطه‌گر مکانی^۵ اولین بار در مرجع [۱۷] توسط کولبورن^۶، اسلیتر^۷ و استیوارت^۸ در سال ۱۹۹۸ معرفی شدند و پس از آن مقالات مختلفی در زمینه کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی در مورد خانواده‌ای از گراف‌ها مانند گراف‌های منتظم، گراف‌های مسطح، شبکه‌های نامتناهی و n -مکعب‌ها مورد تحقیق و بررسی قرار گرفتند. مطالب بیشتر در این مورد در مراجع [۶، ۷، ۱۹] آمده است. برای مثال بهترین تراکم ممکن برای کدهای r -شناسایی در گراف نامتناهی شبکه شاهوار در مرجع [۷] به طور دقیق بیان شده است. شارون و همکارانش در مرجع [۲] ثابت کرده‌اند کران پایین برای کدهای شناسایی در درخت n رأسی برابر $\frac{r(n+1)}{7}$ است و همچنین حداقل اندازه‌ی کدهای r -شناسایی در درخت کامل 2 -تایی با $(2^h - 1)$ رأس، دقیقاً برابر $\frac{2^o(2^h-1)}{31}$ است.

۲.۲ اهمیت و کاربرد کدهای شناسایی و کدهای احاطه‌گر مکانی

انگیزه انجام این پایان‌نامه تشخیص و عیب‌یابی سیستم‌هایی است که دارای چند پردازنده هستند. [۱] یک سیستم توسط یک گراف مدل‌سازی می‌گردد به طوری که رئوس به عنوان پردازنده‌ها و یال‌ها به عنوان

^۱Identifying code

^۲Karpovsky

^۳Chakrabarty

^۴Levitin

^۵Locating-dominating code

^۶Colbourn

^۷Slater

^۸Stewart

خطوط ارتباطی بین پردازنده‌ها می‌باشند. فرض کنید حداقل یکی از پردازنده‌ها درست عمل نمی‌کند و مایلیم سیستم را مورد آزمایش قرار دهیم و مکان دقیق پردازنده معیوب را بیابیم. برای این منظور برخی از پردازنده‌ها (که یک کد تشکیل می‌دهند) انتخاب می‌گردند و آزمایش همسایه‌ها (رئوسی که در فاصله حداکثر r از کدواژه‌ها هستند) توسط این پردازنده صورت می‌گیرد. هرگاه پردازنده انتخابی (کدواژه) عیبی را شناسایی کند سیگنال هشدار می‌فرستد و این بدین معناست که یکی از همسایه‌های این کدواژه درست عمل نمی‌کند. ما نیازمندیم تا مکان دقیق پردازنده معیوب را استفاده از اطلاعاتی که کدواژه ارسال می‌کند به طور منحصر به فرد تعیین کنیم که در این مورد چیزی که نیازمندیم کدهای r -شناسایی است. اگر کدواژه‌های انتخابی یا پردازشگرها بدون خطا کار کنند و یا تنها کار آن‌ها آزمایش همسایه‌ها باشد و فرض ما بر این باشد که این کار ساده را به درستی انجام می‌دهند آن‌گاه به جست و جوی کدهای r -احاطه‌گر مکانی می‌پردازیم.

کدهای r -شناسایی و r -احاطه‌گر مکانی در حفاظت از ساختمان‌ها و اتاق‌ها نیز کاربرد دارند به طوری که ساختمان‌ها و یا اتاق‌ها به عنوان رئوس گراف مدل‌سازی می‌گردند. به عنوان مثال حسگرهایی در برخی اتاق‌های مخصوص (کدواژه‌ها) نصب می‌گردد و در هنگام آتش‌سوزی و خطر در برخی اتاق‌ها حسگرها فعال شده و پیام هشدار ارسال می‌کنند در این مورد برای تعیین مکان خطر و آتش‌سوزی به طور منحصر به فرد به کدهای r -شناسایی و r -احاطه‌گر مکانی نیازمندیم.

۳.۲ تعاریف مقدماتی

در این فصل ابتدا مفاهیم کاشی^۱ و مستطیل^۲ را معرفی می‌کنیم، سپس به بررسی کوچکترین اندازه و تراکم^۳ کدهای r -شناسایی با مقادیر r کوچک در چهار شبکه شش‌گوشه^۴، مثلث^۵، مربع^۶ و شبکه شاهوار^۷ می‌پردازیم. در بخش ۴.۲ ویژگی‌هایی از انتقال^۸ در \mathbb{Z}^2 را توصیف می‌کنیم که در بررسی کدهای متناوب^۹ مفیدند.

در این فصل، چهار شبکه نامتناهی دوبعدی زیر را بررسی می‌کنیم:

- شبکه شش‌گوشه G_H ، با مجموعه رئوس $V = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و مجموعه یال‌های

$$E_H = \{\{u = (i, j), v\} : u - v \in \{(0, (-1)^{i+j+1}), (\pm 1, 0)\}\}.$$

- شبکه مربع G_S ، با مجموعه رئوس $V = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و مجموعه یال‌های

^۱Tiling

^۲Rectangle

^۳Density

^۴Hexagonal lattice

^۵Triangular lattice

^۶Square lattice

^۷King lattice

^۸Translation

^۹Periodic

$$E_S = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}\}.$$

• مشبکه مثلث G_T (مشبکه مربع با یک قطر)، با مجموعه رئوس $V = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و مجموعه یال‌های

$$E_T = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (1, 1), (-1, -1)\}\}.$$

• مشبکه مربع با دو قطر G_K ، با مجموعه رئوس $V = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و مجموعه یال‌های

$$E_K = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (1, \pm 1), (-1, \pm 1)\}\}.$$

گراف G_K را مشبکه شاهوار می‌نامیم زیرا در صفحه شطرنج نامتناهی و تهی، گوی به شعاع r ، مجموعه مربع‌هایی است که شاه می‌تواند با حداکثر r حرکت با شروع از مرکز به این مربع‌ها برسد. شکل ۱.۲، بخشی از مشبکه شش گوشه یا دیوار آجری را نشان می‌دهد و شکل‌های ۲.۲، ۳.۲ و ۴.۲ به ترتیب نشان دهنده‌ی بخشی از مشبکه مربع، مشبکه مثلث و مشبکه شاهوار می‌باشند.

۴.۲ کاشی‌ها و مستطیل‌ها

در این بخش چگونگی ارتباط بین کاشی‌های القا شده توسط دو انتقال در \mathbb{Z}^2 و مستطیل‌ها، که در تولید کدهای شناسایی متناوب^۱ مفید هستند را نشان می‌دهیم.

دو انتقال در \mathbb{Z}^2 در راستای دو بردار مستقل خطی t_1 و t_2 را در نظر بگیرید. مجموعه‌ای از انتقال‌ها را با نماد T نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

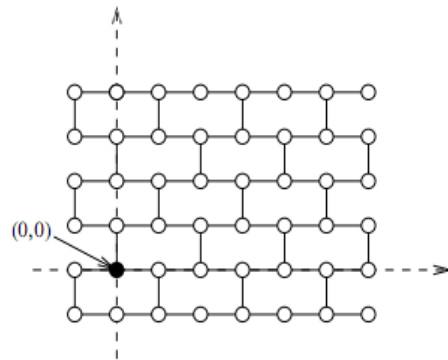
$$T = \{k_1 \times t_1 + k_2 \times t_2 : k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}\}$$

و رابطه هم‌ارزی روی \mathbb{Z}^2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
 $p_1 \in \mathbb{Z}^2$ هم‌ارز $p_2 \in \mathbb{Z}^2$ است اگر و تنها اگر یکی توسط یک انتقال از مجموعه T از دیگری حاصل گردد. با کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه سروکار داریم. فرض کنید برای هر کلاس هم‌ارزی یک رنگ موجود است و هر نقطه از کلاس داده شده را با رنگ کلاش رنگ‌آمیزی نموده‌ایم. بنابراین هر نقطه از \mathbb{Z}^2 رنگ‌آمیزی می‌گردد که اگر آن را در صفحه رسم کنید کاشی نامتناهی منظم رنگ‌آمیزی شده‌ای را خواهید دید که آن را کاشی القا شده توسط t_1 و t_2 می‌نامیم.

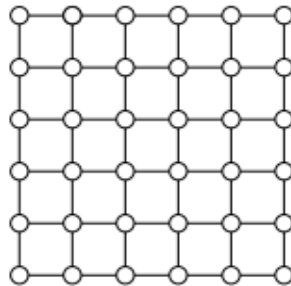
تعریف ۱.۴.۲. مجموعه $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ را یک مستطیل با عرض $w(R) \in \mathbb{N}$ و طول $h(R) \in \mathbb{N}$ نامیم هرگاه به صورت زیر تعریف گردد:

$$R = \{(i, j) : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, 0 \leq i < w(R), 0 \leq j < h(R)\}.$$

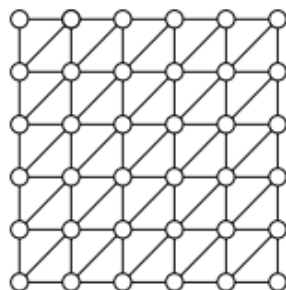
^۱Periodic identifying codes



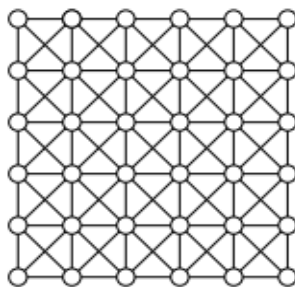
شکل ۱.۲: بخشی از شبکه شش گوشه



شکل ۲.۲: بخشی از شبکه مربع



شکل ۳.۲: بخشی از شبکه مثلث



شکل ۴.۲: بخشی از شبکه شاهوار

سه عدد w, h, α را به صورت زیر در نظر بگیرید:

- w کوچکترین عدد صحیح $i \geq 1$ است به طوری که نقاط $(i, 0)$ و $(0, 0)$ در یک کلاس یکسان قرار دارند.

- h کوچکترین عدد صحیح $j \geq 1$ است به طوری که عدد صحیح i طوری موجود باشد که نقاط (i, j) و $(0, 0)$ در یک کلاس یکسان واقع شوند.

- α کوچکترین عدد صحیح نامنفی است که نقاط (α, h) و $(0, 0)$ در یک کلاس یکسان قرار دارند.

به عبارت دیگر اگر $(0, 0)$ به رنگ سبز باشد، w اولین مکان وقوع رنگ سبز در سمت راست نقطه $(0, 0)$ و در راستای محور X است، h شماره اولین خط موازی با محور X در سمت بالای این محور است که رنگ سبز در آن وجود دارد و α مکان اولین وقوع رنگ سبز در راستای خط $Y = h$ و در سمت راست این خط است. به علاوه انتقال توسط بردار $(w, 0)$ را با نماد $t_{(w, 0)}$ ، انتقال توسط بردار (α, h) را با نماد $t_{(\alpha, h)}$ و مستطیل با عرض w و طول h را با نماد R نمایش می‌دهیم.

گزاره ۲.۴.۲. [۹] عبارات زیر همواره برقرارند:

۱. نقاط (i, j) و $(i + w, j)$ در یک کلاس واقع‌اند.

۲. نقاط (i, j) و $(i + \alpha, j + h)$ در یک کلاس واقع‌اند.

۳. تمام نقاط R به کلاس‌های متمایزی تعلق دارند.

۴. برای هر نقطه $P \in \mathbb{Z}^2$ ، نقطه‌ای مانند P_R در R ، $k \in \mathbb{Z}$ و $l \in \mathbb{Z}$ طوری موجود است که P از P_R توسط انتقال $k \times t_{(w, 0)} + l \times t_{(\alpha, h)}$ بدست می‌آید. به علاوه P و P_R در یک کلاس واقع‌اند.

برهان. ۱. از تعریف w به این نتیجه می‌رسیم که انتقال $t_{(w, 0)}$ در مجموعه انتقال T قرار دارد. حال چون با انتقال نقطه (i, j) در راستای $t_{(w, 0)}$ به نقطه $(i + w, j)$ می‌رسیم، بنابراین این دو نقطه

در کلاس یکسان واقع‌اند. همچنین با استفاده از این نتیجه و از تعریف α نامساوی $0 \leq \alpha < w$ برقرار است.

۲. از تعریف h و α به این نتیجه می‌رسیم که انتقال $t_{(\alpha, h)}$ در مجموعه انتقال T قرار دارد و چون نقطه $(i + \alpha, j + h)$ از انتقال نقطه (i, j) در راستای بردار (α, h) حاصل می‌گردد، بنابراین این دو نقطه در کلاس یکسان واقع‌اند.

۳. به برهان خلف فرض کنید دو نقطه از R مانند (i, j) و (i', j') در یک کلاس واقع‌اند. بدون کاستن از کلیت مساله، فرض کنید $j' \geq j$ باشد. نقطه (i', j') از نقطه (i, j) توسط بردار انتقال $(i' - i, j' - j)$ که در مجموعه انتقال T است حاصل می‌گردد. بنابراین نقطه $(0, 0)$ در کلاسی یکسان با نقطه $(i' - i, j' - j)$ واقع است و از گزاره ۲.۴.۲ بند ۱، با نقطه $(i' - i + w, j' - j)$ در یک کلاس قرار دارند. توجه داشته باشید که $-w < i' - i < w$ و $0 \leq j' - j < h$ است.

اگر $i' - i$ نامنفی باشد قرار دهید $i'' = i' - i$ و در غیر این صورت قرار دهید $i'' = i' - i + w$. با این فرض $0 \leq i'' < w$ است و بنابراین کلاس نقطه $(i'', j' - j) \in R$ با کلاس نقطه $(0, 0)$ یکسان است. اگر $j' - j = 0$ باشد، آنگاه به تناقض با تعریف w می‌رسیم و اگر $j' - j \geq 1$ باشد، آنگاه به تناقض با تعریف h می‌رسیم. بنابراین فرض خلف باطل است و تمام نقاط R به کلاس‌های متمایزی تعلق دارند.

۴. فرض کنید P نقطه‌ای دلخواه از \mathbb{Z}^2 باشد، اولاً با انتخاب $l \in \mathbb{Z}$ مناسب، در راستای (α, h) طوری حرکت می‌کنیم که به نقطه P' با عرض $0 \leq j \leq h$ برسیم و این یعنی نقطه P' ، از نقطه P با انتقال $-l \times t_{(\alpha, h)}$ بدست می‌آید. ثانیاً با انتخاب k مناسب، در راستای $(w, 0)$ طوری حرکت می‌کنیم که به نقطه P_R با طول $0 \leq i \leq w$ برسیم و این یعنی نقطه P_R ، از نقطه P' توسط انتقال $-k \times t_{(w, 0)}$ بدست می‌آید؛ عرض P_R با عرض P' برابر است؛ P_R در R است و P_R از P توسط انتقال $k \times t_{(w, 0)} + l \times t_{(\alpha, h)}$ بدست می‌آید. حال با استفاده از گزاره ۲.۴.۲ بند ۱ و ۲ نقطه P با نقطه P_R در یک کلاس یکسان واقع‌اند و حکم اثبات می‌گردد.

□

گزاره ۲.۴.۲ نتیجه می‌دهد که، از کلاس‌های ارائه شده یک و فقط یک عضو در R ظاهر می‌گردد و دو نقطه P و P' در \mathbb{Z}^2 در کلاس یکسان واقع‌اند اگر نقاط P_R و P'_R دارای طول یکسان و همچنین عرض یکسان باشند و شرط لازم و کافی برای این که نقاط P و P' در یک کلاس یکسان واقع شوند این است که P از P' توسط انتقال $k \times t_{(w, 0)} + l \times t_{(\alpha, h)}$ بدست آید. در نتیجه کاشی القا شده توسط بردارهای $t_{(w, 0)}$ و $t_{(\alpha, h)}$ با کاشی القا شده توسط t_1 و t_2 یکسان است. با استفاده از بیانات فوق قضیه زیر را برقرار است.

قضیه ۳.۴.۲. [۹] کاشی القا شده توسط دو بردار مستقل خطی t_1 و t_2 را در نظر بگیرید. مستطیل R با عرض w و طول h وجود دارد به طوری که از کلاس‌های کاشی ارائه شده یک و فقط یک عضو در R ظاهر می‌گردند. به علاوه عدد صحیح α ، $0 \leq \alpha < w$ وجود دارد به طوری که انتقال $t_{(\alpha, h)}$ و $t_{(w, 0)}$ که به ترتیب با بردارهای $(w, 0)$ و (α, h) تعریف می‌شوند کاشی‌ای را القا می‌کنند که با کاشی القا شده توسط t_1 و t_2 یکسان است.

به ویژه قضیه فوق نشان می‌دهد که تعداد کلاس‌های هم‌ارزی متناهی است.

۵.۲ کدهای متناوب و کاشی‌ها

زیرمجموعه S از \mathbb{Z}^2 را متناوب^۱ نامیم هرگاه یک انتقال توسط دو بردار مستقل خطی وجود داشته باشد به طوری که سراسر S را ثابت نگه دارد. زیرمجموعه متناوب S از \mathbb{Z}^2 و انتقال در راستای دو بردار مستقل خطی مطابق با آن را در نظر بگیرید. این انتقال یک کاشی القا می‌کند و S اجتماع برخی از کلاس‌هاست زیرا اگر عنصری از S در یک کلاس واقع شود آن‌گاه تمام این کلاس مشمول در S است. مستطیل R در قضیه ۳.۴.۲ را در نظر بگیرید. اگر $R, S_R = S \cap R$ و مقدار α که در بخش ۴.۲ تعریف شد، معلوم باشد آن‌گاه S معلوم است.

بنابراین، با انتخاب مستطیل R با عرض w و طول h و زیرمجموعه S_R از R و عدد صحیح α با مقدار $0 \leq \alpha < w$ ، مجموعه S اجتماع کلاس‌هایی است که عناصر S_R عضو این کلاس‌ها هستند و این کلاس‌ها به وسیله انتقال توسط بردارهای $(w, 0)$ و (α, h) حاصل می‌گردند که زیرمجموعه‌ای متناوب از \mathbb{Z}^2 است. مجموعه S را القا شده توسط R, α و S_R می‌نامیم. یادآوری می‌کنیم در جست و جوی کدهای r -شناسایی هستیم و خودمان را به جست و جو در کدهای شناسایی متناوب محدود می‌کنیم بنابراین همانطور که در بالا دیدید اگر هر عدد صحیح و مثبت w ، هر عدد صحیح و مثبت h ، هر عدد صحیح α که $0 \leq \alpha < w$ و هر زیرمجموعه‌ای از مستطیل R با عرض w و با طول h را در نظر بگیرید در واقع زیرمجموعه‌ای متناوب از \mathbb{Z}^2 را در نظر گرفته‌اید. اگر برای هر کدام $(S_R$ یا $R)$ ، کد r -شناسایی بودن را بررسی کنیم در واقع کد r -شناسایی متناوب بودن را برای دیگری بررسی کرده‌ایم.

در شبکه‌های شاهوار، مثلث و مربع هر انتقال این شبکه‌ها را به طور سراسری ثابت نگه می‌دارد. اما در مورد شبکه شش گوشه انتقال توسط بردار $t = (i, j)$ شبکه را به طور سراسری ثابت نگه می‌دارد اگر و تنها اگر $i + j$ زوج باشد؛ که چنین انتقالی را انتقال زوج می‌نامیم. حال آسان‌تر می‌توان بررسی کرد که، مجموعه‌ای مطابق با کاشی، کد r -شناسایی است هرگاه انتقال این کاشی شبکه را به طور سراسری ثابت نگه دارد. به علاوه اگر مجموعه S متناوب باشد ممکن است انتقال زوج در راستای دو بردار طوری یافت شود که S را ثابت نگه دارد. بنابراین در حالت شبکه شش گوشه، تنها کاشی‌هایی را که توسط انتقال‌های زوج القا می‌گردند را در نظر می‌گیریم. بنابراین فقط w, h و α هایی را در نظر

^۱Periodic

می‌گیریم که w و $\alpha + h$ زوج هستند.

۶.۲ تشریح یک ابتکار

ابتکاری در بخش‌های قبل استفاده شد و سعی شد تا به سوال زیر پاسخ داده شود: فرض کنید عدد صحیح r ، مستطیل R با عرض w و طول h ، عدد صحیح α با شرط $0 \leq \alpha < w$ و عدد صحیح $c \leq |R|$ داده شده است، آیا زیرمجموعه S_R از R با اندازه c وجود دارد به طوری که R, α و S_R کد r -شناسایی (متناوب) S را القا کند؟

هر زیرمجموعه S_R از R با اندازه c را جواب می‌نامیم. هدف یافتن جواب برای مجموعه S است که کد r -شناسایی است. حال تابع هدف f را تعریف می‌کنیم که مقادیری را به جواب نسبت می‌دهد. برای این منظور مجموعه‌های R_1, R_2, R_3 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_1 = \{P \in \mathbb{Z}^2 : d(P, P') \leq r \text{ و } P' \in R\};$$

$$R_2 = \{P \in \mathbb{Z}^2 : d(P, P') \leq 2 \times r \text{ و } P' \in R\};$$

$$R_3 = \{P \in \mathbb{Z}^2 : d(P, P') \leq 3 \times r \text{ و } P' \in R\},$$

که d مسافت تعریف شده در شبکه مورد نظر است. مجموعه‌های $S_{R_1} = S \cap R_1, S_{R_2} = S \cap R_2$ را محاسبه می‌کنیم که $f(S_R)$ نشان‌دهنده‌ی مجموع نقاطی از R است که توسط S پوشیده نمی‌شود به علاوه تعداد جفت‌هایی مانند $\{P, P'\}$ که $P, P' \in S_{R_2}$ است و حداقل یکی از نقاط P و P' در R واقع است و P و P' از هم r -مجزا نیستند.

ملاحظه ۱.۶.۲. عبارات زیر همواره برقرارند.

- یک رأس در R, r -پوشیده می‌شود اگر و تنها اگر توسط یک رأس در S_{R_1} پوشیده شود.
- جفت $\{P, P'\} \in R_2$ ، که حداقل یکی از نقاط P و P' در R است، r -مجزاست اگر و تنها اگر توسط یک کدواژه در S_{R_2} ، r -مجزا باشد.
- مجموعه S کد r -شناسایی است اگر و تنها اگر $f(S_R) = 0$ باشد.

سه روش قاعده‌دار^۱، نزولی^۲ و انواع شلوغی^۳ را از مرجع [۸] به کار می‌بندیم. برای توصیف این روش‌ها، مجموعه‌ای را که دارای c نشانه است و این نشانه‌ها روی رئوس R قرار داده می‌شوند تا زیرمجموعه S_R تعریف گردد را در نظر می‌گیریم.

^۱Systematic method

^۲Descent method

^۳Kind of noising method

روش قاعده‌دار، به تلاش برای یافتن تمام حالات ممکن برای قرار دادن نشانه‌ها در c مکان مربوط می‌گردد. این روش بسیار زمانبر است مگر آنکه c بسیار کوچک باشد.

در روش نزولی، c مکان متمایز برای نشانه‌ها را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم و کار را آغاز می‌کنیم سپس اولین علامت را در R حرکت می‌دهیم بدون اینکه بقیه علامت‌ها حرکت کنند. با در نظر گرفتن مکان‌های ممکن در R طوری پیش می‌رویم که که تابع هدف مینیمم گردد. زمانی که اولین علامت جابه جا شد، کار مشابهی را با دیگر علامت‌ها انجام می‌دهیم و این کار به طور متناوب روی تمام علامت‌ها انجام می‌گردد و هرگاه این فرآیند خاتمه یافت، دوباره با اولین علامت فرآیند فوق را تکرار می‌کنیم. عملیات فوق خاتمه می‌یابد هرگاه با حرکت علامت‌ها، تابع هدف بهبود نیابد و یا مقدار تابع هدف برابر صفر گردد.

روش انواع شلوغی به طور متناوب علامت‌ها را در روش نزولی قرار می‌دهد و برای هر علامت دو حالت به طور تصادفی رخ می‌دهد؛ علامت یا به بهترین مکان حرکت می‌کند و یا به مکانی تصادفی حرکت می‌کند. احتمال اینکه علامت به طور تصادفی حرکت کند از یک مقدار آغازین (عموماً $0/2$ یا $0/3$) به عدد صفر کاهش می‌یابد. فرآیند پایان می‌پذیرد هرگاه تابع هدف صفر گردد و یا مقادیری از حرکات ثابت باقی بمانند (عموماً 300 شماره از رئوسی که در R هستند).

مشاهده می‌کنید که هرگاه فاصله خیلی کوچک نباشد روش انواع شلوغی نسبت به تکرار روش نزولی موثرتر عمل می‌کند.

۷.۲ کران‌های بالا و پایین

کران‌های بالا و پایین مختلف را بر اساس اندازه کد r -شناسایی S در چهار شبکه G_K و G_H , G_S , G_T را گردآوری می‌کنیم.

۱.۷.۲ کران‌های پایین

قضیه ۱.۷.۲ [۲۴] برای کد r -شناسایی S در گراف منتظم $G = (V, E)$ داریم:

$$|S| \geq \frac{2|V|}{B_r + 1}, \quad (1.2)$$

که B_r نشان‌دهنده اندازه گوی به شعاع r (مستقل از مرکز گوی) می‌باشد. برای شبکه‌های نامتناهی فرمول ۱.۲ به صورت زیر است:

$$D(G, r) \geq \frac{2}{B_r + 1} \quad (2.2)$$

که به راحتی مقادیر زیر را جایگزین B_r می‌کنیم که وابسته به شبکه‌هایی است که بررسی می‌کنیم و مقادیر گوی به شعاع r به صورت زیر ارائه می‌گردد.

در مشبکه شش گوشه $\frac{3}{4}r^2 + \frac{3}{4}r + 1$;
 در مشبکه مربع $2r^2 + 2r + 1$;
 در مشبکه مثلث $3r^2 + 3r + 1$;
 در مشبکه شاهوار $(2r + 1)^2$.

اگر r رشد کند نتایج کلی دیگری از مرجع [۱۴] حاصل می‌گردد و از فرمول ۲.۲ بهبود می‌یابند و داریم:
 برای مشبکه‌های مربع، مثلث و شاهوار،

$$D(G, r) \geq \frac{1}{4r + 1}$$

و برای مشبکه شش گوشه

$$D(G_H, r) \geq \frac{1}{4r + 4}$$

از مرجع [۲۳] برای مشبکه مربع کران بهبود یافته‌ای به صورت زیر داریم:

$$D(G_S, r) \geq \frac{2}{7r + 4}$$

و کران‌های بهبود یافته دیگری از مرجع [۶] به صورت زیر داریم:

قضیه ۲.۷.۲. [۶] کمترین تراکم کد r -شناسایی در مشبکه مثلث در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$D(G_T, r) \geq \frac{2}{6r + 3} \quad (۳.۲)$$

ابتدا مقدمات و تعاریف مورد نیاز را ارائه می‌نمایم سپس به برهان قضیه فوق می‌پردازیم.

تعریف ۳.۷.۲. فرض کنید x و y دو رأس دلخواه از گراف $G = (V, E)$ باشند. $\Delta_r(x, y)$ را تفاضل متقارن بین دو مجموعه $B_r(x)$ و $B_r(y)$ تعریف می‌کنیم. $C \cap \Delta_r(x, y)$ مجموعه کدواژه‌هایی است که x و y را از هم مجزا می‌نماید. بنابراین اگر C کد شناسایی باشد، آنگاه $C \cap \Delta_r(x, y)$ ناتهی خواهد بود.

گزاره ۴.۷.۲. [۶] فرض کنید $x, y, z \in \mathbb{Z}$ سه رأس دلخواه از گراف $G = (V, E)$ باشند و $C \subseteq V$ کد r -شناسایی باشد. مجموعه $H_r(x, y, z) = \Delta_r(x, y) \cup \Delta_r(y, z) \cup \Delta_r(z, x)$ شامل حداقل دو کدواژه است.

برهان. چون C کد r -شناسایی است، $\Delta_r(x, y)$ شامل حداقل یک کدواژه است. فرض کنید کدواژه c به $\Delta_r(x, y)$ متعلق باشد. بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید $d(x, c) \leq r$ و $d(y, c) > r$ باشد. یکی از دو حالت زیر برقرار است:

حالت اول: فرض کنید $d(z, c) \leq r$ باشد. در این صورت رئوس x و z توسط C مجزا نمی‌گردند؛ بنابراین کدواژه دیگری مانند c' وجود دارد به طوری که x و z را از هم مجزا می‌کند، در نتیجه c' به

مجموعه $\Delta_r(x, z)$ تعلق دارد و همچنین c' متعلق به $H_r(x, y, z)$ است؛ بنابراین در این حالت گزاره برقرار است.

حالت دوم: فرض کنید که $d(z, c) > r$ باشد. در این صورت رئوس y و z توسط C مجزا نمی‌گردند؛ بنابراین کدواژه دیگری مانند c' وجود دارد به طوری که y و z را از هم مجزا می‌کند، در نتیجه c' به مجموعه $\Delta_r(y, z)$ تعلق دارد و همچنین c' متعلق به $H_r(x, y, z)$ است؛ بنابراین در این حالت نیز گزاره برقرار است \square

توجه کنید که گزاره فوق برای هر گراف همبند برقرار است.

گزاره ۵.۷.۲. [۶] مجموعه متناهی $E_{\circ, \circ} \subset \mathbb{Z}^2$ با اندازه e را در نظر بگیرید. $E_{i,j}$ را مجموعه نقاطی تعریف می‌کنیم که از $E_{\circ, \circ}$ توسط انتقال در راستای بردار (i, j) حاصل می‌شود. مجموعه \mathcal{E} را به صورت $\mathcal{E} = \{E_{i,j} : i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}\}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت هر نقطه در \mathbb{Z}^2 به عنصر $E_{i,j}$ از \mathcal{E} متعلق است.

برهان. فرض کنید $E_{\circ, \circ} = \{a_1, \dots, a_e\}$ باشد. حال $x \in E_{i,j}$ است اگر و تنها اگر اندیس k در مجموعه $\{1, 2, \dots, e\}$ وجود داشته باشد به طوری که $x = a_k + (i, j)$ باشد و به طور معادل اگر تنها اگر اندیس k در مجموعه $\{1, 2, \dots, e\}$ وجود داشته باشد به طوری که $(i, j) = x - a_k$ باشد؛ بنابراین دقیقاً e انتخاب برای برگزیدن (i, j) داریم. \square

تعریف ۶.۷.۲. [۶] سه‌تایی (x, y, z) را مثلث می‌نامیم هرگاه $i \in \mathbb{Z}$ و $j \in \mathbb{Z}$ وجود داشته باشند به طوری که $x = (i, j), y = (i, j + 1), z = (i + 1, j + 1)$ باشد. شکل ۵.۲ و ۶.۲ را ببینید.

حال به برهان نامساوی ۳.۲ می‌پردازیم.

برهان. در شبکه مثلث رابطه زیر برقرار است.

$$|H_r(\text{مثلث})| = 6r + 3.$$

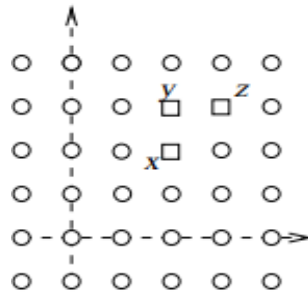
به علاوه، $H_r((i, j), (i, j + 1), (i + 1, j + 1))$ از انتقال $H_r((\circ, \circ), (\circ, 1), (1, 1))$ در راستای بردار (i, j) بدست می‌آید. حال قرار می‌دهیم $E_{\circ, \circ} = H_r((\circ, \circ), (\circ, 1), (1, 1))$ و با استفاده از گزاره ۵.۷.۲ داریم: برای هر رأس مانند v در شبکه، دقیقاً $6r + 3$ مثلث وجود دارد به طوری که $H_r(\text{مثلث})$ شامل رأس v است.

حال اندازه $H_r(\text{مثلث})$ را با نماد p نمایش می‌دهیم؛ فرض کنید C یک کد r -شناسایی باشد و

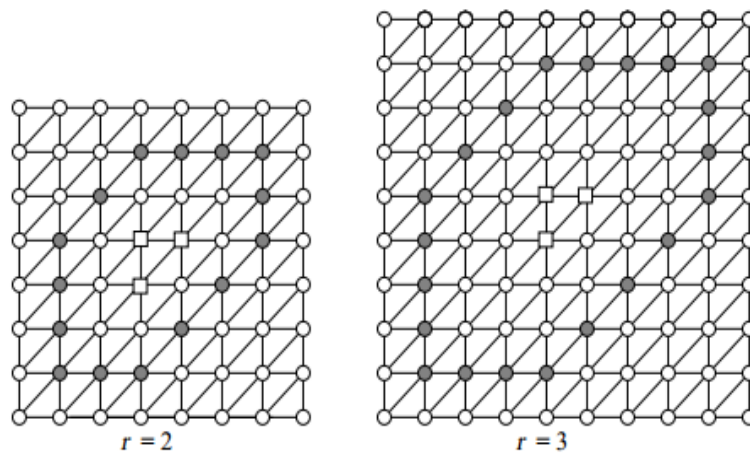
$n \in \mathbb{N}, n \geq 2p$ را در نظر می‌گیریم. قرار دهید:

$$F = \{(c, \text{مثلث}) : H_r(\text{مثلث}) \subseteq Q_n, c \in C \cap Q_n, c \in H_r(\text{مثلث})\}.$$

با استفاده از گزاره ۴.۷.۲، چون هر $H_r(\text{مثلث})$ شامل حداقل دو کدواژه است، به این نتیجه می‌رسیم که اندازه مجموعه F حداقل برابر $|H_r(\text{مثلث}) \subseteq Q_n| \times 2$ است. از طرفی دیگر مجموعه F حداکثر به اندازه $|C \cap Q_n| \times (6r + 3)$ عضو دارد.



شکل ۵.۲: مثلث



شکل ۶.۲: (مثلث) H_r در شبکه مثلث

چون $(2n - p + 1)^2 \geq |H_r(\text{مثلث}) \cap Q_n|$ است رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\frac{|C \cap Q_n|}{|Q_n|} \geq \frac{2}{6r + 3} \times \frac{(2n - p + 1)^2}{(2n + 1)^2}.$$

حال n را به بی‌نهایت سوق می‌دهیم و داریم:

$$D(G_T, r) \geq \frac{2}{6r + 3}$$

□

قضیه ۷.۷.۲. [۶] کمترین تراکم r -شناسایی در شبکه شش‌گوشه، در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند.

$$D(G_H, r) \geq \frac{2}{5r + 3} \quad r \text{ زوج} \quad (۴.۲)$$

$$D(G_H, r) \geq \frac{2}{5r + 2} \quad r \text{ فرد} \quad (۵.۲)$$

برهان. چون هر انتقال دلخواه در شبکه شش‌گوشه، این شبکه را به طور سراسری ثابت نگه نمی‌دارد برای استفاده از روش‌های قبلی، ناچاریم تعاریف را اندکی تغییر دهیم. در این برهان، سه‌تایی (x, y, z) را مثلث نامیم هرگاه $i \in \mathbb{Z}$ و $j \in \mathbb{Z}$ وجود داشته باشد به طوری که $x = (i, j), y = (i + 1, j)$ و $z = (i + 2, j)$ باشد. مجموعه $E_{\circ, \circ}$ را به صورت $H_r((\circ, \circ), (1, \circ), (2, \circ))$ و مجموعه $E_{1, \circ}$ را به صورت $H_r((1, \circ), (2, \circ), (3, \circ))$ تعریف می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که $E_{1, \circ}$ از $E_{\circ, \circ}$ به وسیله انتقال در راستای بردار $(1, \circ)$ بدست می‌آید. و این امر به دلیل متقارن بودن شبکه نسبت به محور X است. $E_{i,j}$ را مجموعه رئوسی تعریف می‌کنیم که به دو صورت زیر حاصل می‌گردد:

• اگر $i + j$ زوج باشد، آنگاه $E_{i,j}$ از انتقال دادن $E_{\circ, \circ}$ در راستای بردار (i, j) بدست می‌آید.

• اگر $i + j$ فرد باشد، آنگاه $E_{i,j}$ از انتقال دادن $E_{1, \circ}$ در راستای بردار $(i - 1, j)$ حاصل می‌گردد.

واضح است که $E_{i,j}$ ، مجموعه $H_r((i, j), (i + 1, j), (i + 2, j))$ است.

مجموعه $\mathcal{E} = \{E_{i,j} : i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}\}$ را در نظر بگیرید. مشاهده می‌کنید که با توجه به تقارن افقی، اولاً مجموعه‌های $E_{i,j}$ همگی دارای اندازه یکسان هستند که با e نمایش می‌دهیم، ثانیاً تعداد دفعات ظاهر شدن یک رأس در یک $E_{i,j}$ به رأس مورد نظر بستگی ندارد؛ دلایل فوق منجر به این نتیجه می‌شود که همانند برهان گزاره ۵.۷.۲، هر رأس در گراف نامتناهی به e عنصر مانند $E_{i,j} \in \mathcal{E}$ تعلق داشته باشد. حال اثباتی بسیار نزدیک به اثبات قبل را ارائه می‌نماییم؛ فقط لازم است مقدار e را بدست آوریم تا نتیجه لازم حاصل گردد.

به راحتی می‌توان بررسی کرد که در شبکه شش‌گوشه روابط زیر برقرارند:

$$|H_r(\text{مثلث})| = 5r + 3 \quad \text{اگر } r \text{ زوج باشد}$$

$$|H_r(\text{مثلث})| = 5r + 2 \quad \text{اگر } r \text{ فرد باشد}$$

حال اندازه (مثلث) H_r را با نماد p نمایش می‌دهیم؛ فرض کنید C یک کد r -شناسایی باشد و $n \in \mathbb{N}, n \geq 2p$ را در نظر می‌گیریم. قرار دهید:

$$F = \{(مثلث, c) : H_r(مثلث) \subseteq Q_n, c \in C \cap Q_n, c \in H_r(مثلث)\}.$$

با استفاده از گزاره ۴.۷.۲، چون هر (مثلث) H_r شامل حداقل دو کدواژه است، به این نتیجه می‌رسیم که اندازه مجموعه F حداقل برابر $|H_r(مثلث) \subseteq Q_n| \times 2$ است. از طرفی دیگر در حالتی که $i + j$ زوج باشد مجموعه F حداکثر به اندازه $(5r + 3) \times |C \cap Q_n|$ عضو دارد. و در حالتی که $i + j$ فرد باشد مجموعه F حداکثر به اندازه $(5r + 2) \times |C \cap Q_n|$ عضو دارد.

چون $2(2n - p + 1) \geq |H_r(مثلث) \subseteq Q_n|$ است روابط زیر را بدست می‌آوریم:

• اگر $i + j$ زوج باشد، داریم:

$$\frac{|C \cap Q_n|}{|Q_n|} \geq \frac{2}{5r + 3} \times \frac{(2n - p + 1)^2}{(2n + 1)^2},$$

• اگر $i + j$ فرد باشد، داریم:

$$\frac{|C \cap Q_n|}{|Q_n|} \geq \frac{2}{5r + 2} \times \frac{(2n - p + 1)^2}{(2n + 1)^2}.$$

حال n را به بی‌نهایت سوق می‌دهیم و داریم:

$$D(G_H, r) \geq \frac{2}{5r + 3} \quad \text{زوج } r$$

$$D(G_H, r) \geq \frac{2}{5r + 2} \quad \text{فرد } r$$

□

ملاحظه ۸.۷.۲. [۶] با استدلالی مشابه برهان قضیه ۱۱.۷.۲ می‌توان نشان داد که کمترین تراکم کد r -شناسایی در مشبکه مربع، در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند.

$$D(G_S, r) \geq \frac{2}{6r + 2}$$

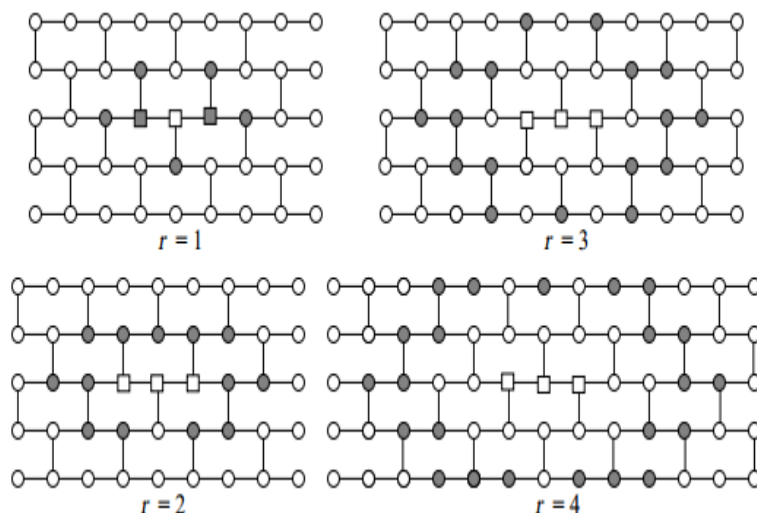
اما در ادامه قضیه‌ای را مطرح می‌کنیم که کران بهتری را ارائه می‌کند.

تعریف ۹.۷.۲. [۶] چهارتایی (x, y, z, t) را مربع نامیم هرگاه $i \in \mathbb{Z}$ و $j \in \mathbb{Z}$ وجود داشته باشند به طوری که $x = (i, j), y = (i + 1, j), z = (i + 1, j + 1)$ و $t = (i, j + 1)$ باشد. به علاوه مجموعه $K_r(x, y, z, t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

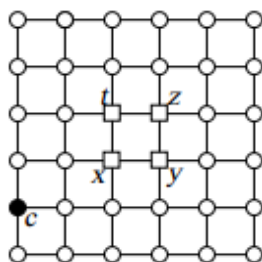
$$K_r(x, y, z, t) = \Delta_r(x, y) \cup \Delta_r(x, z) \cup \Delta_r(x, t) \cup \Delta_r(y, z) \cup \Delta_r(y, t) \cup \Delta_r(z, t),$$

شکل ۹.۲ را ببینید.

گزاره ۱۰.۷.۲. [۶] اگر در مشبکه مربع یک کد r -شناسایی داشته باشیم، آنگاه $K_r(x, y, z, t)$ شامل حداقل سه کدواژه است.



شکل ۷.۲: (مثلت) H_r در مشبکه شش‌گوشه



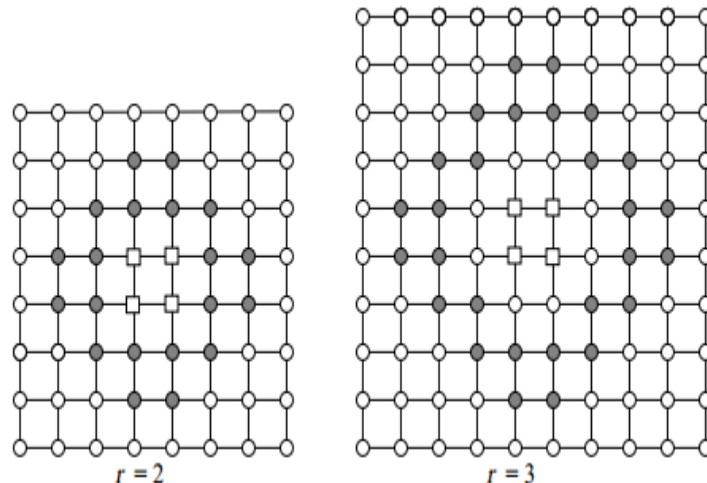
شکل ۸.۲: مربع

برهان. فرض کنید چهارتایی (x, y, z, t) مربع باشد و x دارای مختصات (i, j) باشد. بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید $K_r(x, y, z, t)$ شامل کدواژه $c = (i', j')$ است به طوری که $i' \leq i$ و $j' \leq j$ است. در این صورت با توجه به ساختار مشبکه مربع داریم:

$$d(c, y) = d(c, x) + ۱, d(c, z) = d(c, x) + ۲, d(c, t) = d(c, x) + ۱, \quad (۶.۲)$$

چون x به $K_r(x, y, z, t)$ تعلق دارد، $d(c, x) = r$ یا $d(c, x) = r - ۱$ است. اولاً اگر $d(c, x) = r$ باشد، آن‌گاه از رابطه ۶.۲، c نمی‌تواند y, z یا t را بپوشاند و به $H_r(y, z, t) = \Delta_r(y, z) \cup \Delta_r(y, t) \cup \Delta_r(z, t)$ تعلق ندارد؛ از گزاره ۴.۷.۲، $H_r(y, z, t)$ شامل حداقل دو کدواژه است و این کدواژه‌ها از c متمایزند؛ بنابراین در این حالت $K_r(x, y, z, t)$ شامل حداقل سه کدواژه است. ثانیاً اگر $d(c, x) = r - ۱$ باشد، آن‌گاه c نمی‌تواند x, y و t را از همدیگر مجزا نماید. به عبارت معادل c به $H_r(x, y, t)$ تعلق ندارد. حال مجدداً با استفاده از گزاره ۴.۷.۲، $K_r(x, y, z, t)$ شامل حداقل سه کدواژه است.

به عبارت دیگر، در مشبکه مربع یک کدواژه لازم است تا یک مربع منحصر به فرد و مثلث را از هم



شکل ۹.۲: K_r (مربع) در مشبکه مربع

□ مجزا کند و مثلث نیازمند دو کدواژه دیگر است.

قضیه ۱۱.۷.۲ [۶] کمترین تراکم کد r -شناسایی در مشبکه مربع، در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$D(G_S, r) \geq \frac{3}{8r + 4} \quad (7.2)$$

برهان. در مشبکه مربع، رابطه $|K_r(x, y, z, t)| = 8r + 4$ برقرار است. با استدلالی مشابه برهان قضیه ۱۱.۷.۲ و با جایگزینی مربع به جای مثلث و با در نظر گرفتن سه کدواژه برای مربع در این برهان، نتیجه لازم حاصل خواهد شد.

□

برای $r = 1$ روش ادهاک^۱ موثرتر است و نامساوی زیر را داریم:

قضیه ۱۲.۷.۲ [۱۲، ۱۴] برای $r = 1$ ، با استفاده از روش ادهاک، کمترین تراکم کد r -شناسایی در مشبکه‌های مربع، در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند.

$$D(G_S, 1) \geq \frac{15}{43} \quad (8.2)$$

قضیه ۱۳.۷.۲ [۱۳] برای $r = 1$ ، کمترین تراکم کد r -شناسایی در مشبکه‌های شش گوشه، در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند.

$$D(G_H, 1) \geq \frac{16}{39} \quad (9.2)$$

قضیه ۱۴.۷.۲ [۷] کمترین تراکم کد r -شناسایی در مشبکه‌های شاهوار، در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند.

$$D(G_K, r) \geq \frac{1}{4r} \quad \text{برای } r > 1 \quad (10.2)$$

^۱ad hoc method

قضیه ۱۵.۷.۲ [۱۵] در شبکه شاهوار، برای $r = 1$ ، کمترین تراکم r -شناسایی به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$D(G_K, 1) \geq \frac{2}{9}. \quad (11.2)$$

۸.۲ کران‌های بالا

قضیه ۱.۸.۲ [۲۴] در شبکه مثلث، برای $r = 1$ ، بیشترین تراکم r -شناسایی به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$D(G_T, 1) \leq 0.25 \quad (12.2)$$

که این مقدار با کران پایین در ۲.۲ برابر است زیرا در شبکه مثلث $B_1 = 7$ است.

قضیه ۲.۸.۲ [۱۱، ۱۵، ۱۶، ۲۳] برای $r = 1$ ، بیشترین تراکم r -شناسایی در شبکه‌های شش گوشه، مربع و شاهوار به صورت زیر ارائه می‌گردد و همچنین برای $r = 2$ در شبکه مربع نامساوی آخر برقرار است.

$$D(G_H, 1) \leq \frac{3}{7}, \quad (13.2)$$

$$D(G_S, 1) \leq 0.35, \quad (14.2)$$

$$D(G_K, 1) \leq \frac{4}{17}, \quad (15.2)$$

$$D(G_S, 2) \leq \frac{5}{22}. \quad (16.2)$$

قضیه ۳.۸.۲ [۲۳] بیشترین تراکم r -شناسایی در شبکه مربع، به صورت نامساوی‌های زیر ارائه می‌گردد.

$$D(G_S, r) \leq \frac{2}{5r} \quad r \text{ زوج} \quad (17.2)$$

$$D(G_S, r) \leq \frac{2r}{5r^2 - 2r + 1} \quad r \text{ فرد} \quad (18.2)$$

قضیه ۴.۸.۲ [۶] بیشترین تراکم r -شناسایی در شبکه‌های شش گوشه و مثلث، به صورت

نامساوی‌های زیر ارائه می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 D(G_H, r) &\leq \frac{8r - 8}{9r^2 - 16r} & r &\equiv 0 \pmod{4}, & (19.2) \\
 D(G_H, r) &\leq \frac{8}{9r - 5} & r &\equiv 1 \pmod{4}, & (20.2) \\
 D(G_H, r) &\leq \frac{8}{9r - 34} & r &\equiv 2 \pmod{4}, & (21.2) \\
 D(G_H, r) &\leq \frac{8r - 16}{(r - 3)(9r - 43)} & r &\equiv 3 \pmod{4}; & (22.2) \\
 D(G_T, r) &\leq \frac{1}{2r + 4} & r &\equiv 0 \pmod{4}, & (23.2) \\
 D(G_T, r) &\leq \frac{1}{2r + 2} & r &\equiv 1, 2, 3 \pmod{4}. & (24.2)
 \end{aligned}$$

برای برخی مقادیر کوچک r فرمول‌های فوق اغلب فرسوده‌اند.

با مقایسه کران‌های بالا و پایین، هرگاه r به بی‌نهایت میل کند خواهیم دید:

$$\frac{2}{5}r \lesssim D(G_H, r) \lesssim \frac{8}{9}r, \frac{3}{8}r \lesssim D(G_S, r) \lesssim \frac{2}{5}r, \frac{1}{3}r \lesssim D(G_T, r) \lesssim \frac{1}{2}r.$$

در نهایت برای مشبکه شاهوار، خاطر نشان می‌کنیم که کمترین تراکم در حالت $r = 1$ ، از نامساوی ۱۱.۲ حاصل می‌گردد و برابر با $\frac{2}{3}$ است. (بخش ۱.۱۰.۲ شکل ?? را ببینید).

قضیه ۵.۸.۲ [۱۳] به ازای $r > 1$ بیشترین تراکم r -شناسایی در مشبکه شاهوار، در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$D(G_K, r) \leq \frac{1}{4r}$$

و با استفاده از مرجع [۱۳] ثابت می‌گردد که $D(G_K, r) = \frac{1}{4r}$ است.

۹.۲ نتایج

کران‌های بالای جدید را با ابتکار خودمان در جداول زیر نمایش می‌دهیم و کران‌های پایین را برای مقایسه آورده‌ایم. جاهای خالی بدین معناست که کران بهتری نیافته‌ایم.

مشبکه شاهوار			
r	کران پایین	کران بالای جدید	کران بالای قبلی
۱	$\frac{2}{9} \approx 0.2222$	$\frac{2}{9} \approx 0.2222$	$\frac{4}{17} \approx 0.2353$
۲	$\frac{1}{8} = 0.125$	$\frac{1}{8} = 0.125$	۱
۳	$\frac{1}{12} \approx 0.0833$	$\frac{1}{12} \approx 0.0833$	۱
۴	$\frac{1}{16} = 0.0625$	$\frac{1}{16} = 0.0625$	۱

مشبکه مثلث			
کران بالایی قبلی	کران بالایی جدید	کران پایینی	r
$1/4 = 0,25$		$1/4 = 0,25$	۱
۱	$1/6 \approx 0,1667$	$2/15 \approx 0,1333$	۲
۱	$2/17 \approx 0,1177$	$2/21 \approx 0,0952$	۳
۱	$1/12 \approx 0,0833$	$2/27 \approx 0,0741$	۴
۱	$1/13 \approx 0,0769$	$2/33 \approx 0,0606$	۵
۱	$1/14 \approx 0,0714$	$2/39 \approx 0,0513$	۶

مشبکه مربع			
کران بالایی قبلی	کران بالایی جدید	کران پایینی	r
$7/20 = 0,35$		$15/43 \approx 0,3488$	۱
$5/29 \approx 0,1724$		$3/20 = 0,15$	۲
$3/20 = 0,15$	$1/8 = 0,125$	$3/28 \approx 0,1071$	۳
$1/10 = 0,1$	$8/85 \approx 0,0941$	$1/12 \approx 0,0833$	۴
$5/58 \approx 0,0862$	$2/25 = 0,08$	$3/44 \approx 0,0682$	۵
$1/15 \approx 0,0667$	$3/46 \approx 0,0652$	$3/25 \approx 0,0577$	۶
$7/116 \approx 0,0603$		$1/20 = 0,05$	۷

مشبکه شش گوشه			
کران بالایی قبلی	کران بالایی جدید	کران پایینی	r
$3/7 \approx 0,4286$		$16/39 \approx 0,4102$	۱
۱	$4/19 \approx 0,2105$	$2/11 \approx 0,1818$	۲
۱	$1/6 \approx 0,1667$	$2/17 \approx 0,1176$	۳
۱	$1/9 \approx 0,1111$	$2/23 \approx 0,0870$	۴
۱	$4/35 \approx 0,1143$	$2/27 \approx 0,0741$	۵
۱	$1/11 \approx 0,0909$	$2/33 \approx 0,0606$	۶
۱	$1/12 \approx 0,0833$	$2/37 \approx 0,0541$	۷
۱	$1/13 \approx 0,0769$	$2/43 \approx 0,0465$	۸

۱۰۰۲ ساختار برخی کدها

ساختارهایی که تراکم آن‌ها در ستون "کران بالایی جدید" در بخش قبل ارائه شده است، از دو راه بدست آمده‌اند. نخست پارامترهای w, h و α را به همراه مجموعه $S_R = C \cap R$ مشخص کرده‌ایم و سپس بخشی از گراف‌هایی که با این پارامترها مطابق‌اند را رسم نموده‌ایم. در این شکل‌ها کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.

۱.۱۰.۲ مشبکه شاهوار

$r = 1$:

تراکم = $4/18 \approx 0,2222$,

$w = 6, h = 3, \alpha = 3$,

$$S_R = \{(0, 0), (4, 0), (2, 1), (5, 2)\}.$$

شکل ۱۰.۲ را ببینید.

$$r = 2:$$

$$\text{تراکم} = 1/8 = 0.125,$$

$$w = 4, h = 2, \alpha = 2,$$

$$S_R = \{(0, 0)\}.$$

شکل ۱۱.۲ را ببینید.

$$r = 3:$$

$$\text{تراکم} = 1/12 \approx 0.0833,$$

$$w = 6, h = 2, \alpha = 2,$$

$$S_R = \{(0, 0)\}.$$

شکل ۱۲.۲ را ببینید.

$$r = 4:$$

$$\text{تراکم} = 1/16 = 0.0625,$$

$$w = 8, h = 2, \alpha = 2,$$

$$S_R = \{(0, 0), (4, 0), (2, 1), (5, 2)\}.$$

شکل ۱۳.۲ را ببینید.

۲.۱۰.۲ شبکه مثلث

$$r = 2:$$

$$\text{تراکم} = 2/12 \approx 0.1667,$$

$$w = 6, h = 2, \alpha = 4,$$

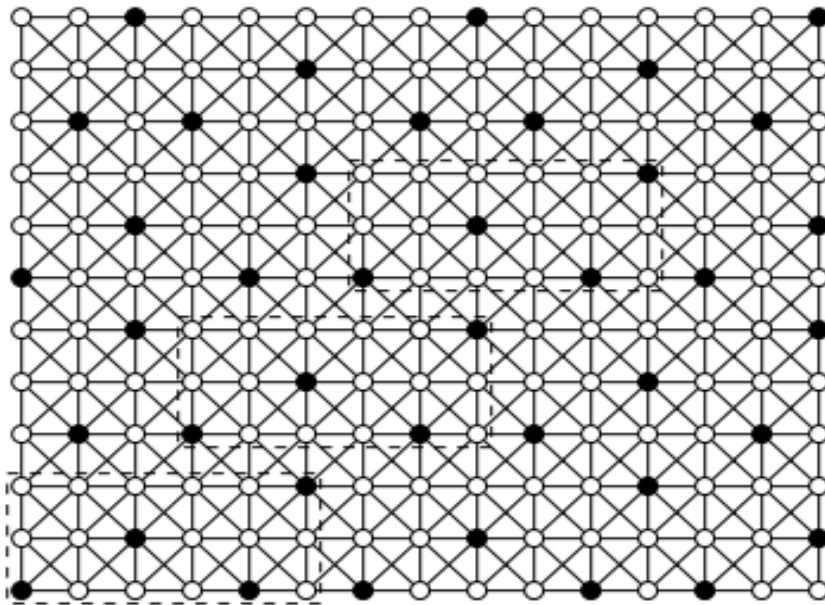
$$S_R = \{(0, 0), (2, 0)\}.$$

شکل ۳۰.۲ را ببینید.

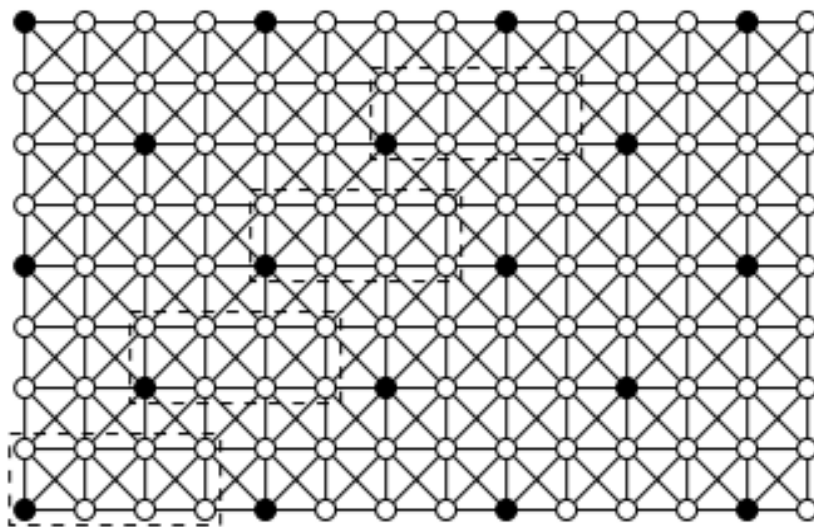
$$r = 3:$$

$$\text{تراکم} = 10/85 = 0.1177,$$

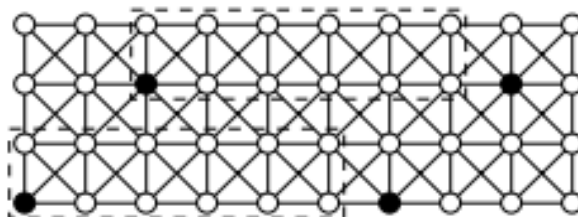
$$w = 85, h = 1, \alpha = 9,$$



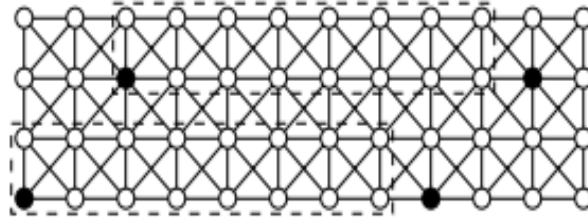
شکل ۱۰.۲: کد ۱- شناسایی در مشبکه شاهوار.



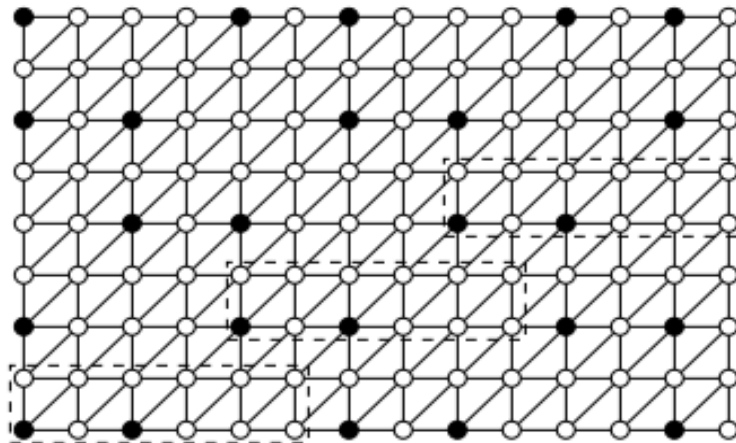
شکل ۱۱.۲: کد ۲- شناسایی در مشبکه شاهوار.



شکل ۱۲.۲: کد ۳- شناسایی در مشبکه شاهوار.



شکل ۱۳.۲: کد ۴-شناسایی در شبکه شاهوار.



شکل ۱۴.۲: کد ۲-شناسایی در شبکه مثلث.

$$S_R =$$

$$\{(0, 0), (4, 0), (19, 0), (23, 0), (36, 0), (40, 0), (53, 0), (55, 0), (68, 0), (72, 0)\}.$$

شکل ۱۵.۲ را ببینید.

$$r = 4:$$

$$\text{تراکم} = 1/12 \approx 0.0833,$$

$$w = 6, h = 2, \alpha = 4,$$

$$S_R = \{(0, 0)\}.$$

شکل ۱۶.۲ را ببینید.

$$r = 5:$$

$$\text{تراکم} = 3/39 = 0.0769,$$

$$w = 39, h = 1, \alpha = 17,$$

$$S_R = \{(0, 0), (8, 0), (19, 0)\}.$$

شکل ۱۷.۲ را ببینید.

$$r = 6:$$

$$\text{تراکم} = 2/28 = 0.0714,$$

$$w = 14, h = 2, \alpha = 4,$$

$$S_R = \{(0, 0), (6, 0)\}.$$

شکل ۱۸.۲ را ببینید.

۳.۱۰.۲ شبکه مربع

$$r = 3:$$

$$\text{تراکم} = 7/59 = 0.1188,$$

$$w = 56, h = 1, \alpha = 10,$$

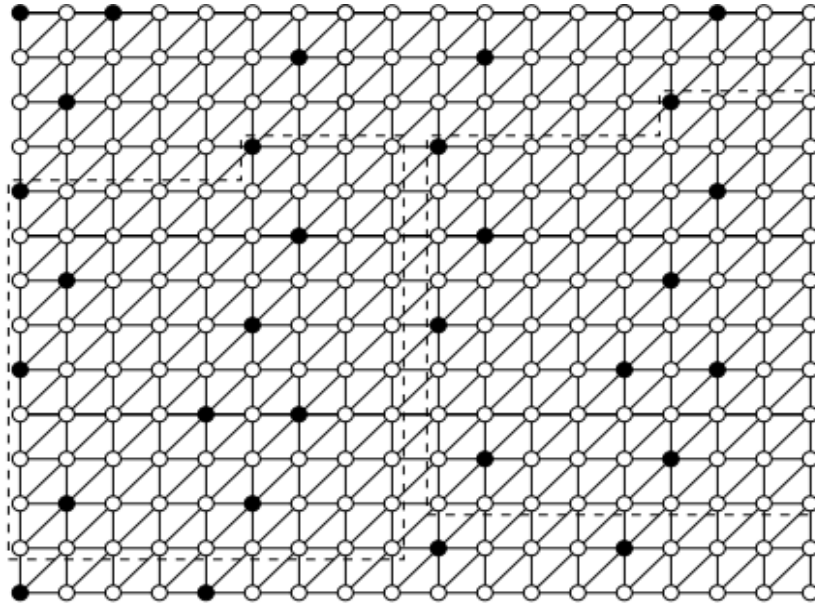
$$S_R = \{(0, 0), (7, 0), (14, 0), (21, 0), (28, 0), (35, 0), (42, 0)\}.$$

شکل ۱۹.۲ را ببینید.

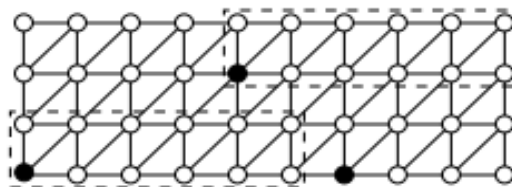
$$r = 4:$$

$$\text{تراکم} = 8/85 \approx 0.0941,$$

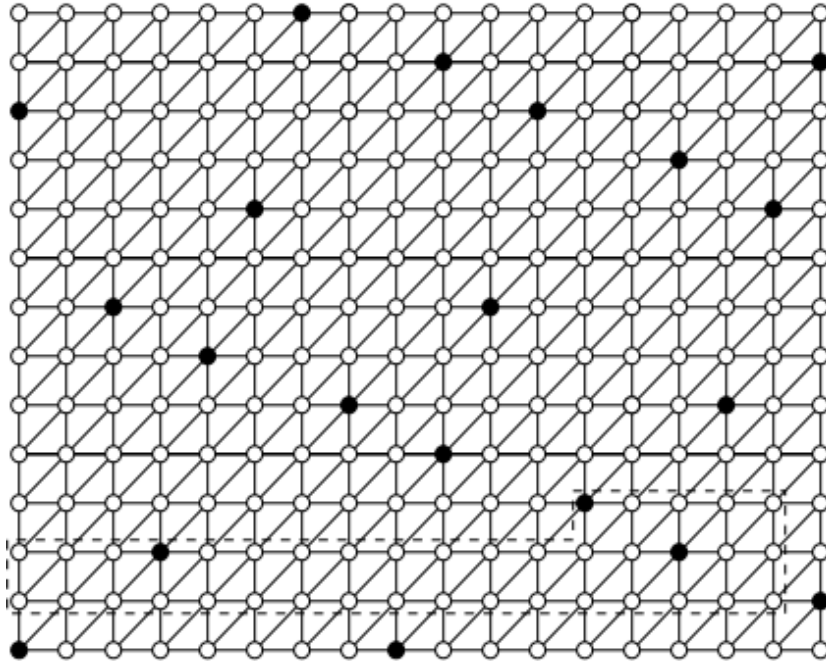
$$w = 85, h = 1, \alpha = 38,$$



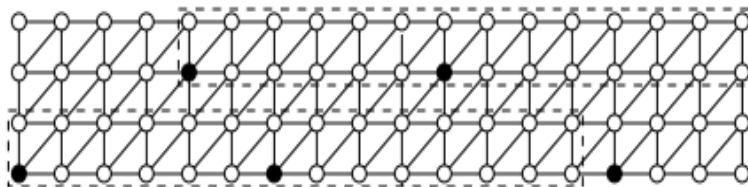
شکل ۱۵.۲: کد ۳- شناسایی در شبکه مثلث.



شکل ۱۶.۲: کد ۴- شناسایی در شبکه مثلث.



شکل ۱۷.۲: کد ۵-شناسایی در مشبکه مثلث.



شکل ۱۸.۲: کد ۶-شناسایی در مشبکه مثلث.

$$S_R = \{(0, 0), (2, 0), (12, 0), (21, 0), (33, 0), (54, 0), (66, 0), (75, 0)\}.$$

شکل ۲۰.۲ را ببینید.

$$r = 5:$$

$$\text{تراکم} = 2/5 = 0.4,$$

$$w = 25, h = 1, \alpha = 7,$$

$$S_R = \{(0, 0), (2, 0)\}.$$

شکل ۲۱.۲ را ببینید.

$$r = 6:$$

$$\text{تراکم} = 3/46 = 0.0652,$$

$$w = 46, h = 1, \alpha = 8,$$

$$S_R = \{(0, 0), (17, 0), (20, 0)\}.$$

شکل ۲۲.۲ را ببینید.

۴.۱۰.۲ مشبکه شش‌گوشه

$$r = 2:$$

$$\text{تراکم} = 8/38 \approx 0.2105,$$

$$w = 38, h = 1, \alpha = 15,$$

$$S_R = \{(0, 0), (6, 0), (10, 0), (13, 0), (18, 0), (21, 0), (25, 0), (31, 0)\}.$$

شکل ۲۳.۲ را ببینید.

$$r = 3:$$

$$\text{تراکم} = 1/6 \approx 0.1667,$$

$$w = 6, h = 1, \alpha = 3,$$

$$S_R = \{(0, 0)\}.$$

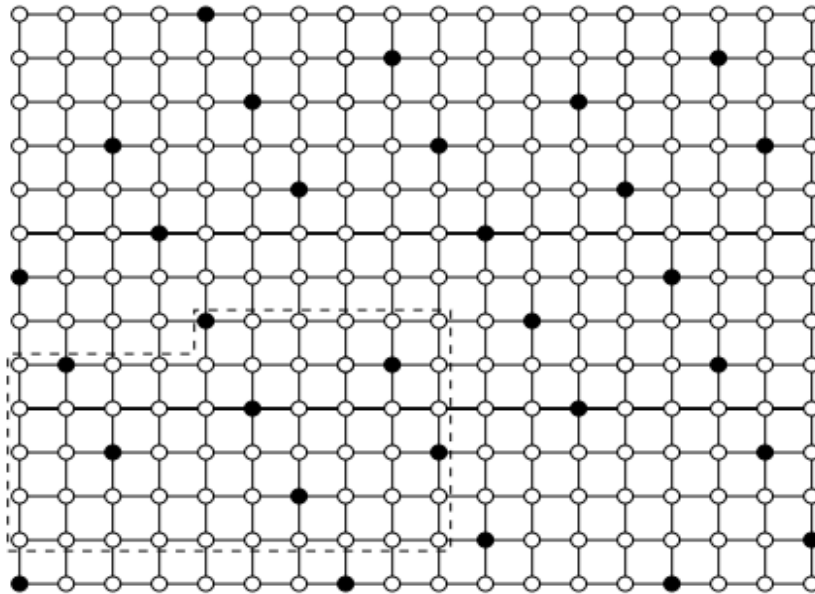
شکل ۲۴.۲ را ببینید.

$$r = 4:$$

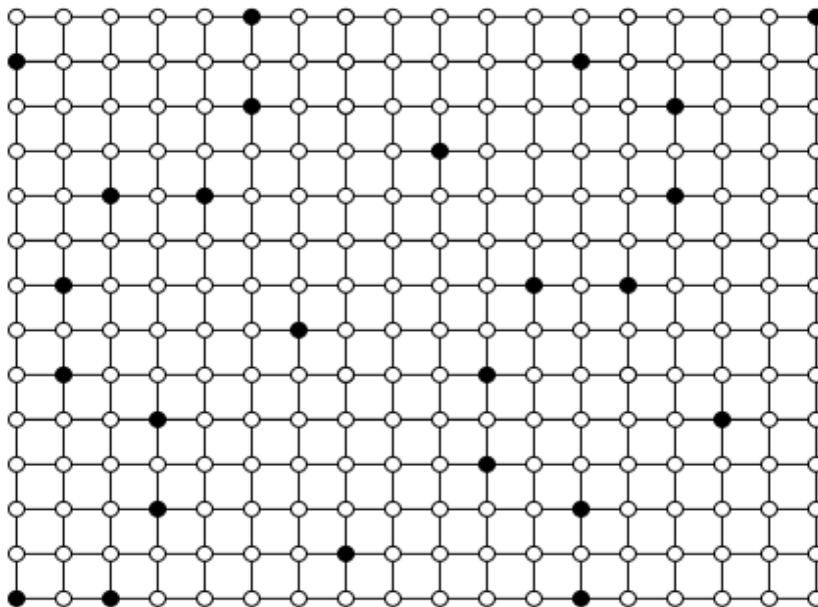
$$\text{تراکم} = 2/18 \approx 0.1111,$$

$$w = 6, h = 3, \alpha = 3,$$

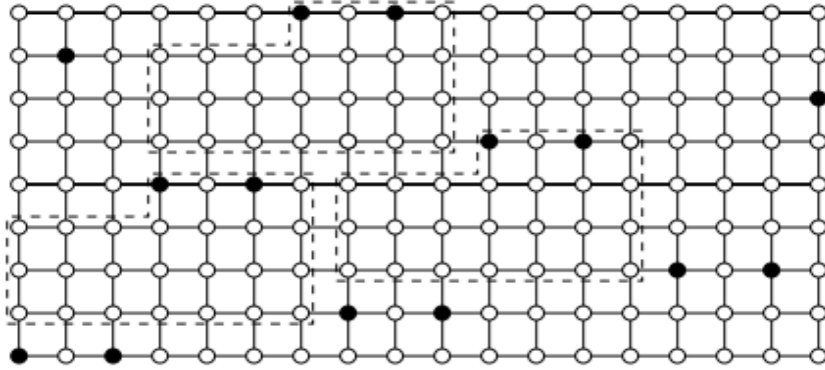
$$S_R = \{(0, 0), (2, 0)\}.$$



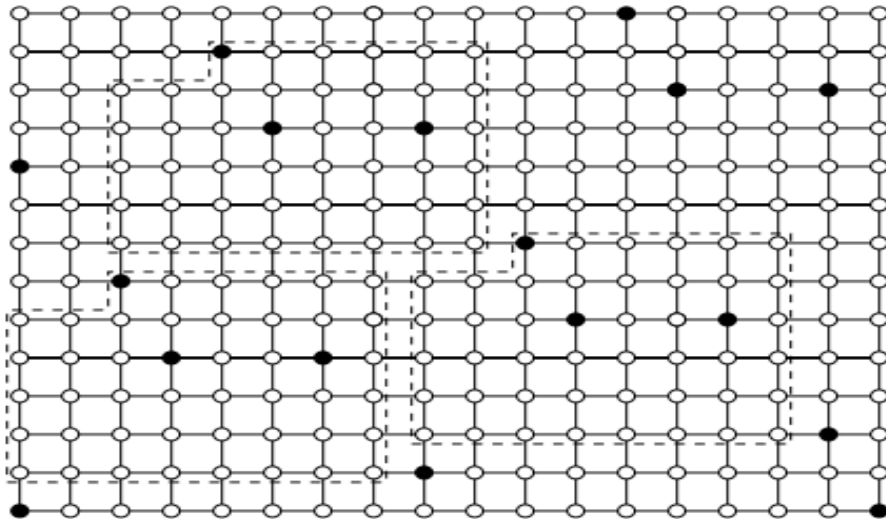
شکل ۱۹.۲: کد ۳- شناسایی در مشبکه مربع.



شکل ۲۰.۲: کد ۴- شناسایی در مشبکه مربع.



شکل ۲۱.۲: کد ۵-شناسایی در مشبکه مربع.



شکل ۲۲.۲: کد ۶-شناسایی در مشبکه مربع.

شکل ۲۵.۲ را ببینید.

$r = 5$:

$$\text{تراکم} = 8/70 \approx 0.1143,$$

$$w = 70, h = 1, \alpha = 19,$$

$$S_R = \{(1, \circ), (16, \circ), (19, \circ), (23, \circ), (26, \circ), (33, \circ), (58, \circ), (61, \circ)\}.$$

شکل ۲۶.۲ را ببینید.

$r = 6$:

$$\text{تراکم} = 8/88 \approx 0.0909,$$

$$w = 14, h = 2, \alpha = 4,$$

$$S_R = \{(1, \circ), (11, \circ), (18, \circ), (25, \circ), (28, \circ), (35, \circ), (42, \circ), (52, \circ)\}.$$

شکل ۲۷.۲ را ببینید.

$r = 7$:

$$\text{تراکم} = 4/48 \approx 0.0833,$$

$$w = 48, h = 1, \alpha = 11,$$

$$S_R = \{(1, \circ), (6, \circ), (19, \circ), (24, \circ)\}.$$

شکل ۲۸.۲ را ببینید.

$r = 8$:

$$\text{تراکم} = 2/26 \approx 0.0769,$$

$$w = 26, h = 1, \alpha = 7,$$

$$S_R = \{(\circ, \circ), (15, \circ)\}.$$

شکل ۲۹.۲ را ببینید.

برای شبکه شش گوشه، کران بالایی را به صورت زیر ارائه می‌نماییم که به مراتب بهتر از روابط ۱۹.۲ تا

۲۲.۲ خواهد بود.

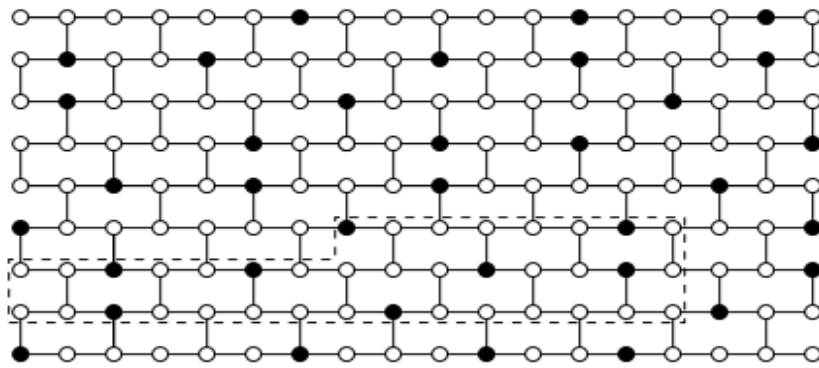
$$r = 9 : \text{تراکم} = 1/14, w = 14, h = 1, \alpha = 5, S_R = \{(\circ, \circ)\}.$$

$$r = 10 : \text{تراکم} = 1/14, w = 14, h = 1, \alpha = 5, S_R = \{(\circ, \circ)\}.$$

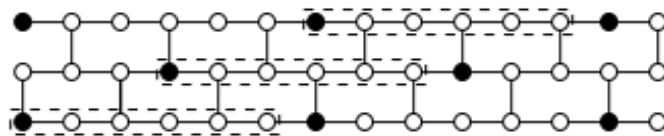
$$r = 11 : \text{تراکم} = 1/16, w = 16, h = 1, \alpha = 5, S_R = \{(\circ, \circ)\}.$$

$$r = 12 : \text{تراکم} = 1/16, w = 16, h = 1, \alpha = 5, S_R = \{(\circ, \circ)\}.$$

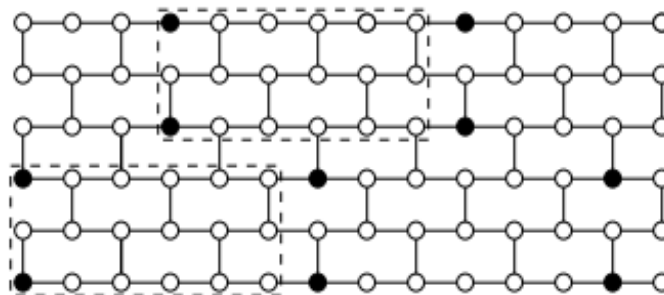
$$r = 13 : \text{تراکم} = 1/18, w = 18, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}.$$



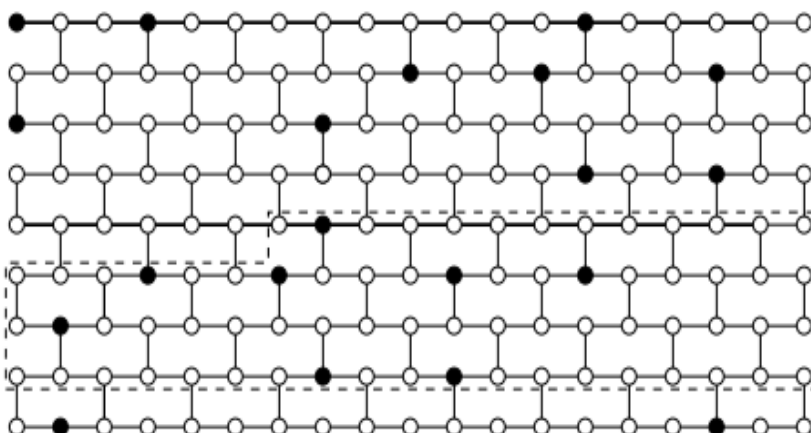
شکل ۲۳.۲: کد ۲- شناسایی در شبکه شش‌گوشه.



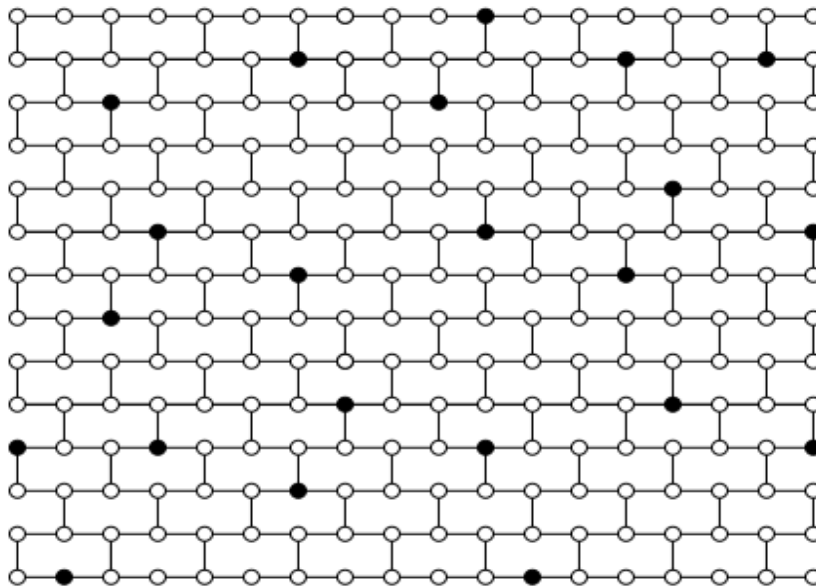
شکل ۲۴.۲: کد ۳- شناسایی در شبکه شش‌گوشه.



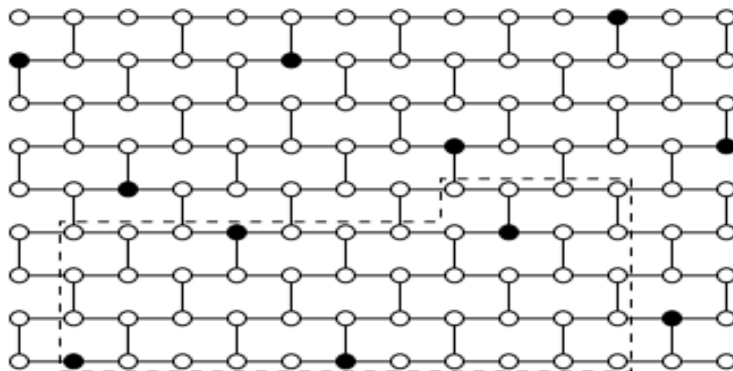
شکل ۲۵.۲: کد ۴- شناسایی در شبکه شش‌گوشه.



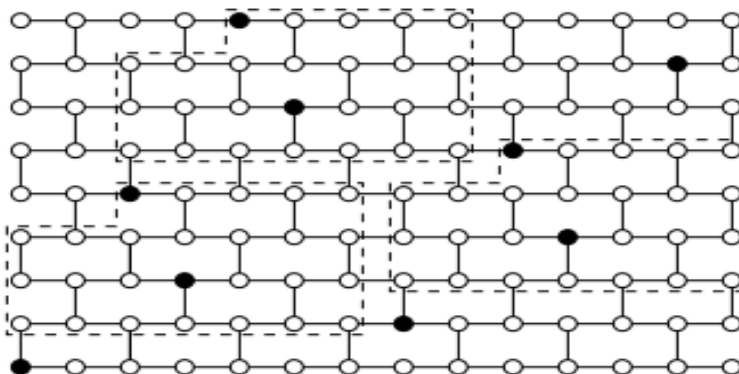
شکل ۲۶.۲: کد ۵- شناسایی در شبکه شش‌گوشه.



شکل ۲۷.۲: کد ۶-شناسایی در مشبکه شش گوشه.



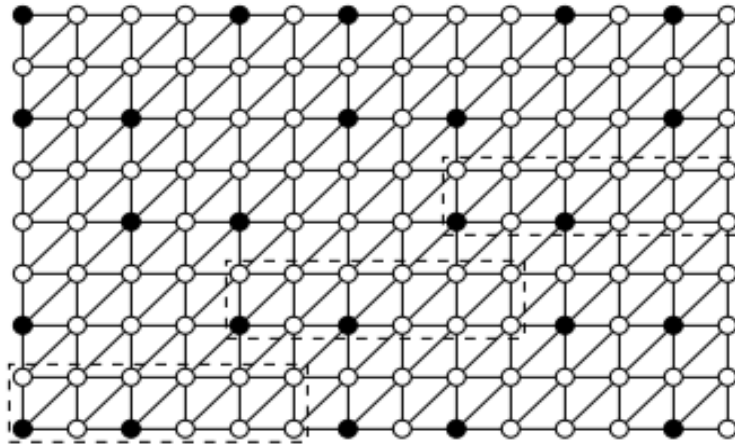
شکل ۲۸.۲: کد ۷-شناسایی در مشبکه شش گوشه.



شکل ۲۹.۲: کد ۸-شناسایی در مشبکه شش گوشه.

- $r = 14$: تراکم = $1/18, w = 18, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 15$: تراکم = $1/18, w = 18, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 16$: تراکم = $1/18, w = 18, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 17$: تراکم = $1/22, w = 22, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 18$: تراکم = $1/22, w = 22, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 19$: تراکم = $1/22, w = 22, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 20$: تراکم = $1/22, w = 22, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 21$: تراکم = $1/26, w = 26, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 22$: تراکم = $1/26, w = 26, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 23$: تراکم = $1/28, w = 28, h = 1, \alpha = 5, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 24$: تراکم = $1/28, w = 28, h = 1, \alpha = 5, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 25$: تراکم = $1/30, w = 30, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 26$: تراکم = $1/30, w = 30, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 27$: تراکم = $1/32, w = 32, h = 1, \alpha = 5, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 28$: تراکم = $1/32, w = 32, h = 1, \alpha = 5, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 29$: تراکم = $1/34, w = 34, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.
 $r = 30$: تراکم = $1/34, w = 34, h = 1, \alpha = 3, S_R = \{(\circ, \circ)\}$.

با نتایج فوق تراکم $\frac{1}{r+5}$ را برای r فرد و تراکم $\frac{1}{r+4}$ را برای r زوج حدس می‌زنیم. حدس‌های ما در مقایسه به روابط ۱۹.۲ تا ۲۲.۲ ضعیف‌تر خواهند بود اگر r رشد کند.



شکل ۳۰.۲: کد ۲- شناسایی در مشبکه مثلث.

فصل ۳

کمترین تراکم کد شناسایی در شبکه شاهوار

۱.۳ مقدمه

در این فصل دو قضیه زیر را می‌پذیریم و در حالت کلی ثابت می‌کنیم تراکم کد r -شناسایی در شبکه شاهوار برابر $\frac{1}{4^r}$ است.

قضیه ۱.۱.۳. [۹، ۱۵] کمترین تراکم کد ۱-شناسایی در شبکه شاهوار به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$D(1) = \frac{1}{4}.$$

قضیه ۲.۱.۳. [۱۴] کران پایین برای کد r -شناسایی در شبکه شاهوار از نامساوی زیر حاصل می‌گردد.

$$D(r) \geq \frac{1}{4^r + 2}.$$

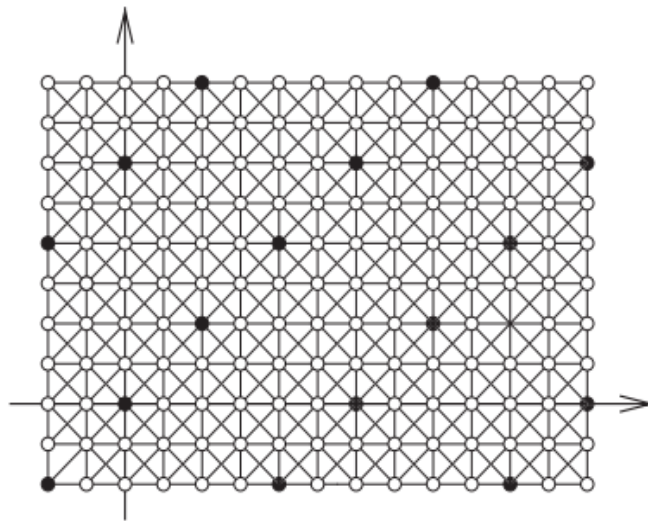
یادآوری می‌کنیم که گراف G_K ، با مجموعه رئوس $V = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و مجموعه یال‌های زیر را شبکه شاهوار می‌نامیم.

$$E_K = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (1, \pm 1), (-1, \pm 1)\}\}.$$

۲.۳ ساختارهای عمومی

در این بخش رئوس P و P_k را با مختصات $P = (i, j)$ و $P_k = (i_k, j_k)$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که فاصله بین دو رأس P_1 و P_2 با رابطه زیر ارائه می‌گردد:

$$d(P_1, P_2) = \max(|i_2 - i_1|, |j_2 - j_1|). \quad (1.3)$$



شکل ۱.۳: کد ۳-شناسایی در شبکه شاهوار. کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.

قضیه ۱.۲.۳. [۷] فرض کنید r عددی صحیح و مثبت باشد. کد r -شناسایی با تراکم $\frac{1}{r}$ در شبکه شاهوار وجود دارد.

برهان. برای $k \in \mathbb{Z}$ ، مجموعه C_k متشکل از رئوس شبکه شاهوار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_k = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \text{ زوج است}, \alpha = 2kr\}$$

فرض کنید C ، اجتماع تمام C_k هایی است که $k \in \mathbb{Z}$ باشد؛ ادعا می‌کنیم که C یک کد r -شناسایی برای شبکه شاهوار است. شکل ۱.۳ مجموعه C را برای $r = 3$ نشان می‌دهد. ابتدا یک تعریف و یک لم را بیان می‌کنیم سپس به ادامه برهان می‌پردازیم.

تعریف ۲.۲.۳. [۷] برای هر $i \in \mathbb{Z}$ ، $\varepsilon(i)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } i \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

با تعریف فوق، لم زیر برقرار است.

لم ۳.۲.۳. [۷] فرض کنید $k(P)$ کمترین مقدار k باشد به طوری که حداقل یک عنصر از C_k ، رأس P را بپوشاند. در این صورت هر رأس مانند $P = (i, j)$ توسط C ، r -پوشیده می‌شود و مقدار دقیق $k(P)$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$k(P) = \left\lceil \frac{i - j + \varepsilon(r + j)}{2r} \right\rceil - 1.$$

برهان. با توجه به تعریف C_k ، زیرکد C_k شامل رأسی مانند P' است که P را می‌پوشاند اگر و تنها اگر $\alpha \in \mathbb{Z}$ وجود داشته باشد به طوری که α زوج باشد و فاصله دو رأس P' و $P = (\alpha + 2kr, \alpha)$ کمتر از r باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$d(p, p') \leq r$$

و با استفاده از رابطه ۱.۳ داریم:

$$|\alpha + 2kr - i| \leq r,$$

$$|\alpha - j| \leq r.$$

و در نتیجه نامساوی‌های زیر برقرارند:

$$i - (\alpha + 2kr) \leq r,$$

$$(\alpha + 2kr) - i \leq r,$$

$$j - \alpha \leq r,$$

$$\alpha - j \leq r.$$

چون α عددی زوج است و هر دو عدد $r + j$ و $j - r$ همزمان زوج‌اند یا همزمان فردند می‌توان مقدار $\varepsilon(r + j)$ را به صورت زیر به نامساوی سوم افزود و از نامساوی چهارم کم کرد و نامساوی‌های زیر حاصل می‌گردند:

$$\alpha \geq i - r - 2kr,$$

$$\alpha \leq r + i - 2kr,$$

$$\alpha \geq j - r + \varepsilon(r + j),$$

$$\alpha \leq r + j - \varepsilon(r + j).$$

بنابراین α وجود دارد اگر و تنها اگر

$$\begin{cases} i - r - 2kr \leq r + j - \varepsilon(r + j), \\ j - r + \varepsilon(r + j) \leq r + i - 2kr. \end{cases}$$

دو نامساوی فوق برقرار است اگر و تنها اگر

$$\begin{cases} i - 2r - j + \varepsilon(r + j) \leq 2kr, \\ 2kr \leq i - j + 2r - \varepsilon(r + j). \end{cases}$$

از دو نامساوی اخیر عبارت $i - 2r - j + \varepsilon(r + j) \leq 2kr \leq i - j + 2r - \varepsilon(r + j)$ حاصل می‌گردد.

بنابراین k وجود دارد و P توسط یک کدواژه پوشیده می‌شود و

$$k(P) = \left\lceil \frac{i - j + \varepsilon(r + j)}{2r} \right\rceil - 1.$$

□

حال دو رأس دلخواه P_1 و P_2 را در نظر بگیرید. اگر $k(P_1) \neq k(P_2)$ آن‌گاه با توجه به تعریف $k(P)$ ، دو رأس P_1 و P_2 - r مجزایند. بنابراین برای اثبات قضیه نشان می‌دهیم برای هر دو رأسی دلخواه P_1 و P_2 ، اگر $k(P_1) = k(P_2)$ باشد، آن‌گاه این دو رأس - r مجزا خواهند بود. حال بدون کاستن

از کلیت مساله، فرض کنید $k(P_1) = k(P_2) = 0$ (حالت‌های دیگر با انتقال قابل اثبات است). با استفاده از لم ۳.۲.۳ نامساوی‌های زیر برقرارند.

$$1 \leq i_1 - j_1 + \varepsilon(r + j_1) \leq 2r,$$

$$1 \leq i_2 - j_2 + \varepsilon(r + j_2) \leq 2r.$$

حال رأس P را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$1 \leq i - j + \varepsilon(r + j) \leq 2r. \quad (2.3)$$

توجه کنید که با استفاده از رابطه ۲.۳، $i \geq j$ است.

مجموعه عرض کدواژه‌هایی که P را می‌پوشانند و به C_k تعلق دارند را با نماد $J_k(P)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید α عددی صحیح و زوج باشد، (α, α) رأس P را می‌پوشاند اگر تنها اگر

$$i - \alpha \leq r,$$

$$\alpha - i \leq r,$$

$$j - \alpha \leq r,$$

$$\alpha - j \leq r.$$

از سیستم نامعادلات فوق به نتیجه زیر می‌رسیم.

$$i - r \leq \alpha \leq r + j$$

حال با استفاده از نتیجه فوق و دانستن این حقیقت که α عددی زوج است و دو عدد $i - r$ و $i + r$ همزمان زوج‌اند یا همزمان فردند، مجموعه $J_0(P)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$J_0(P) = \{\alpha \in \mathbb{Z} : \alpha, i - r + \varepsilon(i + r) \leq \alpha \leq j + r - \varepsilon(j + r)\}.$$

با استفاده از رابطه ۲.۳، $i \leq j + 2r$ است.

فرض کنید α عددی صحیح و زوج باشد، $(\alpha + 2r, \alpha)$ رأس P را می‌پوشاند اگر و تنها اگر

$$\alpha + r - i \leq r,$$

$$i - \alpha - 2r \leq r,$$

$$j - \alpha \leq r,$$

$$\alpha - j \leq r.$$

سیستم نامعادلات فوق به صورت زیر خواهد بود.

$$j - r \leq \alpha \leq i - r$$

حال برای تعریف مجموعه $J_1(P)$ دو حالت زیر را داریم:

۱. اگر $j = i$ و $\varepsilon(i + r) = 1$ ، آن‌گاه $J_1(P) = \emptyset$ است.

۲. در غیر این صورت $\alpha \leq j - r + \varepsilon(j + r) \leq \alpha \leq j - r - \varepsilon(j + r)$ زوج است $\alpha \in \mathbb{Z}$ $J_1(P) = \{ \alpha \in \mathbb{Z} : \}$ خواهد بود.

برهان خلف، فرض کنید رئوس متمایز P_1 و P_2 ، r -مجزا نباشند، در این صورت روابط زیر برقرارند.

$$J_0(P_1) = J_0(P_2), J_1(P_1) = J_1(P_2)$$

حال اگر $J_1(P_1) \neq \emptyset$ باشد، روابط زیر برقرارند.

$$i_1 - r + \varepsilon(i_1 + r) = i_2 - r + \varepsilon(i_2 + r),$$

$$j_1 + r - \varepsilon(j_1 + r) = j_2 + r - \varepsilon(j_2 + r),$$

$$j_1 - r + \varepsilon(j_1 + r) = j_2 - r + \varepsilon(j_2 + r),$$

$$i_1 - r - \varepsilon(i_1 + r) = i_2 - r - \varepsilon(i_2 + r)$$

که از معادلات فوق نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$i_1 = i_2, j_1 = j_2.$$

اگر $J_1(P_1) = \emptyset$ باشد به نتیجه یکسانی خواهیم رسید.

و این نتیجه در تناقض با متمایز بودن رئوس P_1 و P_2 است. بنابراین فرض خلف باطل است و رئوس P_1 و P_2 ، r -مجزایند.

□

۳.۳ کران‌های پایین کلی

تعریف ۱.۳.۳. $\Delta_r(u, v)$ را تفاضل متقارن بین دو مجموعه $B_r(u)$ و $B_r(v)$ تعریف می‌کنیم.

$C \cap \Delta_r(u, v)$ مجموعه کدواژه‌هایی است که u و v را از هم مجزا می‌کند و بنابراین ناتهی خواهد بود اگر C کد شناسایی باشد.

تعریف ۲.۳.۳. [۷] چهارتایی (x, y, z, t) را مربع نامیم هرگاه $i \in \mathbb{Z}$ و $j \in \mathbb{Z}$ وجود داشته باشند به طوری که $x = (i, j), y = (i + 1, j), z = (i + 1, j + 1), t = (i, j + 1)$ باشد. به علاوه مجموعه $K_r(x, y, z, t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K_r(x, y, z, t) = \Delta_r(x, y) \cup \Delta_r(x, z) \cup \Delta_r(x, t) \cup \Delta_r(y, z) \cup \Delta_r(y, t) \cup \Delta_r(z, t),$$

که در شبکه شاهوار مربعی با $4r + 4$ نقطه می‌باشد.

تعریف ۳.۳.۳. [۷] گوشه به معنای یک گوشه از $K_r(x, y, z, t)$ است و ضلع به معنای یکی از چهار اضلاع $K_r(x, y, z, t)$ بدون گوشه‌هایش می‌باشد.

اگر ابهامی در مقدار r نباشد $K_r(x, y, z, t)$ را با نماد K نمایش می‌دهیم. در لم بعد، کران پایین ϕ_i ، برای تعداد کدواژه‌های K را محاسبه می‌کنیم که تعداد i گوشه از K کدواژه هستند.

تعریف ۴.۳.۳. [۷] برای هر $0 \leq i \leq 4$ ، ϕ_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi_0 = 2, \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 3, \phi_4 = 4.$$

لم ۵.۳.۳. [۷] فرض کنید $K = K_r(x, y, z, t)$ طوری باشد که x, y, z و t -مجزا باشند. اگر K دارای i گوشه کدواژه باشد آن‌گاه K شامل حداقل ϕ_i کدواژه است.

برهان. فرض کنید K گوشه‌ای ندارد که کدواژه باشد چون x باید از y مجزا باشد، لازم است کدواژه‌ای در ضلع عمودی از K داشته باشیم. همچنین چون z باید از y مجزا باشد، لازم است کدواژه‌ای در ضلع افقی از K داشته باشیم. بنابراین حداقل $\phi_0 = 2$ نقطه از K باید کدواژه باشد.

فرض کنید K دارای دقیقاً یک گوشه است که کدواژه می‌باشد. بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید گوشه چپ - پایین از K کدواژه است. چون z باید از t مجزا باشد، لازم است کدواژه‌ای دیگر در ضلع عمودی از K داشته باشیم. همچنین z باید از y مجزا باشد و لازم است کدواژه‌ای دیگر در ضلع افقی از K داشته باشیم. بنابراین K دارای حداقل $\phi_1 = 3$ کدواژه است.

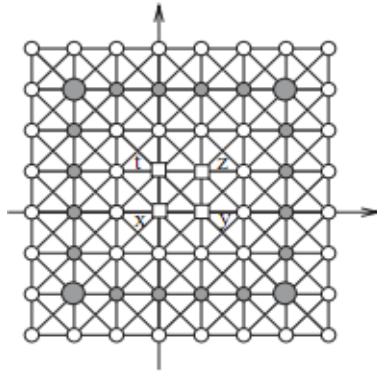
فرض کنید K دارای دو گوشه باشد که کدواژه‌اند. در این صورت دو حالت زیر را داریم: حالت اول: فرض کنید هر دو کدواژه بر ضلع یکسان عمودی یا افقی واقع شوند، به عنوان مثال فرض کنید هر دو کدواژه در گوشه‌های ضلع چپ از K واقع شوند (سه زیرحالت دیگر مشابه‌اند)؛ چون y باید از z مجزا گردد، لازم است کدواژه سوم بر یکی از اضلاع افقی از K داشته باشیم. حالت دوم: فرض کنید دو کدواژه در دو گوشه مقابل هم واقع شوند. به عنوان مثال یکی در گوشه چپ - پایین و دیگری در گوشه راست - بالا واقع شود (زیرحالت دیگر مشابه است)؛ چون y باید از t مجزا گردد، لازم است کدواژه سوم داشته باشیم. بنابراین در هر دو حالت فوق حداقل $\phi_2 = 3$ نقطه از K باید کدواژه باشد.

برای $i = 3$ و $i = 4$ حکم قضیه به وضوح برقرار است.

بنابراین اگر K دارای i گوشه کدواژه باشد، حداقل ϕ_i کدواژه به K تعلق دارد. \square

تعریف ۶.۳.۳. [۷] هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد گوئیم کدواژه غیرگوشه c بی‌فایده است.

- اگر c روی ضلع افقی از K واقع شود و کدواژه c' دیگری روی ضلع افقی (نه الزاماً در ضلع افقی یکسان با c) واقع شود که اکیداً در سمت چپ از c واقع گردد.
- اگر c روی ضلع افقی و بالای K واقع شود و کدواژه c' دیگری در ضلع افقی و پایین K و در راستای عمودی یکسان با c واقع گردد.



شکل ۲.۳: $K_r((\circ, \circ), (1, \circ), (1, 1), (\circ, 1))$ برای مشبکه شاهوار در حالت $r = 2$.

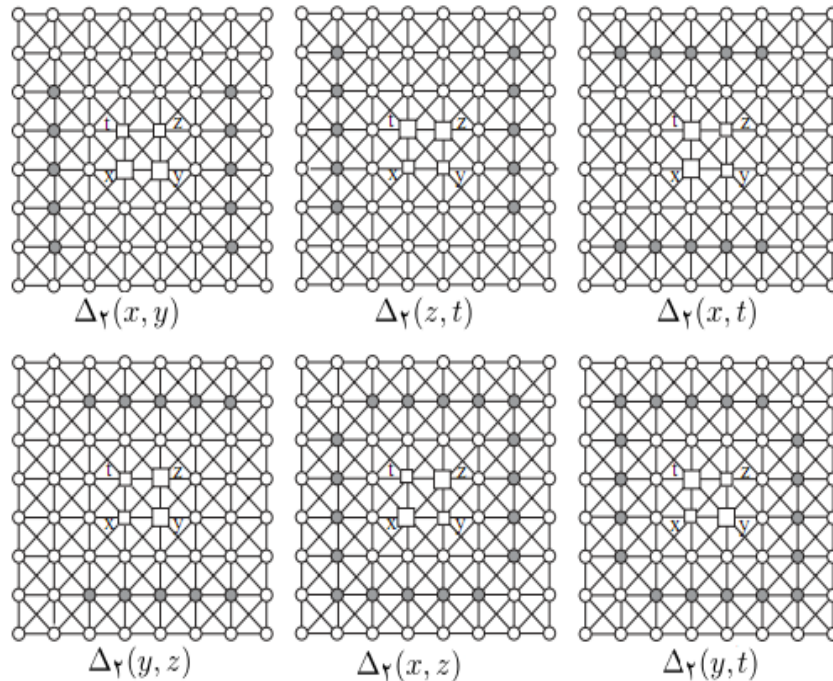
- اگر c روی ضلع عمودی از K واقع شود و کدواژه c' دیگری روی ضلع عمودی (نه الزاماً در راستای عمودی یکسان با c) واقع شود که اکیداً در زیر c باشد.
- اگر c روی ضلع عمودی سمت راست K باشد و کدواژه c' دیگری روی ضلع عمودی سمت چپ واقع شود به طوری که در راستای افقی یکسان با c قرار بگیرد.

لم ۷.۳.۳ [۷]. اگر K طوری باشد که z, y, x و t دو به دو مجزا باشند، آن‌گاه K دارای $\phi_i + \alpha$ کدواژه است که i تعداد گوشه‌هایی است که کدواژه‌اند و α تعداد کدواژه‌های بی‌فایده است.

برهان. چون z, y, x و t دو به دو مجزایند K باید شامل کدواژه‌های اختصاصی باشد. به سادگی می‌توان دید که حذف کدواژه‌های بی‌فایده در K ، هیچ اثری روی مجزا بودن رئوس z, y, x و t ندارد (به همین دلیل نام بی‌فایده برای آن‌ها انتخاب شده است). این امر از این حقیقت ناشی می‌شود که در میان جفت‌های تعریف شده روی مجموعه $\{x, y, z, t\}$ ، اگر یکی از رئوس توسط کدواژه بی‌فایده c از دیگری مجزا شود توسط کدواژه c' نیز مجزا می‌شود که این امر موجب بی‌فایده شدن کدواژه c می‌گردد. بنابراین پس از حذف α کدواژه بی‌فایده از K (که طبق تعریف ۶.۳.۳ گوشه‌های K نیستند)، رئوس z, y, x و t هنوز دو به دو مجزایند. با استفاده از لم ۵.۳.۳، چون K دارای i گوشه است که کدواژه‌اند، تعداد کدواژه‌های باقیمانده حداقل برابر ϕ_i است و بنابراین K حداقل دارای $\phi_i + \alpha$ کدواژه است و برهان تمام است. \square

برای اثبات کران پایین برای $D(G_k, r)$ در مشبکه شاهوار نیازمند تعاریف بیشتری هستیم.

تعریف ۸.۳.۳ [۷]. انتقال K در راستای بردارهای $(\circ, 1), (1, \circ), (-1, \circ)$ و $(\circ, -1)$ را به ترتیب شریک چپ، شریک راست، شریک بالا و شریک پایین K می‌نامیم.



شکل ۳.۳: جفت‌های تفاضل متقارن برای مربع (x, y, z, t) در مشبک شاهوار به ازای $r = 2$.

قضیه ۹.۳.۳. [۷] کمترین تراکم $D(G_k, r)$ برای کد r -شناسایی در مشبک شاهوار در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} D(G_k, r) = \frac{2}{9} & r = 1 \\ D(G_k, r) = \frac{1}{4r} & r > 1 \end{cases}$$

برهان. برای حالت $r = 1$ در مرجع [۱۵] کران پایین و در مرجع [۹] کران بالا ارائه شده است. برای حالت $r > 1$ با استفاده از قضیه ۱.۲.۳ نامساوی $D(G_k, r) \leq \frac{1}{4r}$ برقرار است. حال نامساوی

$$D(G_k, r) \geq \frac{1}{4r}$$

فرض کنید \mathcal{E} و $\bar{\mathcal{E}}$ مجموعه‌های زیر باشند:

$$\mathcal{E} = \{K : K \subseteq Q_n\},$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \{K : K \cap Q_n \neq \emptyset\},$$

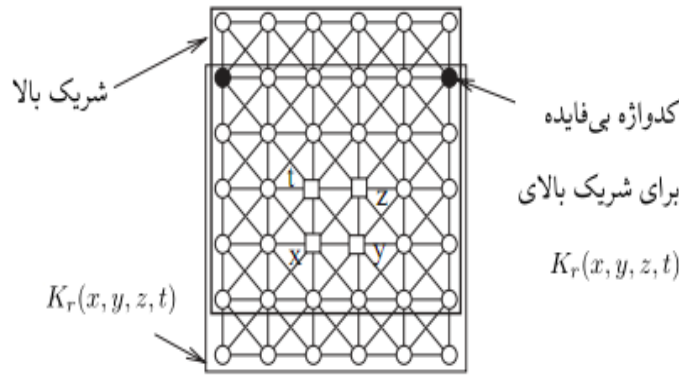
که

$$Q_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x| \leq n, |y| \leq n\}.$$

توجه کنید که $k \in \mathbb{N}$ مستقل از n (اما وابسته به r) وجود دارد به طوری که برای هر مقدار n داریم:

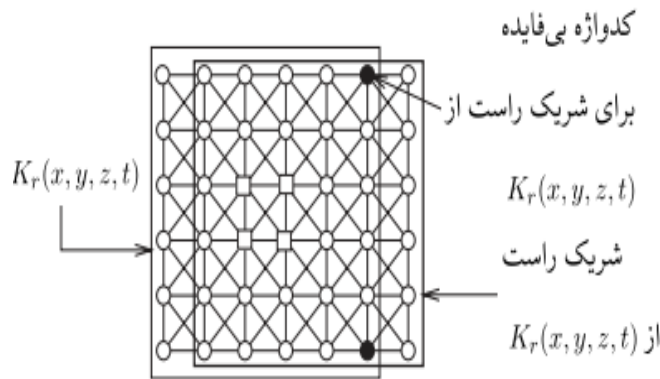
$$|\bar{\mathcal{E}}| - |\mathcal{E}| \leq kn \quad (3.3)$$

برای $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ، مجموعه‌های زیر و اندازه آن‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



شکل ۴.۳: $K \in \mathcal{E}'_r$ و شریک بالای آن برای $r = 2$. کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.

- \mathcal{E}_i = عناصری از \mathcal{E} که دقیقاً دارای i گوشه کدواژه‌اند
- \mathcal{E}'_r = عناصری از \mathcal{E}' که دقیقاً دارای دو گوشه کدواژه‌اند که بر ضلع یکسان افقی یا عمودی واقع‌اند
- \mathcal{E}''_r = عناصری از \mathcal{E}'' که دارای دو گوشه کدواژه‌اند که این کدواژه‌ها در گوشه‌های مقابل هم واقع‌اند
- p_i = اندازه \mathcal{E}_i
- p'_r = اندازه \mathcal{E}'_r
- p''_r = اندازه \mathcal{E}''_r
- $p = \sum_{i=0}^4 p_i$.



شکل ۵.۳: $K \in \mathcal{E}'_r$ و شریک راست آن برای $r = 2$

توجه کنید که روابط $p_2 = p'_2 + p''_2$ و $p = |\mathcal{E}|$ به وضوح برقرارند. برای هر k -شناسایی با مقادیر $r > 1$ ، نشان می‌دهیم رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{|C \cap Q_n|}{|Q_n|} \geq \frac{1}{4r} - \frac{(1 \circ k + 2h + 8)n}{8r|Q_n|} \quad (4.3)$$

که k ثابت تعریف شده در رابطه ۳.۳ است و h مقدار ثابتی است که در ادامه برهان معرفی می‌نماییم. با این فرض که n به بی‌نهایت میل کند قضیه ۹.۳.۳ را اثبات می‌کنیم.

برای این کار نشان خواهیم داد برای K داده شده، برخی از شریک‌های K باید شامل کدواژه‌هایی باشند که بی‌فایده‌اند این کدواژه‌ها را علامت‌دار می‌نامیم.

متناوباً K را در $\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, \mathcal{E}'_3$ و \mathcal{E}''_1 در نظر می‌گیریم و اگر K' یک شریک K باشد و $c \in K'$ علامت‌دار باشد آن‌ها را با دوتایی (c, K') نمایش می‌دهیم. خواهیم دید حالت‌های $K \in \mathcal{E}_1$ و $K \in \mathcal{E}_2$ را لازم نیست بررسی کنیم.

فرض کنید $K \in \mathcal{E}'_1$ و دو گوشه بالا از K کدواژه باشند؛ پس شریک بالا دارای دو کدواژه خواهد بود (شکل ۴.۳ را ببینید). کدواژه سمت راست می‌تواند برای شریک بالای K ، علامت‌دار باشد. به طور مشابه اگر دو کدواژه در گوشه‌ی پایین از K واقع شود آن‌گاه شریک پایین از K را در نظر می‌گیریم و گوشه راست از K هنوز برای شریک پایین از K بی‌فایده باقی می‌ماند. همچنین اگر دو کدواژه در گوشه‌ی راست از K واقع شود آن‌گاه شریک راست از K را در نظر می‌گیریم و گوشه بالا از K هنوز برای شریک راست از K بی‌فایده باقی می‌ماند. ۵.۳ حالتی را که دو کدواژه در گوشه‌های راست K هستند را نشان می‌دهد.

فرض کنید $K \in \mathcal{E}_3$ ؛ اگر دو گوشه بالا و گوشه پایین-راست کدواژه باشند (شکل ۶.۳) شریک‌های بالا و راست از K را در نظر می‌گیریم. اگر کدواژه‌ها در دیگر گوشه‌ها باشند به طور مشابه شریک‌ها را مطابقت می‌دهیم و دو شریک با یک کدواژه علامت‌دار در هر کدام را می‌یابیم.

فرض کنید $K \in \mathcal{E}_4$ ؛ در این حالت چهار شریک را در نظر می‌گیریم، برای شریک‌های بالا و راست، گوشه‌ی بالا-راست از K را علامت می‌زنیم. برای شریک پایین، گوشه‌ی پایین-راست از K را علامت می‌زنیم. برای شریک چپ، گوشه‌ی بالا-چپ از K را علامت می‌زنیم.

و در نهایت فرض کنید $K \in \mathcal{E}''_1$ ؛ این حالت کمی پیچیده‌تر است. شکل‌های ۷.۳ و ۸.۳ شانزده وضعیت ممکن را بر اساس محل قرار گرفتن سه کدواژه نشان می‌دهد و یک کدواژه بی‌فایده در این شریک‌ها را علامت گذاشته‌ایم. توجه کنید که برای K' داده شده، کدواژه‌ای که با عنوان بی‌فایده برای K' علامت‌گذاری می‌شود اگر $r > 1$ باشد در K' دو بار علامت‌گذاری نمی‌شود. برای درک این حالت ابتدا مشاهده می‌کنید که کدواژه‌های علامت‌دار در فاصله ۱ یا ۲ از گوشه‌های K' واقع‌اند و چون فرض بر $r > 1$ است، یک نقطه از K' در فاصله ۱ از یک گوشه K' نمی‌تواند همزمان در فاصله ۲ از گوشه دیگری از K' واقع شود. اگر c در فاصله ۱ از یک گوشه از K' واقع شود شش مکان ممکن برای قرار گرفتن c وجود دارد (چون c نمی‌تواند در گوشه چپ-پایین از K' واقع گردد). برای مثال اگر c در زیر گوشه بالا-چپ از K' باشد آن‌گاه تنها حالت ممکن برای این که c از K' علامت‌گذاری شود این است که K' شریک بالای K باشد (با توزیع مناسب کدواژه‌ها در گوشه‌های K)؛ پنج حالت دیگر به صورتی مشابه است. برای حالتی که c در فاصله ۲ از یک گوشه K' واقع شود مساله به روشی مشابه حل می‌گردد (در این حالت، K باید به \mathcal{E}''_1 تعلق داشته باشد و شکل ۷.۳ و ۸.۳ مورد استفاده قرار می‌گیرد تا نتیجه لازم حاصل گردد).

مشاهده می‌کنید که بر خلاف حالت‌های قبل، برای $r = 1$ ، یک کدواژه برای $K_r(x, y, z, t)$ داده شده، می‌تواند دو بار علامت‌گذاری گردد. این اتفاق در حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

- یک کدواژه روی ضلع افقی از K' می‌تواند توسط یک $K_r(x, y, z, t)$ علامت‌گذاری شود به طوری که K' شریک سمت چپ باشد و همزمان توسط $K_r(x, y, z, t)$ دیگری علامت‌گذاری شود به طوری که K' شریک سمت راست آن باشد (شکل ۹.۳ را ببینید).
- یک کدواژه روی ضلع عمودی از K' می‌تواند توسط یک $K_r(x, y, z, t)$ علامت‌گذاری شود به طوری که K' شریک سمت بالای باشد و همزمان توسط $K_r(x, y, z, t)$ دیگری علامت‌گذاری شود به طوری که K' شریک سمت پایین $K_r(x, y, z, t)$ باشد.

بنابراین نتایج حاصل از بیانات فوق به طور مستقیم برای حالت $r = 1$ معتبر نیستند. فرض کنید φ مجموعه جفت‌هایی باشد که به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\varphi = \{(K, c) : K \in \mathcal{E}, c \in C \cap Q_n, \text{ در } K \text{ علامت‌دار است}\}$$

از بررسی‌های فوق، هر عنصر از \mathcal{E}_2 یک دوتایی به صورت (K, c) تعریف می‌کند که c در K علامت‌دار است و به طور مشابه هر عنصر از \mathcal{E}_3 دوتا دوتایی و هر عنصر از \mathcal{E}_4 چهارتا دوتایی تعریف می‌کنند و تمام این دوتایی‌ها متمایزند هرگاه $r > 1$ باشد. به علاوه، چون تعداد $K_r(x, y, z, t)$ ‌های متعلق به \mathcal{E} که یکی (یا بیشتر) از چهار شریک آن در \mathcal{E} نیست حداکثر برابر $4n$ است، نامساوی زیر برقرار است.

$$|\varphi| \geq p_2 + 2p_3 + 4p_4 - 4n \quad \text{اگر } r > 1 \quad (5.3)$$

فرض کنید φ' مجموعه جفت‌هایی باشد که به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\varphi' = \{(K, c) : K \in \bar{\mathcal{E}}, c \in C \cap Q_n, \text{ از گوشه‌ای } K \text{ است}\}.$$

این مجموعه دقیقاً $4 \times |C \cap Q_n|$ عضو دارد. از طرفی دیگر با تعریف q_i به صورت، تعداد $K_r(x, y, z, t)$ ‌هایی که با Q_n اشتراک دارند و دقیقاً i گوشه دارند که کدواژداند، اندازه φ' حداکثر برابر $\sum_{i=0}^4 i \times q_i$ است و بنابراین داریم:

$$4 \times |C \cap Q_n| = |\varphi'| \leq \sum_{i=0}^4 i \times q_i.$$

و چون

$$|\bar{\mathcal{E}}| - |\mathcal{E}| \leq kn,$$

برای $0 \leq i \leq 4$ داریم:

$$q_i \leq p_i + kn,$$

و بنابراین

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 \geq 4 \times |C \cap Q_n| - 1 \circ kn. \quad (6.3)$$

فرض کنید φ'' مجموعه جفت‌هایی باشد که به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\varphi'' = \{(K, c) : K \in \mathcal{E}, c \in C \cap Q_n, c \in K\}.$$

و با استفاده از رابطه $|K| = 8r + 4$ ، به سادگی به این نتیجه می‌رسیم که مجموعه فوق حداکثر دارای $(8r + 4) \times |C \cap Q_n|$ عضو دارد. از طرفی دیگر از لم ۷.۳.۳، اندازه این مجموعه حداقل برابر است با:

$$\sum_{i=0}^4 p_i \times \phi_i + |\varphi|.$$

بنابراین

$$(8r + 4) \times |C \cap Q_n| \geq p_0 + 3(p_1 + p_2 + p_3) + 4p_4 + |\varphi|.$$

همچنین رابطه زیر برقرار است.

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = p,$$

و در نتیجه داریم:

$$(8r + 4) \times |C \cap Q_n| \geq 2p + p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + |\varphi|.$$

$h \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر n ، رابطه $p \geq |Q_n| - hn$ برقرار است بنابراین داریم:

$$(8r + 4) \times |C \cap Q_n| \geq 2|Q_n| + p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + |\varphi| - 2hn. \quad (7.3)$$

از طرفی دیگر با استفاده از رابطه ۵.۳ داریم:

$$p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + |\varphi| \geq p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + p_2 + 2p_3 + 4p - 8n,$$

بنابراین

$$p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + |\varphi| \geq p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 - 8n.$$

و با استفاده از رابطه ۶.۳ به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + |\varphi| \geq 4 \times |C \cap Q_n| - 1 \circ kn - 8n.$$

و با استفاده از رابطه ۷.۳ نامساوی زیر برقرار است.

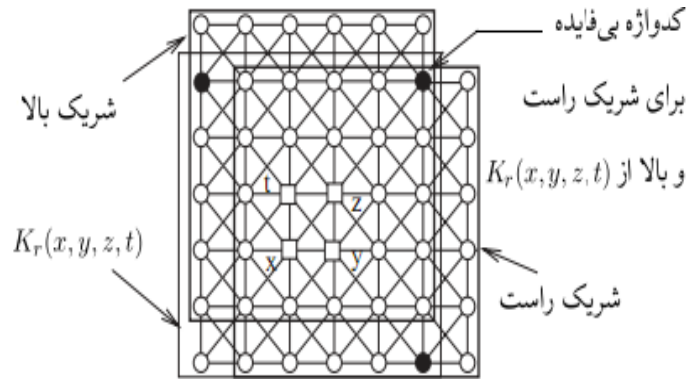
$$(8r + 4) \times |C \cap Q_n| \geq 2|Q_n| + 4 \times |C \cap Q_n| - (1 \circ k + 2h + 8)n,$$

و در نهایت داریم:

$$\frac{|C \cap Q_n|}{|Q_n|} \geq \frac{1}{4r} - \frac{(1 \circ k + 2h + 8)n}{8r|Q_n|},$$

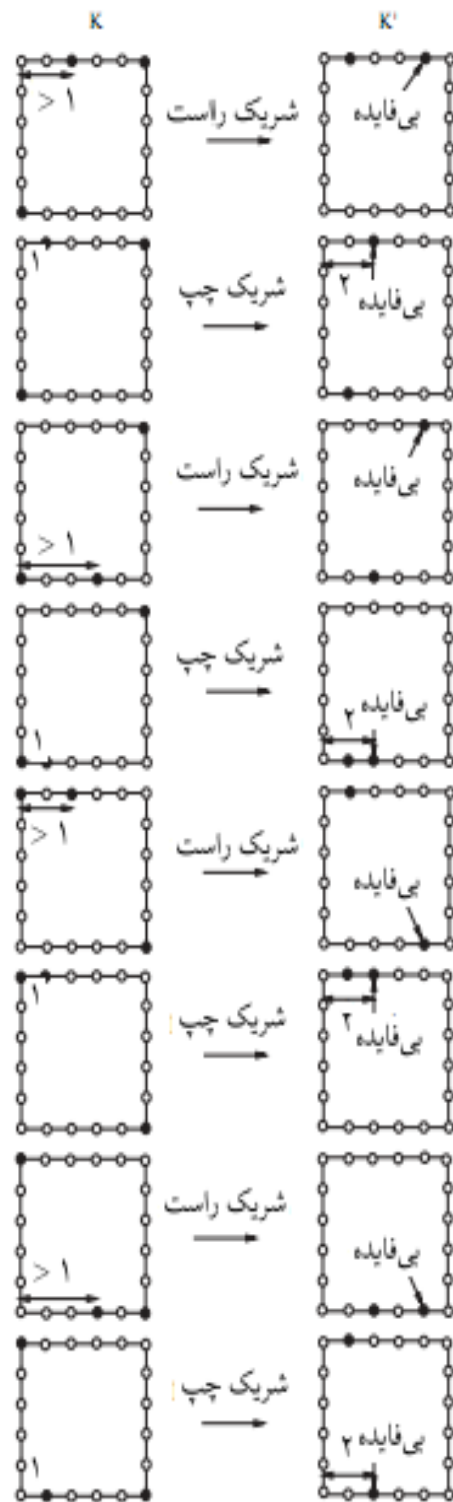
حال با توجه به این که $|Q_n| = (2n + 1)^2$ است، وقتی n به بی‌نهایت میل کند رابطه زیر برقرار است.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|C \cap Q_n|}{|Q_n|} \geq \frac{1}{4r}$$



شکل ۶.۳: $K \in \mathcal{E}_3$ و شریک بالای آن برای $r = 2$

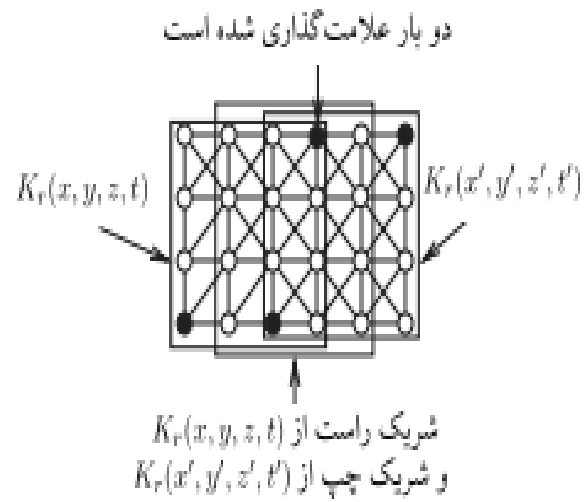
□



شکل ۷.۳: $K \in \mathcal{E}''$ و شریک‌های آن



شکل ۸.۳: $K \in \mathcal{E}''$ شریک‌های آن



شکل ۹.۳: $K \in \mathcal{E}_3$ و شریک راست و بالای آن برای $r = 2$

فصل ۴

کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی در زنجیرها و دورها

۱.۴ مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم زنجیر متناهی و نامتناهی و دور را معرفی می‌نماییم. سپس به بررسی کوچکترین اندازه و تراکم کدهای r -شناسایی و r -احاطه‌گر مکانی در زنجیرها و دورها می‌پردازیم.

۲.۴ زنجیر نامتناهی

تعریف ۱.۲.۴. [۱] زنجیر نامتناهی $G = CH_\infty$ دارای مجموعه رئوس $V = \mathbb{Z}$ و مجموعه یال‌های $E = \{\{i, i+1\} : i \in \mathbb{Z}\}$ است.

کمترین تراکم کدهای r -شناسایی و r -احاطه‌گر مکانی را به ترتیب با نمادهای $d_r^I(CH_\infty)$ و $d_r^{LD}(CH_\infty)$ نمایش می‌دهیم. در دو زیربخش بعد مقدار دقیق $d_r^I(CH_\infty)$ و $d_r^{LD}(CH_\infty)$ را برای مقادیر $r \geq 1$ ارائه می‌کنیم. قبل از این کار یک تعریف و یک لم ساده اما مفید را ارائه می‌نماییم.

تعریف ۲.۲.۴. [۱] برای کد داده شده C در CH_∞ ، دو رأس x و y که به C تعلق ندارند را C -متوالی نامیم هرگاه تمام رئوس بین x و y متعلق به C باشند.

لم ۳.۲.۴. [۱] فرض کنید $r \geq 1$ عددی صحیح باشد و C یک کد در CH_∞ باشد.

۱. اگر تمام رئوس توسط C ، r -پوشیده شوند و تمام جفت‌های متوالی از رئوس توسط C ، r -مجزا گردند، آن‌گاه C کد r -شناسایی است.

۲. اگر تمام رئوس توسط C ، r -پوشیده شوند و تمام جفت‌های C -متوالی از رئوس توسط C ، r -مجزا گردند، آن‌گاه C کد r -احاطه‌گر مکانی است.

۳. هر کدواژه می‌تواند حداکثر دو جفت از رئوس متوالی را از هم r -مجزا کند.

۴. هر کدواژه می‌تواند حداکثر دو جفت از رئوس C -متوالی را از هم r -مجزا کند.

برهان. ۱. چون تمامی رئوس توسط C پوشیده می‌شوند، تمامی مجموعه‌های $K_{C,r}(v)$ ناتهی خواهند بود. از طرفی، چون هر گوی در CH_∞ شامل اعداد صحیح متوالی است و بنابه فرض، رئوس متوالی توسط C ، r -مجزا هستند، به این نتیجه می‌رسیم که برای هر دو رأس دلخواه مانند u و v در $V(CH_\infty)$ نامساوی $K_{C,r}(u) \neq K_{C,r}(v)$ برقرار است. بنابراین C کد r -شناسایی است.

۲. برهان این قسمت مشابه برهان بند ۱ است.

۳. کدواژه $x \in C$ دو جفت از اعداد صحیح متوالی $(x-r-1, x-r)$ و $(x+r, x+r+1)$ را از هم مجزا می‌کند.

۴. فرض کنید (i_k) دنباله ای از رئوس باشد که به C تعلق ندارند، این دنباله می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد؛ فرض کنید l و l' اعداد صحیحی باشند به طوری که $0 < l \leq r$ و $l' > r$ باشد. کدواژه x می‌تواند حداکثر دو نوع از غیرکدواژه‌های C -متوالی زیر را از هم مجزا کند.

$$i_k = x \pm l \in B_r(x) \setminus \{x\} \text{ و } i_{k+1} = x + l' \notin B_r(x) \bullet$$

$$i_{k+1} = x \pm l \in B_r(x) \setminus \{x\} \text{ و } i_k = x - l' \notin B_r(x) \bullet$$

□

۱.۲.۴ کدهای شناسایی در زنجیر نامتناهی

بهترین تراکم کد شناسایی در زنجیر نامتناهی، به r بستگی ندارد.

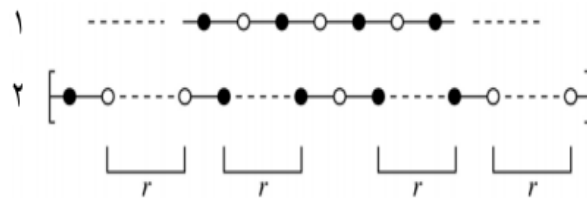
قضیه ۱.۴.۲.۴ [۱] برای هر $r \geq 1$ ، تساوی زیر برقرار است.

$$d_r^I(CH_\infty) = \frac{1}{r}.$$

برهان. ابتدا یک کران پایین ارائه می‌نماییم. فرض کنید C یک کد شناسایی نابرابر با \mathbb{Z} باشد. حال فرض کنید $i \in \mathbb{Z}$ رأسی باشد که کدواژه نیست. تفاضل متقارن $B_r(i+r) \Delta B_r(i+r+1)$ برابر است با مجموعه $\{i, i+2r+1\}$ است؛ در نتیجه اگر i کدواژه نباشد، آنگاه $i+2r+1$ باید کدواژه باشد زیرا کدهای $i+r$ و $i+r+1$ باید از هم مجزا باشند. بنابراین هر غیرکدواژه i یک کدواژه مانند $i+2r+1$ را القا می‌کند. این استدلال نشان می‌دهد که $d_r^I(CH_\infty) \geq \frac{1}{r}$ است.

سپس برای اثبات کران بالا، یک ساختار از کد r -شناسایی، با تراکم نیم ارائه می‌نماییم. در حقیقت دو ساختار متفاوت ارائه می‌کنیم که دومی به r بستگی دارد و متناوب است و با تکرار الگوی بین گروه حاصل می‌گردد (این الگو شامل $2r+2$ رأس می‌باشد). شکل ۱.۴ را ببینید، در هر دو ساختار اولاً،

همه رئوس توسط C پوشیده می‌شوند؛ ثانیاً با حرکت از چپ به راست، هر رأس i توسط C از رأس $i - 1$ مجزا می‌شود رأس i یا یک کدواژه در سمت راستش دریافت می‌کند و یا یک کدواژه در سمت چپش از دست می‌دهد. بنابراین با استفاده از لم ۳.۲.۴ بند ۱، C یک کد شناسایی است. \square



شکل ۱.۴: دو کد r -شناسایی متناوب با تراکم $\frac{1}{r}$ در \mathcal{CH}_∞ . کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.

۲.۲.۴ کدهای احاطه‌گر مکانی در زنجیر نامتناهی

قضیه ۵.۲.۴. [۱]

$$\begin{cases} d_1^{LD}(\mathcal{CH}_\infty) = \frac{2}{5} \\ d_r^{LD}(\mathcal{CH}_\infty) = \frac{1}{3} \quad r > 1 \end{cases}$$

برای هر $r > 1$

برهان. دو حالت $r = 1$ و $r > 1$ را جداگانه بررسی می‌کنیم.

۱. حالت $r = 1$: پنج رأس متوالی مانند ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را در نظر می‌گیریم ثابت می‌کنیم حداقل دو رأس از رئوس ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ در کد ۱-احاطه‌گر مکانی باید کدواژه باشند. برای این کار حالت‌های زیر را داریم:

- اگر دو یا سه کدواژه در میان رئوس ۲، ۳ و ۴ وجود داشته باشد، برهان تمام است.
- اگر هیچ کدواژه‌ای در میان رئوس ۲، ۳ و ۴ وجود نداشته باشد، آن‌گاه ۳ توسط C پوشیده نمی‌شود.
- اگر یک کدواژه در میان رئوس ۲، ۳ و ۴ وجود داشته باشد، آن‌گاه بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید ۲ یا ۳ کدواژه باشد؛ اگر ۲ کدواژه باشد، آن‌گاه ۴ باید توسط C پوشیده شود و ۵ نیز کدواژه است. اگر ۳ کدواژه باشد، آن‌گاه ۱ یا ۵ کدواژه است زیرا ۲ و ۴ باید توسط C مجزا گردند.

استدلال فوق کران پایین را اثبات می‌کند. شکل ۲.۴ (آ) الگویی از ۵ رأس را نشان می‌دهد که با تکرار متناوب این الگو به کد ۱-احاطه‌گر مکانی می‌رسیم. این الگو کد ۱-احاطه‌گر مکانی است زیرا تمام رئوس غیرکدواژه توسط C ، ۱-پوشیده می‌شوند و هر دو رأس C -متوالی، ۱-مجزا

هستند. بنابراین از لم ۳.۲.۴ بند ۲، C یک کد ۱-احاطه‌گر مکانی است و برهان حالت $r = 1$ تمام است.

۲. حالت $r \geq 2$: مجدداً ابتدا یک کران پایین ارائه می‌نماییم. فرض کنید C کد r -احاطه‌گر مکانی باشد، $Q_n = \{-n, \dots, n\}$ و $p_n = |C \cap Q_n|$ ، که n عدد صحیح مثبت است. در Q_n به تعداد $2n + 1 - p_n$ غیرکدواژه وجود دارد. زیرا $|Q_n| = 2n + 1$ و p_n تعداد کدواژه‌های Q_n است و بنابراین $\max\{0, 2n - p_n\}$ جفت از رئوس C -متوالی وجود دارد. چون هیچ کدواژه‌ای در خارج از Q_{n+r} روی Q_n تأثیری ندارد و چون لم ۳.۲.۴ بند ۴ هنوز برقرار است، نامساوی‌های زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} 2p_{n+r} &\geq 2n - p_n; \\ 2p_{n+r} + p_n &\geq 2n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

و با استفاده از نامساوی $p_{n+r} \leq p_n + 2r$ نتایج زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} -2p_{n+r} &\geq -2p_n - 4r; \\ -2p_{n+r} + 2p_n + 4r &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

طرفین دو نامساوی ۱.۴ و ۲.۴ را با هم جمع می‌کنیم و داریم:

$$3p_n + 4r \geq 2n$$

و چون $|Q_n| = 2n + 1$ است، نامساوی زیر برقرار است:

$$3p_n + 4r \geq |Q_n| - 1$$

و در نتیجه نامساوی زیر برقرار است:

$$\frac{p_n}{Q_n} \geq \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1 + 4r}{|Q_n|} \right)$$

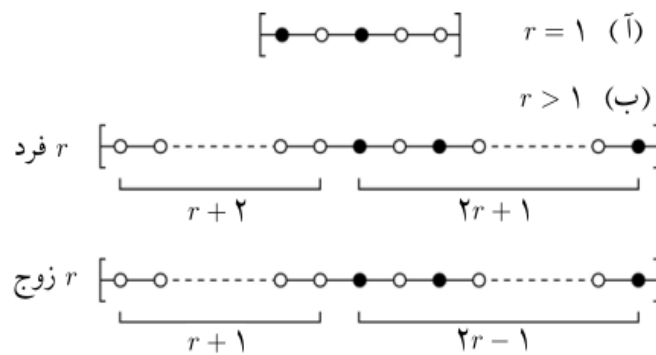
حال اگر n به بی‌نهایت میل کند، Q_n به بی‌نهایت میل می‌کند و چون r عددی ثابت است، $\frac{1+4r}{|Q_n|}$ به صفر میل می‌کند و داریم:

$$\frac{p_n}{Q_n} \geq \frac{1}{3}.$$

ساختار کد r -احاطه‌گر مکانی با تراکم $\frac{1}{r}$ در شکل ۲.۴ (ب) ارائه گردیده است که به صورت متناوب از الگویی شامل $3r + 3$ رأس برای r فرد استفاده شده است و از الگویی متناوب شامل $3r$ رأس برای r زوج استفاده شده است.

دوباره اگرچه خسته‌کننده است اما به سادگی می‌توانید ببینید که تمام غیرکدواژه‌ها توسط C پوشیده می‌شوند و با مقایسه مجموعه‌های $K_{C,r}(i)$ و $K_{C,r}(j)$ که i و j غیرکدواژه‌های C -متوالی هستند و i و j به الگوهای شکل ۲.۴ (ب) تعلق دارند؛ به این نتیجه می‌رسیم که i و j ، r -مجزاینند و بنابراین C کد r -احاطه‌گر مکانی است و برهان تمام است.

□



شکل ۲.۴: کد r -احاطه‌گر مکانی متناوب با تراکم $\frac{1}{r}$ ($r > 1$) و $\frac{1}{2}$ ($r = 1$) در \mathcal{CH}_∞ . کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.

۳.۴ زنجیرهای متناهی

تعریف ۱.۳.۴. [۱] زنجیر متناهی n رأسی، $G = \mathcal{CH}_n$ ، دارای مجموعه رئوس $V = \{1, \dots, n\}$ و مجموعه یال‌های $E_n = \{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq n-1\}$ می‌باشد.

تعریف ۲.۳.۴. [۱] $M_r^I(\mathcal{CH}_n)$ و $M_r^{LD}(\mathcal{CH}_n)$ را به ترتیب کمترین اندازه کد r -شناسایی و r -احاطه‌گر مکانی در \mathcal{CH}_n تعریف می‌کنیم.

در زیربخش بعدی مقدار دقیق $M_1^I(\mathcal{CH}_n)$ را به ازای مقادیر $n \geq 1$ ارائه می‌دهیم؛ برای مقادیر $r > 1$ یک کران پایین و یک کران بالا برای $M_r^I(\mathcal{CH}_n)$ ارائه می‌نماییم به طوری که کران بالا و پایین باهم برابر خواهند بود.

ملاحظه ۳.۳.۴. اگر \mathcal{CH}_n را جایگزین \mathcal{CH}_∞ نماییم، چهار بند لم ۳.۲.۴ همچنان برقرار خواهند بود.

ملاحظه ۴.۳.۴. اگر $n \leq 2r$ باشد، آنگاه کد r -شناسایی در \mathcal{CH}_n وجود ندارد.

برهان. اگر $n \leq 2r$ باشد، آنگاه دو رأس متمایز v_1 و v_2 وجود دارد به طوری که $B_r(v_1) = B_r(v_2)$ است. و با استفاده از ملاحظه ۶.۲ کد r -شناسایی وجود ندارد. برای مثال اگر قرار دهید $n = 2r$ ، آنگاه تساوی $B_r(r) = B_r(r+1) = V_n$ برقرار است. \square

۱.۳.۴ کدهای شناسایی در زنجیرهای متناهی

ابتدا حالت $r = 1$ را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۵.۳.۴. [۱]

$$M_1^I(\mathcal{CH}_n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{اگر } n \geq 1 \text{ و فرد باشد} \\ \frac{n}{2} + 1 & \text{اگر } n \geq 4 \text{ و زوج باشد} \end{cases}$$

برهان. حالت $n = 1$ بی‌اهمیت است. با توجه به ملاحظه ۴.۳.۴، در \mathcal{CH}_2 کد شناسایی وجود ندارد. بنابراین کد ۱-شناسایی در \mathcal{CH}_n را در نظر می‌گیریم که $n \geq 3$ باشد. اگر C کد شناسایی باشد، حداکثر به اندازه $|C|$ رأس مانند i وجود دارد به طوری که $|K_{C,1}(i)| = 1$ است. (اگر تعداد رئوس i با خاصیت $|K_{C,1}(i)| = 1$ ، از $|C|$ بیشتر باشد، آنگاه حداقل دو رأس مانند i و j وجود دارد به طوری که $K_{C,1}(i) = K_{C,1}(j)$ است و بنابراین حداقل دو رأس از هم مجزا نیستند). و رئوس دیگر باید توسط حداقل دو کدواژه پوشیده شوند. بنابراین $n - |C|$ رأس دیگر در همسایگی خود، حداقل دو کدواژه دارند بنابراین نامساوی زیر برقرار است:

$$1 \cdot |C| + 2 \cdot (n - |C|) \leq \sum_{c \in C} |B_1(c)| \leq 3|C|$$

حال طرفین راست و چپ نامساوی فوق را با هم ساده نموده و نامساوی زیر برقرار است:

$$|C| \geq \frac{n}{3}. \quad (3.4)$$

حال با توجه به زوج یا فرد بودن n دو حالت زیر را رخ می‌دهد:

(۱) $n \geq 3$ فرد است و با استفاده از نامساوی ۳.۴ رابطه $|C| \geq \frac{n+1}{3}$ بدست می‌آید. از طرفی دیگر، $C = \{1, 3, \dots, n\}$ شامل $\frac{n+1}{3}$ کدواژه است و کد ۱-شناسایی است زیرا تمام کدواژه‌ها توسط خودشان پوشیده می‌شوند و هر غیرکدواژه مانند i توسط دو کدواژه $i-1$ و $i+1$ پوشیده می‌شود؛ بنابراین تمام رئوس متوالی از هم مجزا هستند. بنابراین با استناد به لم ۳.۲.۴ بند ۱، C کد r -شناسایی است.

(۲) $n \geq 4$ زوج است و با استفاده از نامساوی ۳.۴ داریم: $|C| \geq \frac{n}{3}$. حال اگر مشابه روش قبل $C = \{1, 3, \dots, n-1\}$ باشد، آنگاه تساوی $K_{C,1}(n-1) = K_{C,1}(n) = \{n-1\}$ برقرار است و این روش به شکست منجر می‌شود. بنابراین اگر $|C| = \frac{n}{3}$ باشد حداقل یک بار، حداقل

دو کدواژه متوالی مانند i و $i + 1$ خواهیم داشت. الزاماً $i - 1$ یا $i + 2$ نیز باید کدواژه باشد (در غیر این صورت $K_{C,1}(i) = K_{C,1}(i + 1)$ خواهد بود) و این بدین معناست که حداقل یک بار، حداقل سه کدواژه متوالی خواهیم داشت.

حال چهار رأس متوالی $j, j + 1, j + 2, j + 3$ را در نظر بگیرید. از میان این رئوس حداقل دو رأس باید کدواژه باشند، چه $j - 1$ و $j + 4$ کدواژه باشند، چه نباشند، زیرا $j + 1$ و $j + 2$ باید توسط C پوشیده شوند و از هم مجزا باشند.

در نهایت فرض کنید که وقوع سه کدواژه متوالی در سه رأس $i, i - 1$ و $i + 1$ رخ داده است که $1 \leq i \leq n - 1$ است. هر گروه چهارتایی از رئوس در سمت راست کدواژه $i + 1$ مانند

$$\{i + 2, i + 3, i + 4, i + 5\}, \dots, \{i + 4k - 2, i + 4k - 1, i + 4k, i + 4k + 1\}, k \geq 0$$

که $n - 3 \leq i + 4k + 1 \leq n$ ، شامل حداقل دو کدواژه است. وضعیت یکسانی را برای گروه‌های چهارتایی سمت چپ از کدواژه $i - 1$ ، مانند

$$\{i - 2, i - 3, i - 4, i - 5\}, \dots, \{i - 4k' + 2, i - 4k' + 1, i - 4k', i - 4k' - 1\}, k' \geq 0$$

داریم که $1 \leq i - 4k' - 1 \leq 4$ است.

غیر از کدواژه‌های $i + 1, i, i - 1$ و گروه‌های چهارتایی فوق که مجموعاً $3 + 4k + 4k'$ رأس هستند و دارای $3 + 2k + 2k'$ کدواژه می‌باشند، می‌توان حالت‌هایی را در نظر گرفت که رئوسی دیگر در دو انتهای CH_n وجود دارند؛ در هر انتها حالت‌های زیر ممکن است رخ دهد.

- هیچ رأسی وجود ندارد.
- یا یک رأس وجود دارد که الزاماً کدواژه نیست.
- یا دو رأس وجود دارد که یکی از آن‌ها الزاماً کدواژه است (به این دلیل که انتهای زنجیر باید پوشیده شود).
- یا سه رأس وجود دارد که الزاماً دو رأس کدواژه است (به این دلیل که رئوس انتهای زنجیر باید پوشیده شوند و از هم مجزا باشند).

چون n زوج است بنابراین در هر دو انتها، 5 یا 3 یا 1 رأس اضافی داریم که به ترتیب در بهترین حالت 3 یا 1 یا 0 کدواژه هستند. بیانات فوق نشان‌دهنده این است که حداقل اندازه کد 1 -شناسایی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} 3 + 2k + 2k' + b &= \frac{(5 + 4k + 4k' + a) + (2b - a + 1)}{2} \\ &= \frac{(n + 2) + (2b - a + 1)}{2} \\ &\geq \frac{n + 2}{2}. \end{aligned}$$

از طرفی دیگر، $C = \{1, 3, \dots, n-7, n-5, n-3, n-2, n-1\}$ کد ۱-شناسایی با $\frac{n}{4} + 1$ کدواژه است زیرا $2 - \frac{n}{4}$ کدواژه ابتدا، فقط و فقط توسط خودشان پوشیده می‌شوند،

$$K_{C,r}(n-3) = \{n-3, n-2\}, K_{C,r}(n-2) = \{n-3, n-2, n-1\}, K_{C,r}(n-1) = \{n-2, n-1\}$$

و برای غیرکدواژه‌ها، هر غیرکدواژه i به جز n توسط دو کدواژه $i-1$ و $i+1$ پوشیده می‌شود و غیرکدواژه n ، توسط کدواژه $n-1$ پوشیده می‌شود. بنابراین تمامی رئوس پوشیده می‌شوند و رئوس متوالی ۱-مجزا هستند و بنابراین C کد ۱-شناسایی است و برهان تمام است.

□

برای $r > 1$ ، ابتدا یک کران پایین ارائه می‌نماییم.

قضیه ۶.۳.۴. [۱] برای $r \geq 2$ و $n \geq 2r+1$ ، نامساوی زیر برقرار است.

$$M_r^I(\mathcal{CH}_n) \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

برهان. فرض کنید C ، کد r -شناسایی در \mathcal{CH}_n باشد و i غیرکدواژه‌ای باشد که $1 \leq i \leq n-(2r+1)$ ؛ در این صورت $i+2r+1$ کدواژه است زیرا $i+r$ و $i+r+1$ باید توسط C از هم مجزا گردند و این یعنی تعداد کدواژه‌هایی مانند $i+2r+1$ که در بازه $[2r+2, 2n]$ وجود دارند از تعداد غیرکدواژه‌هایی مانند i ، که در بازه $[1, n-2r-1]$ وجود دارند بیشتر است، بنابراین:

$$|(V_n \setminus C) \cap [1, n-2r-1]| \leq |C \cap [2r+2, n]|. \quad (4.4)$$

از طرفی دیگر می‌دانیم n نشان‌دهنده مجموع کدواژه‌ها در بازه $[2r+2, n] \cup [1, 2r+1]$ به علاوه‌ی غیرکدواژه‌ها در بازه $[n-2r, n] \cup [n-2r-1, 1]$ است و تساوی زیر برقرار است:

$$n = |C \cap [1, 2r+1]| + |C \cap [2r+2, n]| + |(V_n \setminus C) \cap [1, n-2r-1]| + |(V_n \setminus C) \cap [n-2r, n]|,$$

حال عبارت $|C \cap [1, 2r+1]|$ را به طرف دوم تساوی فوق اضافه و کم می‌کنیم و با استفاده از نامساوی ۴.۴ نتیجه زیر برقرار است:

$$n \leq 2|C| - |C \cap [1, 2r+1]| + |(V_n \setminus C) \cap [n-2r, n]|.$$

از طرفی r جفت از رئوس $(i, i+1)$ ، که $1 \leq i \leq r$ است، فقط توسط رأس $i+r+1$ می‌توانند از هم مجزا شوند، بنابراین

$$C \cap [1, 2r+1] \supseteq \{r+2, r+3, \dots, 2r+1\},$$

اما رأس ۱ هنوز توسط C پوشیده نشده است. بنابراین $|C \cap [1, 2r+1]| \geq r+1$.

همچنین به روشی مشابه، نامساوی زیر برقرار است:

$$|C \cap [n-2r, n]| \geq r+1, |(V_n \setminus C) \cap [n-2r, n]| \leq r$$

نهایتاً نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$n \leq 2|C| - (r + 1) + r = 2|C| - 1,$$

$$|C| \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

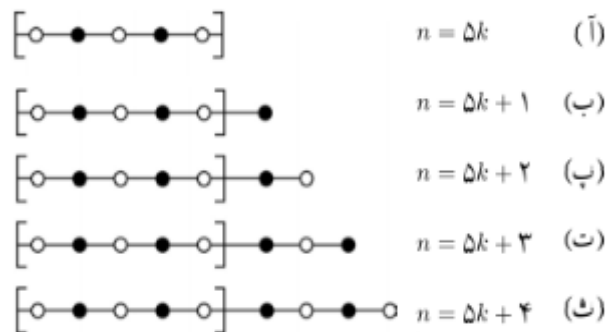
□

حال برای r داده شده، برای بی‌نهایت از مقادیر n ، ساختاری از کد r شناسایی را ارائه می‌دهیم که بر کران پایین در قضیه ۶.۳.۴ منطبق است و $\frac{n+1}{2}$ عضو دارد.

قضیه ۷.۳.۴ [۱] فرض کنید k عددی صحیح و نامنفی باشد. به ازای عدد ثابت $r \geq 2$ و عدد طبیعی $n = (4r + 2)k + 1$ ، نامساوی زیر برقرار است.

$$M_r^I(\mathcal{CH}_n) \leq \frac{n+1}{2}.$$

برهان. حالت $k = 0$ بی‌اهمیت است. بنابراین فرض می‌کنیم $k \geq 1$ باشد. الگویی با $4r + 2$ رأس و $2r + 1$ کدواژه مانند شکل ۱.۴ را در نظر بگیرید. این الگو را $k - 1$ مرتبه در سمت چپ تکرار کنید و یک کدواژه به سمت راست اضافه کنید تا $C \subseteq V_n$ بدست آید که دارای $k(2r + 1) + 1 = \frac{n+1}{2}$ عضو دارد. با استدلالی مشابه برهان قضیه ۴.۲.۴، C کد r -شناسایی خواهد بود. □



شکل ۳.۴: کد ۱-احاطه‌گر مکانی در \mathcal{CH}_n . کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.

۲.۳.۴ کدهای احاطه‌گر مکانی در زنجیره‌های متناهی

ابتدا حالت $r = 1$ را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۸.۳.۴ [۲۵] به ازای هر $n \geq 1$ ، تساوی زیر برقرار است.

$$M_r^{LD}(\mathcal{CH}_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$$

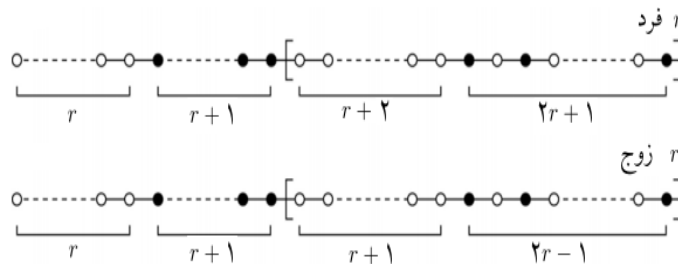
$[1, r+1]$ نمی‌تواند یک جفت از رئوس سمت چپ خودش را از هم مجزا کند؛ همچنین یک کدواژه در $[n-r, n]$ نمی‌تواند یک جفت از رئوس سمت راست خودش را از هم مجزا کند. بنابراین،

$$2 \cdot (|C| - p - q) + 1 \cdot (p + q) \geq n - |C| - 1,$$

$$3|C| \geq n - 1 + p + q \geq n + 1,$$

و در نتیجه نامساوی $M_r^{LD}(\mathcal{CH}_n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$ برقرار است. \square

حالت تساوی در کران پایین ارائه شده در قضیه قبل، برای برخی از مقادیر n رخ می‌دهد که در شکل ۴.۴ آمده است. با این وجود موفق نشده‌ایم فاصله بین کرانه پایین در قضیه ۹.۳.۴ و کران بالای ارائه شده در زیر را به کمتر از cr کاهش دهیم که c برای بی‌نهایت مقدار n در \mathcal{CH}_n تا $\frac{1}{3}$ متغیر است. هنوز بر این باوریم که تساوی در کران پایین قضیه ۹.۳.۴، برای تعداد نامتناهی از مقادیر n رخ می‌دهد.



شکل ۵.۴: الگوهایی برای کدهای r -احاطه‌گر مکانی در \mathcal{CH}_n . کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.

قضیه ۱۰.۳.۴. [۱] فرض کنید k عددی صحیح و نامنفی و $r \geq 2$ باشد؛

۱. اگر r زوج و $n = 3kr + 2r + 1$ باشد، آن‌گاه

$$M_r^{LD}(\mathcal{CH}_n) \leq \frac{n+1}{3} + \frac{r+1}{3};$$

۲. اگر r فرد و $n = k(3r+3) + 2r + 1$ باشد، آن‌گاه

$$M_r^{LD}(\mathcal{CH}_n) \leq \frac{n+1}{3} + \frac{r+1}{3};$$

۳. برای هر $n \geq 2r + 1$ ، نامساوی زیر برقرار است.

$$M_r^{LD}(\mathcal{CH}_n) \leq \left\lceil \frac{n+1}{3} + \frac{7r+5}{3} \right\rceil.$$

برهان. ۱. در حالتی که r زوج باشد از شکل ۵.۴ استفاده می‌کنیم. اگر $k = 1$ باشد، ساختار ارائه شده را در نظر بگیرید. اگر $k = 0$ باشد، فقط بخش سمت چپ با $2r + 1$ رأس را در نظر بگیرید. اگر $k \geq 2$ باشد، الگوی بین دو گروه را $k - 1$ بار در سمت راست تکرار کنید.

کد C تشکیل شده در زنجیر به طول $n = 3kr + 2r + 1$ دارای $kr + r + 1$ عنصر است. بنابراین $|C| = \frac{(n+r+2)}{3}$ است و بررسی این که C کد احاطه‌گر مکانی است با استفاده از الگوی ارائه شده سراسر است.

۲. اگر r فرد باشد مشابه بند ۱. ساختار C^* را با استفاده از شکل ۵.۴ بسازید؛ کد C^* در زنجیر به طول

$n = k(3r+3) + 2r + 1$ دارای $k(r+1) + r + 1$ عنصر است. بنابراین $|C^*| = \frac{n+r+2}{3}$ است و بررسی کد r -احاطه‌گر مکانی بودن C^* با استفاده از الگوی ارائه شده سراسر است.

۳. اگر r زوج باشد، s کدواژه به سمت چپ ساختار سابق C بیفزایید که $1 \leq s \leq 3r - 1$ است.

C_s ساخته شده، دارای $kr + r + 1 + s$ عنصر در یک زنجیر به طول $n_s = 3kr + 2r + 1 + s$

است. با حرکت در بین $3kr + 2r + 2$ و $3r(k+1) + 2r + 3kr + 2r + 1 + 3r = 3r(k+1) + 2r + 3$: تمام

طول‌های $n \geq 2r + 1$ و C_s در نظر گرفته شده، کد r -احاطه‌گر مکانی دارای اندازه کران دار $\frac{(n_s + r + 2 + 2s)}{3} \leq \frac{(n_s + 7r)}{3}$ است.

اگر r فرد باشد، s کدواژه به سمت چپ ساختار سابق C^* بیفزایید که $1 \leq s \leq 3r + 2$ است. کد C_s^*

ساخته شده دارای $k(r+1) + r + 1 + s$ عنصر در یک زنجیر به طول $n_s^* = k(3r+3) + 2r + 1 + s$ خواهد

بود، با حرکت در بین $k(3r+3) + 2r + 2$ و $(k+1)(3r+3) + 2r + k(3r+3) + 2r + 1 + 3r + 2 = (k+1)(3r+3) + 2r + 3$:

تمام طول‌های $n \geq 2r + 1$ و C_s^* در نظر گرفته شده، کد r -احاطه‌گر مکانی با اندازه زیر خواهد

بود. $\frac{(n_s + r + 2s + 2)}{3} \leq \frac{(n_s + 7r + 6)}{3}$. \square

با بررسی‌های بیشتر، نتایج قضیه ۱۰.۳.۴ بند ۳ می‌تواند اندکی بهبود یابد. چون به وضوح نیازی

نیست که تمام کدواژه‌های اضافه شده به سمت چپ ساختار، کدواژه باشند.

ساختارها برای $r = 2$ و $r = 3$ ایده‌ای می‌دهند تا به بیان حدس زیر بپردازیم.

حدس ۱۰.۳.۴. برای هر $r \geq 2$ ثابت، به تعداد نامتناهی از مقادیر n وجود دارد به طوری که نامساوی زیر برقرار است.

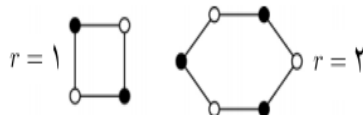
$$M_r^{LD}(CH_n) \leq \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil.$$

۴.۴ دورها

تعریف ۱۰.۴.۴ [۱] دور n رأسی، $G = C\mathcal{V}_n$ ، دارای مجموعه رئوس $V_n = \{1, \dots, n\}$ و مجموعه

یال‌های $E_n = \{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{n, 1\}\}$ می‌باشد.

تعریف ۲.۴.۴. [۱] کمترین تراکم کد r -شناسایی و r -احاطه‌گر مکانی در \mathcal{CV}_n را به ترتیب با $M_r^I(\mathcal{CV}_n)$ و $M_r^{LD}(\mathcal{CV}_n)$ تعریف می‌کنیم.



شکل ۶.۴: کدهایی که r -شناسایی نیستند. کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.

ملاحظه ۳.۴.۴. برخلاف زنجیرها، برای این که ثابت کنیم C یک کد شناسایی در دور است، بررسی مجزا بودن رئوس متوالی توسط C ، کافی نیست. همان‌طور که در شکل ۶.۴ می‌بینید، اگرچه جفت‌های متوالی از رئوس توسط C مجزا می‌گردند اما کد شناسایی نیست. حالت یکسانی نیز برای کدهای احاطه‌گر مکانی و رئوس C -متوالی برقرار است. این بدان معناست که بندهای ۱ و ۲ از لم ۳.۲.۴ در دورها کاربرد ندارند.

با این وجود، به راحتی می‌توان دید که، اگر \mathcal{CV}_n را جایگزین CH_∞ کنیم، بندهای ۳ و ۴ از لم ۳.۲.۴ معتبر خواهند بود.

در زیربخش بعدی، به ازای هر r ، کران پایین روی کمترین اندازه کد r -شناسایی در \mathcal{CV}_n ارائه می‌نماییم و برای n ‌های زوج ساختاری ارائه می‌کنیم تا کران بالا و پایین بر هم منطبق باشند. سپس در بخش ۲.۴.۴ مقدار دقیق $M_r^{LD}(\mathcal{CV}_n)$ را ارائه می‌نماییم و به ازای هر $r \geq 2$ ، یک کران پایین برای $M_r^{LD}(\mathcal{CV}_n)$ تعیین می‌کنیم و برای بی‌نهایت از مقادیر خاص n ساختاری ارائه می‌نماییم تا کران بالا و پایین بر هم منطبق گردند.

۱.۴.۴ کدهای شناسایی در دورها

ابتدا یک کران پایین ارائه می‌نماییم که برای هر $r \geq 1$ و $n \geq 2r + 2$ معتبر است.

ملاحظه ۴.۴.۴. اگر $n \leq 2r + 1$ ، آنگاه کد r -شناسایی در \mathcal{CV}_n وجود ندارد، زیرا به ازای تمام رئوس $B_r(i) = V_n$ است.

قضیه ۵.۴.۴. [۱] برای $r \geq 1$ و $n \geq 2r + 2$ ، نامساوی زیر برقرار است.

$$M_r^I(\mathcal{CV}_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

برهان. برهان این قضیه مشابه برهان اولین بخش از قضیه ۴.۲.۴ است: فرض کنید C کد r -شناسایی باشد؛ اگر i کدواژه نباشد، آنگاه $(i + 2r + 1) \pmod n$ باید کدواژه باشد. (که برابر با i نیز نمی‌تواند باشد)، بنابراین $n - |C| \leq |C|$ است و این عبارت معادل با $|C| \geq \frac{n}{2}$ است. \square

قضیه ۶.۴.۴. [۱] به ازای هر $r \geq 1$ و برای مقادیر زوج n که $n \geq 2r + 4$ باشد، نامساوی زیر برقرار است.

$$M_r^I(\mathcal{CY}_n) \leq \frac{n}{2}.$$

برهان. ادعا می‌کنیم که $C = \{1, 3, \dots, n-1\}$ کد r -شناسایی است. اولاً تمام رئوس توسط C پوشیده می‌شوند.

ثانیاً، چون تمام کدواژه‌ها نقش یکسانی دارند و تمام غیرکدواژه‌ها نیز نقش یکسانی دارند، بدون کاستن از کلیت برهان، کدواژه‌ای مانند ۱ و غیرکدواژه‌ای مانند ۲ را در نظر بگیرید، کافی است نشان دهیم که هیچ رأس دیگری مانند j وجود ندارد به طوری که،

$$K_{C,r}(j) = K_{C,r}(2) \text{ یا } K_{C,r}(j) = K_{C,r}(1).$$

ابتدا فرض کنید r زوج است. خواهیم دید که،

$$K_{C,r}(1) = \{n+1-r, n+3-r, \dots, n-1, 1, 3, \dots, r-1, r+1\},$$

$$K_{C,r}(2) = \{n+3-r, n+5-r, \dots, 1, 3, \dots, r-1, r+1\}.$$

اگر j طوری باشد که $K_{C,r}(j) = K_{C,r}(1)$ ، آن‌گاه حالت‌های خاص زیر برقرارند.

• j توسط ۱ پوشیده می‌شود: این بدین معناست که،

$$n+1-r \leq j \leq r+1;$$

• j توسط $r+3$ پوشیده نمی‌شود (که کوچکتر از $n+1-r$ است و نمی‌تواند به $K_{C,r}(1)$ متعلق باشد) و این بدین معناست که،

$$j \notin \{3, 4, 5, \dots, 2r+2, 2r+3\};$$

• j توسط $n-1-r$ پوشیده نمی‌شود (که بزرگتر از $r+1$ است و نمی‌تواند به $K_{C,r}(1)$ متعلق باشد) و این بدین معناست که،

$$j \notin \{n-1-2r, n-2r, \dots, n-2, n-1\};$$

بنابراین تنها مقادیر ممکن برای j ، یکی از سه رأس ۱، ۲ یا n خواهد بود؛ اما n توسط $r+1$ پوشیده نمی‌شود و ۲ نمی‌تواند توسط $n-1-r$ پوشیده شود. بنابراین این دو رأس توسط C از ۱ مجزا خواهند شد و الزاماً $j=1$ است.

اگر j طوری باشد که $K_{C,r}(j) = K_{C,r}(2)$ ، آن‌گاه به طور مشابه:

$$n + 1 - r \leq j \leq r + 1$$

$$j \notin \{3, 4, 5, \dots, 2r + 2, 2r + 3\}; j \notin \{n + 1 - 2r, n + 2 - 2r, \dots, n, 1\}.$$

بنابراین الزاماً $j = 2$ است.

اگر r فرد باشد، آنگاه

$$K_{C,r}(1) = \{n + 2 - r, n + 4 - r, \dots, n - 1, 1, 3, \dots, r - 2, r\},$$

$$K_{C,r}(2) = \{n + 2 - r, n + 4 - r, \dots, 1, 3, \dots, r, r + 2\}.$$

اگر j طوری باشد که $K_{C,r}(j) = K_{C,r}(1)$ ، آنگاه :

$$n + 1 - r \leq j \leq r + 1$$

$$j \notin \{2, 3, 4, \dots, 2r + 1, 2r + 2\}; j \notin \{n - 2r, n - 2r + 1, \dots, n - 1, n\}.$$

بنابراین الزاماً $j = 1$ است.

اگر j طوری باشد که $K_{C,r}(j) = K_{C,r}(2)$ ، آنگاه :

$$n + 1 - r \leq j \leq r + 1$$

$$j \notin \{4, 5, 6, \dots, 2r + 3, 2r + 4\}; j \notin \{n - 2r, n - 2r + 1, \dots, n - 1, n\}.$$

با استفاده از بیانات فوق، تنها مقادیر ممکن برای j اعداد 1 یا 2 یا 3 خواهند بود؛ اما 1 توسط $r + 2$ پوشیده نمی‌شود و 3 توسط $n + 2 - r$ پوشیده نمی‌شود. بنابراین این دو رأس توسط C از 2 مجزا می‌شوند و الزاماً $j = 2$ است. \square

شرط $n \geq 2r + 4$ در قضیه ۶.۴.۴ بسیار مهم است. اگر $n = 2r + 2$ باشد، یک تخریب جدی در ساختار و کیفیت کدها در مقایسه با قضیه ۶.۴.۴ به وجود می‌آید، زیرا قضیه بعد بیان می‌کند در این حالت تمام رئوس به جز یکی به عنوان کدواژه انتخاب خواهند شد!

قضیه ۷.۴.۴. [۱] برای $r \geq 1$ ، نامساوی زیر برقرار است.

$$M_{\mathcal{Y}}^{LD}(C\mathcal{Y}_{2r+2}) = 2r + 1.$$

برهان. چون $n - 1 = 2r + 1$ است، کافی است ثابت کنیم اگر C کد r -شناسایی در $C\mathcal{Y}_{2r+2}$ باشد، آنگاه حداکثر یک رأس در C نیست.

برای هر رأس $i \in V_n$ داریم: $B_r(i) = V_n \setminus \{i + r + 1 \pmod{n}\}$ و برای هر دو رأس متمایز $i \in V_n$ و $j \in V_n$ داریم: $B_r(i) \Delta B_r(j) = \{i + r + 1 \pmod{n}, (j + r + 1 \pmod{n})\}$. از طرفی می‌دانیم که در $B_r(i) \Delta B_r(j)$ حداقل یک کدواژه باید وجود داشته باشد تا i و j از هم مجزا گردند.

بدون کاستن از کلیت مساله، فرض کنید که $1 \notin C$ است. آنگاه برای تمام j ، $j \neq r + 2$ ، $B_r(r + 2) \Delta B_r(j) = \{1, j + r + 1 \pmod{n}\}$ عبارت زیر برقرار است:

$$\emptyset \neq (B_r(r + 2) \Delta B_r(j)) \cap C \subseteq \{j + r + 1 \pmod{n}\}.$$

بنابراین تمام مقادیر j به جز یکی، که مجموعاً $n - 1$ کدواژه مانند $j + r + 1$ هستند در C قرار دارند. □

۲.۴.۴ کدهای احاطه‌گر مکانی در دورها

حالت $r = 1$ در دورها مشابه همین حالت در زنجیرهاست.

قضیه ۸.۴.۴. [۲۵] برای هر $n \geq 1$ ، تساوی زیر برقرار است.

$$M_1^{LD}(\mathcal{CY}_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil.$$

برهان. برای کران پایین برهان قضیه ۸.۳.۴ را ببینید. تنها تفاوتی که وجود دارد و بی اهمیت است این است که در دورها برای $n \geq 3$ ، $|B \setminus (c) \setminus \{C\}| = 2$ است. تساوی در کران بالا رخ می‌دهد، با استفاده از شکل ۳.۴، الگوی سمت چپ داخل کروش شامل ۵ رأس است که، $k - 1$ مرتبه در سمت چپ تکرار نمایید و سمت چپ‌ترین رأس را به سمت راست‌ترین رأس وصل کنید. دوری به طول n حاصل می‌شود، حال کد ۱-احاطه‌گر مکانی بودن این الگو در \mathcal{CY}_n به راحتی قابل بررسی است. □

برای زمانی که $r > 1$ باشد ابتدا کران پایین ارائه می‌نماییم.

قضیه ۹.۴.۴. [۱] برای $r \geq 2$ و $n \geq 1$ ، نامساوی زیر برقرار است.

$$M_r^{LD}(\mathcal{CY}_n) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

برهان. فرض کنید C کد r -احاطه‌گر مکانی در \mathcal{CY}_n باشد. با استفاده از لم ۳.۲.۴ بند ۴ و ملاحظه ۳.۴.۴ و با استفاده از این حقیقت که n جفت متوالی داریم به نامساوی $|C| \geq n - 20$ می‌رسیم و برهان تمام است. □

برای کران پایین داده شده، برای تعداد نامتناهی از مقادیر n حالت تساوی در کران پایین فوق رخ می‌دهد.

قضیه ۱۰.۴.۴. [۱] فرض کنید $r = 2$ و $k \geq 2$ یا $r > 2$ و $k \geq 1$ باشد؛ اگر r فرد و $n = k(3r + 3)$ یا r زوج و $n = 3kr$ باشد، آنگاه

$$M_r^I(\mathcal{CY}_n) \leq \frac{n}{3}$$

برهان. طبق توازی که r دارد؛ با استفاده مناسب به تعداد k مرتبه از الگوی شکل ۲.۴ (ب) و با وصل نمودن سمت چپ‌ترین رأس به سمت راست‌ترین رأس برهان تمام است. □

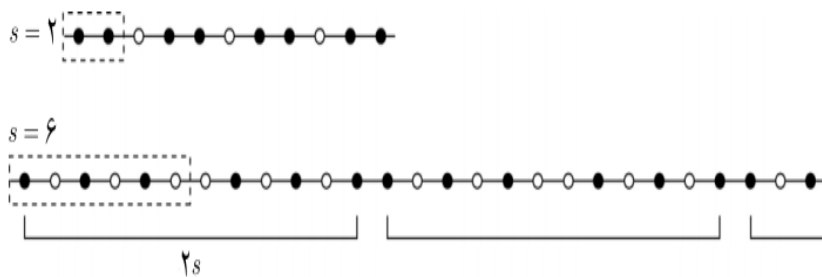
حالتی که $r = 2$ و $k = 1$ ($n = 6$)، دو غیرکدواژه که توسط دو کدواژه یکسان پوشیده می‌شوند را حذف می‌کنیم. به آسانی دیده می‌شود که $M_2^{LD}(\mathcal{CY}_n) = 3$ است.

۵.۴ گوی‌های جدید

توجه کنید که در زنجیر بی‌نهایت CH_∞ ، گوی $B_r(i)$ ، مجموعه‌ای از $2r + 1$ عدد صحیح متوالی مانند $\{i - r, \dots, i, \dots, i + r\}$ است که به طور معادل قطعه‌ای با طول فرد است. در عوض می‌توان قطعه‌هایی با طول زوج s را در نظر گرفت و مساله چگونه قرار دادن این قطعه‌ها در بهترین مکان در CH_∞ را در نظر گرفت که، هر عدد صحیح حداقل به یک قطعه متعلق باشد و هیچ دو عدد صحیحی به مجموعه‌ای یکسان از قطعه‌ها متعلق نباشند (کدهای شناسایی)؛ یا هیچ دو غیرکدواژه‌ای به مجموعه‌ای یکسان از قطعه‌ها متعلق نباشند (کدهای احاطه‌گر مکانی). به طور کلی، در مرجع [۲۲] این مساله در \mathbb{Z}^2 ، برای کدهای شناسایی با الگوهای مختلف در نظر گرفته شده است. حال در یک قطعه زوج، مرکز در \mathbb{Z} نیست. این موضوع بر طبیعت کدهای شناسایی اثری ندارد اما در مورد کدهای احاطه‌گر مکانی ناچاریم بر پارامتری جدید تکیه کنیم.

۱.۵.۴ کدهای شناسایی

تمامی راه‌های مرتبط ساختن یک قطعه با یک کدواژه در کدهای شناسایی معادل هستند، زیرا کدواژه‌ها و غیرکدواژه‌ها، وضعیت یکسانی از جنبه ویژگی‌ها در کدهای شناسایی دارند و هر رأس باید حداقل به یک قطعه متعلق باشد و هیچ دو رأسی به مجموعه‌ای یکسان از قطعه‌ها نباید متعلق باشد. البته این نکته برای قطعه‌های زوج، همانند قطعه‌های فرد برقرار است.



شکل ۷.۴: کدهای شناسایی بهینه در CH_∞ . کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.

قضیه ۱.۵.۴. [۱] فرض کنید $s \in \mathbb{N}^*$ و s زوج باشد. بهترین تراکم کدهای شناسایی C با استفاده از قطعاتی با طول s در CH_∞ برابر است با $\frac{2}{s}$ اگر $s = 2$ باشد و برابر با $\frac{1}{s}$ است اگر $s > 2$ باشد.

برهان. در این برهان به منظور مشخص کردن قطعه‌ها و استفاده آسان‌تر از ویژگی‌های پوشش و مجزایی رئوس، یک قطعه و یک رأس‌اش را به هم مربوط می‌سازیم. برای مثال کوچکترین رأسی که در یک قطعه کدواژه است ارائه دهنده‌ی این قطعه خواهد بود و مفهوم پوشش را بر طبق آن تغییر می‌دهیم به این

صورت که کدواژه i, s - پوشش اعداد صحیح $1, i+1, \dots, i+s-1$ خواهد بود. شکل ۷.۴ را ببینید که چپ‌ترین کدواژه ارائه‌دهنده قطعه مربوط به خود می‌باشد.

ابتدا برای حالت $s = 2$ کران پایین ارائه می‌نماییم. سه عدد متوالی مانند $1, 2, 3$ را در نظر می‌گیریم و اثبات می‌کنیم حداقل دو رأس از رئوس $1, 2, 3$ باید در C باشند. فرض کنید فقط 3 در C باشد، آن‌گاه 2 توسط C پوشیده نمی‌شود. در مرحله بعد فرض کنید فقط 2 کدواژه باشد، آن‌گاه $3, 2$ توسط C مجزا نمی‌گردند. در نهایت، اگر فقط 1 کدواژه باشد، آن‌گاه 3 توسط C پوشیده نمی‌شود.

برای اثبات تراکم حداقل نیم برای تمام مقادیر زوج $s > 2$ ، کافی است ثابت کنیم که هر جفت $\{j-s, j\}$ شامل حداقل یک کدواژه است، و این برقرار است زیرا اگر j کدواژه نباشد، آن‌گاه تنها کدواژه‌ای که می‌تواند j و $j-1$ را از هم مجزا کند $j-s$ است.

سپس کران بالا برای حالت $s = 2$ از ساختار ارائه شده در شکل ۷.۴ بدست می‌آید و کد شناسایی بودن این ساختار به راحتی قابل بررسی است.

در نهایت ساختاری برای $s > 2$ ، که s زوج است ارائه می‌نماییم. قرار دهید:

$$C = \cup_{k \in \mathbb{Z}} (C_0 + k2s) \text{ و } C_0 = \{0, 2, \dots, s-4, s-2, s+1, s+3, 2s-1\}$$

(شکل ۷.۴ را برای $s = 6$ ببینید). ادعا می‌کنیم C کد شناسایی است. جفت‌های متوالی از نقاط مانند i و $i+1$ را در نظر بگیرید، نشان می‌دهیم الزاماً کدواژه‌ای وجود دارد که دقیقاً یکی از آن‌ها را می‌پوشاند. اگر $i+1$ کدواژه باشد برهان تمام است، چون $i+1$ نقطه i را نمی‌پوشاند بنابراین دو حالت زیر را خواهیم داشت:

۱. $i \in C$ و $i+1 \notin C$ ؛ بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید i به $\{2s-1\}$ متعلق باشد. حال $i-s+1$ نقطه i را می‌پوشاند و $i+1$ را نمی‌پوشاند و $i-s+1$ کدواژه است؛ در عوض اگر i به صورت $s+1+2j$ باشد که $s-4 \leq 2j \leq s-1$ باشد، آن‌گاه $2j+2 = i-s+1$ در C_0 است، و اگر i به صورت $2j$ باشد که $s-1 \leq 2j \leq s-1$ است، آن‌گاه $2j-s+1 = i-s+1$ در $C_0 - 2s \subset C$ خواهد بود.

۲. $i, i+1 \notin C$ ؛ بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید $i = s-1$ باشد و می‌بینیم که 0 کدواژه‌ای است که i را می‌پوشاند و $i+1$ را نمی‌پوشاند.

□

۲.۵.۴ کدهای احاطه‌گر مکانی

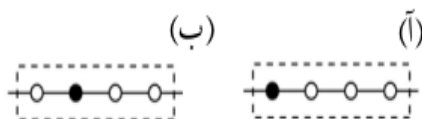
برای قطعه‌های فرد همانند قطعه‌های زوج، بهترین تراکم ممکن برای کد احاطه‌گر مکانی به چگونگی ارتباط کدواژه با قطعه بستگی دارد، در مثال بعدی برای قطعه‌ای به طول ۴ این موضوع را نشان داده‌ایم.

مثال ۲.۵.۴. قطعه‌ای با طول $s = 4$ را در نظر بگیرید که کوچکترین رأس کدواژه ارائه‌دهنده قطعه باشد. شکل ۸.۴ (آ) را ببینید. ادعا می‌کنیم با استفاده از این قطعه‌ها بهترین تراکم کد احاطه‌گر مکانی برابر با $\frac{2}{5}$ است.

ابتدا کد احاطه‌گر C متناوبی را با تکرار الگوی شکل ۲.۴ (آ) بدست می‌آوریم. برای کران پایین، پنج رأس متوالی ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ را در نظر بگیرید. به وضوح حداقل یکی از این رئوس باید کدواژه باشد، حال فرض کنید یکی از رئوس متعلق به C است. اگر این کدواژه ۶ باشد، آنگاه رأس ۱۰ توسط C پوشیده نمی‌شود؛ اگر رأس ۷ یا رأس ۸ کدواژه باشد، آنگاه رئوس ۹ و ۱۰ توسط C از هم مجزا نمی‌گردند؛ اگر رأس ۱۰ کدواژه باشد، رأس ۹ توسط C پوشیده نمی‌شود. با جمع‌بندی حالت‌های فوق تنها حالت ممکن به صورت $C \cap \{6, 7, 8, 9, 10\} = \{9\}$ باقی می‌ماند. اما به منظور مجزا نمودن رئوس ۷ و ۸ و همچنین پوشاندن رأس ۸، الزاماً رئوس ۳، ۴ و ۵ باید کدواژه باشند.

بنابراین $C \cap \{6, 7, 8, 9, 10\} \geq 2$ یا $C \cap \{1, \dots, 10\} \geq 1 + 3 = 4$ را ثابت کردیم که این نشان‌دهنده تراکم $\frac{2}{5}$ است.

از طرفی دیگر، اگر قطعه‌هایی با طول ۴ را در نظر بگیریم که کوچکترین عنصر دوم ارائه‌دهنده قطعه باشد. مانند شکل ۸.۴ (ب)، آنگاه تراکم به $\frac{1}{3}$ می‌رسد. زیرا به راحتی می‌توانید بررسی کنید که $C = \{3p : p \in \mathbb{Z}\}$ یک کد احاطه‌گر مکانی است (همچنین برهان قضیه ۶.۴.۴ را ببینید). بنابراین برای هر مقدار از s لازم است تمام حالات ممکن برای مکان کدواژه‌ها در یک قطعه در نظر گرفته شود و سعی کنیم بهترین تراکم را بر اساس آن بدست آوریم.



شکل ۸.۴: دو راه برای انتخاب یک کدواژه در قطعه‌ای به طول چهار. کدواژه‌ها به رنگ سیاه‌اند.

قضیه ۳.۵.۴. [۱] فرض کنید $s \in \mathbb{N}^*$ باشد؛ بهترین تراکم کد احاطه‌گر مکانی با استفاده از قطعاتی با طول s در \mathcal{CH}_∞ حداقل برابر با $\frac{1}{3}$ است.

برهان. با انجام تغییرات لازم در لم ۳.۲.۴ بند ۴ و با پذیرفتن حالت دوم برهان قضیه ۵.۲.۴ و با این نتیجه جانبی که مکان کدواژه‌ها در قطعه‌ها تاثیری در مقدار تراکم ندارد، برهان تمام است \square

قضیه ۴.۵.۴. [۱] فرض کنید $s \in \mathbb{N}^*$ باشد. اگر s فرد باشد یا به صورت $s = 6k + 2$ ($k \geq 1$) یا $s = 6k + 4$ ($k \geq 0$) باشد، آنگاه با انتخاب مکان مناسب برای کدواژه‌ها در قطعه‌های به طول s ، بهترین تراکم ممکن برای کد r -احاطه‌گر مکانی در \mathcal{CH}_∞ برابر $\frac{1}{3}$ است.

برهان. اگر $s \geq 5$ فرد باشد، برهانی مشابه برهان قضیه ۵.۲.۴ را در نظر بگیرید که کدواژه‌ها در مرکز قطعه‌ها هستند.

هرگاه $s = 6k + 2, s \geq 8$ باشد، اگر کوچکترین عنصر هر قطعه ارایه‌دهنده قطعه باشد، آنگاه کد $C = \{3p : p \in \mathbb{Z}\}$ احاطه‌گر مکانی است زیرا کدواژه‌های متوالی $i = 3p + 1$ و $i + 1 = 3p + 2$ توسط C از یکدیگر مجزا می‌گردند و همچنین $3p - 6k = (s - 1) - (3p + 1)$ کدواژه است و i را می‌پوشاند اما $i + 1$ را نمی‌پوشاند.

هرگاه $s = 6k + 4, s \geq 4$ باشد، اگر دومین عنصر کوچک هر قطعه ارایه‌دهنده قطعه باشد، آنگاه کد $C = \{3p : p \in \mathbb{Z}\}$ احاطه‌گر مکانی است زیرا کدواژه‌ای مانند a ، رئوس $a - 1, a, a + 1, \dots, a + s - 2$ را می‌پوشاند و در غیر کدواژه C -متوالی مانند $i = 3p + 2$ و $i + 2 = 3p + 4$ توسط C مجزا می‌گردند و همچنین $3p + 2 - (s - 2) = 3p - 6k$ کدواژه‌ای است که i را می‌پوشاند اما $i + 2$ را نمی‌پوشاند. \square

این فصل را با یک حدس به پایان می‌بریم.

حدس ۱.۵.۴. فرض کنید $s \in \mathbb{N}^*$ باشد. اگر $s = 6k (k \geq 1)$ باشد آنگاه با انتخاب مکان مناسب برای کدواژه‌ها در قطعه‌های به طول s ، بهترین تراکم ممکن برای کد r -احاطه‌گر مکانی در \mathcal{CH}_∞ برابر $\frac{1}{3}$ است.

۶.۴ نتایج

حال نتایجی را در مورد کدهای شناسایی و کدهای احاطه‌گر مکانی در زنجیرها و دورها ارائه می‌نماییم که در این فصل اثبات شدند.

۱. در زنجیرهای نامتناهی داریم:

- برای هر $r \geq 1$ $d_r^I(\mathcal{CH}_\infty) = \frac{1}{r}$

- $d_1^{LD}(\mathcal{CH}_\infty) = \frac{2}{5}$

- برای هر $r \geq 2$ $d_r^{LD}(\mathcal{CH}_\infty) = \frac{1}{r}$

۲. در زنجیرهای نامتناهی داریم:

- $$M_r^I(\mathcal{CH}_n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{اگر } n \geq 1 \text{ و فرد باشد} \\ \frac{n}{2} + 1 & \text{اگر } n \geq 4 \text{ و زوج باشد} \end{cases}$$

- برای $r \geq 2$ و $n \geq 2r + 1$ ، نامساوی زیر برقرار است.

$$M_r^I(\mathcal{CH}_n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

• به ازای هر $n \geq 10$ ، تساوی زیر برقرار است.

$$M_r^{LD}(\mathcal{CH}_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$$

• برای $r \geq 2$ و $n \geq 1$ نامساوی زیر برقرار است.

$$M_r^{LD}(\mathcal{CH}_n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil.$$

• اگر r زوج و $n = 3kr + 2r + 1$ باشد، آنگاه

$$M_r^{LD}(\mathcal{CH}_n) \leq \frac{n+1}{3} + \frac{r+1}{3};$$

• اگر r فرد و $n = k(3r+3) + 2r + 1$ باشد، آنگاه

$$M_r^{LD}(\mathcal{CH}_n) \leq \frac{n+1}{3} + \frac{r+1}{3};$$

• برای هر $n \geq 2r + 1$ ،

$$M_r^{LD}(\mathcal{CH}_n) \leq \left\lceil \frac{n+1}{3} + \frac{7r+5}{3} \right\rceil.$$

۳. در دورها نتایج زیر برقرارند:

• برای $r \geq 1$ و $n \geq 2r + 2$ ، نامساوی زیر برقرار است.

$$M_r^I(\mathcal{CY}_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

• برای هر $n \geq 1$ ، تساوی زیر برقرار است.

$$M_1^{LD}(\mathcal{CY}_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil.$$

مراجع

- [1] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, *identifying and locating-dominating codes on chains and cycles*, European J. Combin. 25/7 (2004), pp. 969–987.
- [2] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, *1-identifying codes on trees*, Austral. J. Combin, 31 (2005), pp. 21–35.
- [3] U. Blass, I. Honkala, S. Litsyn: *On binary codes for identification*, Journal of Combinatorial Designs, vol. 8, (2000), pp. 151–156.
- [4] U. Blass, I. Honkala, S. Litsyn: *Bounds on identifying codes*, Discrete Mathematics, vol. 241, (2001), pp. 119–128.
- [5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, Fifth printing. Elsevier, New York (1982).
- [6] I. Charon, I. Honkala, O. Hudry, A. Lobstein: *General bounds for identifying codes in some infinite regular graphs*, Electronic Journal of Combinatorics, vol. 8(1), (2001), R39.
- [7] I. Charon, I. Honkala, O. Hudry, A. Lobstein, *The minimum density of an identifying code in the king lattice*, Discrete Math. 276 (1–3) (2004) 95–109.
- [8] I. Charon, O. Hudry, *The noising methods: A generalization of some meta-heuristics*, European Journal of Operational Research, vol. 135, (2001), pp. 86–101.
- [9] I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, *Identifying codes with small radius in some infinite regular graphs*, Electron. J. Combin. 9 (1) (2002) R11.
- [10] I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, *Minimizing the size of an identifying or locating-dominating code in a graph is NP-hard*, Theoret. Comput. Sci. 290 (3) (2003) 2109–2120.
- [11] G. Cohen, S. Gravier, I. Honkala, A. Lobstein, M. Mollard, C. Payan, G. Z’emor, *Improved identifying codes for the grid*, *Electronic Journal of Combinatorics*, Comments to 6(1, (1999)), R19.
- [12] G. Cohen, I. Honkala, A. Lobstein, G. Z’emor, *New bounds for codes identifying vertices in graphs*, *Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 6(1), (1999), R19.

- [13] G. Cohen, I. Honkala, A. Lobstein, G. Z'emor, *Bounds for codes identifying vertices in the hexagonal grid*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, vol. 13(4),(2000), pp. 492–504.
- [14] G. Cohen, I. Honkala, A. Lobstein, G. Z'emor, *On identifying codes*. In: *Proceedings of the DIMACS Workshop on Codes and Association Schemes*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, vol. 56,(2001), pp. 97–109.
- [15] G. Cohen, I. Honkala, A. Lobstein, G. Z'emor, *On codes identifying vertices in the two-dimensional square lattice with diagonals*, IEEE Transactions on Computers, vol. 50,(2001), pp. 174–176.
- [16] G. Cohen, A. Lobstein, G. Z'emor, *Identification d'une station d'efailante dans un contexte radio-mobile*. In: *Aspects Algorithmiques des T'el'ecomunications (Algo- Tel '99)*, Actes,(1999), pp. 19–22.
- [17] C.J. Colbourn, P.J. Slater, L.K. Stewart, *Locating dominating sets in series parallel networks*, Congr. Numer. 56 (1987) 135–162.
- [18] M. Daniel, *Codes identifiants*, Rapport pour le DEA ROCO, Grenoble, June 2003.
- [19] G. Exoo: *Computational results on identifying t-codes*, Preprint, 1999.
- [20] I. Honkala: *On the identifying radius of codes*. In: *Proceedings of the 7th Nordic Combinatorial Conference* (eds. T. Harju and I. Honkala), Turku, 1999.
- [21] I. Honkala, personal communication, March 2003.
- [22] I. Honkala, A. Lobstein, *On identification in \mathbb{Z}^{χ} using translates of given patterns*, J. Universal Comput. Sci. 9 (10) (2003) 1204–1219.
- [23] I. Honkala, A. Lobstein, *On the density of identifying codes in the square lattice*, J. Combin. Theory Ser. B 85 (2002) 297–306.
- [24] M. G. Karpovsky, K. Chakrabarty, L. B. Levitin: *On a new class of codes for identifying vertices in graphs*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 44,(1998), pp. 599–611.
- [25] P.J. Slater, *Dominating and reference sets in a graph*, J. Math. Phys. Sci. 22 (1988) 445–455.
- [26] P.J. Slater, *Locating dominating sets and locating-dominating sets*, in: Y. Alavi, A. Schwenk (Eds.), *Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proceedings of the 7th Quadrennial International Conference on the Theory and Applications of Graphs*, vol. 2,(1995), pp. 1073–1079.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

heuristic	ابتکار
horizontal	افقی
translation	انتقال
undirected	بدون جهت
trivial	بی‌اهمیت
useless	بی‌فایده
cover	پوشش
contradiction	تناقض
description	توصیف
invariant	ثابت
solution	جواب
density	تراکم
cycle	دور
alternative	دیگر
brick wall	دیوار آجری
equivalence relation	رابطه هم‌ارزی
chain	زنجیر
subcode	زیرکد
constriction	ساختار
globally	سراسری
straightforward	سراست
king lattice	مشبکه شاهوار
hexagonal grid	مشبکه شش‌گوشه
square lattice	مشبکه مربع
triangular lattice	مشبکه مثلث
associate	شریک

side.....	ضلع
abscissa.....	طول
ordinate.....	عرض
marked.....	علامت‌دار
vertical.....	عمودی
noncodword.....	غیرکدواژه
segment.....	قطعه
tile.....	کاشی
code.....	کد
locating-dominating code.....	کد احاطه‌گر مکانی
Identifying code.....	کد شناسایی
periodic identifying code.....	کد شناسایی متناوب
codeword.....	کدواژه
upper bound.....	کران بالا
lower bound.....	کران پایین
corner.....	گوشه
ball.....	گوی
consecutive.....	متوالی
seprated.....	مجزا
associate.....	مربوط بودن
rectangle.....	مستطیل
connected.....	همبند

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

abscissa	طول
alternative	دیگر
associate	مربوط بودن
ball	گوی
brick wall	دیوار آجری
chain	زنجیر
code	کد
codeword	کدواژه
connected	همبند
consecutive	متوالی
contraction	ساختار
contradiction	تناقض
corner	گوشه
cover	پوشش
cycle	دور
density	تراکم
description	توصیف
equivalence relation	رابطه هم‌ارزی
globally	سراسری
heuristic	ابتکار
hexagonal grid	مشبکه شش‌گوشه
horizontal	افقی
identifying code	کد شناسایی
invariant	ثابت
king lattice	مشبکه شاهوار
locating-dominating code	کد احاطه‌گر مکانی

lower bound	کران پایین
marked	علامت‌دار
noncodeword	غیرکدواژه
periodic Identifying code	کد شناسایی متناوب
rectangle	مستطیل
segment	قطعه
seprated	مجزا
side	ضلع
solution	جواب
square lattice	مشبکه مربع
straightforward	سراسر
subcode	زیرکد
tile	کاشی
translation	انتقال
triangular lattice	مشبکه مثلث
trivial	بی‌اهمیت
undirected	بدون جهت
upper bound	کران بالا
useless	بی‌فایده
vertical	عمودی

Abstract

Consider a connected undirected graph $G = (V, E)$, a subset of vertices $C \subseteq V$, and an integer $r \geq 1$; for any vertex $v \in V$, let $B_r(v)$ denote the ball of radius r centered at v , i.e., the set of all vertices within distance r from v . If for all vertices $v \in V$ (respectively, $v \in V \setminus C$), the sets $B_r(v) \cap C$ are all nonempty and different, then we call C an r -identifying code (respectively, an r -locating-dominating code). We study the smallest cardinalities or densities of these codes in this dissertation. In the first chapter of this dissertation, we state required definitions and theorems of graph theory. In Chapter 2, we describe some properties of translations in \mathbb{Z}^2 , properties which will be necessary to our study of periodic codes in the four grids including square lattice, triangular lattice, king lattice and hexagonal grid for small r . In Chapter 3, We prove here that for all $r > 1$, $D(G_k, r) = \frac{1}{4r}$. In Chapter 4, we determine the exact value of the smallest possible density of an r -identifying code and r -locating-dominating code in the finite and infinite chains and finite cycles, for all $r \geq 1$.

keywords: Identifying code, Locating Dominating code, Graph



Shahrood University Of Technology

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

**R-identifying codes and their density in some
special graphs**

Supervisor

Dr. Nader Jafari Rad

by

Gholamreza Vahdani

July 2014