دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

نتایجی در خصوص احاطه‌گری رنگین‌کمانی در گراف‌ها

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

دانشجو

سید محمد حسینی

دی‌ماه ۹۲

تقدیم به پیش گاه حضرت ولی عصر (عج)

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **سید محمد حسینی** رشته **ریاضی کاربردی** گرایش **گراف و ترکیبیات** تحت عنوان **نتایجی در خصوص احاطه‌گری رنگین‌کمانی در گراف‌ها**

که در تاریخ **۹۲/۱۰/۲۲** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸/۲۳۵) ☒	دفاع مجدد ☐	مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر نادر جعفری‌راد	دانشیار	
۲ـ استاد مشاور			
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر احمد نزاکتی	دانشیار	
۴- استاد ممتحن	دکتر میثم علیشاهی	استادیار	
۵- استاد ممتحن	دکتر صادق رحیمی	استادیار	

رئیس دانشکده : امضاء

سپاس گزاری

نخست، از استاد محترم خود، جناب آقای دکتر نادر جعفری راد به خاطر پیشنهاد موضوع و هم چنین تسلط کامل ایشان بر این موضوع، کمال تشکر و قدردانی را دارم. سپس، به اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه یاسوج خصوصاً آقایان دکتر مجتبی قیراطی و دکتر احسان ممتحن، که به نوعی آشناگران اصلی بنده با دنیای ریاضیات بوده اند، نیز مراتب تشکر و قدردانی صمیمانه ی خود را اعلام می دارم.

در پایان، از کسانی تشکر می کنم که سپاس گذاری از زحمات، فداکاری ها و رنج های ایشان برای بنده در رأس هرم تشکر قرار دارد یعنی همه ی اعضای خانواده ی گرم و صمیمی خود، چه آنان که هستند و چه آنان که پیش از ما رفته اند...

سید محمد حسینی
دی ماه ۹۲

تعهدنامه

اینجانب **سید محمد حسینی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **نتایجی در خصوص احاطه‌گری رنگین‌کمانی در گراف‌ها** ، تحت راهنمایی **دکتر نادر جعفری راد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سید محمد حسینی
دی ماه ۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

برای گراف دلخواه G، تابع $f : V(G) \rightarrow P(\{۱,۲\})$ یک تابع ۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی(یا به اختصار 2RDF) برای گراف G نامیده می‌شود، هرگاه برای هر رأس $v \in V(G)$ به‌طوری که $f(v) = \emptyset$، داشته باشیم $\bigcup_{u\in N(v)} f(u) = \{۱,۲\}$. وزن یک تابع ۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی f، با نمادگذاری $w(f)$، به صورت ذیل تعریف شده است $w(f) = \sum_{v\in V(G)} |f(v)|$. کمترین وزن یک 2RDF گراف G از میان همه‌ی چنین توابعی، عدد ۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی گراف G نامیده شده و با $\gamma_{r۲}(G)$ نشان داده می‌شود.
در فصل نخست این پایان‌نامه، تعاریف و قضیه‌های مورد نیاز در نظریه‌ی گراف‌ها را بیان می‌کنیم. در فصل ۲، مقادیر دقیقی برای عدد ۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی *مسیرها، دورها و گراف‌های خورشید* ارایه می‌دهیم. همچنین، تعدادی کران برای عدد ۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی گراف‌های *پترسن توسعه یافته‌ی* $GP(n,k)$ ارایه می‌کنیم. در فصل ۳، مفهوم بحرانی برای ۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی در گراف‌ها را مطالعه می‌کنیم و یک طبقه‌بندی برای گراف‌های *۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی رأسی (یالی) بحرانی* و گراف‌های *۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی رأسی (یالی) ابربحرانی* به‌دست می‌آوریم. در آخر، در فصل ۴ چندین کران پایین و بالای در دسترس (دقیق) برای $\gamma_{r۲}$ی یک گراف دلخواه ارایه می‌کنیم. علاوه براین، ارتباط بین ۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی با نوع دیگری از احاطه‌گری در گراف‌ها را مطالعه می‌کنیم.

کلمات کلیدی:
احاطه‌گری، عدد احاطه‌گری، احاطه‌گری رنگین‌کمانی

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی گراف

۱.۱ تاریخچه

احاطه‌گری رنگین‌کمانی یکی از انواع احاطه‌گری است، لذا آن‌چه به‌عنوان تاریخچه‌ی موضوع مطرح است، تاریخچه‌ی احاطه‌گری است که حدود ۱۵۰ سال قبل در عالم ریاضیات و به‌خصوص گراف و ترکیبیات آغاز می‌گردد. ابتدا، پرسش‌هایی که امثال *یانیش*[۱] حدود سال‌های ۱۸۶۲ به بعد، برای پوشش دادن یک صفحه‌ی شطرنج $n \times n$ به‌وسیله‌ی حداقل مهره‌های وزیر و مسایلی از این‌دست، مطرح کردند، سنگ بنای موضوعی به‌نام احاطه‌گری در گراف‌ها گردید. هر چند به‌طور مشخص، نامی از احاطه‌گری برده نمی‌شد. در ۱۹۵۸ *کلود برگ*[۲] در کتابی که در مورد نظریه‌ی گراف‌ها می‌نویسد، عدد پایداری بیرونی را معرفی می‌کند که امروزه به‌نام عدد احاطه‌گری می‌شناسیم. در ۱۹۶۲ *ار*[۳] مجموعه‌ی احاطه‌گر یک گراف و عدد احاطه‌گری را معرفی کرد. احاطه‌گری تا به امروز توسط افراد زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. اما آن‌چه به‌عنوان یک مسأله‌ی حل نشده‌ی مهم در احاطه‌گری مطرح است، حدسی است که در سال ۱۹۶۸ توسط ویزینگ زده شد. در سال‌های اخیر، *هارتنل*[۴] و *رال*[۵] نشان دادند که به‌وسیله‌ی احاطه‌گری رنگین‌کمانی، می‌توان رده‌ی خاصی از گراف‌های صادق در رابطه‌ی حدس ویزینگ را طبقه‌بندی کرد.

[۱] Jaenicsh
[۲] Claude Berge
[۳] Ore
[۴] Hartnell
[۵] Rall

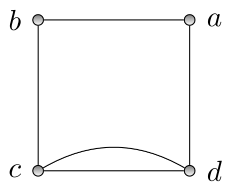
۲.۱ مقدمه

آن‌چه از تعاریف مقدماتی نظریه‌ی گراف‌ها بدون ذکر منبع آورده شده است از [۱] اتخاذ شده است.

تعریف ۱.۲.۱. گراف:
یک سه‌تایی مرتب $(V(G),E(G),\psi_G)$ را گراف G گوییم، هرگاه:
i) $V(G)$ مجموعه‌ای ناتهی باشد که اعضای آن‌را رأس‌های گراف گوییم.
ii) $E(G)$ مجموعه‌ای مجزا از $V(G)$ باشد و عناصر آن‌را یال‌های گراف در نظر می‌گیریم.
iii) ψ_G یک تابع وقوع از $E(G)$ به $V(G)$ باشد، به‌طوری که به هر یال از $E(G)$ دو رأس از $V(G)$ که الزاما متمایز نیستند، اختصاص می‌دهد.

اگر تابع ψ_G به یال e دو رأس u و v را اختصاص دهد(یعنی $\psi_G(e)=uv$)، آن‌گاه می‌گوییم یال e، دو رأس u و v را به یک‌دیگر متصل کرده است و رأس‌های u و v را دو انتهای (دو سر) یال e می‌نامیم و می‌گوییم، رأس‌های u و v بر یال e واقع هستند و برعکس، یال e بر روی رأس‌های u و v واقع است.
سه‌تایی مرتب $(V(G),E(G),\psi_G)$ را می‌توانیم به صورت گرافیکی نمایش دهیم. برای سادگی، نمادهای $V(G)$ و $E(G)$ را گاهی به‌ترتیب، به‌صورت V و E می‌نویسیم و گراف G را به‌صورت (V,E) نشان می‌دهیم.
تعداد اعضای مجموعه‌ی $V(G)$ را **مرتبه**[۶] گراف G گوییم.

مثال ۲.۲.۱. گراف $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ که در آن $V(G)=\{a,b,c,d\}$ و $E(G)=\{e_۱,e_۲,e_۳,e_۴,e_۵,e_۶\}$ و $\psi_G(e_۲)=ab,\psi_G(e_۳)=bc,\psi_G(e_۴)=\psi_G(e_۵)=cd,\psi_G(e_۶)=ad$ دارای نمایش گرافیکی زیر است.



شکل ۱.۱: گراف G

تعریف ۳.۲.۱. گراف متناهی[۷]:
گرافی که مجموعه‌ي رأس‌ها و مجموعه‌ی یال‌های آن متناهی باشد را گراف متناهی گوییم. تعداد رأس‌های یک گراف را مرتبه‌ی گراف گوییم و گرافی که فقط یک رأس داشته باشد، یعنی از مرتبه‌ی ۱ باشد را گراف **بدیهی**[۸] و سایر گراف‌ها را گراف غیربدیهی[۹] گوییم. هم‌چنین، گرافی که هیچ یالی نداشته باشد را گراف **تهی**[۱۰] گوییم.

---
[۶] order
[۷] finite graph
[۸] trivial graph
[۹] nontrivial graph
[۱۰] empty graph

در یک گراف، دو رأس که بر روی یک یال مشترک واقع باشند را دو رأس **مجاور**[۱۱] و دو یال که بر روی یک رأس مشترک واقع باشند را دو یال مجاور گوییم. هم‌چنین، رأس های غیرواقع بر یک یال مشترک و یال‌های غیرواقع بر یک رأس مشترک، به‌ترتیب رأس‌های غیرمجاور و یال‌های غیرمجاور هستند. یک یال با دو انتهای یکسان را **طوقه**[۱۲] و یک یال با دو انتهای متمایز را **یال پیوندی**[۱۳] گوییم. اگر بین دو رأس مشخص از یک گراف، بیش از یک یال وجود داشته باشد، آن یال‌ها را **موازی**[۱۴] گوییم. گرافی که فاقد طوقه و یال‌های موازی باشد را گراف **ساده**[۱۵] گوییم. در این پایان‌نامه، منظور از گراف، گراف متناهی و ساده است.

تعریف ۴.۲.۱. همسایگی باز[۱۶]:
در گراف G، همسایگی باز هر رأس $v \in V(G)$ را با $N(v)$ نشان می‌دهیم و عبارت است از

$$N(v) = \{u \in V(G) \colon uv \in E(G)\}.$$

در یک گراف G، **همسایگی بسته**[۱۷] یک رأس $v \in V(G)$ را نیز با $N[v]$ نشان داده و عبارت است از $N[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. هم‌چنین، به‌ازای یک زیرمجموعه‌ی S از مجموعه رأس‌های گراف G، همسایگی باز S در G را به‌صورت $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ تعریف می‌کنیم و همسایگی بسته‌ی S در G نیز به‌صورت $N[S] = N(S) \cup S$ تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. درجه[۱۸]ی رأس:
تعداد یال‌های واقع بر یک رأس $v \in V(G)$ را درجه‌ی آن رأس گوییم و با نماد $\deg_G(v)$ یا $\deg(v)$ نمایش می‌دهیم. گرافی که درجه‌ی هر رأس آن k است را گراف $k-$منظم گوییم.

کمترین درجه‌ی رأس‌های گراف G را با نماد $\delta(G)$ و بیشترین آن‌را با نماد $\Delta(G)$ نمایش داده و هر طوقه را به‌عنوان دو یال می‌شماریم.

قضیه ۶.۲.۱. (*باندی و مورتی.* [۱]) *در هر گراف* G *داریم* $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = ۲|E|$.

تعریف ۷.۲.۱. گراف کامل[۱۹]:
گراف ساده‌ای که بین هر دو رأس آن، یک یال وجود داشته باشد را گراف کامل گوییم. یک گراف کامل از مرتبه‌ی n را با K_n نشان می‌دهیم.

از تعریف گراف کامل K_n برمی‌آید که درجه‌ی هر رأس آن برابر با $n - ۱$ است. گراف $K_۱$ نیز همان گراف بدیهی است.

---
[۱۱] adjacent
[۱۲] loop
[۱۳] link
[۱۴] parallel
[۱۵] simple graph
[۱۶] open neighborhood
[۱۷] closed neighborhood
[۱۸] degree
[۱۹] complete graph

تعریف ۱.۲.۸. گراف دوبخشی[۲۰]**:**
اگر بتوانیم مجموعه‌ی رأس‌های یک گراف را به دو بخش تقسیم کنیم، به‌طوری که هر یال از گراف، بین رأسی از یک بخش و رأسی از بخش دیگر باشد، آن‌گاه گراف را دوبخشی گوییم.

یک گرافی دوبخشی که در آن، از هر رأس یک بخش به هر رأس بخش دیگر، یک یال موجود باشد را گراف دوبخشی کامل گوییم و با نماد $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم هرگاه بخش‌های آن به‌ترتیب دارای m و n رأس باشند.

تعریف ۱.۲.۹. گراف مکمل[۲۱]**:**
گراف $G=(V,E)$ را در نظر می‌گیریم. اگر یال‌های E را حذف کرده و هر دو رأس غیرمجاور را به یک‌دیگر وصل کنیم، گراف حاصل را گراف مکمل G نامیده و با $\bar{G}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۰. زیرگراف[۲۲]**:**
گراف H را زیرگراف G می‌گوییم، هرگاه $V(H)\subseteq V(G)$، $E(H)\subseteq E(G)$ و $\psi_H=\psi_G\big|_{E(H)}$. با فرض آن‌که H زیرگرافی از G است، H را زیرگراف **سره**[۲۳]ی G گوییم هرگاه $V(H)\neq V(G)$ باشد و H را زیرگراف **فراگیر** G[۲۴] گوییم هرگاه $V(H)=V(G)$ باشد.

تعریف ۱.۲.۱۱. زیرگراف القایی[۲۵]**:**
گراف $G=(V,E)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $V'\subseteq V$ و $V'\neq\emptyset$، آن‌گاه زیرگرافی از G با مجموعه رأس‌های V' و زیرمجموعه‌ای از یال‌های $E(G)$ که هر دو انتهای آن‌ها در V' باشد را زیرگراف القا شده توسط V' می‌نامیم و با $G[V']$ نمایش می‌دهیم.

زیرگراف القایی $G[V\backslash V']$ را با $G-V'$ نیز نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۲. زیرگراف القایی یالی[۲۶]**:**
گراف $G=(V,E)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $E'\subseteq E$ و $E'\neq\emptyset$، آن‌گاه زیرگرافی از G با مجموعه‌ی رأس‌های دو سر یال‌های E' و مجموعه یال‌های E' را زیرگراف القا شده به‌وسیله‌ی E' می‌نامیم و با $G[E']$ نمایش می‌دهیم.

زیرگراف القایی یالی $G[E\backslash E']$ را با $G-E'$ نیز نمایش می‌دهیم و به‌طور مشابه، گرافی که با افزودن مجموعه یال‌های E' به گراف G به‌دست می‌آید را با $G+E'$ نیز نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۳. زیرگراف‌های مجزا[۲۷]**:**
زیرگراف‌هایی از یک گراف که هیچ رأس مشترکی ندارند را زیرگراف‌های مجزا گوییم. به‌همین ترتیب، زیرگراف‌هایی از یک گراف که هیچ یال مشترکی ندارند را زیرگراف‌های **یال-مجزا**[۲۸] گوییم.

[۲۰] bipartite graph
[۲۱] complement graph
[۲۲] subgraph
[۲۳] proper
[۲۴] spanning
[۲۵] induced subgraph
[۲۶] edge induced subgraph
[۲۷] disjoint subgraphs
[۲۸] edge-disjoint

پس هر دو زیرگراف مجزا، یال-مجزا نیز هستند و هر دو زیرگراف غیر یال-مجزا، حداقل ۲ رأس مشترک دارند.

تعریف ۱۴.۲.۱. مجموعه‌ی مستقل[۲۹]:
زیرمجموعه‌ی S از مجموعه‌ی $V(G)$ را که هیچ دو رأس آن در G مجاور نیستند، یک مجموعه‌ی مستقل از گراف G می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. اجتماع و اشتراک دو زیرگراف[۳۰]:
زیرگراف‌های H و H' از گراف G را در نظر می‌گیریم. اجتماع دو زیرگراف H و H'، زیرگرافی است با مجموعه رأس‌های $V(H) \cup V(H')$ و مجموعه یال‌های $E(H) \cup E(H')$ و با نماد $H \cup H'$ نمایش داده می‌شود. اگر H و H' مجزا باشند، می‌توانیم به‌جای $H \cup H'$ بنویسیم $H + H'$.

اگر زیرگراف‌های H و H' مجزا نباشند، آن‌گاه زیرگرافی که مجموعه رأس‌های آن $V(H) \cap V(H')$ و مجموعه یال‌های آن $E(H) \cap E(H')$ است را اشتراک دو زیرگراف H و H' می‌نامیم و با نماد $H \cap H'$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. یکریختی گراف‌ها[۳۱]:
دو گراف G و H را یکریخت گوییم، هرگاه نگاشت‌های دوسویی $\theta : V(G) \to V(H)$ و $\varphi : E(G) \to E(H)$ وجود داشته باشند، به‌طوری که داشته باشیم:
$\psi_G(e) = uv$ اگر و تنها اگر $\psi_H(\varphi(e)) = \theta(u)\theta(v)$. در این‌صورت، زوج نگاشت (θ, φ) را یک یکریختی بین G و H می‌نامیم. یکریخت بودن گراف‌های G و H با یک‌دیگر را به صورت $G \simeq H$ نشان می‌دهیم.

در یک گراف دلخواه مانند G به‌طوری که $G \not\simeq K_2$، هر رأس با درجه‌ی یک را **برگ**[۳۲] گوییم. هر همسایه‌ی یک برگ را، **رأس پشتیبان**[۳۳] گوییم.

تعریف ۱۷.۲.۱. گشت، گذرگاه، مسیر و دور[۳۴]:
یک گشت از گراف G، دنباله‌ی ناصفر متناهی $w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ است، به‌طوری که جملات آن یک در میان از رأس‌ها و یال‌ها بوده و $1 \leq i \leq k$ باشد و به‌ازای هر $v_{i-1} e_i v_i$، رأس‌های v_{i-1} و v_i دو انتهای یال e_i باشند. عدد k را طول گشت w نامیده و v_0 و v_k را به‌ترتیب رأس‌های ابتدا و انتها و بقیه رأس‌ها را، رأس‌های داخلی w می‌نامیم.
اگر یال‌های e_1 تا e_k در گشت w از یک‌دیگر متمایز باشند، w یک گذرگاه و اگر رأس‌های v_0 تا v_k در گشت w از یک‌دیگر متمایز باشند، w یک مسیر از v_0 به v_k است. واضح است که اگر در گشتی، تمام رأس‌ها از یک‌دیگر متمایز باشند،آن‌گاه تمام یال‌ها نیز از یک‌دیگر متمایزند، بنابراین هر مسیر یک گذرگاه نیز می‌باشد. اگر رأس‌های ابتدا و انتهای یک مسیر یکی باشند، آن مسیر یک دور است.

[۲۹] independent set
[۳۰] union and intersection of two graphs
[۳۱] isomorphism of graphs
[۳۲] leaf
[۳۳] support vertex
[۳۴] walk, trail, path and cycle

تعریف ۱.۲.۱۸. گراف همبند[۳۵]:
هرگاه بین هر دو رأس از رأس‌های گرافی مانند G بتوان مسیری پیدا کرد، آن‌گاه G یک گراف همبند است.
برای هر گراف دلخواه، هر زیرگراف همبند آن یک مؤلفه‌ی همبندی آن گراف است.

گراف همبندی که هیچ دوری (زیرگراف دور) نداشته باشد، **درخت**[۳۶] نامیده شده و با T نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۹. یال آویزان[۳۷]:[۹]
یالی که بر یک رأس با درجه‌ی یک واقع است. (یک سر آن، رأسی با درجه‌ی یک باشد.) با اضافه کردن یک یال آویزان به یک رأس از یک گراف، مرتبه و تعداد یال‌های آن گراف، هر کدام یک واحد افزایش می‌یابند.

تعریف ۱.۲.۲۰. تاج[۳۸] یک گراف همبند:[۹]
اگر به هر رأس از یک گراف همبند، یک یال آویزان اضافه کنیم، تاج آن گراف به‌دست می‌آید. تاج گراف H به‌صورت $cor(H)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۲۱. ستاره[۳۹]:[۹]
برای هر $k \geq 1$ یک درخت یکریخت با یک گراف دوبخشی $K_{1,k}$ را ستاره می‌گویند و با نماد $S_{1,k}$ یا همان نماد $K_{1,k}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۲۲. فاصله[۴۰]:
فرض کنیم u و v دو رأس از گراف G هستند که حداقل یک مسیر بین آن‌ها در G موجود است. فاصله‌ی بین u و v در گراف G، طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v است. فاصله‌ی بین u و v در گراف G را با $\mathrm{d}_G(u,v)$ یا به‌طور خلاصه‌تر با $\mathrm{d}(u,v)$ نشان می‌دهیم.

اگر از u به v مسیری وجود نداشته باشد بنا به تعریف، $\mathrm{d}(u,v)$ نامتناهی خواهد بود.

بیشترین فاصله‌ی بین دو رأس از رأس‌های یک گراف را **قطر**[۴۱] آن گراف گوییم. با توجه به تعاریف درخت و قطر گراف، مسیر با بیشترین طول در یک درخت، قطر درخت است.

قضیه ۱.۲.۲۳. (*باندی و مورتی.* [۱]) *برای هر درخت T داریم* $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

تعریف ۱.۲.۲۴. گراف وتری[۴۲]:[۹]
گرافی که شامل هیچ دور القایی به طول حداقل ۴ نباشد.

تعریف ۱.۲.۲۵. مجموعه‌ی احاطه‌گر[۴۳] **یک گراف**:[۹]
یک مجموعه‌ی احاطه‌گر S برای یک گراف G، زیرمجموعه‌ای از $V(G)$ است به‌طوری که به ازای هر رأس $v \in V(G)\backslash S$ یک رأس $u \in S$ موجود باشد که uv یک یال از $E(G)$ باشد.

---
[۳۵] connected graph
[۳۶] tree
[۳۷] pendant edge
[۳۸] corona
[۳۹] star
[۴۰] distance
[۴۱] diameter
[۴۲] chordal graph
[۴۳] Dominating set

تعریف ۲۶.۲.۱. عدد احاطه‌گری[۴۴]:[۹]
عدد احاطه‌گری گراف G برابر با تعداد اعضای کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گر G است و آن را با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲۷.۲.۱.

$$\gamma(K_n) = ۱$$

اگر تابع f را روی رأس‌های گراف G به صورت زیر تعریف کنیم:

$$f \colon V(G) \to P(\{۱\})$$

به ازای هر رأس v که $f(v) = \emptyset$ داشته باشیم

$$\bigcup_{u \in N(v)} f(u) = \{۱\}$$

(به عبارت دیگر، رأس v به‌وسیله‌ی همسایه‌هایش احاطه شود)، آن‌گاه f را یک تابع احاطه‌گری معمولی روی رأس‌های گراف G می‌نامیم.
دو تعریف فوق معادل هستند چون با فرض انتخاب S به‌عنوان یک مجموعه‌ی احاطه‌گر، برای هر $u \in S$ می‌توان قرار داد $f(u) = \{۱\}$ و برای هر $v \in V(G) \backslash S$، $f(v) = \emptyset$.
وزن تابع احاطه‌گری معمولی f را $w_\circ(f)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم $w_\circ(f) = \sum_{v \in V(G)} |f(v)|$. هم‌چنین واضح است که $\gamma(G) = Min_f w_\circ(f)$ که هر تابع f یک تابع احاطه‌گری معمولی است.
لازم به ذکر است که در کل این پایان‌نامه، تحدید یک تابع به یک دامنه‌ی کوچکتر با نماد ریاضی آن نشان داده شده است. به عنوان مثال، تحدید تابع g به زیردامنه‌ی H به‌صورت $g\big|_H$ دیده می‌شود.

[۴۴] domination number

فصل ۲

۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی روی رده‌هایی از گراف‌ها

۱.۲ مقدمه

تعریف ۱.۱.۲. تابع $k-$ احاطه‌گری رنگین‌کمانی[1]:
تابع $f : V(G) \to P(\{1, \dots, k\})$ را یک تابع $k-$احاطه‌گری رنگین‌کمانی روی گراف G می‌گوییم، هرگاه برای هر رأس $v \in V(G)$ که $f(v) = \emptyset$، داشته باشیم

$$\bigcup_{u \in N(v)} f(u) = \{1, \dots, k\}$$

.

اگر f یک تابع $k-$ احاطه‌گری رنگین‌کمانی باشد، متناظر با تعریف آن وزن چنین تابعی به صورت $\sum_{v \in V(G)} |f(v)|$ است و با W نشان داده می‌شود. عدد $k-$ احاطه‌گری رنگین‌کمانی گراف G که با $\gamma_{rk}(G)$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر است:

$$\gamma_{rk}(G) = Min_f \sum_{v \in V(G)} |f(v)|$$

که درآن f یک تابع $k-$ احاطه‌گری رنگین‌کمانی است.
هر تابع $k-$ احاطه‌گر رنگین‌کمانی را به طور مختصر با kRDF نمایش می‌دهیم. لازم به ذکر است که به‌ازای هر kRDF روی یک گراف G، منظور از احاطه‌شدن یک رأس $v \in V(G)$ به‌وسیله‌ی همسایه‌هایش، برقراری رابطه‌ی $\bigcup_{u \in N(v)} f(u) = \{1, \dots, k\}$ می‌باشد. هم‌چنین، توجه داشته باشیم

$$f(N(v)) = \{f(u) : u \in N(v)\}$$

و

$$f(N[V]) = \{f(u) : u \in N[v]\}.$$

در این تحقیق، توابع مذکور را به‌طور ویژه برای $k = 2$ بررسی می‌کنیم. در این فصل، اثر این توابع را روی رده‌های زیر از گراف‌ها می‌بینیم:

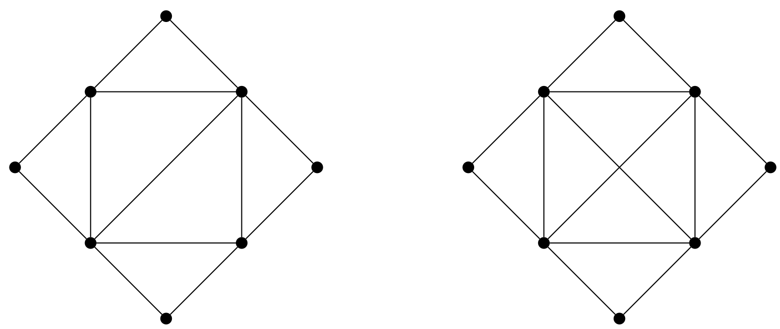
[1] k-rainbow domination function

الف) مسیرها و دورها، ب)خورشیدها، پ)گراف‌های پترسن توسعه یافته

با به یاد آوردن تعریف یک گراف وتری از فصل ۱، گراف خورشید را در زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۲.۱.۲. خورشید[۲]:
یک گراف وتری روی $۲n$ رأس ($n \geq ۳$) را خورشید گوییم و با نماد S_n نشان می‌دهیم، هرگاه مجموعه‌ی رأس‌های آن قابل افراز به دو مجموعه‌ی $W = \{w_۱, w_۲, \dots, w_n\}$ و $U = \{u_۱, u_۲, \dots, u_n\}$ باشد، به‌طوری که W مجموعه‌ای مستقل باشد و رأس u_i مجاور باشد با رأس w_j اگر و تنها اگر $i = j$ یا $i \equiv j + ۱$ $(\bmod\ n)$.

البته اگر در تعریف خورشید S_n، مجموعه‌ی U یک گراف کامل ایجاد کند ($S_n[U]$ گراف کاملی باشد)، آن‌گاه گراف حاصل را خورشید کامل [۳] گوییم. شکل‌های (۱.۲).شکل سمت چپ، یک خورشید $S_۴$ و شکل سمت راست، یک خورشید کامل $S_۴$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۲: خورشید

در پایین، تعریف رده‌ی دیگری از گراف‌ها را می‌بینیم که برای اولین بار به‌وسیله‌ی واتکینس [۴] معرفی شدند.

تعریف ۳.۱.۲. گراف پترسن توسعه یافته[۵]:
به‌ازای هر $۱ \leq k \leq n - ۱$، گراف پترسن توسعه یافته‌ی $P(n, k)$، گرافی است روی $۲n$($n \geq ۳$) رأس، به‌طوری که $V(P(n, k)) = \{u_i, v_i : ۰ \leq i \leq n - ۱\}$ و $E(P(n, k)) = \{u_i u_{i+۱}, u_i v_i, v_i v_{i+k} : ۰ \leq i \leq n - ۱$ و اندیس‌ها به پیمانه‌ی n هستند$\}$.

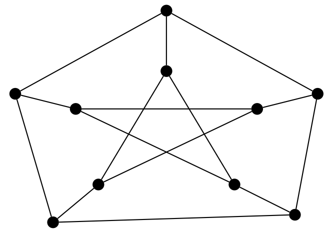
اگر در تعریف گراف پترسن توسعه یافته‌ی $P(n, k)$، شرط "اول بودن n و k نسبت به هم" نیز گنجانده شود، آن‌گاه زیررده‌ای از گراف‌های پترسن توسعه یافته به‌دست می‌آید که با نماد $GP(n, k)$ نمایش داده می‌شوند. واضح است تعریف زیر که به‌وسیله‌ی زلینکا[۶] برای گراف پترسن توسعه یافته آمده است، همین زیررده از گراف‌های پترسن توسعه یافته را مشخص می‌کند.

[۲] Sun
[۳] complete sun
[۴] Watkins
[۵] generalized Petersen graph
[۶] Zelinka

فرض کنیم $n \geq ۳$ و k اعداد طبیعی نسبت به هم اولی باشند به‌طوری که $k < n$ و فرض کنیم C_n و C'_n دو دور مجزا به طول n باشند و $u_۱, u_۱, \ldots, u_n$ رأس‌های C_n و $u_i u_{i+۱}$ که $i = ۱, \ldots, n-۱$ به همراه $u_n u_۱$ یال‌های C_n و $v_۱, \ldots, v_n$ رأس‌های C'_n و $v_i v_{i+k}$ که $i = ۱, \ldots, n-۱$ و $i+k$ به پیمانه‌ی n است یال‌های C'_n باشد. آن‌گاه

$$GP(n,k) = C_n \cup C'_n \cup \{u_i v_i :\ ۱ \leq i \leq n\}.$$

به‌عنوان مثال، $GP(۵,۲)$ همان گراف پترسن مشهور است که در شکل (۲.۲) دیده می‌شود.



شکل ۲.۲: $GP(۵,۲)$

۲.۲ مسیرها و دورها

گزاره ۱.۲.۲. [۲]

$$\gamma_{r۲}(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + ۱$$

برهان. تابع $f : V(P_n) \to P(\{۱,۲\})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
اگر $n \equiv$ ۰یا۲ $\pmod{۴}$، برای هر i به‌طوری که $۱ \leq i \leq n-۱$ قرار می‌دهیم

$$f(v_i) = \begin{cases} \{۱\} & i \equiv ۱ \pmod{۴} \\ \{۲\} & i \equiv ۳ \pmod{۴} \\ \emptyset & \text{o.w} \end{cases}$$

و برای v_n قرار می‌دهیم

$$f(v_n) = \{۱\}$$

برای هر رأس v_i به‌طوری که $f(v_i) = \emptyset$ داریم $|f(v_{i-۱})| = |f(v_{i+۱})| = ۱$ و $f(v_{i-۱}) \neq f(v_{i+۱})$ لذا f یک 2RDF روی رأس‌های P_n است. چون f روی رأس‌ها به صورت یکی در میان، $\emptyset$ و یک مجموعه‌ی تک عضوی تعریف می‌شود به‌استثنای رأس v_n، بنابراین

$$w(f) = \frac{n}{۲} + |f(v_n)| = \frac{n}{۲} + ۱$$

و چون n زوج است پس $w(f) = \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + ۱$.

اگر $n \equiv$ ۱یا۳ $\pmod{۴}$، برای هر i به‌طوری که $۱ \leq i \leq n$ قرار می‌دهیم

$$f(v_i) = \begin{cases} \{۱\} & i \equiv ۱ \pmod{۴} \\ \{۲\} & i \equiv ۳ \pmod{۴} \\ \emptyset & \text{o.w} \end{cases}$$

در این‌جا نیز مشابه حالت قبل ، f یک 2RDF است و روی رأس‌ها به صورت یکی در میان $\emptyset$ و یک مجموعه‌ی تک عضوی تعریف می‌شود و از طرف دیگر، n عددی فرد و $f(v_۱) \neq \emptyset$ و $f(v_n) \neq \emptyset$. در نتیجه داریم $w(f) = \frac{n-۱}{۲} + ۱ = \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + ۱$. پس $\gamma_{r۲}(P_n) \leq \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + ۱$. برای ادامه‌ی اثبات، ابتدا نشان می‌دهیم هر $\gamma_{r۲}$−تابع مانند h روی P_n، برای هر $v \in V(P_n)$ دارای شرط $|h(v)| \leq ۱$ است. اگر رأسی از $V(P_n)$ مانند v_i وجود داشته باشد به‌طوری که $h(v_i) = \emptyset$، آن‌گاه از تعریف مسیر و $\gamma_{r۲}$−تابع بودن h داریم

$$h(v_{i-۱}) = h(v_{i+۱}) = \emptyset$$

(توجه داریم که v_i نمی‌تواند رأس انتهایی مسیر باشد چون در غیر این‌صورت h بهینه نخواهد بود.) حال، چون رأس v_i فقط رأس‌های $v_{i-۱}$ و $v_{i+۱}$ را احاطه (رنگین‌کمانی) می‌کند (درجه‌ی هر رأس ۲ است) بنابراین می‌توان h را روی رأس‌های مذکور به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$h(v_{i-۱}) = \{۱\},\ h(v_i) = \emptyset,\ h(v_{i+۱}) = \{۲\}.$$

پس برای هر $\gamma_{r۲}$−تابع مانند h روی P_n و هر رأس v_i از P_n داریم

$$|h(v_i)| \leq ۱.$$

اگر f یک $\gamma_{r۲}$−تابع نباشد، پس می‌توان یک 2RDF مانند g روی P_n تعریف کرد به‌طوری که $w(g) < w(f)$ وبرای این منظور باید برای یک رأس v_i داشته باشیم $g(v_i) = g(v_{i+۱}) = \emptyset$. اما در این‌صورت، چون درجه‌ی همه‌ی رأس‌ها ۲ است، داریم $g(v_{i-۱}) = g(v_{i+۲}) = \{۱, ۲\}$. بنابراین $w(f) \leq w(g)$ واین تناقض است. لذا f یک $\gamma_{r۲}$−تابع روی رأس‌های P_n است.

□

گزاره ۲.۲.۲. [۲]و[۳] *برای* $n \geq ۳$ *داریم*

$$\gamma_{r۲}(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor$$

برهان. دور C_n را به صورت $v_۱v_۲\ldots v_nv_۱$ در نظر گرفته و f را به صورت زیر روی آن تعریف می‌کنیم:

$$f(v_i) = \begin{cases} \{۱\} & i \equiv ۱ \pmod{۴} \\ \{۲\} & i \equiv ۳ \pmod{۴} \\ \emptyset & \text{o.w} \end{cases}$$

اینک، اگر $n \equiv ۲ \pmod{۴}$، تابع $g : V(C_n) \to P(\{۱, ۲\})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

برای هر i به‌طوری که $۱ \leq i \leq n - ۱$ قرار می‌دهیم

$$g(v_i) = f(v_i)$$

و برای رأس v_n قرار می‌دهیم

$$g(v_n) = \{۲\}$$

اگر $g(v_i) = \emptyset$ آن‌گاه $|g(v_{i-۱})| = |g(v_{i+۱})| = ۱$ و $g(v_{i-۱}) \neq g(v_{i+۱})$ لذا g یک 2RDF روی رأس‌های C_n است و $w(g) = \frac{n}{۲} + ۱$. چون $n \equiv ۲ \pmod{۴}$ داریم $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor = \frac{n}{۲}$ و $\lceil \frac{n}{۴} \rceil - \lfloor \frac{n}{۴} \rfloor = ۱$ بنابراین

$$w(g) = \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor$$

و اگر $n \not\equiv ۲ \pmod{۴}$، تابع $g: V(C_n) \to P(\{۱,۲\})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر i به‌طوری که $۱ \leq i \leq n$ قرار می‌دهیم

$$g(v_i) = f(v_i)$$

و مشابه حالت قبل، در این‌جا نیز g یک 2RDF است. با توجه به تعریف g و امکان فرد بودن عدد n، داریم $w(g) = \lceil \frac{n}{۲} \rceil$. اگر $n \equiv ۰ \pmod{۴}$ آن‌گاه $\lceil \frac{n}{۴} \rceil - \lfloor \frac{n}{۴} \rfloor = ۰$ و $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor = \lceil \frac{n}{۲} \rceil$. اگر $n \equiv ۱$یا$۳ \pmod{۴}$ آن‌گاه $\lceil \frac{n}{۴} \rceil - \lfloor \frac{n}{۴} \rfloor = ۱$ و $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + ۱ = \lceil \frac{n}{۲} \rceil$. بنابراین برای $n \not\equiv ۲ \pmod{۴}$ داریم

$$w(g) = \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor$$

پس به ازای هر n داریم

$$\gamma_{r۲}(C_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor$$

.

اینک، کافی است ثابت شود $\gamma_{r۲}(C_n) \geq \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + \lceil \frac{n}{۴} \rceil - \lfloor \frac{n}{۴} \rfloor$.
اگر f یک تابع ۲− احاطه‌گر رنگین‌کمانی بهینه (یک $\gamma_{r۲}$− تابع) برای C_n باشد آن‌گاه حداقل یک رأس $x \in V(C_n)$ هست که $f(x) = \emptyset$. در این صورت $f|_{C_n - x}$ یک 2RDF برای $C_n - x$ است. از طرف دیگر، $C_n - x$ همان $P_{n-۱}$ می‌باشد. بنابراین

$$\gamma_{r۲}(P_{n-۱}) \leq \gamma_{r۲}(C_n)$$

وبنا به گزاره ۱.۲.۲ داریم

$$\gamma_{r۲}(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor + ۱$$

با توجه به مقدار n به پیمانه ۴ حالات زیر را در نظر گرفته و در هر حالت حکم را ثابت می‌کنیم:
الف) $n \equiv ۰ \pmod{۴}$ پس $k \in \mathbf{Z}$ وجود دارد به‌طوری که $n = ۴k$. در این صورت

$$\left\lfloor \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor + ۱ = \left\lfloor ۲k - \frac{۱}{۲} \right\rfloor + ۱ = ۲k \tag{۱.۲}$$

$$\left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor = ۰ \quad \Longrightarrow \quad \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor = ۲k \tag{۲.۲}$$

از روابط (۱.۲) و (۲.۲) داریم

$$\gamma_{r۲}(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor$$

ب) $n \equiv ۱ \pmod{۴}$ پس $k \in \mathbf{Z}$ وجود دارد به‌طوری که $n = ۴k + ۱$. در این صورت

$$\left\lfloor \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor + ۱ = ۲k + ۱ \tag{۳.۲}$$

$$\left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor = k + ۱ - k = ۱ \quad \Longrightarrow \quad \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor = ۲k + ۱ \tag{۴.۲}$$

از روابط (۳.۲) و (۴.۲) داریم

$$\gamma_{r۲}(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor$$

پ) $n \equiv ۳ \pmod{۴}$ پس $k \in \mathbf{Z}$ وجود دارد به‌طوری که $n = ۴k + ۳$. در این صورت

$$\left\lfloor \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor + ۱ = ۲k + ۲ \tag{۵.۲}$$

$$\left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor = k + ۱ - k = ۱ \quad \Longrightarrow \quad \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor = ۲k + ۲ \tag{۶.۲}$$

از روابط (۵.۲) و (۶.۲) داریم

$$\gamma_{r۲}(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor$$

برای اثبات حکم در حالت $n \equiv ۲ \pmod{۴}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:
فرض می‌کنیم f یک $\gamma_{r۲}-$ تابع برای C_n باشد. اگر رأسی چون x از C_n وجود داشته باشد که $f(x) = \{۱, ۲\}$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} w(f) &= ۲ + \gamma_{r۲}(P_{n-۳}) = ۲ + \left\lfloor \frac{n-۳}{۲} \right\rfloor + ۱ = ۲ + \left\lfloor \frac{۴k-۱}{۲} \right\rfloor + ۱ \\ &= ۲ + (۲k - ۱) + ۱ = \frac{n}{۲} + ۱ = \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor \qquad n \equiv ۲ \pmod{۴} \text{هرگاه} \end{aligned}$$

و اگر به ازای هر $v \in C_n$ داشته باشیم $f(v) \leq ۱$ آن‌گاه به ازای هر زوج رأس مجاور u و v از C_n، حداقل یکی از آن‌ها تحت f به مقدار غیر تهی برده می‌شوند. در نتیجه $w(f) \geq \frac{n}{۲}$ و از طرف دیگر، برای این n ها اگر داشته باشیم $w(f) = \frac{n}{۲}$ آن‌گاه دو رأس x و y با یک همسایه‌ی مشترک وجود دارند به‌طوری که $f(x) = f(y) \neq \emptyset$ و این با 2RDF بودن f تناقض دارد پس $w(f) \geq \frac{n}{۲} + ۱$. در نتیجه برای $n \equiv ۲ \pmod{۴}$ داریم

$$w(f) \geq \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor$$

لذا ثابت شد که در هر حالت $w(f) \geq \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + \lceil \frac{n}{۴} \rceil - \lfloor \frac{n}{۴} \rfloor$.

□

۳.۲ خورشیدها

گزاره ۱.۳.۲. [۲] *برای* $n \geq ۳$ *داریم* $\gamma_{r۲}(S_n) = n$

برهان. تابع $f : V(S_n) \to P(\{۱, ۲\})$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای n های زوج، اگر $i \equiv ۱ \pmod{۲}$ قرار می‌دهیم $f(w_i) = \{۱\}$ و اگر $i \equiv ۰ \pmod{۲}$ قرار می‌دهیم $f(w_i) = \{۲\}$ و به بقیه‌ی رأس‌ها (یعنی رأس‌های U) $\emptyset$ را اختصاص می‌دهیم. برای n های فرد، اگر $i \equiv ۰ \pmod{۲}$ برای $۱ \leq i \leq n-۱$ قرار می‌دهیم $f(w_i) = \{۲\}$، اگر $i \equiv ۱ \pmod{۲}$ برای $۳ \leq i \leq n-۲$ قرار می‌دهیم $f(w_i) = \{۱\}$، برای رأس u_n قرار می‌دهیم $f(u_n) = \{۱, ۲\}$ و به بقیه‌ی رأس‌ها $\emptyset$ اختصاص می‌دهیم. در این‌صورت f یک 2RDF روی S_n است. لذا $\gamma_{r۲}(S_n) \leq w(f) = n$.
اکنون کافی است نشان دهیم $\gamma_{r۲}(S_n) \geq n$. برای این منظور، f را یک $\gamma_{r۲}-$تابع روی S_n می‌گیریم. فرض می‌کنیم $W' \subseteq W$ مجموعه‌ای از رأس‌های w_i باشد، به‌طوری که $f(w_i) \neq \emptyset$. قرار می‌دهیم $W'' = W \backslash W'$.
اگر $W' = W$، آن‌گاه $\gamma_{r۲}(S_n) \geq \sum_{i=۱}^{n} |f(w_i)| \geq n$. در غیر این‌صورت، برای هر رأس $w \in W''$ داریم $f(N(W)) = \{۱, ۲\}$(چون f یک 2RDF است). از تعریف گراف خورشید، برای هر i و j متمایز داریم

$1 \leq |N(w_i) \cap N(w_j)|$. چون به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $N(w_i) \subset U$ (یعنی هر رأس از W'' باید به‌وسیله‌ی رأس‌های U احاطه شود) بنابراین $\sum_{u \in U} |f(u)| \geq |W''|$.
از این‌رو
$\gamma_{r2}(S_n) \geq |W'| + \sum_{u \in U} |f(u)| \geq |W'| + |W''| = |W| = n$.

□

۴.۲ گراف‌های پترسن توسعه یافته

گزاره ۱.۴.۲. [۲] *برای هر گراف پترسن توسعه یافته* $GP(n,k)$ *داریم*
$$\gamma_{r2}(GP(n,k)) \leq n$$

برهان. روشن است که برای اثبات کافی است یک 2RDF به وزن n برای $GP(n,k)$ بیابیم. با توجه به مقدار k دو حالت کلی زیر را در نظر می‌گیریم:
حالت۱. kفرد باشد.
تابع $f: V(GP(n,k)) \rightarrow P(\{1,2\})$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $u_i \in V(GP(n,k))$،
$$f(u_i) = \begin{cases} \emptyset & \text{اگر } i \text{ فرد باشد} \\ \{1\} & \text{اگر } i \text{ زوج باشد} \end{cases}$$
برای هر $v_i \in V(GP(n,k))$،
$$f(v_i) = \begin{cases} \{2\} & \text{اگر } i \text{ فرد باشد} \\ \emptyset & \text{اگر } i \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

در این‌صورت، اگر $u_j \in C_n$ و $f(u_j) = \emptyset$ (بنابراین j فرد است) آن‌گاه $f(v_j) = \{2\}$ و $f(u_{j+1}) = \{1\}$ لذا $\bigcup_{x \in N[u_j]} f(x) = \{1,2\}$ و اگر $v_j \in C'_n$ و $f(v_j) = \emptyset$ (بنابراین j زوج است) آن‌گاه $f(u_j) = \{1\}$ و چون k فرد است و j زوج، پس $j+k$ فرد است. از طرف دیگر چون $j+k$ به پیمانه‌ی n است پس اگر $j+k < n$ آن‌گاه $f(v_{j+k}) = \{2\}$ و اگر $j+k \geq n$ آن‌گاه برای n های زوج، $j+k$ به پیمانه‌ی n، فرد است پس $f(v_{j+k}) = \{2\}$.
برای n های فرد در این حالت، اثبات نادرست است. دلیل این ادعا بعد از اثبات قضیه قید شده است و هم‌چنین، روش درست آن نوشته شده است.
حالت۲. k زوج باشد.
چون n و k نسبت به هم اول هستند، n فرد است. در این حالت f را به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم که برای هر i، $f(v_i) = \emptyset$ اگر و تنها اگر $f(u_i) \neq \emptyset$. به‌علاوه، فرض می‌کنیم اگر $f(v_i) \neq \emptyset$ آن‌گاه $f(v_i) = \{2\}$ باشد و اگر $f(u_i) \neq \emptyset$ آن‌گاه $f(u_i) = \{1\}$ و به این ترتیب و باتوجه به تعریف $GP(n,k)$ و این که n فرد است خواهیم داشت: $w(f) = n$. برای تعریف f کافی است برای هر i، $f(v_i)$ را مشخص کنیم و با توجه به توضیحات فوق سایر مقادیر f مشخص می‌شوند.
فرض کنیم $i \in \mathbf{N}$ و $1 \leq i \leq n$ باشدو $d = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ باشد. برای هر i که $\frac{i}{k} \leq d$، f را به صورت زیر تعریف

می‌کنیم:

اگر $\lfloor \frac{i-1}{k} \rfloor$ زوج باشد، قرار می‌دهیم:

$$f(v_i) = \begin{cases} \{2\} & \text{هرگاه } i \text{ فرد باشد} \\ \emptyset & \text{هرگاه } i \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

به‌عنوان مثال، $f(v_1) = \{2\}$ و $f(v_k) = \emptyset$.

اگر $\lfloor \frac{i-1}{k} \rfloor$ فرد باشد، قرار می‌دهیم:

$$f(v_i) = \begin{cases} \emptyset & \text{هرگاه } i \text{ فرد باشد} \\ \{2\} & \text{هرگاه } i \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

به‌عنوان مثال، $f(v_{k+1}) = \emptyset$ و $f(v_{2k}) = \{2\}$. برای تعریف f روی رأس‌های v_i که $\frac{i}{k} > d$، حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

۱.۲) $n \equiv 3 \pmod 4$ که در این حالت دقیقا ۳ رأس از دور C'_n مقداردهی نشده‌اند.

از $n - 3 \equiv 0 \pmod 4$ داریم $d = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor = \frac{n-3}{k}$. لذا $n = dk + 3$.

حال قرار می‌دهیم: $f(v_{dk+1}) = f(v_{dk+3}) = \emptyset$ و $f(v_{dk+2}) = \{2\}$.

توجه می‌کنیم که $f(v_{dk})$ و $f(v_{dk-1})$ هر دو نمی‌توانند $\emptyset$ باشند چون $\lfloor \frac{dk-2}{k} \rfloor = \lfloor \frac{dk-1}{k} \rfloor$ بنابراین طبق تعریف f در حالت ۲، یکی از مقادیر $f(v_{dk})$ یا $f(v_{dk-1})$ برابر با $\{2\}$ است.

۲.۲) $n \equiv 1 \pmod 4$ و d فرد باشد.

در این حالت، از $n - 1 \equiv 0 \pmod 4$ نتیجه می‌گیریم $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor = d = \frac{n-1}{k}$. لذا $n = dk + 1$.

قرار می‌دهیم $f(v_n) = \emptyset$ و در این‌صورت نیز مجددا f یک 2RDF خواهد بود.

۳.۲) $n \equiv 1 \pmod 4$ و d زوج باشد.

مشابه حالت۲.۲ داریم $n = dk + 1$.

اگر قرار دهیم $f(v_n) = \emptyset$ آن‌گاه $2 \notin \bigcup_{x \in N[v_n]} f(x)$ در نتیجه f یک 2RDF نخواهد بود و اگر قرار دهیم $f(v_n) = \{2\}$ آن‌گاه برای سه رأس متوالی v_{dk}, v_{dk+1}, v_1 داریم

$$f(v_{dk} = f(v_{dk+1}) = f(v_1) = \{2\}$$

در نتیجه با توجه به تعریف fداریم

$$f(u_{dk}) = f(u_{dk+1}) = f(u_1) = \emptyset$$

بنابراین

$$1 \notin \bigcup_{x \in N[u_{n=dk+1}]} f(x)$$

پس f یک 2RDF نخواهد بود. در نتیجه برای v_n و $v_{n-1=dk}$ تعریف می‌کنیم: $f(v_{dk}) = \emptyset$ و $f(v_n) = \{2\}$.

□

ادعا۱: اگر j زوج و کمتر از k و داشته باشیم $j+k>n$ آن‌گاه $j+k$ به پیمانه‌ی n عددی زوج است.
اثبات: فرض کنیم $j+k \equiv h \pmod{n}$ در این‌صورت به‌ازای یک $x \in \mathbb{N}$ داریم $j+k-h = xn$. اما چون $j<k<n$ پس $x=۱$ لذا $j+k-h=n$ و چون $j+k$ و n هر دو فرد هستند پس h زوج است.
ادعا۲: اگر یک همسایه‌ی دیگر رأس v_j را v_i فرض کنیم، آن‌گاه i نیز زوج است.
اثبات: چون $i+k \equiv j \pmod{n}$، بنابراین اگر i فرد باشد آن‌گاه $i+k$ فرد است و مجددا چون $(i+k)-j=n$ (زیرا $k<n$ و $i<n$) پس n زوج است و این تناقض است.
با توجه به ادعاهای فوق داریم $\{۲\} \notin \bigcup_{x\in N[v_j]} f(x)$.
روش درست:
می‌دانیم $\Big\{ v_i v_{i+(n-k)} :$ به پیمانه‌ی n است $i+(n-k) \Big\}$ $= C'_n$. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} ۱+(n-k) &= i_۱ \\ i_۱+(n-k) &= i_۲ \\ &\vdots \end{aligned}$$

در آن‌صورت $C'_n = v_۱ v_{i_۱} v_{i_۲} \dots v_n$. اینک، حالات زیر را در نظر می‌گیریم:
حالت ۱) اندیس‌های رأس‌های دور C'_n را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم

$$\begin{matrix} ۱ & i_۱ \\ i_۲ & i_۳ \\ i_۴ & i_۵ \\ \vdots & \vdots \end{matrix}$$

اگر اعداد هر ستون غیرمتوالی باشند، آن‌گاه تابع $f: V(GP(n,k)) \to P(\{۱,۲\})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f\begin{pmatrix} v_۱ v_{i_۱} v_{i_۲} & \cdots & v_n \\ u_۱ u_{i_۱} u_{i_۲} & \cdots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & \{۲\} & \emptyset & \{۲\} & \cdots \\ \{۱\} & \emptyset & \{۱\} & \emptyset & \cdots \end{pmatrix}$$

چون اعداد هر ستون غیرمتوالی هستند، بنابراین هر رأس با مقدار $\emptyset$ در همسایگی یک رأس با مقدار $\{۱\}$ و یک رأس با مقدار $\{۲\}$ قرار دارد. لذا f یک 2RDF است که اگر $|f(v_i)| = ۱$ آن‌گاه $f(u_i)=\emptyset$ و اگر $f(v_i)=\emptyset$ آن‌گاه $|f(u_i)|=۱$. بنابراین

$$w(f) = W\Big(f\Big|_{V(C'_n)}\Big) + W\Big(f\Big|_{V(C_n)}\Big) = n$$

. در صورتی که اعداد هر ستون، متوالی باشند، حالت ۲ را در نظر می‌گیریم
حالت ۲) اندیس‌های رأس‌های دور C'_n را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم

$$\begin{matrix} ۱ & i_۱ & i_۲ \\ i_۳ & i_۴ & i_۵ \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

بدیهی است که در این‌صورت، اعداد هر ستون غیرمتوالی هستند. تابع $f: V(GP(n,k)) \to P(\{۱,۲\})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f\begin{pmatrix} v_۱ v_{i_۱} v_{i_۲} & \cdots & v_n \\ u_۱ u_{i_۱} u_{i_۲} & \cdots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \{۲\} & \emptyset & \emptyset & \{۲\} & \cdots \\ \{۱\} & \{۱\} & \emptyset & \{۱\} & \{۱\} & \emptyset & \cdots \end{pmatrix}$$

چون اعداد هر ستون غیرمتوالی هستند، لذا هر رأس با مقدار $\emptyset$ در همسایگی یک رأس با مقدار $\{۱\}$ و یک رأس با مقدار $\{۲\}$ قرار دارد. بنابراین f یک 2RDF است و برای وزن آن، مانند حالت ۱، داریم

$$w(f) = W\Big(f\,\Big|_{V(C'_n)}\Big) + W\Big(f\,\Big|_{V(C_n)}\Big) = n.$$

کران (بالا) یادشده، برای رده‌های زیادی از گراف‌های پترسن توسعه یافته بسیار نزدیک به مقدار اصلی است. این مطلب با دو گزاره‌ی بعدی روشن می‌شود.

گزاره ۲.۴.۲. [۹] *برای گراف دلخواه G داریم*

$$\gamma(G) \geq \Big\lceil \frac{|V(G)|}{۱+\Delta(G)} \Big\rceil.$$

درجه‌ی هر رأس در یک گراف پترسن توسعه یافته‌ی $GP(n,k)$ برابر ۳ است و $|V(GP(n,k)| = ۲n$. در نتیجه از گزاره‌ی (۲.۴.۲) داریم

$$\gamma(GP(n,k)) \geq \lceil \frac{۲n}{۱+۳} \rceil = \lceil \frac{n}{۲} \rceil.$$

ازاین‌رو، اگر f یک 2RDF روی $GP(n,k)$ باشد که به ازای هر رأس x داشته باشیم $|f(x)| \in \{۰,۲\}$ آن‌گاه تعداد حداقل $\lceil \frac{n}{۲} \rceil$ تا از رأس‌ها، به‌وسیله‌ی تابع f مقدار $\{۱,۲\}$ و بقیه رأس‌ها مقدار $\emptyset$ می‌گیرند. بنابراین $w(f) \geq n$.

یک کران پایین برای گراف‌های پترسن توسعه یافته از گزاره زیر به‌دست می‌آید.

گزاره ۳.۴.۲. [۲] *برای هر دو عدد n و k نسبت به هم اول که $k < n$ داریم: .*

$$\gamma_{r۲}(GP(n,k) \geq \Big\lceil \frac{۴n}{۵} \Big\rceil$$

برهان. اعداد n و k را به صورت فرض شده در صورت قضیه می‌گیریم و فرض می‌کنیم $H = GP(n,k)$ و f یک $\gamma_{r۲}-$ تابع روی H باشد. مجموعه‌ی S را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S = \{x \in V(H): \quad f(x) \neq \emptyset\}$$

بنابراین برای هر $u \in V(H)\backslash S$ داریم:

$$|f(N(u))| \geq ۲$$

لذا

$$\sum_{u\in V(H)\backslash S} |f(N(u))| \geq \sum_{u\in V(H)\backslash S} ۲ = ۲(|V(H)| - |S|)$$

چون $|S| \leq \gamma_{r۲}(H)$ (اگر به‌ازای هر $x \in V(H)$ داشته باشیم: $۱ \leq |f(x)|$ آن‌گاه $|S| = \gamma_{r۲}(H)$) لذا

$$|V(H)| - |S| \geq |V(H)| - \gamma_{r۲}(H)$$

در نتیجه

$$\sum_{u\in V(H)\setminus S} |f(N(u))| \geq ۲(|V(H)| - \gamma_{r۲}(H))$$

و از آن‌جا که هر رأس S در مجاورت حداکثر ۳ رأس از $V(H)\setminus S$ می‌باشد، داریم:

$$۳\gamma_{r۲}(H) \geq \sum_{u\in V(H)\setminus S} |f(N(u))|$$

در نتیجه

$$۳\gamma_{r۲}(H) \geq ۲|V(H)| - ۲\gamma_{r۲}(H)$$

و بنابراین

$$\gamma_{r۲}(H) \geq \frac{۲}{۵}|V(H)| = \frac{۴n}{۵}$$

و از صحیح بودن $\gamma_{r۲}(H)$ داریم:

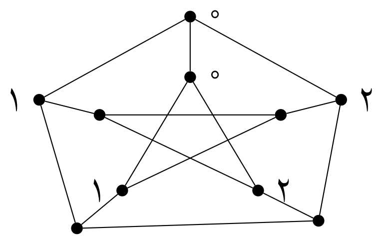
$$\gamma_{r۲}(H) \geq \left\lceil \frac{۴n}{۵} \right\rceil.$$

□

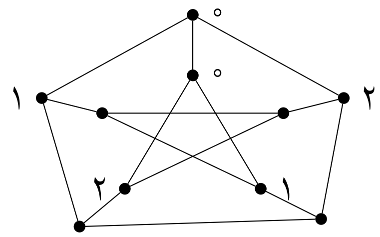
حال به بررسی گسترده گراف‌های پترسن توسعه یافته $GP(n,k)$ برای $k = ۲$ می‌پردازیم.
گراف $GP(۵,۲)$ یا همان گراف پترسن مشهور، به کران بالای خود که در گزاره‌ی (۱.۴.۲) آمده، می‌رسد.

گزاره ۴.۴.۲. [۲] $\gamma_{r۲}(GP(۵,۲)) = ۵$

برهان. برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم که نمی‌توان یک 2RDF مانند f روی $GP(۵,۲)$ یافت به‌طوری که $w(f) = ۴$ باشد. برای این منظور، به برهان خلف، فرض می‌کنیم که f چنین تابعی باشد.
ابتدا به‌ازای هر $v \in V(GP(۵,۲))$ قرار می‌دهیم $|f(v)| \leq ۱$. اگر از هر دو رأس u_i و v_i، حداقل یکی تحت f به مقداری غیر تهی برده شود آن‌گاه $w(f) \geq ۵$ که با فرضی که در بالا کردیم تناقض دارد لذا حداقل یک i وجود دارد که $f(u_i) = f(v_i) = \emptyset$. به‌دلیل تقارن گراف $GP(۵,۲)$، تنها دو طریق برای احاطه کردن u_i و v_i وجود دارد که در شکل‌های (۳.۲) و (۴.۲) نشان داده شده است (در این شکل‌ها منظور از اعداد ۰، ۱ و ۲ به‌ترتیب، مجموعه‌های $\emptyset$، $\{۱\}$ و $\{۲\}$ هستند) اما در هیچ‌کدام از راه‌های گفته شده، f تعریف شده یک 2RDF نخواهد بود و این با تعریف f در تناقض است.



شکل ۳.۲: $GP(۵,۲)$

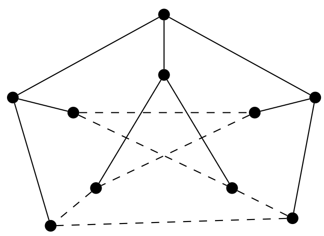


شکل ۴.۲: $GP(۵,۲)$

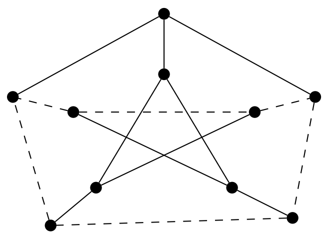
حال فرض می‌کنیم به‌ازای حداقل یک رأس $v \in V(GP(۵,۲))$ داریم $f(v) = \{۱,۲\}$. آن‌گاه $GP(۵,۲)$ شامل حداقل یک دور $C_۶$ است (شکل (۵.۲) شکل (۶.۲)) که به‌وسیله‌ی رأس v احاطه نمی‌شود. بنابراین

$$w(f) = ۲ + \gamma_{r۲}(C_۶) = ۲ + ۴ = ۶$$

و این با تعریف f در تناقض است.



شکل ۵.۲: $GP(۵,۲)$



شکل ۶.۲: $GP(۵,۲)$

□

اینک، لم زیر را برای گراف‌های $P(n,۲)$داریم.

لم ۵.۴.۲. [۱۲] . $$\gamma_{r۲}(P(n,۲)) \leq \begin{cases} \lceil \frac{۴n}{۵} \rceil & n \equiv ۰,۳,۴,۹ \pmod{۱۰} \\ \lceil \frac{۴n}{۵} \rceil + ۱ & n \equiv ۱,۲,۵,۶,۷,۸ \pmod{۱۰} \end{cases}$$

برهان. تابع $f\colon V(P(n,۲)) \to P(\{۱,۲\})$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم که در ضابطه‌ی آن ۰، ۱ و ۲ به‌ترتیب به‌معنی $\emptyset$، $\{۱\}$ و $\{۲\}$ می‌باشند.

$$f\begin{pmatrix} v_۰, \cdots, v_{n-۱} \\ u_۰, \cdots, u_{n-۱} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{cases}
\begin{pmatrix} ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \cdots ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \\ ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \cdots ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \end{pmatrix} & n \equiv ۰ \pmod{۱۰} \\
\begin{pmatrix} ۰\ ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰\ ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \cdots ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \\ ۱\ ۲۲۰۰۲۰۱۰۰۱\ ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \cdots ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \end{pmatrix} & n \equiv ۱ \pmod{۱۰} \\
\begin{pmatrix} ۲۱\ ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \cdots ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \\ ۰۱\ ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \cdots ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \end{pmatrix} & n \equiv ۲ \pmod{۱۰} \\
\begin{pmatrix} ۲۲۰\ ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \cdots ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \\ ۰۰۱\ ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \cdots ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \end{pmatrix} & n \equiv ۳ \pmod{۱۰} \\
\begin{pmatrix} ۰۲۲۰\ ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \cdots ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \\ ۱۰۰۱\ ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \cdots ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \end{pmatrix} & n \equiv ۴ \pmod{۱۰} \\
\begin{pmatrix} ۰۰۲۲۰\ ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \cdots ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \\ ۱۱۰۰۱\ ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \cdots ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \end{pmatrix} & n \equiv ۵ \pmod{۱۰} \\
\begin{pmatrix} ۰۰۰۲۲۰\ ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \cdots ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \\ ۱۱۱۰۰۱\ ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \cdots ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \end{pmatrix} & n \equiv ۶ \pmod{۱۰} \\
\begin{pmatrix} ۱۱۰۰۲۲۰\ ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \cdots ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \\ ۰۲۰۱۰۰۱\ ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \cdots ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \end{pmatrix} & n \equiv ۷ \pmod{۱۰} \\
\begin{pmatrix} ۱۱۰۰۰۲۲۰\ ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \cdots ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \\ ۱۰۲۰۱۰۰۱\ ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \cdots ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \end{pmatrix} & n \equiv ۸ \pmod{۱۰} \\
\begin{pmatrix} ۰۱۱۰۰۰۲۲۰\ ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \cdots ۰۰۱۱۰۰۰۲۲۰ \\ ۲۰۰۲۰۱۰۰۱\ ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \cdots ۰۲۰۰۲۰۱۰۰۱ \end{pmatrix} & n \equiv ۹ \pmod{۱۰}
\end{cases}$$

لذا f یک2RDF برای $P(n,۲)$ است و

$$w(f) = \begin{cases} \lceil \frac{۴n}{۵} \rceil & n \equiv ۰,۳,۴,۹ \pmod{۱۰} \\ \lceil \frac{۴n}{۵} \rceil + ۱ & n \equiv ۱,۲,۵,۶,۷,۸ \pmod{۱۰} \end{cases}.$$

بنابراین $\gamma_{r۲}(P(n,۲)) \leq w(f)$ یعنی حکم برقرار است.

$\square$

با توجه به لم (۵.۴.۲) و گزاره‌ی (۳.۴.۲) داریم:

اگر $n \equiv ۳,۹ \pmod{۱۰}$ آن‌گاه $\gamma_{r۲}(GP(n,۲)) = \lceil \frac{۴n}{۵} \rceil$ و اگر $n \equiv ۱,۵,۷ \pmod{۱۰}$ آن‌گاه $\gamma_{r۲}(GP(n,۲)) = \lceil \frac{۴n}{۵} \rceil + ۱$ و این یعنی گراف‌های مذکور به کران (پایین) خود که در گزاره‌ی (۳.۴.۲) آمده، رسیده‌اند.

اگر f یک 2RDF روی $V(P(n,۲))$ باشد، قرار می‌دهیم:

$$V_۰ = \{v \in P(n,۲) \colon f(v) = \emptyset\},$$

$$V_۱ = \{v \in P(n,۲) \colon f(v) \in \{\{۱\},\{۲\}\}\},$$

$$V_۲ = \{v \in P(n,۲) \colon f(v) = \{۱,۲\}\},$$

$$V_{i_۱ i_۲} = \{v \in V_۰ \colon |N(v) \cap V_t| = i_t, \ \ t = ۱,۲\},$$

$$E_۱ = \{uv \in E(P(n,۲)) \colon u,v \in V_۱\},$$

$$E_۲ = \{uv \in E(P(n,۲)) \colon u,v \in V_۲\},$$

$$E_{۱۲} = \{uv \in E(P(n,۲)) \colon u \in V_۱, v \in V_۲\},$$

دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$V_{0} = \bigcup_{s\in\{V_{20},V_{21},V_{11},V_{30},V_{01},V_{02},V_{03},V_{12}\}} s.$$

برای روشن شدن تساوی فوق، نخست توجه می‌کنیم در $P(n,2)$ درجه‌ی هر رأس برابر ۳ است. لذا در هر مجموعه‌ی $V_{i_1i_2}$ داریم: $i_1+i_2 \leq 3$، سپس توجه می‌کنیم که چون هر رأس $\emptyset$ مقدار باید به‌وسیله‌ی همسایه‌هایش احاطه شود، بنابراین برای یک رأس $v\in V_{0}$ داریم $v\notin V_{10}\cup V_{00}$. هم‌چنین واضح است که به ازای هر $s_1,s_2\in\{V_{01},V_{02},\ldots\}$ و $s_1\neq s_2$ داریم: $s_1\cap s_2=\emptyset$ و برای هر $s_1,s_2\in\{V_{0},V_{1},V_{2}\}$ و $s_1\neq s_2$ داریم: $s_1\cap s_2=\emptyset$. برای $V(P(n,2))$ نیز داریم: $V(P(n,2))=\bigcup_{s\in\{V_{0},V_{1},V_{2}\}} s$. حال اگر یک رأس $v\in V_{0}$ را در نظر بگیریم که در همسایگی آن حداقل یک رأس از V_1 وجود داشته باشد آن‌گاه

$$v\in V_{20}\cup V_{30}\cup V_{11}\cup V_{21}\cup V_{12}$$

. عبارت $2|V_{20}|+3|V_{30}|+|V_{11}|+|V_{12}|+2|V_{21}|$ هر رأس $v\in V_{0}$ را که دارای i همسایه ($i=1,2,3$) از V_1 است، i بار می‌شمارد. بنابراین حاصل این عبارت برابر است با تعداد همسایه‌های با مقدار $\emptyset$ رأس‌های مجموعه‌ی V_1. برای پیدا کردن این تعداد کافی است تعداد همسایه‌های غیرتهی مقدار را از تعداد کل همسایه‌های رأس‌های مجموعه‌ی V_1 کم کنیم. درجه‌ی هر رأس (از V_1) برابر با ۳ است بنابراین $3|V_1|$ حداکثر تعداد همسایه‌های رأس‌های مجموعه‌ی V_1 است (توجه داریم که $(\bigcup_{v\in V_1} N[v]) \leq 3|V_1|$). هر یال xy که $x,y\in V_1$، ۲ واحد از تعداد حداکثر همسایه‌ها کم می‌کند زیرا هر کدام از رأس‌های x و y یک همسایه‌ی غیرتهی برای رأس دیگر می‌باشد. به‌این ترتیب هر یال $x'y'$ که $x'\in V_1$ و $y'\in V_2$ است تنها یک واحد از تعداد حداکثر همسایه‌ها کم می‌کند. لذا داریم:

$$3|V_1|-2|E_1|-|E_{12}| = 2|V_{20}|+2|V_{21}|+3|V_{30}|+|V_{11}|+|V_{12}|. \tag{۷.۲}$$

اگر در مطالب فوق به‌جای V_1، مجموعه‌ی V_2 را قرار دهیم، معادله‌ی زیر را داریم:

$$3|V_2|-2|E_2|-|E_{12}| = 2|V_{02}|+|V_{01}|+|V_{11}|+2|V_{12}|+3|V_{03}|+|V_{21}|. \tag{۸.۲}$$

۲ برابر معادله‌ی (۸.۲) را به معادله‌ی (۷.۲) اضافه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&3|V_1| - 2|E_1| - |E_{12}| + 6|V_2| - 4|E_2| - 2|E_{12}| \\
&= 2|V_{20}| + 3|V_{30}| + 2|V_{01}| + 3|V_{11}| + 4|V_{21}| + 4|V_{02}| + 5|V_{12}| + 6|V_{03}| \\
&\Longrightarrow 3|V_1| + 6|V_2| = 2|V_{20}| + 3|V_{30}| + 2|V_{01}| + 3|V_{11}| + 4|V_{21}| + 4|V_{02}| \\
&+ 5|V_{12}| + 6|V_{03}| + 2|E_1| + 4|E_2| + 3|E_{12}| \\
&\Longrightarrow 3|V_1| + 6|V_2| = 2(|V_{20}| + |V_{30}| + |V_{01}| + |V_{11}| + |V_{21}| + |V_{02}| + |V_{12}| \\
&+ |V_{03}|) + |V_{30}| + |V_{11}| + 2|V_{21}| + 2|V_{02}| + 3|V_{12}| + 4|V_{03}| + 2|E_1| + 4|E_2| \\
&+ 3|E_{12}| \\
&\Longrightarrow 3|V_1| + 6|V_2| = 2(2n - |V_1| - |V_2|) + |V_{30}| + |V_{11}| + 2|V_{21}| + 2|V_{02}| \\
&+ 3|V_{12}| + 4|V_{03}| + 2|E_1| + 4|E_2| + 3|E_{12}| \\
&\Longrightarrow 5|V_1| + 10|V_2| = 4n + 2|V_2| + |V_{30}| + |V_{11}| + 2|V_{21}| + 2|V_{02}| \\
&+ 3|V_{12}| + 4|V_{03}| + 2|E_1| + 4|E_2| + 3|E_{12}| \\
&\Longrightarrow 5w(f) = 4n + 2|V_2| + |V_{30}| + |V_{11}| + 2|V_{21}| + 2|V_{02}| + 3|V_{12}| \\
&+ 4|V_{03}| + 2|E_1| + 4|E_2| + 3|E_{12}|
\end{aligned}$$

. حال اگر قرار دهیم :

$$\begin{aligned}
&\beta = 2|V_2| + |V_{30}| + |V_{11}| + 2|V_{21}| + 2|V_{02}| + 3|V_{12}| + 4|V_{03}| + 2|E_1| + 4|E_2| \\
&+ 3|E_{12}|.
\end{aligned} \tag{۹.۲}$$

آن‌گاه لم زیر اثبات شده است.

لم ۶.۴.۲. [۱۲] *به‌ازای هر $2RDF$ مانند f روی $V(P(n,2))$ داریم:* $5w(f) = 4n + \beta$.

لم ۷.۴.۲. [۱۲] *اگر* $|V_2| \geq 1$ *آن‌گاه* $\beta \geq 4$.

برهان. به برهان خلف فرض می‌کنیم $\beta \leq 3$ باشد. در این‌صورت بنا به رابطه‌ی (۹.۲)

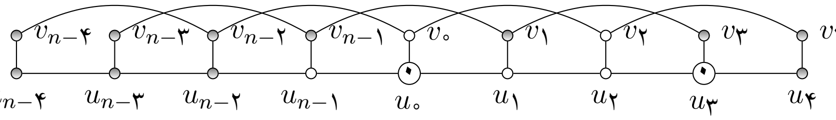
$$|V_{21}| = |V_{02}| = |V_{12}| = |V_{03}| = |E_1| = |E_2| = |E_{12}| = 0, |V_2| = 1$$

و $|V_{30}| + |V_{11}| \leq 1$.

چون $|V_2| = 1$ پس دو حالت داریم، یا این که $\{1, 2\}$ به یک رأس از دور C_n اختصاص داده شود و یا به یک رأس از دور C'_n. لذا با توجه به تقارن گراف، می‌توانیم برای حالت اول رأس u_0 و برای حالت دوم رأس v_0 را در نظر گرفت.

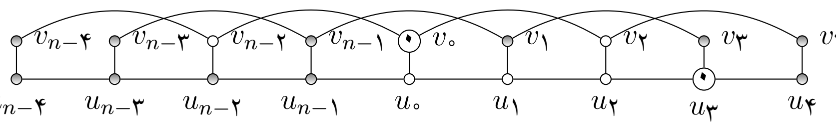
حالت ۱) فرض کنیم $u_0 \in V_2$. آن‌گاه $u_{n-1}, u_1, v_0 \in V_0$ (در غیر این‌صورت، حداقل یکی از آن‌ها عضو V_2 یا V_1 است لذا به‌ترتیب $|V_2| > 1$ یا $|E_{12}| > 0$ و این امکان ندارد.) و $|\{u_{n-2}, v_{n-2}, u_2, v_2\} \cap V_0| \geq 3$ (در غیر این‌صورت حداقل دو تا از آن‌ها عضو V_0 نیستند لذا $|V_2| > 1$ یا $|\{u_1, v_0, u_{n-1}\} \cap V_{11}| \geq 2$

که غیرممکن است.). پس فرض می‌کنیم $u_2, v_2 \in V_0$. چون $N(u_2 = \{u_1, v_2, u_3\}$ و $u_1, v_2 \in V_0$، برای احاطه شدن u_2 باید داشته باشیم : $u_3 \in V_2$. لذا $1 < |V_2|$ و $\beta \geq 4$ و این تناقض است. (شکل(۷.۲).
در همه‌ی اشکال این مبحث، رأس سیاه عضو V_1، رأس سفید عضو V_0 و رأس با یک نقطه‌ی سیاه(صفر) داخل آن، عضو V_2 می‌باشد.) حالت۲) فرض کنیم $v_0 \in V_2$. آن‌گاه $v_2, v_{n-2}, u_0 \in V_0$(در غیر این‌صورت



شکل ۷.۲: $|V_2| \geq 1$.

مشابه حالت ۱ به تناقض می‌رسیم.)
و $|\{u_{n-2}, u_{n-1}, u_1, u_2\} \cap V_0| \geq 3$ (در غیر این‌صورت یکی از موارد زیر اتفاق می‌افتد: ۱) $|V_2| > 1$ که غیرممکن است. ۲) $u_1, u_2 \in V_1$ یا $u_{n-1}, u_{n-2} \in V_1$ که در آن‌صورت به‌ترتیب $u_0, v_2 \in V_{11}$ یا $u_0, v_{n-2} \in V_{11}$ که هیچ‌کدام امکان ندارد. ۳) $u_2, u_{n-2} \in V_1$ یا $u_1, u_{n-1} \in V_1$ که در آن‌صورت به‌ترتیب $v_2, v_{n-2} \in V_{11}$ یا $v_1, v_{n-1} \in V_{11}$ که هیچ‌کدام ممکن نیست. ۴) $u_1, u_{n-2} \in V_1$ یا $u_2, u_{n-1} \in V_1$ که در آن‌صورت نیز به‌ترتیب $u_0, v_{n-2} \in V_{11}$ یا $v_2, u_0 \in V_{11}$ و این‌ها نیز ممکن نیستند.)
پس فرض می‌کنیم $u_1, u_2 \in V_0$. مشابه حالت ۱ در این‌جا نیز u_2 احاطه نمی‌شود مگر این‌که $u_3 \in V_2$ باشد لذا $\beta \geq 4$ و این تناقض است. (شکل (۸.۲)) □



شکل ۸.۲: $|V_2| \geq 1$.

لم ۸.۴.۲. [۱۲] *اگر $|E_1| \geq 1$، آن‌گاه برای $n \not\equiv 3 \pmod{10}$ داریم $\beta \geq 4$ و برای $n \equiv 3 \pmod{10}$ داریم $\beta \geq 3$.*

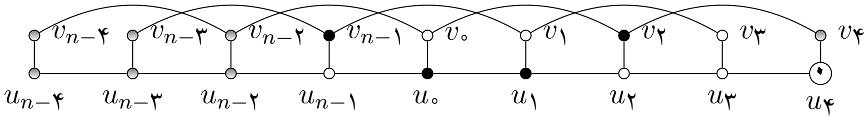
برهان. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض (خلف) می‌کنیم که برای $n \not\equiv 3 \pmod{10}$ داشته باشیم $\beta \leq 3$ و برای $n \equiv 3 \pmod{10}$ داشته باشیم $\beta \leq 2$. در این‌صورت از رابطه‌ی (۹.۲) داریم

$$|V_2| = |V_{21}| = |V_{02}| = |V_{12}| = |V_{03}| = |E_2| = |E_{12}| = 0$$

$|E_1| = 1$ و $|V_{30}| \leq 1$.
این بار از تقارن گراف‌های $P(n,2)$ استفاده کرده و برای رابطه‌ی $|E_1| = 1$، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:
حالت ۱) $u_0, u_1 \in V_1$. آن‌گاه $v_0, v_1, u_2, u_{n-1} \in V_0$ (در غیر این‌صورت $|E_1 > 1$ یا $|V_2| > 0$ که هیچ‌کدام امکان ندارد). چون $N(v_2) = \{v_0, u_2, v_4\}$ و $|V_2| = 0$ پس $v_2 \in V_1$(در غیر این‌صورت v_2 احاطه نمی‌شود) و به‌طور مشابه $v_{n-1} \in V_1$. بنابراین $|\{v_3, u_3, v_{n-2}, u_{n-2}\} \cap V_0| \geq 3$ (در غیر این‌صورت $|V_{30}| > 1$ و این امکان ندارد. توجه شود که همواره $|V_2| = 0$) لذا حداقل یکی از این دو اتفاق

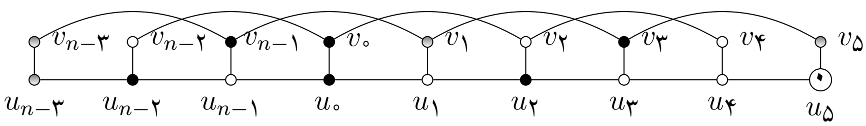
می‌افتد: $u_3, v_3 \in V_0$ یا $u_{n-2}, v_{n-2} \in V_0$. بدون کاسته شدن از کلیت مطلب، فرض کنیم $u_3, v_3 \in V_0$. چون $u_3 \in V_0$ و $N(u_3) = \{u_2, v_3, u_4\}$ و $u_2, v_3 \in V_0$ لذا برای احاطه شدن u_3 باید $u_4 \in V_2$ باشد پس $\beta \geq 4$ است و این تناقض می‌باشد. این نتیجه برای $n \geq 3$ است.(شکل(۹.۲)) در این حالت برای $P(3,2)$ دیده می‌شود که $\beta \geq 3$ است یعنی حکم برای $n = 3$ نیز برقرار است.

حالت ۲) $u_0, v_0 \in V_1$ آن‌گاه $u_1, v_2, u_{n-1}, v_{n-2} \in V_0$ (در غیر این‌صورت $|V_2| > 0$ یا $|E_1| > 1$



شکل ۹.۲: $|E_1| \geq 1$

می‌باشد که امکان ندارد). چون $N(u_2) = \{u_1, v_2, u_3\}$ و $u_1, v_2 \in V_0$ پس $u_2 \in V_1$(در غیر این‌صورت u_2 احاطه نمی‌شود). به‌طور مشابه نتیجه می‌گیریم $u_{n-2} \in V_1$. داریم $|\{v_1, v_{n-1}\} \cap V_0| = 1$ (در غیر این‌صورت $|E_1| > 1$ که غیرممکن است و یا هیچ‌کدام از رأس‌های مذکور احاطه نمی‌شوند.) بدون کاسته شدن از کلیت، فرض می‌کنیم $v_1 \in V_0$ (و $v_{n-1} \in V_1$). در نتیجه $v_3 \in V_1$ (درغیر این‌صورت v_1 احاطه نمی‌شود) لذا $u_3 \in V_0$ (در غیر این‌صورت $|E_1| > 1$ که غیرممکن است) و از این داریم $u_4 \in V_0$ (در غیر این‌صورت $u_3 \in V_{30}$ آن‌گاه $|V_{30}| > 1$ که امکان ندارد) و $v_4 \in V_0$ (در غیر این‌صورت $v_1 \in V_{30}$ مانند قبل امکان ندارد) اما در این‌صورت $u_5 \in V_2$ (تا u_4 احاطه شود) و $\beta \geq 5$ و این تناقض است (شکل(۱۰.۲)). نتیجه‌ی مذکور برای $n > 3$ بود، برای $n = 3$ نیز $|E_1| > 1$ لذا حکم برقرار است. حالت ۳) $v_{n-1}, v_1 \in V_1$



شکل ۱۰.۲: $|E_1| \geq 1$

آن‌گاه $u_{n-1}, u_1, v_3 \in V_0$ (چون $|E_1| = 1$) بنابراین $u_0 \in V_1$ (در غیر این‌صورت u_0 احاطه نمی‌شود) و $v_0 \in V_0$ (چون $|E_1| = 1$) و $|\{v_{n-2}, v_2\} \cap V_1| \geq 1$ (در غیر این‌صورت v_0 احاطه نمی‌شود) پس می‌توان فرض کرد $v_2 \in V_1$. از $u_{n-1}, v_0 \in V_0$ نتیجه می‌گیریم:

$$|\{u_{n-2}, v_{n-2}\} \cap V_1| = 1. \qquad (10.2)$$

(درغیر این‌صورت یکی از رأس‌های مذکور احاطه نمی‌شود).

تاحالا برای $n > 8$ و $n \neq 3$ از تساوی (۹.۲) به‌دست آورده‌ایم $\beta = 3$. چون $n \equiv 3 \pmod{10}$ و $n \neq 3$ حداقل برابر با ۸ می‌باشد لذا برای $n \equiv 3 \pmod{10}$ و $n \neq 3$ حکم ثابت شده است. اثبات حکم برای گراف $P(3,2)$ نیز بدیهی است. پس فرض می‌کنیم $n \not\equiv 3 \pmod{10}$.

مجددا، بنا به قبل داریم $u_2, v_4 \in V_0$ (چون $|E_1| = 1$) پس $u_3 \in V_1$ (در غیر این‌صورت u_3 احاطه نمی‌شود) و لذا $u_4 \in V_0$ (چون $|E_1| = 1$). برای احاطه شدن u_4 باید $u_5 \in V_1$ و برای احاطه شدن v_4 باید $v_6 \in V_1$ باشد. در نتیجه $v_5, u_6, v_8 \in V_0$ (چون $|E_1| = 1$) سپس $v_7 \in V_1$ تا v_5 احاطه شود و آن‌گاه $u_7 \in V_0$ (چون $|E_1| = 1$) و در این‌صورت $u_8 \in V_1$ تا u_7 احاطه شود و این نتیجه می‌دهد $u_9 \in V_0$

(چون $|E_۱| = ۱$).

با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت: برای هر i به‌طوری که $۲ \le i \le \lfloor \frac{n-۱}{۵} \rfloor - ۱$

$$
\begin{aligned}
&u_{۵i}, u_{۵i+۳} \in V_۱,\ \ u_{۵i+۱}, u_{۵i+۲}, u_{۵i+۴} \in V_۰\\
&v_{۵i}, v_{۵i+۳}, v_{۵i+۴} \in V_۰,\ \ v_{۵i+۱}, v_{۵i+۲} \in V_۱.
\end{aligned} \tag{۱۱.۲}
$$

برای ادامه‌ی اثبات، پنج زیرحالت زیر را در نظر می‌گیریم:

زیرحالت ۱.۳) $n \equiv ۰ \pmod{۵}$ پس به‌ازای یک i صحیح، $n - ۵ = ۵i$. از روابط(۱۱.۲) و مطالب قبل از آن داریم: $u_{n-۵} \in V_۱,\ \ v_{n-۵} \in V_۰$. در نتیجه، برای احاطه شدن $v_{n-۵}$، باید داشته باشیم $v_{n-۳} \in V_۱$.

از طرف دیگر، در در ابتدا نشان دادیم $v_{n-۱} \in V_۱$. در این‌صورت $v_{n-۳}v_{n-۱} \in E_۱$ لذا $|E_۱| > ۱$ بنابراین به تناقض رسیده‌ایم. (شکل(۱۱.۲) (۱.۳))

زیرحالت ۲.۳) $n \equiv ۱ \pmod{۵}$ پس بنا به روابط (۱۱.۲) داریم: $u_{n-۲}, v_{n-۲} \in V_۰,\ \ u_{n-۱} \in V_۰$. در نتیجه $|\bigcup_{u \in N(u_{n-۲})} f(u)| = ۱$ (که f یک 2RDF روی $P(n,۲)$ است) و این تناقض است. (شکل(۱۱.۲) (۲.۳))

زیرحالت ۳.۳) $n \equiv ۲ \pmod{۵}$ آن‌گاه از روابط (۱۱.۲) داریم $v_{n-۴}, u_{n-۳}, v_{n-۳} \in V_۰$ و از رابطه‌ی(۱۰.۲) داریم $u_{n-۲} \in V_۰$ یا $v_{n-۲} \in V_۰$ اما در آنصورت، دیگری باید عضو $V_۲$ باشد تا آن که عضو $V_۰$ است احاطه شود و این تناقض است. (شکل(۱۱.۲) (۳.۳))

زیرحالت ۴.۳) $n \equiv ۳ \pmod{۵}$. چون $n \not\equiv ۳ \pmod{۱۰}$ لذا $n \equiv ۸ \pmod{۱۰}$.

از رابطه‌ی (۱۰.۲) می‌توانیم فرض کنیم $v_{n-۲} \in V_۱$ و لذا $u_{n-۲} \in V_۰$ (چون $|E_۱| = ۱$). چون $v_{n-۱} \in V_۱$ پس مشابه قبل $v_{n-۳} \in V_۰$ و در نتیجه $u_{n-۳} \in V_۱$ (در غیر این‌صورت $u_{n-۳}$ احاطه نمی‌شود. مجددا یادآوری می‌شود که در اثبات این قضیه همواره $|V_۲| = ۰$). مجددا بنا به تقارن موجود در شکل، می‌توان فرض کرد $f(u_۰) = \{۱\}$ آن‌گاه $f(v_۱ = \{۲\}$ (تا $u_۱$ احاطه شود) و $f(v_۲) = \{۲\}$ (تا $v_۰$ احاطه شود) و $f(u_۳) = \{۱\}$ (تا $u_۲$ احاطه شود). در نتیجه $f(u_۵) = \{۲\}$ (تا $u_۴$ احاطه شود) و $f(v_۶) = \{۱\}$ (تا $u_۶$ احاطه شود) و $f(v_۷) = \{۱\}$ (تا $v_۵$ احاطه شود) و $f(u_۸) = \{۲\}$ (تا $u_۷$ احاطه شود). با ادامه‌ی روند فوق خواهیم داشت:

برای هر i به‌طوری که $۱ \le i \le \lfloor \frac{n-۸}{۱۰} \rfloor - ۱$

$$
\begin{aligned}
&f(u_{۱۰i}) = f(u_{۱۰i+۳}) = \{۱\},\ f(u_{۱۰i+۵}) = f(u_{۱۰i+۸}) = \{۲\},\\
&f(v_{۱۰i+۱}) = f(v_{۱۰i+۲}) = \{۲\},\ f(v_{۱۰i+۶}) = f(v_{۱۰i+۷}) = \{۱\}
\end{aligned} \tag{۱۲.۲}
$$

چون $n \equiv ۸ \pmod{۱۰}$ پس از روابط (۱۲.۲) و مطالب قیل از آن داریم:

$$
\begin{aligned}
&f(u_{n-۸}) = f(u_{n-۵}) = \{۱\},\ f(v_{n-۷}) = f(v_{n-۶}) = \{۲\},\ f(u_{n-۳}) = \{۲\},\\
&f(v_{n-۲}) = f(v_{n-۱}) = \{۱\}.
\end{aligned}
$$

بنابراین

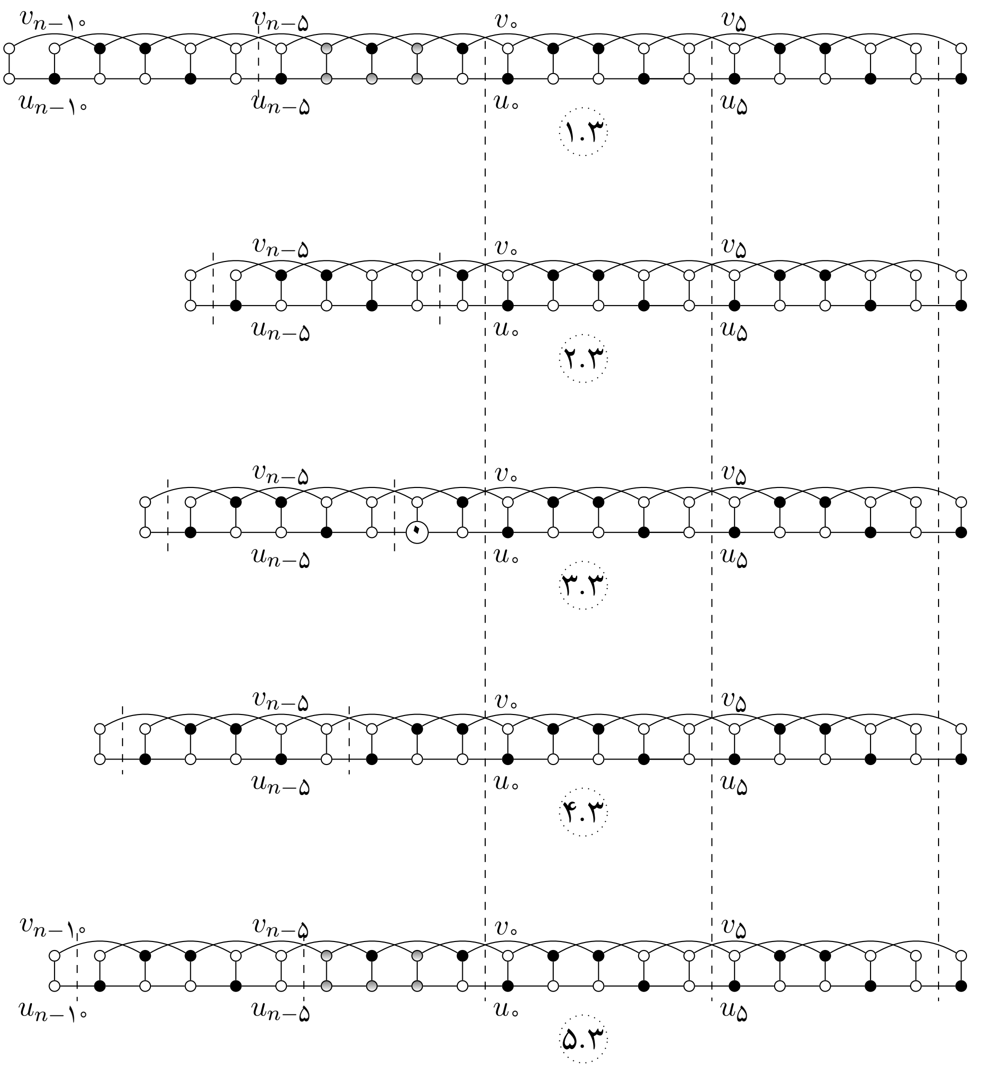
$$
\bigcup_{u \in N(u_{n-۱})} f(u) = f(u_{n-۲}) \cup f(v_{n-۱}) \cup f(u_۰) = \emptyset \cup \{۱\} \cup \{۱\} = \{۱\}
$$

پس

$$2 \notin \bigcup_{u\in N(u_{n-1})} f(u).$$

و این با تعریف f در تناقض است. (شکل(۱۱.۲) (۴.۳))

زیرحالت ۵.۳) $n \equiv 4 \pmod 5$ آن‌گاه از روابط (۱۱.۲) داریم $v_{n-3} \in V_1$. چون $v_{n-1} \in V_1$ پس $v_{n-3}v_{n-1} \in E_1$ لذا $|E_1| > 1$ و این تناقض است. (شکل ۱۱.۲ (۵.۳))



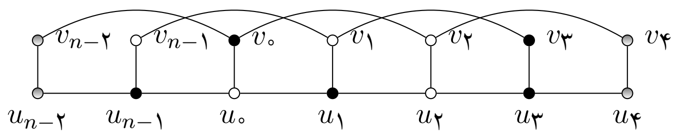
شکل ۱۱.۲: $|E_1| \geq 1$.

□

لم ۹.۴.۲. [۱۲] *اگر* $|V_{30}| \geq 1$ *آن‌گاه برای* $n \not\equiv 3 \pmod{10}$ *داریم* $\beta \geq 4$ *و برای* $n \equiv 3 \pmod{10}$ *داریم* $\beta \geq 3$.

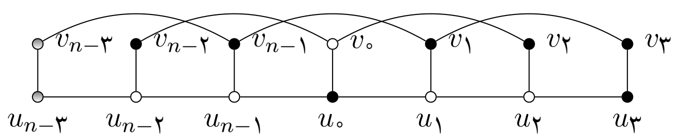
برهان. بنا به برهان خلف فرض می‌کنیم که برای $n \not\equiv 3 \pmod{10}$ داشته باشیم $\beta \leq 3$ و برای $n \equiv 3 \pmod{10}$ داشته باشیم $\beta \leq 2$. از لم‌های (۷.۴.۲) و (۸.۴.۲) داریم $|V_2| = |E_1| = 0$. باتوجه به تقارن موجود در شکل برای انتخاب رأسی که عضو V_{30} باشد، کافی است دو حالت زیر را در نظر بگیریم:

حالت ۱) $u_۰ \in V_{۳۰}$ پس $u_{n-۱}, v_۰, u_۱ \in V_۱$. در این‌صورت برای آن‌که $|E_۱| = ۰$ باشد باید داشته باشیم $v_{n-۱}, v_۱, u_۲, v_۲ \in V_۰$. بنابراین برای احاطه شدن $u_۲$ باید $u_۳ \in V_۱$ و برای احاطه شدن $v_۱$ باید $v_۳ \in V_۱$ باشد. در نتیجه $u_۳v_۳ \in E_۱$ لذا $|E_۱| \geq ۱$ و این تناقض است. (شکل(۱۲.۲))



شکل ۱۲.۲: $|V_{۳۰}| \geq ۱$

حالت ۲) $v_۰ \in V_{۳۰}$ پس $u_۰, v_{n-۲}, v_۲ \in V_۱$ بنابراین برای آن‌که $|E_۱| = ۰$ باشد باید داشته باشیم $u_{n-۲}, u_{n-۱}, u_۱, u_۲ \in V_۰$. برای آن‌که $u_{n-۱}$ احاطه شود باید $v_{n-۱} \in V_۱$ و برای آن‌که $u_۱$ احاطه شود باید $v_۱ \in V_۱$ باشد (باتوجه به آن‌که $|V_۲| = ۰$). پس $v_{n-۱}v_۱ \in E_۱$ لذا $|E_۱| \geq ۱$ و این تناقض است. (شکل (۱۳.۲))

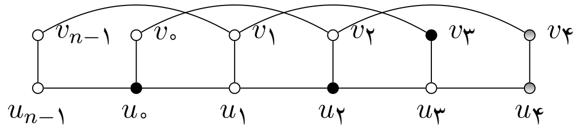


شکل ۱۳.۲: $|V_{۳۰}| \geq ۱$

□

لم ۱۰.۴.۲. [۱۲] *اگر* $n \not\equiv ۰ \pmod{۱۰}$ *آن‌گاه* $|V_۲| + |E_۱| + |V_{۳۰}| \geq ۱$.

برهان. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض (خلف) می‌کنیم $|V_۲| = |E_۱| = |V_{۳۰}| = ۰$. بنا به تقارن گراف می‌توان فرض کرد $u_۱ \in V_۰$. برای احاطه شدن $u_۱$، باید داشته باشیم $|N(u_۱) \cap V_۱| \geq ۲$ (توجه شود که در این‌جا نیز همواره $|V_۲| = ۰$) و مجددا بنا به تقارن موجود در گراف، کافی است تنها دو حالت رابررسی کنیم، یکی این که دو رأس از u_i عضو $V_۱$ ها باشد و دیگری این که یکی از u_i ها و یکی از v_i ها.
حالت ۱) $u_۰, u_۲ \in V_۱$. چون $|V_{۳۰}| = ۰$ پس $v_۱ \in V_۰$ و چون $|E_۱| = ۰$ پس $u_۳ \in V_۰$ لذا $v_۳ \in V_۱$ (در غیر این‌صورت $v_۳$ احاطه نمی‌شود). اینک، با مرور آن‌چه تاکنون به‌دست آورده‌ایم، می‌بینیم که $u_۳ \in V_۰$ و $u_۲, v_۳ \in V_۱$ و این معادل با حالت دومی است که گفته شد (یعنی یک رأس از v_i ها و دیگری از u_i ها). (شکل(۱۴.۲))



شکل ۱۴.۲: $|V_۲| + |E_۱| + |V_{۳۰}| \geq ۱$

پس حالت ۲ رابررسی می‌کنیم.
حالت ۲) $u_۰, v_۱ \in V_۱$. برای آن‌که $|E_۱| = ۰$ باشد قرار می‌دهیم $v_۰, v_۳ \in V_۰$ و برای آن‌که $|V_{۳۰}| = ۰$ باشد

قرار می‌دهیم $u_۲ \in V_۰$. در نتیجه، برای آن‌که $u_۲$ احاطه شود قرار می‌دهیم $v_۲, u_۳ \in V_۱$ لذا $v_۴, u_۴ \in V_۰$ (چون $|E_۱| = ۰$). برای احاطه شدن $v_۴$ قرار می‌دهیم $v_۶ \in V_۱$ و برای احاطه شدن $u_۴$ قرار می‌دهیم $u_۵ \in V_۱$. در نتیجه $v_۵, u_۶ \in V_۰$ (چون $|E_۱| = ۰$). برای احاطه شدن $v_۵$ باید $v_۷ \in V_۱$ و برای آن‌که $|E_۱| = ۰$ باشد باید $u_۷ \in V_۰$. برای احاطه شدن $u_۷$ باید $u_۸ \in V_۱$ و در نتیجه برای آن‌که $|E_۱| = ۰$ باشد باید $v_۸, v_۹, u_۹ \in V_۰$ باشد. با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت:
به ازای هر i به‌طوری که $۲ \leq i \leq \lfloor \frac{n}{۵} \rfloor - ۱$

$$u_{۵i}, u_{۵i+۳} \in V_۱, \quad u_{۵i+۱}, u_{۵i+۲}, u_{۵i+۴} \in V_۰, v_{۵i+۱}, v_{۵i+۲} \in V_۱,$$
$$v_{۵i}, v_{۵i+۳}, v_{۵i+۴} \in V_۰. \tag{۱۳.۲}$$

برای ادامه‌ی اثبات، به پنج زیرحالت زیر توجه می‌کنیم: زیرحالت۱.۲) $n \equiv ۰ \pmod{۵}$. چون $n \not\equiv ۰ \pmod{۱۰}$ بنابراین $n \equiv ۵ \pmod{۱۰}$ و با استفاده از تقارن موجود در گراف، فرض می‌کنیم $f(u_۰) = \{۱\}$. در این‌صورت $f(v_۱) = \{۲\}$ تا $u_۱$ احاطه شود و $f(v_۲) = \{۲\}$ تا $v_۰$ احاطه شود سپس برای احاطه شدن $u_۲$ قرار می‌دهیم $f(u_۳) = \{۱\}$، بعد برای احاطه شدن $u_۴$ قرار می‌دهیم $f(u_۵) = \{۲\}$ و بعد برای احاطه شدن $u_۶$ قرار می‌دهیم $f(v_۶) = \{۱\}$ و بعد برای احاطه شدن $v_۵$ قرار می‌دهیم $f(v_۷) = \{۱\}$ و بعد برای احاطه شدن $u_۷$ قرار می‌دهیم $f(u_۸) = \{۲\}$. با ادامه‌ی این روند داریم :
به ازای هر i به‌طوری که $۱ \leq i \leq \lfloor \frac{n-۵}{۱۰} \rfloor - ۱$

$$f(u_{۱۰i}) = f(u_{۱۰i+۳}) = \{۱\}, \ f(u_{۱۰i+۵}) = f(u_{۱۰i+۸}) = \{۲\},$$
$$f(v_{۱۰i+۱}) = f(v_{۱۰i+۲}) = \{۲\}, \ f(v_{۱۰i+۶}) = f(v_{۱۰i+۷}) = \{۱\}. \tag{۱۴.۲}$$

در نتیجه (چون $n \equiv ۵ \pmod{۱۰}$)

$$f(u_{n-۵}) = \{۱\}, f(v_{n-۴}) = \{۲\}, f(u_{n-۲}) = \{۱\}, f(v_{n-۳}) = \{۲\}$$

و چون $f(u_۰) = \{۱\}$ پس

$$\bigcup_{u \in N(u_{n-۱})} = f(u_{n-۲}) \cup f(v_{n-۱}) \cup f(u_۰) = \{۱\} \cup \emptyset \cup \{۱\} = \{۱\}.$$

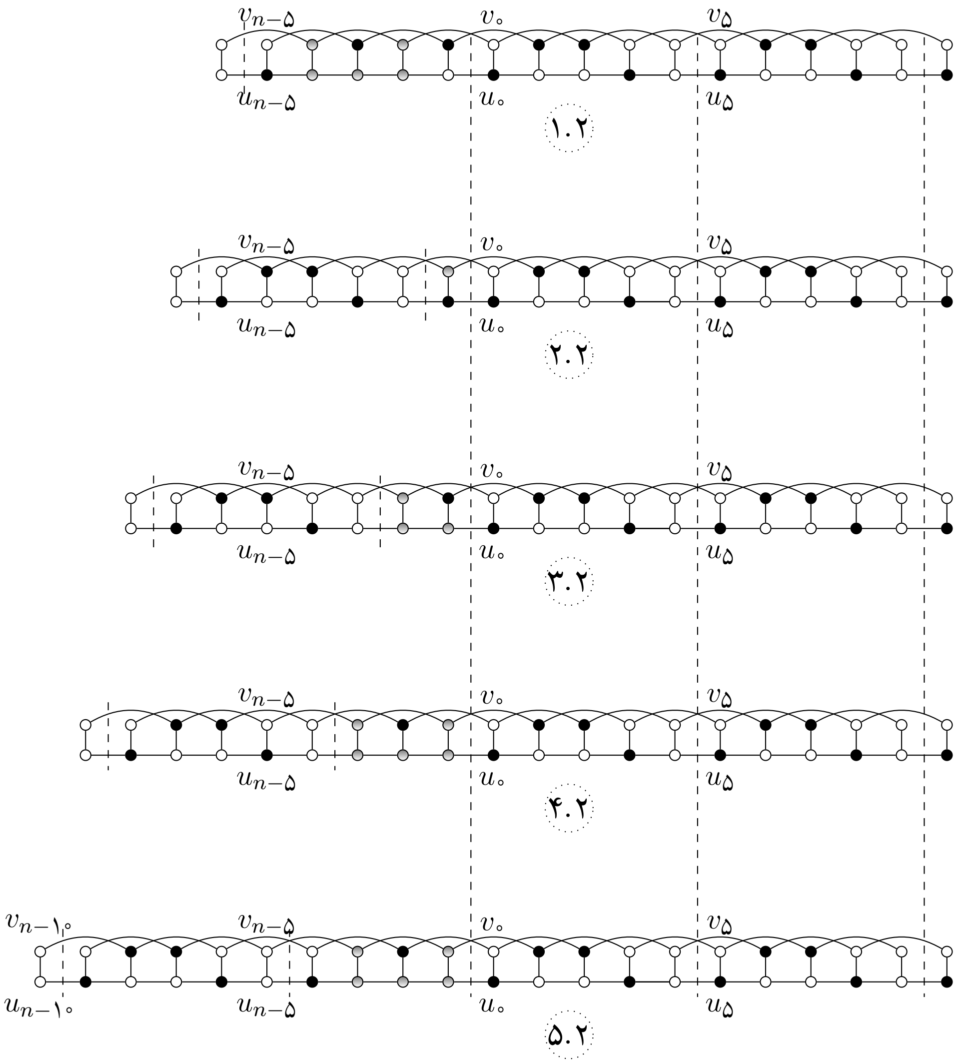
لذا $۲ \notin \bigcup_{u \in N(u_{n-۱})} f(u)$ و این با 2RDF بودن f تناقض دارد. (شکل (۱۵.۲) (۱.۲))

زیرحالت۲.۲) $n \equiv ۱ \pmod{۵}$ بنابراین از روابط (۱۳.۲) داریم $u_{n-۱} \in V_۱$ و چون $u_۰ \in V_۱$ پس $u_{n-۱}u_۰ \in E_۱$ لذا $|E_۱| \geq ۱$ و این تناقض است.(شکل(۱۵.۲) (۲.۲))

زیرحالت۳.۲) $n \equiv ۲ \pmod{۵}$ بنابراین از روابط (۱۳.۲) داریم $v_{n-۱} \in V_۱$ و چون $v_۱ \in V_۱$ پس $v_{n-۱}v_۱ \in E_۱$ لذا $|E_۱| \geq ۱$ و این تناقض است. (شکل(۱۵.۲) (۳.۲))

زیرحالت۴.۲) $n \equiv ۳ \pmod{۵}$ بنابراین از روابط (۱۳.۲) داریم $v_{n-۲} \in V_۱$. چون $N(v_۰) = \{u_۰, v_{n-۲}, v_۲\}$ و $u_۰, v_۲ \in V_۱$ پس $v_۰ \in V_{۳۰}$ یعنی $|V_{۳۰}| \geq ۱$ و این تناقض است. (شکل(۱۵.۲) (۴.۲))

زیرحالت۵.۲) $n \equiv ۴ \pmod{۵}$ بنابراین از روابط (۱۳.۲) داریم $v_{n-۲} \in V_۱$ و مشابه حالت فوق داریم $v_۰ \in V_{۳۰}$ پس $|V_{۳۰}| \geq ۱$ و این تناقض است. (شکل(۱۵.۲) (۵.۲))



شکل ۱۵.۲: $|V_۲| + |E_۱| + |V_{۳۰}| \geq ۱$

□

قضیه ۱۱.۴.۲. [۱۲]

$$\gamma_{r۲}(P(n,۲)) = \begin{cases} \lceil \frac{۴n}{۵} \rceil & n \equiv ۰, ۳, ۴, ۹ \pmod{۱۰} \\ \lceil \frac{۴n}{۵} \rceil + ۱ & n \equiv ۱, ۲, ۵, ۶, ۷, ۸ \pmod{۱۰} \end{cases}.$$

برهان. از لم (۵.۴.۲) داریم

$$\gamma_{r۲}(P(n,۲)) \leq \begin{cases} \lceil \frac{۴n}{۵} \rceil & n \equiv ۰, ۳, ۴, ۹ \pmod{۱۰} \\ \lceil \frac{۴n}{۵} \rceil + ۱ & n \equiv ۱, ۲, ۵, ۶, ۷, ۸ \pmod{۱۰} \end{cases} \qquad (۱۵.۲)$$

و لم (۶.۴.۲) بیان می‌کند: برای هر 2RDF مانند f تعریف شده روی $V(P(n,۲))$ داریم $۵w(f) = ۴n+\beta$ که β از تساوی (۹.۲) مشخص است. در نتیجه برای $\gamma_{r۲}(P(n,۲))$ که وزن یک تابع بهینه است، داریم

$$\gamma_{r۲}(P(n,۲)) = \lceil \frac{۴n+\beta}{۵} \rceil. \qquad (۱۶.۲)$$

بنابراین

$$\gamma_{r۲}(P(n,۲)) \geq \lceil \frac{۴n}{۵} \rceil. \qquad (۱۷.۲)$$

به‌علاوه، برای $n \equiv 1,2,5,6,7,8 \pmod{10}$ از لم‌های (۷.۴.۲) الی (۹.۴.۲) داریم $\beta \geq 4$. درنتیجه از رابطه‌ی (۱۶.۲) داریم

$$\gamma_{r2}(P(n,2)) = \lceil \frac{4n+\beta}{5} \rceil \geq \lceil \frac{4n}{5} \rceil + 1 \qquad n \equiv 1,2,5,6,7,8 \pmod{10} \text{ برای } \qquad (18.2)$$

و حکم از (۱۵.۲) و (۱۷.۲) و (۱۸.۲) به‌دست می‌آید.

□

از [۱۴] می‌دانیم، به‌ازای هر دو عدد صحیح k و m که $km \equiv \pm 1 \pmod{n}$ داریم $P(n,m) \simeq P(n,k)$. در این‌صورت $P(2k+1,2) \simeq P(2k+1,k)$. از این‌رو، با توجه به قضیه‌ی (۱۱.۴.۲) به‌راحتی، نتیجه‌ی بعد را به‌دست می‌آوریم.

نتیجه ۱.۴.۲. [۱۲]

$$\gamma_{r2}(P(2k+1,k)) = \begin{cases} \lceil \frac{8k+4}{5} \rceil & k \equiv 1,4 \pmod{5} \\ \lceil \frac{8k+4}{5} \rceil + 1 & k \equiv 0,2,3 \pmod{5} \end{cases}.$$

حال، با توجه به نتیجه‌ی (۱.۴.۲)، نتیجه‌ی بعد حاصل می‌شود.

نتیجه ۲.۴.۲. [۱۲] برای $k \geq 4$ داریم $\gamma_{r2}(P_{2k+1,k})) < 2k+1$.

برهان. با توجه به نتیجه‌ی (۱.۴.۲)، کافی است ثابت کنیم $\lceil \frac{8k+4}{5} \rceil + 1 < 2k+1$. داریم

$$\lceil \frac{8k+4}{5} \rceil + 1 \leq (\frac{8k+4}{5} + 1) + 1.$$

از طرفی، رابطه‌ی $\frac{8k+4}{5} + 2 < 2k+1$ برقرار است اگر و تنها اگر $k > \frac{5}{2}$. □

و حالا گراف‌های $P(n,k)$ را برای $k = 3$ بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۴.۲. [۱۷] *برای* $n \geq 13$ *داریم* $\gamma_{r2}(P(n,3)) \leq n-1$.

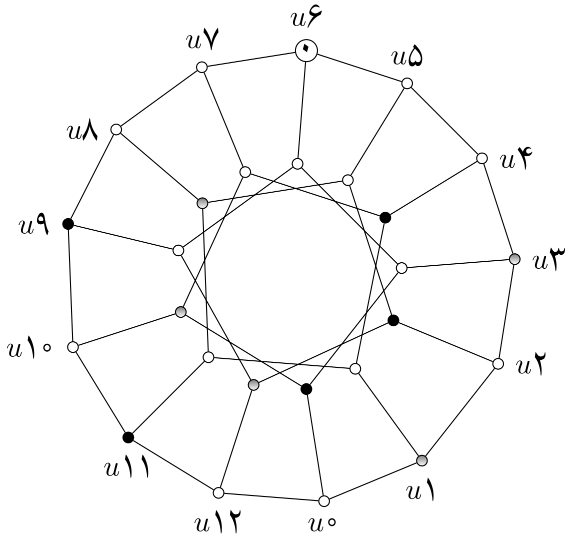
برهان. روشن است که برای اثبات قضیه کافی است یک 2RDF روی $P(n,3)$ برای $n \geq 13$ با وزن $n-1$ بیابیم. برای تعریف چنین تابعی همانند لم (۵.۴.۲) عمل می‌کنیم و در آن ۰ ، ۱ ، ۲ و ۳ به‌ترتیب، به‌معنی $\emptyset$ ، $\{1\}$ ، $\{2\}$ و $\{1,2\}$ می‌باشند.

اگر n فرد باشد $\begin{pmatrix} 01010030 & 02020 & \cdots & 202020 \\ 20202000 & 10101 & \cdots & 010101 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u_0 & \cdots & u_{n-1} \\ v_0 & \cdots & v_{n-1} \end{pmatrix}$.

اگر n زوج باشد $\begin{pmatrix} 01010030 & 020202 & \cdots & 020202 \\ 20202000 & 101010 & \cdots & 101010 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u_0 & \cdots & u_{n-1} \\ v_0 & \cdots & v_{n-1} \end{pmatrix}$.

به‌آسانی می‌توان دید که رأس‌های با مقدار $\emptyset$ به‌وسیله‌ی رأس‌های با مقدار غیرتهی احاطه شده‌اند لذا f یک 2RDF روی $V(P(n,3))$ برای $n \geq 13$ است و چون $w(f) = n-1$ پس حکم برقرار است. شکل‌های (۱۶.۲) و (۱۷.۲) را ببینید.

□



شکل ۱۶.۲: یک 2RDF با وزن ۱۲ برای $P(۱۳,۳)$.

قضیه ۱۳.۴.۲. [۱۷] *برای* $n \geq ۱۳$ *داریم*

$$\gamma_{r۲}(P(n,۳)) \leq \begin{cases} n - \lfloor \frac{n}{۸} \rfloor & \text{اگر } n \equiv ۰,۲,۴,۵,۶,۷,۱۳,۱۴,۱۵ \pmod{۱۶} \\ n - \lfloor \frac{n}{۸} \rfloor + ۱ & \text{اگر } n \equiv ۱,۳,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲ \pmod{۱۶} \end{cases}$$

برهان. مشابه اثبات قبل، یک 2RDF با وزن دلخواه برای هر حالت روی $V(P(n,۳))$ تعریف می‌کنیم.

$$f\begin{pmatrix} u_۰ & \cdots & u_{n-۱} \\ v_۰ & \cdots & v_{n-۱} \end{pmatrix}$$

حالت۱) برای $n \equiv ۰ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ \end{pmatrix}.$$

حالت۲) برای $n \equiv ۱ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۲۰۲ & ۰ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۱۰ & ۱ \end{pmatrix}.$$

حالت۳) برای $n \equiv ۲ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & ۰۱ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & ۲۰ \end{pmatrix}.$$

حالت۴) برای $n \equiv ۳ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۲۰۲ & ۰۲۰ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۱۰ & ۱۰۱ \end{pmatrix}.$$

حالت۵) برای $n \equiv ۴ \pmod{۱۶}$

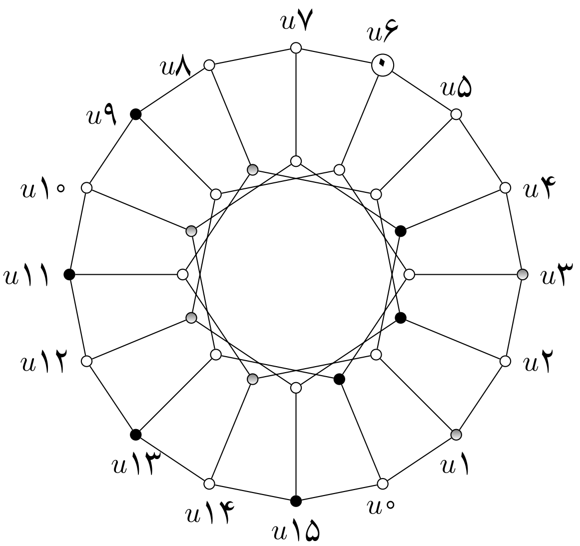
$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & ۰۱۰۱ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & ۲۰۲۰ \end{pmatrix}.$$

حالت۶) برای $n \equiv ۵ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & ۰۱۰۱۰ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & ۲۰۲۰۲ \end{pmatrix}.$$

حالت۷) برای $n \equiv ۶ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & ۰۱۰۱۰۱ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & ۲۰۲۰۲۰ \end{pmatrix}.$$



شکل ۲.۱۷: یک 2RDF با وزن ۱۵ برای $P(۱۶,۳)$.

حالت۸) برای $n \equiv ۷ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & ۰۱۰۱۰۱۰ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & ۲۰۲۰۲۰۲ \end{pmatrix}.$$

حالت۹) برای $n \equiv ۸ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & ۰۱۰۱۰۱۰۱ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & ۲۰۲۰۲۰۲۰ \end{pmatrix}.$$

حالت۱۰) برای $n \equiv ۹ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & ۰۱۰۱۰۱۰۱ & ۰ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & ۲۰۲۰۲۰۲۰ & ۲ \end{pmatrix}.$$

حالت۱۱) برای $n \equiv ۱۰ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & ۰۱۰۱۰۱۰۱ & ۰۱ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & ۲۰۲۰۲۰۲۰ & ۲۰ \end{pmatrix}.$$

حالت۱۲) برای $n \equiv ۱۱ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & ۰۱۰۱۰۱۰۱ & ۰۱۰ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & ۲۰۲۰۲۰۲۰ & ۲۰۲ \end{pmatrix}.$$

حالت ۱۳) برای $n \equiv ۱۲ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & ۰۱۰۱۰۱۰۱ & ۰۱۰۱ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & ۲۰۲۰۲۰۲۰ & ۲۰۲۰ \end{pmatrix}.$$

حالت ۱۴) برای $n \equiv ۱۳ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱ \end{pmatrix}.$$

حالت ۱۵) برای $n \equiv ۱۴ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۲ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰ \end{pmatrix}.$$

حالت ۱۶) برای $n \equiv ۱۵ \pmod{۱۶}$

$$= \begin{pmatrix} ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & \cdots & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۰۳۰ & ۰۱۰۱۰۰۳۰ & ۰۲۰۲۰۲۰ \\ ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & \cdots & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۰۰ & ۲۰۲۰۲۰۰۰ & ۱۰۱۰۱۰۱ \end{pmatrix}.$$

□

فصل ۳

مفهوم بحرانی برای ۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی در گراف‌ها

۱.۳ مقدمه

تعریف ۱.۱.۳. گراف احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی رأسی بحرانی[۱]:
گراف G را احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی رأسی بحرانی یا به‌طور مختصر $\gamma_{r۲}$-رأسی بحرانی می‌گوییم هرگاه به‌ازای هر رأس $v \in V(G)$ داشته باشیم $\gamma_{r۲}(G-v) < \gamma_{r۲}(G)$.

تعریف ۲.۱.۳. گراف احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی رأسی ابر (سوپر) بحرانی[۲]:
گراف G را احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی رأسی ابربحرانی یا به‌طور مختصر $\gamma_{r۲}$-رأسی ابربحرانی می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر $v \in V(G)$ داشته باشیم $\gamma_{r۲}(G-v) > \gamma_{r۲}(G)$.

تعریف ۳.۱.۳. گراف احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی یالی بحرانی [۳]:
گراف G را احاطه‌گری۲-رنگین‌کمانی یالی بحرانی یا به‌طور خلاصه $\gamma_{r۲}$-یالی بحرانی می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر یال $e \in E(\bar{G})$ داشته باشیم $\gamma_{r۲}(G+e) < \gamma_{r۲}(G)$ که در آن گراف $\bar{G}$ متمم گراف G است.

تعریف ۴.۱.۳. گراف احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی یالی ابر (سوپر) بحرانی[۴]:
گراف G را احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی یالی ابربحرانی یا به‌طور خلاصه $\gamma_{r۲}$-یالی ابربحرانی می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر یال $e \in E(G)$ داشته باشیم $\gamma_{r۲}(G-e) > \gamma_{r۲}(G)$.

تعریف ۵.۱.۳. مجموعه‌ی همسایگی خصوصی باز[۵] :
اگر f یک 2RDF تعریف شده روی گراف G باشد و $v \in V(G)$، که $f(v) \neq \emptyset$، آن‌گاه مجموعه‌ی همسایگی خصوصی باز v نسبت به f را با $pn(v,f)$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم

$$pn(v,f) = \{u \in N[v] : \text{نیست } G-v \text{ برای} \text{2RDF} \text{ یک } f\,|_{G-v}\}$$

[۱] 2-rainbow domination vertex critical graph
[۲] 2-rainbow domination vertex super critical graph
[۳] 2-rainbow domination edge critical graph
[۴] 2-rainbow domination edge super critical graph
[۵] open private neighbor set

تعریف ۳.۱.۶. مجموعه‌ی همسایگی خصوصی بسته[۶]:
از تعریف مجموعه‌ی همسایگی خصوصی باز، f و G و v را با شرایط گفته شده در نظر می‌گیریم سپس مجموعه‌ی همسایگی خصوصی بسته را که با $pn[v,f]$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$pn[v,f]=pn(v,f)\cup\{v\}$$

.

۳.۲ حذف رأس

لم ۳.۲.۱. [۱۱] *برای هر v در یک گراف G داریم*

$$\gamma_{r2}(G)-1\leq\gamma_{r2}(G-v)\leq\gamma_{r2}(G)+\Delta(G)-1.$$

برهان. فرض کنیم $v\in V(G)$ و f یک $\gamma_{r2}-$ تابع تعریف شده روی $G-v$ باشد. f_1 را روی $V(G)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_1(x)=\begin{cases}\{1\} & x=v \text{ اگر}\\ f(x) & x\neq v \text{ اگر}\end{cases}$$

در این‌صورت f یک 2RDF روی G است در نتیجه

$$\gamma_{r2}(G)\leq w(f_1)=w(f_1|_{G-v})+1=\gamma_{r2}(G-v)+1.$$

برای به‌دست آوردن کران بالا، g را یک $\gamma_{r2}-$ تابع روی گراف G می‌گیریم. حال، اگر $g(v)=\emptyset$ ان‌گاه $g\big|_{G-v}$ یک 2RDF (نه لزوما $\gamma_{r2}-$تابع) روی $G-v$ است. بنابراین
$\gamma_{r2}(G-v)\leq w(g)=\gamma_{r2}(G)$ و چون $\Delta(G)\geq 1$ پس در این حالت کران بالا ثابت شده است. اگر $g(v)\neq\emptyset$، فرض می‌کنیم

$$A=\{x\in N(v)\colon g(x)=\emptyset\}$$

و g_1 را روی $G-v$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم :
برای هر $x\in V(G-v)$،

$$g_1(x)=\begin{cases}g(x) & x\notin A\\ \{1\} & x\in A\end{cases}$$

آن‌گاه g_1 یک 2RDF روی $G-v$ است. در زیر وزن g_1 را محاسبه می‌کنیم.
اگر $|g(v)|=1$ و $\deg_G(v)=\Delta(G)$ آن‌گاه بنا به تعریف g_1،

$$w(g_1)=\gamma_{r2}(G)-1+|A|\leq\gamma_{r2}(G)-1+\Delta(G)$$

و اگر $\deg_G(v)<\Delta(G)$ آن‌گاه $w(G_1)<\gamma_{r2}(G)-1+\Delta(G)$
و در صورتی که $g(v)=\{1,2\}$ باشد مجددا رابطه‌ي $w(g_1)<\gamma_{r2}(G)-1+\Delta(G)$ برقرار است (چون ۲ واحد از $\gamma_{r2}(G)$ کم می‌شود). در نتیجه

$$\gamma_{r2}(G-v)\leq w(g_1)\leq\gamma_{r2}(G)-1+\Delta(G).$$

□

[۶] closed private neighbor set

حال از طریق لم زیر نشان می‌دهیم که هیچ گراف γ_{r2}–رأسی ابربحرانی وجود ندارد.

لم ۲.۲.۳. [۱۱] *فرض کنیم $v \in V(G)$ به‌طوری که $\gamma_{r2}(G-v) > \gamma_{r2}(G)$ باشد. در این‌صورت برای هر γ_{r2}– تابع f تعریف شده روی گراف G داریم: $f(v) \neq \emptyset$ و $pn(v,f) \neq \emptyset$.*

برهان. فرض می‌کنیم $v \in V(G)$ به‌طوری که $\gamma_{r2}(G-v) > \gamma_{r2}(G)$ و f یک γ_{r2}–تابع روی G باشد. اگر $f(v) = \emptyset$ آن‌گاه به‌وضوح $f\big|_{G-v}$ یک 2RDF روی $G-v$ است. بنابراین $\gamma_{r2}(G-v) \leq \gamma_{r2}(G)$ است که تناقض با فرض مسأله است لذا $f(v) \neq \emptyset$. اگر $pn(v,f) = \emptyset$ آن‌گاه بنا به تعریف $pn(v,f)$، $f\big|_{G-v}$ یک 2RDF برای $G-v$ است لذا $\gamma_{r2}(G-v) \leq \gamma_{r2}(G)$ و این تناقض است. در نتیجه $pn(v,f) \neq \emptyset$. □

قضیه ۳.۲.۳. [۱۱] *هیچ گراف γ_{r2}– رأسی ابربحرانی وجود ندارد.*

برهان. بنا به برهان خلف فرض می‌کنیم که G یک گراف γ_{r2}–رأسی ابربحرانی از مرتبه‌ی n باشد. از لم (۲.۲.۳) به‌ازای هر $v \in V(G)$ داریم $f(v) \neq \emptyset$. بنابراین برای هر γ_{r2}–تابع مانند f روی G داریم برای هر $v \in V(G)$،

$$|f(v)| = 1$$

بنابراین $\gamma_{r2}(G) = n$. همچنین از لم (۱.۲.۳) داریم $\gamma_{r2}(G-v) \leq \gamma_{r2}(G) + \Delta(G) - 1$. دراین‌صورت، از فرض ابتدا (فرض خلف) خواهیم داشت: $\Delta(G) \geq 2$. حال اگر x را رأس با ماکسیمم درجه فرض کنیم، آن‌گاه f تعریف شده با ضابطه‌ی زیر یک 2RDF خواهد بود (چون برای هر $u \in V(G)$ که $u \in N(x)$ داریم $f(u) = \emptyset$).

برای هر $u \in V(G)$،

$$f(u) = \begin{cases} \{1,2\} & u = x \\ \emptyset & u \in N(x) \\ \{1\} & u \in V(G)\backslash N[x] \end{cases}$$

و چون $\Delta(G) = \deg_G(x) \geq 2$ لذا $|N[x]| \geq 3$ در حالی که $\sum_{u \in N[x]} |f(u)| = |f(x)| = 2$ در نتیجه f یک 2RDF روی G با وزن حداکثر $n-1$ است و این یک تناقض است زیرا $\gamma_{r2}(G) = n$. پس فرض ابتدا مبنی بر وجود یک گراف γ_{r2}–رأسی ابربحرانی باطل است. □

در ادامه، گراف‌های γ_{r2}–رأسی بحرانی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. (بسیاری از نتایج این بخش مشابه نتایجی است که برای گراف‌های احاطه‌گری رومی رأسی بحرانی به‌وسیله‌ی ا.هنسبرگ[۷] و همکاران در [۷، ۸] به‌دست آمده است) ابتدا توجه می‌کنیم که از کران پایین لم (۱.۲.۳) و تعریف گراف γ_{r2}–رأسی بحرانی، لم زیر به‌دست می‌آید:

لم ۴.۲.۳. [۱۱] *به‌ازای هر رأس v در یک گراف γ_{r2}– رأسی بحرانی G داریم $\gamma_{r2}(G-v) = \gamma_{r2}(G) - 1$.*

اینک یک طبقه‌بندی برای گراف‌های γ_{r2}– رأسی بحرانی ارایه می‌دهیم.

[۷] A. Hansberg

قضیه ۵.۲.۳. [۱۱] *G یک گراف γ_{r2}-رأسی بحرانی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $v \in V(G)$ یک γ_{r2}-تابع مانند f وجود داشته باشد به‌طوری که $|f(v)| = 1$ و $pn[v,f] = \{v\}$.*

برهان. ابتدا حالت رفت قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم G یک گراف γ_{r2}-رأسی بحرانی باشد و $v \in V(G)$. از لم (۴.۲.۳) داریم $\gamma_{r2}(G-v) = \gamma_{r2}(G) - 1$. f را یک γ_{r2}-تابع روی $G - v$ می‌گیریم.
تابع g را روی $V(G)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $x \in V(G)$

$$g(x) = \begin{cases} \{1\} & x = v \\ f(x) & x \neq v \end{cases}$$

چون f یک γ_{r2}-تابع روی $G - v$ است و $g(v) \neq \emptyset$ بنابراین g شرط 2RDF بودن را دارد. هم‌چنین، چون $g\,|_{G-v}$ برابر با γ_{r2}-تابع f روی $G - v$ است لذا $pn(v,g) = \emptyset$. در نتیجه $pn[v,g] = \{v\}$.
برای اثبات حالت برگشت قضیه، v، f و G را که در فرض قضیه آمده‌اند در نظر می‌گیریم.
چون به‌ازای هر $v \in V(G)$ داریم $pn[v,f] = \{v\}$ پس $pn(v,f) = \emptyset$ در نتیجه $f\,|_{G-v}$ یک 2RDF روی $G - v$ است و

$$\gamma_{r2}(G-v) \leq w(f\,|_{G-v}) = \gamma_{r2}(G) - 1.$$

□

گزاره ۶.۲.۳. [۱۱] *هر دور C_n یک گراف γ_{r2}-رأسی بحرانی است اگر و تنها اگر $n \equiv 2 \pmod 4$.*

برهان. از فصل ۲ داریم $\gamma_{r2}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ و

$$\gamma_{r2}(C_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & n \equiv 0 \pmod 4 \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor & \text{o.w} \end{cases}$$

و توجه می‌کنیم که برای $n \equiv 1,2,3 \mod 4$ داریم $\lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor = 1$ پس قسمتی از لم مذکور را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\gamma_{r2}(C_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & n \equiv 0 \pmod 4 \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \text{o.w} \end{cases}$$

حالت رفت قضیه را به‌صورت زیر ثابت می‌کنیم:
فرض کنیم C_n یک گراف γ_{r2}-رأسی بحرانی باشد. پس برای هر رأس $v \in C_n$ داریم

$$\gamma_{r2}(C_n - v) < \gamma_{r2}(C_n) \tag{۱.۳}$$

و چون با حذف یک رأس از دور C_n به مسیر P_{n-1} می‌رسیم، بنابراین

$$\gamma_{r2}(C_n - v) = \gamma_{r2}(P_{n-1}) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$$

در نتیجه از (۱.۳) داریم

$$\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 < \gamma_{r2}(C_n) \tag{۲.۳}$$

حال، برای n داریم:
اگر $n \equiv 0 \pmod 4$ آن‌گاه $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$ و اگر $n \equiv 1,3 \pmod 4$ آن‌گاه $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$ و اگر $n \equiv 2 \pmod 4$ آن‌گاه $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$. بنابراین برای برقراری نامساوی (۲.۳) باید $n \equiv 2$

(mod ۴) باشد و این حالت رفت قضیه را ثابت کرد.
اثبات حالت برگشت بدیهی است.

□

لم ۷.۲.۳. [۱۱] *هر رأس پشتیبان در یک گراف γ_{r2}−رأسی بحرانی با دقیقا یک برگ مجاور است.*

برهان. فرض می‌کنیم G یک گراف γ_{r2}−رأسی بحرانی و x یک رأس پشتیبان از این گراف باشد. به برهان خلف، فرض می‌کنیم که y و z دو برگ همسایه‌ی x باشند. بنا به قضیه (۵.۲.۳)، یک γ_{r2}−تابع f قابل تعریف روی G وجود دارد به‌طوری که $|f(x)| = ۱$ و $pn[x, f] = \{x\}$ و در این‌صورت از تعریف $pn[x, f]$ داریم $f(y) \neq \emptyset$ و $f(z) \neq \emptyset$. حال تابع g را روی $V(G)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $v \in V(G)$

$$g(v) = \begin{cases} \{۱, ۲\} & v = x \\ \emptyset & v = y, z \\ f(v) & v \notin \{x, y, z\} \end{cases}$$

چون $y, z \in N(x)$ و نیز با توجه به شرایط f، g یک 2RDF روی G است. در تعریف f داشتیم مقادیر $f(z), f(y), f(x)$ غیرتهی است بنابراین $w(g) < w(f) = \gamma_{r2}(G)$ که تناقض است. □

اکنون درخت‌های γ_{r2}−رأسی بحرانی را طبقه‌بندی می‌کنیم.

قضیه ۸.۲.۳. [۱۱] *یک درخت T، γ_{r2}−رأسی بحرانی است اگر و تنها اگر $T = K_2$.*

برهان. بدیهی است که K_2 یک درخت γ_{r2}−رأسی بحرانی است لذا حالت برگشت قضیه ثابت شده است. فرض می‌کنیم T یک درخت γ_{r2}−رأسی بحرانی از مرتبه‌ی n باشد و $n \geq ۳$ و x یک رأس پشتیبان T و z برگ یکتای (بنا به لم قبل، این برگ یکتاست) همسایه‌ی x باشد. اگر $y \neq z$ همسایه‌ی x باشد (yهمسایه‌ی غیر برگ برای x است) آن‌گاه بنا به قضیه (۵.۲.۳) یک γ_{r2}−تابع مانند f برای G هست به‌طوری که $|f(y)| = ۱$ و $pn[y, f] = \{y\}$ پس با توجه به تعریف $pn[y, f]$ داریم $f(x) \neq \emptyset$ و $f(z) \neq \emptyset$. (توجه می‌کنیم که اگر x همسایه‌ی غیر برگ دیگری مانند w داشته باشد و x در احاطه‌ی w و z باشد یعنی داشته باشیم: $f(x) = \emptyset$ و $f(w) \cup f(z) = \{۱, ۲\}$. در آن‌صورت، می‌توان gرا روی G با ضابطه‌ی زیر تعریف کرد:
برای هر $v \in V(G)$،

$$g(v) = \begin{cases} \emptyset & v = y \\ f(v) & \text{o.w} \end{cases}$$

و g یک 2RDF روی $V(G)$ با وزن $w(f) - ۱$ است و این تناقض است. هم‌چنین، اگر $f(x) = \{۱, ۲\}$ و $f(z) = \emptyset$ باشد، وزن این تابع با تابعی که به هرکدام از رأس‌های x و z مجموعه‌های تک عضوی اختصاص می‌دهد، برابر است، بنابراین می‌توانیم تابع دوم را در نظر بگیریم.) بدون از دست دادن کلیت مطلب، فرض کنیم $f(y) = \{۱\}$ آن‌گاه تابع g را روی $V(G)$ باضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $v \in V(G)$،

$$g(v) = \begin{cases} \emptyset & v = x \\ \{۲\} & v = z \\ f(v) & v \notin \{x, z\} \end{cases}$$

g یک 2RDF روی گراف G است و چون ۳ $= |f(u)| \sum_{u\in N[x]}$ اما ۲ $= |g(u)| \sum_{u\in N[x]}$ بنابراین $w(g) < w(f) = \gamma_{r۲}(G)$ (توجه می‌کنیم که اگر x همسایه‌های دیگری نیز داشته باشد، همواره $\sum_{u\in N[x]} |f(u)|$ حداقل ۱ واحد از $\sum_{u\in N[x]} |g(u)|$ بیشتر است) و این تناقض است.

□

اینک، به محاسبه‌ی عدد ۲−احاطه‌گری رنگین‌کمانی تاج دور C_n و تاج مسیر P_n پرداخته، سپس در گزاره‌ای دیگر اثبات می‌کنیم که $cor(C_n)$ یک گراف $\gamma_{r۲}$−رأسی بحرانی است.

گزاره ۳.۲.۹. [۱۱]

$$\gamma_{r۲}(cor(C_n)) = \gamma_{r۲}(cor(P_n)) = n + \lceil\frac{n}{۳}\rceil.$$

برهان. فرض کنیم $G = cor(C_n)$ و f یک $\gamma_{r۲}$−تابع روی G باشد. هم‌چنین فرض شود x، yو z سه رأس پشتیبان از G باشند به‌طوری که $\{x, z\} \subseteq N(y)$ و $f(x) = f(y) = f(z) = \emptyset$. اگر $x_۱$، $y_۱$ و $z_۱$ به‌ترتیب برگ‌های همسایه‌ی رأس‌های x، y و z باشند آن‌گاه برای احاطه شدن y باید $f(y_۱) = \{۱, ۲\}$ باشد. تابع g را روی $V(G)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $v \in V(G)$،

$$g(v) = \begin{cases} \{۱\} & v = y = y_۱ \\ f(v) & v \notin \{y, y_۱\} \end{cases}$$

با توجه به تعریف f، تابع g یک 2RDF روی G است که $w(g) = w(f)$ لذا g یک $\gamma_{r۲}$−تابع روی G است. از این مطلب نتیجه می‌شود که به‌ازای هر مسیر $x - y - z$ از دور C_n و هر $\gamma_{r۲}$−تابعی مانند f روی $cor(C_n)$، می‌توان فرض کرد $\{f(x), f(y), f(z)\} \neq \{\emptyset\}$ که در آن‌صورت خواهیم داشت

$$\sum_{v\in V(C_n)} |f(v)| \geq \lceil\frac{n}{۳}\rceil \tag{۳.۳}$$

و اگر x یک برگ از گراف G باشد و $x' \in N(x)$ آن‌گاه، چون $f(x) = \emptyset$ و x همسایه‌ی دیگری ندارد پس $f(x') = \{۱, ۲\}$. لذا به‌ازای هر یال xx' که x برگ وابسته به رأس پشتیبان x' است، یکی از حالت‌های بعد اتفاق می‌افتد: $f(x) = \emptyset$ و آن‌گاه $f(x') = \{۱, ۲\}$ و یا این‌که $f(x) \neq \emptyset$.

از مطلب بالا برای هر یال xx' در گراف G و رابطه‌ی (۳.۳) نتیجه می‌گیریم

$$w(f) \geq \lceil\frac{n}{۳}\rceil + n.$$

برای کامل کردن اثبات گزاره برای $cor(C_n)$، یک 2RDF با وزن $n + \lceil\frac{n}{۳}\rceil$ برای هر مقدار n روی $V(G)$ تعریف می‌کنیم:

الف) $n \equiv ۰ \pmod{۳}$.

برای هر i به‌طوری که $۰ \leq i \leq \frac{n}{۳} - ۱$،

$$f(v_{۳i+۱}) = f(v_{۳i+۲}) = \emptyset.$$

برای هر i به‌طوری که $۱ \leq i \leq \frac{n}{۳}$،

$$f(v_{۳i}) = \{۲\}.$$

برای هر برگ x،

$$f(x) = \{۱\}.$$

جهت اثبات 2RDF بودن f کافی است، توجه کنیم که هر رأس $v_{۳i+۱}$ و $v_{۳i+۲}$ که $۰ \leq i \leq \frac{n}{۳} - ۱$، به‌وسیله‌ی برگ همسایه‌ی خود و یک رأس $v_{۳i}$ که $۱ \leq i \leq \frac{n}{۳}$ احاطه می‌شود.
به هر کدام از n برگ، مجموعه‌ای تک‌عضوی اختصاص داده شده و به یک رأس از هر سه رأس دور C_n، مقدار $\{۲\}$ اختصاص داده شده و می‌دانیم $w(f)$ عددی صحیح است در نتیجه $w(f) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil + n$.
ب) $n \equiv ۱ \pmod{۳}$.
برای هر i به‌طوری که $۰ \leq i \leq \lfloor \frac{n}{۳} \rfloor - ۱$،

$$f(v_{۳i+۱}) = f(v_{۳i+۲}) = \emptyset.$$

برای هر i به‌طوری که $۱ \leq i \leq \lfloor \frac{n}{۳} \rfloor$،

$$f(v_{۳i}) = f(v_n) = \{۲\}.$$

برای هر برگ x،

$$f(x) = \{۱\}.$$

مشابه حالت الف، f یک 2RDF است و $w(f) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil + n$.
پ) $n \equiv ۲ \pmod{۳}$.
برای هر i به‌طوری که $۰ \leq i \leq \lfloor \frac{n}{۳} \rfloor - ۱$،

$$f(v_{۳i+۱}) = f(v_{۳i+۲}) = f(v_{n-۱}) = \emptyset.$$

برای هر i به‌طوری که $۱ \leq i \leq \lfloor \frac{n}{۳} \rfloor$،

$$f(v_{۳i}) = f(v_n) = \{۲\}.$$

برای هر برگ x،

$$f(x) = \{۱\}.$$

در اینجا نیز مانند حالت‌های الف و ب، f یک 2RDF است و $w(f) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil + n$.
پس اثبات گزاره برای $\gamma_{r۲}(cor(C_n))$ کامل شد. جهت اثبات حکم برای $cor(P_n)$، توجه می‌کنیم که هر $cor(P_n)$ را می‌توانیم از حذف یک یال دور C_n در $cor(C_n)$ به‌دست آوریم، لذا هر $\gamma_{r۲}$−تابع روی $cor(P_n)$ یک 2RDF (نه لزوما $\gamma_{r۲}$−تابع) روی $cor(C_n)$ است پس

$$\gamma_{r۲}(cor(P_n)) \geq n + \lceil \frac{n}{۳} \rceil. \tag{۴.۳}$$

حال برای هر مقدار n با توجه به حالت‌های الف تا پ در اثبات قسمت قبل، یک 2RDF مانند f برای $cor(C_n)$ با وزن $n+\lceil \frac{n}{۳} \rceil$ در نظر می‌گیریم. آن‌گاه از تعریف f در هر حالت می‌دانیم، دو رأس پشتیبان مجاور x و y وجود دارند که $f(x) = f(y) = \emptyset$. از طرف دیگر $cor(C_n) - xy \simeq cor(P_n)$ و $x \notin pn[y, f]$ و $y \notin pn[x, f]$ در نتیجه f یک 2RDF روی $cor(P_n)$ می‌باشد. پس

$$\gamma_{r۲}(cor(P_n)) \leq w(f) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil + n \tag{۵.۳}$$

از (۴.۳) و (۵.۳) اثبات کامل می‌شود.
پس $\gamma_{r۲}(cor(C_n)) = \gamma_{r۲}(cor(P_n)) = n + \lceil \frac{n}{۳} \rceil$.

□

گزاره ۱۰.۲.۳. [۱۱] *برای* $n \geq ۳$ $cor(C_n)$ *یک گراف* $\gamma_{r۲}$−*رأسی بحرانی است اگر و تنها اگر* $n \equiv ۱ \pmod ۳$.

برهان. ابتدا حالت برگشت گزاره را ثابت می‌کنیم. برای این منظور، رأس دلخواه $x \in V(cor(C_n))$ را در نظر گرفته و دو وضعیت خواهیم داشت و در هر وضعیت، حکم را ثابت می‌کنیم. وضعیت اول، این که x یک برگ باشد. y را رأس پشتیبان همسایه‌ی x گرفته و f را 2RDF ذکر شده در اثبات گزاره قبل ((۹.۲.۳)) برای حالت $n \equiv ۱ \pmod ۳$ (ب) فرض می‌کنیم. از تعریف f داریم $f(x) = \{۱\}$. بدون از دست دادن کلیت، می‌توانیم فرض کنیم $f(y) \neq \emptyset$ یعنی y رأس شماره‌ی $۳i$ که $۱ \leq i \leq \lfloor \frac{n}{۳} \rfloor$ یا رأس شماره‌ی n است (شماره‌گذاری رأس‌ها را از هر رأسی می‌توانیم آغاز کنیم) و با توجه به این که تنها همسایه‌ی x رأس y است لذا $pn[x, f] = \{x\}$. در ضمن، از گزاره‌ی قبل می‌دانیم که f یک $\gamma_{r۲}$−تابع است. حال به‌دست آورده‌ایم، برای $\gamma_{r۲}$−تابع f روی $cor(C_n)$، $|f(x)| = ۱$ و $pn[x, f] = \{x\}$. بنابراین شرایط حالت برگشت قضیه مهم (۵.۲.۳) در این مورد فراهم شده است لذا بنا به قضیه مذکور $\gamma_{r۲}(cor(C_n) - x) < \gamma_{r۲}(cor(C_n))$.
در وضعیت دوم x یک رأس پشتیبان است. گراف $cor(C_n - x)$ یکریخت با $cor(P_{n-۱})$ همراه با یک رأس تنها (ایزوله) است. بنابراین

$$\gamma_{r۲}(cor(C_n) - x) = \gamma_{r۲}(cor(P_{n-۱})) + ۱. \qquad (۶.۳)$$

از گزاره‌ی (۹.۲.۳) داریم

$$\Big(\gamma_{r۲}(cor(P_{n-۱}))\Big) + ۱ = \Big(\lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil + n - ۱\Big) + ۱ = \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil + n. \qquad (۷.۳)$$

چون $n \equiv ۱ \pmod ۳$ پس $\lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil = \lceil \frac{n}{۳} \rceil - ۱$. لذا رابطه‌ی (۷.۳) به صورت زیر است

$$\gamma_{r۲}(cor(P_{n-۱})) + ۱ = \lceil \frac{n}{۳} \rceil + n - ۱$$

و مجددا از گزاره‌ی (۹.۲.۳) نتیجه می‌شود:

$$\gamma_{r۲}(cor(C_n) - x) < \gamma_{r۲}(cor(C_n)).$$

اینک، حالت رفت قضیه را ثابت می‌کنیم.
اگر گراف $cor(C_n)$، $\gamma_{r۲}$−رأسی بحرانی باشد، یعنی برای هر رأس $x \in V(cor(C_n))$،

$$\gamma_{r۲}(cor(C_n - x)) < \gamma_{r۲}(cor(C_n))$$

در آن‌صورت، در حالتی که x یک رأس پشتیبان باشد، طبق (۶.۳) در حالت برگشت گزاره داریم

$$\gamma_{r۲}(cor(C_n) - x) = \gamma_{r۲}(cor(P_{n-۱})) + ۱$$

و از گزاره‌ی (۹.۲.۳) داریم

$$\gamma_{r۲}(cor(P_{n-۱})) + ۱ = \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil + n.$$

حال برای آن‌که $\gamma_{r۲}(cor(C_n) - x) < \gamma_{r۲}(cor(C_n))$ باشد، باید
$n + \lceil \frac{n}{۳} \rceil < n + \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil$ باشد و این نامعادله تنها زمانی رخ می‌دهد که $n \equiv ۱ \pmod{۳}$ باشد.
$\square$

۳.۳ حذف یال

لم ۱.۳.۳. [۱۱] *برای هر یال e در یک گراف G داریم*
$$\gamma_{r۲}(G) \leq \gamma_{r۲}(G-e) \leq \gamma_{r۲}(G) + ۱.$$

برهان. فرض کنیم $e \in E(G)$. برای اثبات کران پایین، h را یک $\gamma_{r۲}$–تابع برای $G-e$ می‌گیریم. آن‌گاه h یک 2RDF (نه لزوما $\gamma_{r۲}$–تابع) برای G است. بنابراین $\gamma_{r۲}(G) \leq w(h) = \gamma_{r۲}(G-e)$. حال، فرض می‌کنیم $e = xy$ و f را $\gamma_{r۲}$–تابعی برای G در نظر می‌گیریم. اگر $\emptyset \notin \{f(x), f(y)\}$ یا $f(x) = f(y) = \emptyset$ آن‌گاه $x \notin pn[y,f]$ و $y \notin pn[x,f]$ (x و y در احاطه شدن یک‌دیگر بی‌تأثیرند).
در نتیجه، f یک 2RDF (البته یک $\gamma_{r۲}$–تابع) برای $G-e$ است لذا $\gamma_{r۲}(G-e) \leq \gamma_{r۲}(G)$. بنابراین درستی کران بالا در این حالت روشن است. اما، اگر $f(y) \neq \emptyset$ و $f(x) = \emptyset$، تابع g را روی $G-e$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $v \in G-e$،
$$g(v) = \begin{cases} \{۱\} & v = x \\ f(v) & v \neq x \end{cases}$$
آن‌گاهgیک 2RDF روی $G-e$ است پس $\gamma_{r۲}(G-e) \leq w(g) = \gamma_{r۲}(G) + ۱$. $\square$

از تعریف گراف $\gamma_{r۲}$–یالی ابربحرانی و کران بالای لم (۱.۳.۳)، نتیجه می‌شود:

برای هر یال e در یک گراف $\gamma_{r۲}$– یالی ابربحرانی G داریم
$$\gamma_{r۲}(G-e) = \gamma_{r۲}(G) + ۱.$$

گزاره ۲.۳.۳. [۱۱] *الف) هر مسیر P_n یک گراف $\gamma_{r۲}$–یالی ابربحرانی است اگر و تنها اگر n یک عدد فرد بزرگتر از ۱ باشد.*
ب) هر دور C_n یک گراف $\gamma_{r۲}$–یالی ابربحرانی است اگر و تنها اگر $n \equiv ۰ \pmod{۴}$.

برهان. الف) از فصل ۲ داریم $\gamma_{r۲}(P_n) = \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + ۱$. اگر $e \in E(P_n)$ آن‌گاه $P_n - e$ یکریخت با دو مسیر مجزای P_s و P_t است به‌طوری که $s + t = n$. برای اثبات حالت رفت، توجه می‌کنیم که در $P_n - e$، اعداد s و t یا هر دو فرد هستند یا هر دو زوج. زمانی که هر دو فرد باشند، مجددا بنا به همان لم در فصل ۲ داریم
$$\gamma_{r۲}(P_s) + \gamma_{r۲}(P_t) = \lfloor \frac{s}{۲} \rfloor + ۱ + \lfloor \frac{t}{۲} \rfloor + ۱ = \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor - ۱ + ۲ = \gamma_{r۲}(P_n).$$

پس برای n های زوج، P_n یک گراف $\gamma_{r۲}$–یالی ابربحرانی نیست. اثبات حالت برگشت نیز از حالت رفت، روشن است.
ب) اگر $e \in E(C_n)$ باشد آن‌گاه $C_n - e \simeq P_n$. حال، اگر C_n گرافی $\gamma_{r۲}$–یالی ابربحرانی باشد آن‌گاه

$\gamma_{r2}(C_n) > \gamma_{r2}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ بنابراین، با توجه به مقادیر $\gamma_{r2}(C_n)$ از گزاره (۲.۲.۲) در فصل ۲ داریم $\gamma_{r2}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ در نتیجه بنا به همان لم، $n \equiv 0 \pmod 4$. اثبات حالت عکس نیز بدیهی است.

□

با کمک قضیه زیر، گراف‌های γ_{r2}–یالی ابربحرانی را طبقه‌بندی می‌کنیم. در این قضیه فرض می‌شود که رده‌ی $\mathcal{F}$ شامل گراف‌های با مرتبه‌ی حداقل ۳ باشد به‌طوری که $G \in \mathcal{F}$ اگر و تنها اگر G یک **ستاره** باشد یا یک گراف دوبخشی با ویژگی زیر باشد:

به‌ازای هر γ_{r2}–تابع مانند f تعریف شده روی G، داشته باشیم:

۱) به‌ازای هر $v \in V(G)$، $|f(v)| \leq 1$.

۲) اگر برای یک رأس v از G داشته باشیم $f(v) = \emptyset$ آن‌گاه $\deg_G(v) = 2$.

۳) برای هر دو رأس مجاور x و y داشته باشیم: $f(x) \neq f(y)$ و $\emptyset \in \{f(x), f(y)\}$.

قضیه ۳.۳.۳. [۱۱] *یک گراف همبند G از مرتبه‌ی n، γ_{r2}–یالی ابربحرانی است اگر و تنها اگر $G \in \mathcal{F}$.*

برهان. ابتدا حالت برگشت قضیه را ثابت می‌کنیم. اگر G را یک ستاره‌ی با مرتبه‌ی ۳ بگیریم آن‌گاه $G \simeq P_3$ و بنا به فصل ۲، $\gamma_{r2}(G) = 2$. گراف $G - e$، که در آن e یک یال از G است، یکریخت با p_2 به همراه یک رأس تنها (ایزوله) است که بنا به لم یاد شده، $\gamma_{r2}(G - e) = 2 + 1 = 3$ لذا G گرافی γ_{r2}–یالی ابربحرانی است. اگر G ستاره‌ای با مرتبه‌ی $n \geq 4$ باشد، آن‌گاه $\gamma_{r2}(G) = 2$ اما $G - e$ یکریخت با یک ستاره از مرتبه‌ی $n - 1$ به‌همراه یک رأس تنها است بنابراین $\gamma_{r2}(G - e) = 2 + 1 = 3$ لذا در این حالت نیز G یک گراف γ_{r2}–یالی ابربحرانی است. حال، فرض کنیم $G \in \mathcal{F}$ اما ستاره نباشد و فرض کنیم $e = xy \in E(G)$. به برهان خلف، برای نشان دادن γ_{r2}–یالی ابربحرانی بودن G، فرض می‌کنیم $\gamma_{r2}(G - e) = \gamma_{r2}(G)$ و f را یک γ_{r2}–تابع روی $G - e$ می‌گیریم. آن‌گاه f یک γ_{r2}–تابع روی G است. بنا به ویژگی شماره۳ رده‌ی $\mathcal{F}$، یکی از مقادیر $f(x)$ یا $f(y)$ برابر $\emptyset$ است. فرض می‌کنیم $f(x) = \emptyset$ آن‌گاه بنا به ویژگی شماره ۲ رده‌ی $\mathcal{F}$، $\deg_G(x) = 2$ و درآن‌صورت $\deg_{G-e}(x) = 1$. اگر $z \in N_{G-e}(x)$، برای احاطه شدن x باید $f(z) = \{1, 2\}$ و این با ویژگی شماره‌ی ۱ رده‌ی $\mathcal{F}$ در تناقض است بنابراین $\gamma_{r2}(G - e) = \gamma_{r2}(G) + 1$ و G یک گراف γ_{r2}–یالی ابربحرانی است.

حالت رفت قضیه را این‌گونه ثابت می‌کنیم:

اگر G، γ_{r2}–یالی ابربحرانی باشد، آن‌گاه G یا ستاره است یا گرافی غیر از ستاره. اگر G ستاره باشد پس $G \in \mathcal{F}$ و حکم ثابت است. پس فرض می‌کنیم که G ستاره نباشد. f را یک γ_{r2}–تابع روی G می‌گیریم. اگر $x \in V(G)$ وجود داشته باشد که $f(x) = \{1, 2\}$، از همبند بودن و غیرستاره بودن G داریم که دو رأس غیر از x مانند y و z وجود دارند، به‌طوری که $y \in N(x)$ و $z \in N(y)$. چون $pn[y, f] = \{y\}$ (از آن‌جا که $f(x) = \{1, 2\}$ و $y \in N(x)$) پس f یک 2RDF روی $G - yz$ نیز می‌باشد لذا $\gamma_{r2}(G - yz) < w(f) = \gamma_{r2}(G)$ و این با γ_{r2}–یالی ابربحرانی بودن G تناقض دارد. پس به‌ازای هر رأس $x \in V(G)$، $|f(x)| \leq 1$ و این ویژگی شماره‌ی ۱ رده‌ی $\mathcal{F}$ است.

اگر یک رأس $v \in V(G)$ موجود باشد به‌طوری که $f(v) = \emptyset$ و $\deg_G(v) \geq 3$، آن‌گاه سه رأس $y_1, y_2, y_3 \in N(v)$ وجود دارند، به‌طوری که $f(y_1) = \{1\}$ و $f(y_2) = \{2\}$. بنابراین v به‌وسیله‌ی y_1 و y_2 به‌خوبی احاطه می‌شود پس $f|_{G - vy_3}$ یک 2RDF است که در این‌صورت

$\gamma_{r۲}(G-vy_۳) \le \sum_{u\in G-vy_۳}|f(u)| = \gamma_{r۲}(G)$ و این نیز مانند قبل تناقض است لذا ویژگی شماره‌ی ۲ رده‌ی $\mathcal{F}$ نیز به‌دست آمد. اگر a و b دو رأس مجاور باشند به‌طوری که $\emptyset \notin \{f(a), f(b)\}$ یا $f(a)=f(b)$، آن‌گاه $a \notin pn[b,f]$ و $b \notin pn[a,f]$ پس f یک 2RDF روی $G-ab$ است و این نیز مشابه قبل، تناقض است پس ویژگی شماره‌ی ۳ رده‌ی $\mathcal{F}$ هم به‌دست آمد. با توجه به آن‌چه به‌دست آوردیم، G گرافی است با ویژگی‌های فوق که $V(G)$ به دو بخش تقسیم می‌شود.
$\{u\colon f(u)\in\{\{۱\},\{۲\}\}\}$ یک بخش از $V(G)$ و $\{u\colon f(u)=\emptyset\}$ بخش دیگری از $V(G)$ را تشکیل می‌دهند که چون هر یال از G یک انتها در رأس‌های با مقدار $\emptyset$ و یک انتها در رأس‌های با مقدار غیر$\emptyset$ دارد پس بنا به تعریف گراف دوبخشی، G دوبخشی است. پس $G\in\mathcal{F}$.

□

۴.۳ اضافه‌کردن یال

لم ۱.۴.۳. [۱۱] *برای هر یال* $e\in E(\bar{G})$ *داریم*

$$\gamma_{r۲}(G)-۱ \le \gamma_{r۲}(G+e) \le \gamma_{r۲}(G).$$

برهان. فرض می‌کنیم $e\in E(\bar{G})$. کران بالا را به‌سادگی به‌دست می‌آوریم به‌این ترتیب که اگر h یک $\gamma_{r۲}$−تابع برای G باشد، آن‌گاه h یک 2RDF روی $G+e$ است لذا $\gamma_{r۲}(G+e)\le w(h)=\gamma_{r۲}(G)$.
برای اثبات کران پایین، فرض می‌کنیم $e=xy$ و f یک $\gamma_{r۲}$−تابع روی $G+e$ باشد. دو حالت داریم: اول، این‌که $f(x)=f(y)=\emptyset$ یا $\emptyset\notin\{f(x),f(y)\}$. در این‌صورت $x\notin pn[y,f]$ و $y\notin pn[x,f]$ پس f یک 2RDF روی G است، لذا $\gamma_{r۲}(G)\le w(f)=\gamma_{r۲}(G+e)$ و در این حالت کران پایین را به‌دست آوردیم.
حالت دوم، این‌که $f(y)\neq\emptyset$ و $f(x)=\emptyset$. تابع g را روی $V(G)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $v\in V(G)$،

$$g(v)=\begin{cases}\{۱\} & v=x\\ f(v) & v\neq x\end{cases}.$$

g یک 2RDF روی G است، پس

$$\gamma_{r۲}(G)\le w(G)=w(f)+۱=\gamma_{r۲}(G+e)+۱.$$

در نتیجه

$$\gamma_{r۲}(G)-۱\le\gamma_{r۲}(G+e).$$

□

از کران پایین لم فوق واضح است که اگر G یک گراف $\gamma_{r۲}$−یالی بحرانی باشد، آن‌گاه برای هر $e\in E(\bar{G})$ داریم

$$\gamma_{r۲}(G+e)=\gamma_{r۲}(G)-۱$$

و چون برای گراف کامل K_n داریم $E(\bar{K}_n)=\emptyset$ ($\bar{K}_n$ متمم گراف K_n است و گرافی تهی می‌باشد)، لذا بنا به انتفای مقدم، هر گراف کاملی $\gamma_{r۲}$−یالی بحرانی است و در ادامه نیز خواهیم دید که هیچ مسیری

γ_{r2}–یالی بحرانی نیست.
اینک، گزاره‌ی ساده‌ی زیر را می‌بینیم.

گزاره ۲.۴.۳. [۱۱] *فرض کنیم $n \geq 3$ و $G = K_n + \bar{K}_m$. در این‌صورت G گرافی γ_{r2}–یالی بحرانی است اگر و تنها اگر $m = 1$.*

برهان. حالت برگشت را در نظر می‌گیریم.

$$\gamma_{r2}(G) = \gamma_{r2}(K_n) + \gamma_{r2}(\bar{K}_1) = 2 + 1 = 3.$$

e را اتصال K_1 (توجه داریم که $K_1 = \bar{K}_1$) به رأس $v \in V(K_n)$ می‌گیریم به عبارت دیگر $e \in E(\bar{G})$ و تعریف می‌کنیم:
برای هر $x \in V(G+e)$،

$$g(x) = \begin{cases} \{1,2\} & x = v \\ \emptyset & x \neq v \end{cases}.$$

v همه‌ی رأس‌های گراف G برای $m = 1$ را به‌خوبی احاطه می‌کند لذا g یک 2RDF (γ_{r2}–تابع) روی $G+e$ است، پس $\gamma_{r2}(G+e) < \gamma_{r2}(G)$. برای اثبات حالت رفت نیز G را γ_{r2}–یالی بحرانی می‌گیریم و فرض (فرض خلف) می‌کنیم که $m \geq 2$، آن‌گاه حداقل دو رأس $x, y \in V(\bar{K}_m)$ وجود دارند. قرار می‌دهیم $e = xy$ و داریم

$$\gamma_{r2}(G) = \gamma_{r2}(K_n) + \gamma_{r2}(\bar{K}_m) = 2 + m. \qquad (۸.۳)$$

اگر قرار دهیم $H = \bar{K}_m + e$، چون $\bar{K}_m$ گرافی تهی است پس $\gamma_{r2}(H) = \gamma_{r2}(\bar{K}_m)$ پس

$$\gamma_{r2}(G+e) = \gamma_{r2}(K_n) + \gamma_{r2}(H) = 2 + m. \qquad (۹.۳)$$

از روابط (۸.۳) و (۹.۳) تناقض پیش می‌آید. بنابراین فرض خلف باطل است و $m = 1$ می‌باشد.
□

قضیه ۳.۴.۳. [۱۱] *هر گراف G، γ_{r2}–یالی بحرانی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر دو رأس غیرمجاورش مانند x و y یک γ_{r2}–تابع مانند f روی G وجود داشته باشد به‌طوری که یکی از شرایط زیر برای آن برقرار باشد:*

۱) $\{|f(x)|, |f(y)|\} = \{1,2\}$ *و اگر* $w \in \{x,y\}$ *باشد به‌طوری که* $|f(w)| = 1$*، آن‌گاه* $pn[w,f] = \{w\}$.

۲) $\{|f(x)|, |f(y)|\} = \{1\}$ *و رأس* $w \in \{x,y\}$ *وجود داشته باشد به‌طوری که* $pn[w,f] = \{w\}$ *و اگر* $\{w'\} = \{x,y\} \setminus \{w\}$ *آن‌گاه* $\bigcup_{v \in N(w)} f(v) = \{1,2\} \setminus f(w')$.

برهان. ابتدا حالت برگشت را که ساده است، اثبات می‌کنیم. G، x، y و f را به همان صورت موجود در فرض قضیه (حالت برگشت) در نظر می‌گیریم. اگر f در شرط شماره ۱ صدق کند، $e \in E(\bar{G})$ را یال از x به y میگیریم و تابع g را روی $G+e$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $v \in G+e$،

$$g(v) = \begin{cases} \emptyset & v = w \\ f(v) & v \neq w \end{cases}.$$

می‌دانیم $w \in \{x, y\}$ و $pn[w, f] = \{w\}$ پس w تأثیری در احاطه شدن سایر رأس‌ها ندارد و از طرف دیگر، در $G+e$، رأس w به‌خوبی به‌وسیله‌ی همسایه‌ی جدید احاطه می‌شود لذا g یک 2RDF روی $G+e$ است پس $\gamma_{r۲}(G+e) \leq w(g) = \gamma_{r۲}(G) - ۱$ یعنی G، $\gamma_{r۲}$−یالی بحرانی است. حال، فرض می‌کنیم f در شرط شماره ۲ صدق کند. مجددا $e \in V(\bar{G})$ را یال از x به y گرفته و تابع g را روی $V(G+e)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $v \in G+e$،
$$g(v) = \begin{cases} \emptyset & v = w \\ f(v) & v \neq w \end{cases}.$$

با توجه به شرط ۲، همسایه‌های w در G به‌همراه w' در گراف $G+e$، رأس w را احاطه می‌کنند و g یک 2RDF روی $G+e$ است پس $\gamma_{r۲}(G+e) \leq w(g) = w(f) - ۱ = \gamma_{r۲}(G) - ۱$.

برای اثبات حالت رفت قضیه، G را گرافی $\gamma_{r۲}$−یالی بحرانی و x و y را دو رأس نامجاور از آن فرض کرده (چون $G \ncong K_۱, K_۲$ لذا x و y وجود دارند) و $e \in E(\bar{G})$ را یال از x به y می‌گیریم. بنا به تعریف گراف $\gamma_{r۲}$−یالی بحرانی، $\gamma_{r۲}(G+e) = \gamma_{r۲}(G) - ۱$. f را نیز یک $\gamma_{r۲}$−تابع روی $G+e$ می‌گیریم. نخست، فرض می‌کنیم $\emptyset \notin \{f(x), f(y)\}$ یا $f(x) = f(y) = \emptyset$. آن‌گاه $x \notin pn[y, f]$ و $y \notin pn[x, f]$ پس f یک 2RDF روی G است (چون x وy تأثیری در احاطه شدن یکدیگر ندارد، پس با حذف یالe، f یک 2RDF روی گراف جدید است). پس $\gamma_{r۲}(G) \leq w(f) = \gamma_{r۲}(G) - ۱$ و این تناقض است. لذا فرض می‌کنیم $f(x) = \emptyset$ و $f(y) \neq \emptyset$. در این‌جا، ابتدا نشان می‌دهیم که
$$\Big| \bigcup_{v \in N_G(x)} f(v) \Big| \leq ۱. \tag{۱۰.۳}$$

به‌این ترتیب که در غیر این‌صورت (یعنی $\bigcup_{v \in N_G(x)} f(v) = \{۱, ۲\}$) تابع $f\big|_G$ یک 2RDF خواهد بود و آن‌گاه خواهیم داشت $\gamma_{r۲}(G) \leq \gamma_{r۲}(G+e)$ که تناقض است. حال، ۲ حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) $|f(y)| = ۲$. تابع g را روی $V(G)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
$$g(v) = \begin{cases} \{۱\} & v = x \\ f(v) & v \neq x \end{cases}.$$

g یک 2RDF است و چون $pn[x, f] = \{x\}$ پس از تعریف g داریم $pn[x, g] = \{x\}$. همچنین $w(g) = w(f) + ۱ = \gamma_{r۲}(G+e) + ۱$ پس از کران پایین لم (۱.۴.۳) به‌دست می‌آید $w(g) = \gamma_{r۲}(G)$ پس g یک $\gamma_{r۲}$−تابع روی G است. با توجه به تعریف g و مطالب گفته شده‌ی فوق، مشخص است که g همان $\gamma_{r۲}$−تابع مطلوب در شرط ۱ است.

۲) $|f(y)| = ۱$. بدون کاسته شدن از کلیت مطلب، فرض می‌کنیم $f(y) = \{۱\}$. آن‌گاه رأس $z \in N_G(x)$ وجود دارد به‌طوری که $۲ \in f(z)$. اما در این‌صورت، با توجه به رابطه‌ی (۱۰.۳) خواهیم داشت $f(z) = \{۲\}$. تابع g را روی $V(G)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $v \in V(G)$،
$$g(v) = \begin{cases} \{۱\} & v = x \\ f(v) & v \neq x \end{cases}.$$

g یک 2RDF روی G است و مانند حالت قبل خواهیم داشت: $pn[x, g] = \{x\}$ و g یک $\gamma_{r۲}$−تابع روی

G است. با تذکر این مطلب که از رابطه‌ی (۱۰.۳) و $f(z)=\{۲\}$ برای $z\in N_G(x)$ داریم
$$\bigcup_{v\in N(x)} f(v)=\{۱,۲\}\backslash f(y)$$
، از تعریف g و مطالب فوق نتیجه می‌گیریم که g، این بار $\gamma_{r۲}$-تابع مورد نظر در شرط ۲ است لذا قضیه اثبات شد.

□

لم ۴.۴.۳. [۱۱] *هر رأس پشتیبان در یک گراف $\gamma_{r۲}$-یالی بحرانی با دقیقا یک برگ مجاور است.*

برهان. G را یک گراف $\gamma_{r۲}$-یالی بحرانی می‌گیریم و از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم x یک رأس پشتیبان و مجاور به حداقل دو برگ y و z باشد. بنا به قضیه (۳.۴.۳)، $\gamma_{r۲}$-تابعی مانند f روی G وجود دارد که یکی از شرایط زیر برای آن برقرار است:
۱) $\{|f(y)|,|f(z)|\}=\{۱,۲\}$ و اگر برای $w\in\{y,z\}$ داشته باشیم $|f(w)|=۱$ آن‌گاه $pn[w,f]=\{w\}$.
۲) $\{|f(y)|,|f(z)|\}=\{۱\}$ و رأس $w\in\{y,z\}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $pn[w,f]=\{w\}$ و $\bigcup_{v\in N(w)} f(v)=\{۱,۲\}\backslash f(w')$ که در آن $\{w'\}=\{y,z\}\backslash\{w\}$.
در شرط ۱ داریم $|f(y)|+|f(z)|\geq ۳$ پس $|f(x)|+|f(y)|+|f(z)|\geq ۳$.
و در شرط ۲ داریم $|f(y)|+|f(z)|=۲$ و چون $\bigcup_{v\in N(w)} f(v)=f(x)=\{۱,۲\}\backslash(w')$ پس $|f(x)|+|f(y)|+|f(z)|=۳$.
بنابراین در هر دو شرط رابطه‌ی
$$|f(x)|+|f(y)|+|f(z)|\geq ۳ \tag{۱۱.۳}$$
برقرار است. اینک، تابع g را روی $V(G)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $v\in V(G)$،
$$g(v)=\begin{cases}\{۱,۲\} & v=x\\ \emptyset & v=y=z\\ f(v) & v\notin\{x,y,z\}\end{cases}.$$
g یک 2RDF است و از رابطه‌ی (۱۱.۳) داریم
$$w(g)=۲+\sum_{v\in V(G)\backslash\{x,y,z\}}|f(v)|\leq ۲+\gamma_{r۲}(G)-۳$$
در نتیجه
$$w(g)\leq\gamma_{r۲}(G)-۱$$
و این تناقض است.

□

گزاره ۵.۴.۳. [۱۱] *هیچ درخت $\gamma_{r۲}$-یالی بحرانی وجود ندارد.*

برهان. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم T یک درخت $\gamma_{r۲}$-یالی بحرانی باشد و y وz دو برگ از T باشند به‌طوری که $\mathrm{d}(y,z)=\mathrm{diam}(T)$ یعنی مسیر از y به z بلندترین مسیر در T باشد و این مسیر را P می‌نامیم. (توجه داریم که قطر یک درخت بلندترین مسیر درخت نیز می‌باشد.)

مسیر $P_۲$ یک درخت با قطر ۱ و مسیر $P_۳$ یک درخت با قطر ۲ است. برای مسیر $P_۲$ می‌گوییم: چون $E(\bar{P_۲}) = \emptyset$ پس مسیر $P_۲$، $\gamma_{r۲}-$یالی بحرانی نیست. برای مسیر $P_۳$ نیز داریم $|E(\bar{P_۳})| = ۱$ که اگر $E(\bar{P_۳}) = \{e\}$، داریم $P_۳ + e \simeq C_۳$ و بنا به گزاره‌ی (۲.۲.۲) در فصل۲ داریم
$\gamma_{r۲}(P_۳) = ۲ = ۱ + \lfloor \frac{۳}{۲} \rfloor = \gamma_{r۲}(P_۳ + e)$ لذا $P_۳$ نیز $\gamma_{r۲}-$یالی بحرانی نیست. مسیر $P_۴$ یک درخت با قطر ۳ است. اگر یال e را در گراف $\bar{P_۴}$، اتصال رأس ابتدا به رأس انتها در مسیر $P_۴$ بگیریم، آن‌گاه $\gamma_{r۲}(P_۴) = ۳ = \gamma_{r۲}(P_۴ + e)$ لذا $P_۴$ نیز $\gamma_{r۲}-$یالی بحرانی نیست. در نتیجه، برای قطر هر درخت $\gamma_{r۲}-$یالی بحرانی داریم $\mathrm{diam}(T) \geq ۴$.
فرض می‌کنیم $u \in N(y)$ و $v \in N(z)$ و $w \in N(u)\backslash\{y\}$. بنا به لم (۴.۴.۳)، رأس‌های u و v برگ‌های دیگری در همسایگی خود ندارند و اگر u رأس پشتیبان دیگری غیر از w در همسایگی خود داشته باشد، بلندترین مسیر بودن P نقض می‌شود بنابراین $N(u) = \{w, y\}$ یعنی $\deg_T(u) = ۲$ و به‌همین ترتیب نیز ثابت می‌کنیم $\deg_T(v) = ۲$. y و z دو رأس نامجاور درخت $\gamma_{r۲}-$یالی بحرانی T هستند، بنابراین از قضیه (۳.۴.۳) نتیجه می‌گیریم که یک $\gamma_{r۲}-$تابع مانند f تعریف شده روی T هست به‌طوری که یکی از شرایط زیر برای آن برقرار است:
۱) $\{|f(y)|, |f(z)|\} = \{۱, ۲\}$ و اگر $a \in \{y, z\}$باشد که $|f(a)| = ۱$ آن‌گاه $pn[a, f] = \{a\}$.
۲) $\{|f(y)|, |f(z)|\} = \{۱\}$ و $a \in \{y, z\}$ وجود دارد به‌طوری که $pn[a, f] = \{a\}$ و $\bigcup_{v \in N(a)} f(v) = \{۱, ۲\}\backslash f(w')$ که در آن $\{w'\} = \{y, z\}\backslash\{a\}$.
حال، حالات زیر را برای قطر T در نظر گرفته و در هر مورد حکم را ثابت می‌کنیم:
حالت۱) $\mathrm{diam}(T) = ۴$. با فرض این که شرط ۱ برقرار باشد، بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $f(y) = \{۱\}$. در این‌صورت، با توجه به شرط مذکور داریم $pn[y, f] = \{y\}$ پس $f(u) \neq \emptyset$. با این حال، اگر $f(v) \neq \emptyset$ آن‌گاه $pn[z, f] = \{z\}$ در نتیجه، می‌توانیم مقدار $f(z)$ را از $\{۱, ۲\}$ به $\{۱\}$ یا $\{۲\}$ تغییر داده و یک 2RDF جدید با وزن $\gamma_{r۲}(T) - ۱$ روی T تعریف کنیم که تناقض است. پس $f(v) = \emptyset$.
$f(y) = \{۱\}$ و $\deg_T(u) = ۲$ پس $|f(u)| = ۱$. با این حال، اگر $f(w) \neq \emptyset$ آن‌گاه مقدار $f(u)$ را به $\emptyset$ تغییر داده و قرار می‌دهیم $f(y) = \{۱, ۲\}\backslash f(w)$ که در آن‌صورت u احاطه می‌شود و یک 2RDF جدید روی T با وزن $\gamma_{r۲}(T) - ۱$ خواهیم داشت و این تناقض است. لذا $f(w) = \emptyset$. آن‌چه تاکنون به‌دست آورده‌ایم، به شرح زیر است:

$$f(y) = \{۱\}, \ \ |f(u)| = ۱, \ \ f(w) = \emptyset, \ \ f(v) = \emptyset, \ \ f(z) = \{۱, ۲\}.$$

تابع $f_۱$ را روی $V(T)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $x \in V(T)$،

$$f_۱(x) = \begin{cases} \{۲\} & x = y, z \\ \emptyset & x = u, v \\ \{۱\} & x = w \\ f(x) & x \notin \{y, u, w, v, z\} \end{cases}.$$

f_1 یک 2RDF روی $V(T)$ است و داریم

$$\begin{aligned} w(f_1) = 2+1+\sum_{x\in V(T)\setminus\{y,u,w,v,z\}} |f(x)| &= 3+0+\sum_{x\in V(T)\setminus\{y,w,v,z\}} |f(x)| \\ &< 3+1+\sum_{x\in V(T)\setminus\{y,w,v,z\}} |f(x)| \\ &= \gamma_{r2}(T) \end{aligned}$$

و این تناقض است.

اکنون فرض می‌کنیم f در شرط ۲ صدق کند و برای این منظور فرض می‌کنیم $f(y)=\{1\}$، $pn[y,f]=\{y\}$، $|f(u)|=1$ و $f(u)\neq f(z)$. نشان می‌دهیم $f(w)=\emptyset$. فرض (خلف) کنیم که $f(w)\neq\emptyset$. بدون از دست دادن کلیت مطلب، فرض می‌کنیم $2\in f(w)$. در این‌صورت با تغییر دادن مقدار $f(u)$ به $\emptyset$، u به‌وسیله‌ی رأس‌های y و w احاطه می‌شود و 2RDF جدیدی با وزن $\gamma_{r2}(T)-1$ روی T تعریف می‌شود و این تناقض است. لذا $f(w)=\emptyset$. چون $\deg_T(v)=2$ و $|f(z)|=1$ پس $f(v)\neq\emptyset$. بنابراین

$$|f(y)|+|f(u)|+|f(w)|+|f(v)|+|f(z)|\geq 4. \tag{۱۲.۳}$$

تابع g را روی $V(T)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $x\in V(T)$،

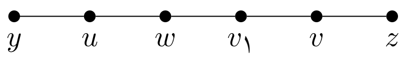
$$g(x)=\begin{cases} \{1\} & x=y,z \\ \emptyset & x=u,v \\ \{2\} & x=w \\ f(x) & x\notin\{y,u,w,v,z\} \end{cases}.$$

g یک 2RDF روی T است و با توجه به نامساوی (۱۲.۳) داریم

$$\begin{aligned} w(g)=3+\sum_{x\in V(T)\setminus\{y,u,w,v,z\}} |f(x)| &\leq 3+\gamma_{r2}(T)-4 \\ &= \gamma_{r2}(T)-1 \end{aligned}$$

و این تناقض است. پس یک درخت با قطر ۴ نمی‌تواند γ_{r2}-یالی بحرانی باشد.

حالت۲) $\mathrm{diam}(T)=5$. فرض می‌کنیم $v_1\in N(v)\setminus\{z\}$ (شکل (۱.۳)). فرض می‌کنیم f در شرط



شکل ۱.۳: مسیر P

۱ صدق کند. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض می‌کنیم $f(z)=\{1,2\}$ و $f(y)=\{1\}$. مشابه اثبات برای حالت ۱ (هنگامی که f در شرط ۱ صدق می‌کرد) در این‌جا نیز خواهیم داشت $f(w)=f(v)=\emptyset$ و $|f(u)|=1$. اگر $1\in f(v_1)$ آن‌گاه می‌توان مقدار $f(z)$ را به $\{2\}$ تغییر داد که درآن‌صورت v احاطه شده می‌ماند و تابع جدید، یک 2RDF با وزن $\gamma_{r2}(T)-1$ روی $V(T)$ خواهد بود که تناقض است. پس

$f(v_1) \not\ni ۱$ و به همین ترتیب ثابت می‌شود $۲ \notin f(v_1)$ در نتیجه $f(v_1) = \emptyset$.
نشان می‌دهیم u تنها رأس پشتیبان مجاور با w است. به این ترتیب که اگر $w_1 \neq u$ را رأس پشتیبان مجاور با w بگیریم، آن‌گاه بنا به لم (۴.۴.۳) دقیقا یک برگ مانند $w_۲$ در همسایگی w_1 وجود دارد. پس $|f(w_1)| + |f(w_۲)| \geq ۲$. تابع g_1 را روی $V(T)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $x \in V(T)$،

$$g_1(x) = \begin{cases} \{۲\} & x = w \\ \emptyset & x = u, w_1 \\ \{۱\} & x = w_۲ \\ f(x) & x \notin \{w, w_1, w_۲, u\} \end{cases}.$$

g_1 یک 2RDF است و $w(g_1) < w(f) = \gamma_{r۲}(T)$ و این تناقض است لذا u تنها رأس پشتیبان مجاور به w است. چون $|f(u)| = ۱$، بدون کاسته شدن از کلیت مطلب، فرض می‌کنیم $f(u) = \{۱\}$ و از آن‌جا که $f(w) = \emptyset$ (و $f(v_1) = \emptyset$) پس w یک برگ مجاور مانند $w_۳$ دارد به‌طوری که $f(w_۳) = \{۲\}$.
حال، v_1 را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $f(v_1) = \emptyset$. فرض می‌کنیم یک رأس $v_۲ \in N(v_1)$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f(v_۲) = \{۱, ۲\}$. اگر $v_۲$ یک برگ باشد، آن‌گاه مقدار $f(v_۲)$ را به $\{۱\}$ و مقدار $f(v_1)$ را به $\{۲\}$ و $f(z)$ را به $\{۱\}$ تغییر می‌دهیم و تابع حاصل یک 2RDF روی T با وزن $\gamma_{r۲}(T) - ۱$ خواهد بود که تناقض است. لذا فرض می‌کنیم $v_۲$ یک رأس پشتیبان باشد. بنا به لم (۴.۴.۳)، $v_۳$ را برگ یکتای مجاور به $v_۲$ می‌گیریم. چون $f(v) = f(w) = f(v_1) = \emptyset$ پس $f(v_۲) = \{۱, ۲\}$ در نتیجه $f(v_۳) = \emptyset$.
در این‌صورت با تغییر $f(v_۲)$ به $\emptyset$، $f(v_۳)$ به $\{۱\}$، $f(v_1)$ به $\{۲\}$ و $f(z)$ به $\{۱\}$ یک 2RDF جدید روی T با وزن $w(f) - ۱ = \gamma_{r۲}(T) - ۱$ تعریف می‌شود که تناقض است. بنابراین، برای هر $x \in N(v_1)$ داریم $|f(x)| \leq ۱$. اما مجددا بنا به این که $f(w) = f(v_1) = f(v) = \emptyset$، رأس$v_1$ به‌ناچار دو همسایه‌ی $v_۴$ و $v_۵$ دارد که $f(v_۴) = \{۱\}$ و $f(v_۵) = \{۲\}$. با این توصیف، می‌توانیم 2RDF زیر را روی T تعریف کرده و به تناقض برسیم:
$f(v_1)$ را به $\{۱, ۲\}$، $f(v_۴)$ و $f(v_۵)$ را به $\emptyset$ و $f(z)$ را به $\{۱\}$ تغییر می‌دهیم. این 2RDF دارای وزن $w(f) - ۱ = \gamma_{r۲}(T) - ۱$ می‌باشد.

پس f در شرط ۱ صدق نمی‌کند. حال، سراغ شرط ۲ می‌رویم و فرض می‌کنیم f در شرط ۲ صادق باشد. برای این منظور، فرض می‌کنیم $f(y) = \{۱\}$ و $pn[y, f] = \{y\}$ و چون $\bigcup_{x \in N(y)} f(x) = f(u)$، لذا فرض می‌کنیم $f(u) \neq f(z)$. حال، مشابه قبل به‌دست می‌آید $f(w) = \emptyset$. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $f(z) = \{۲\}$ و در نتیجه $f(u) = \{۱\}$. نشان می‌دهیم $\deg_T(w) \leq ۳$. فرض (خلف) کنیم که $\deg_T(w) \geq ۴$. آن‌گاه $f(w)$ را به $\{۱, ۲\}$ و برای هر $x \in N(w) \backslash \{v_1\}$، $f(x)$ را به $\emptyset$ و برای هر برگ x به فاصله‌ی ۲ از w و $x \notin N(v_1)$، $f(x)$ را به $\{۱\}$ تغییر می‌دهیم. تابع جدید یک 2RDF روی T با وزن کمتر از $w(f) = \gamma_{r۲}(T)$ است که تناقض است. پس

$$\deg_T(w) \leq ۳. \qquad (۱۳.۳)$$

اینک، نشان می‌دهیم $\deg_T(v_1) \leq ۳$. فرض (خلف) می‌کنیم $\deg_T(v_1) \geq ۴$. همسایگان v_1 غیر از vو w، یا برگ هستند یا رأس پشتیبان (چون در غیر این‌صورت، مسیری بلندتر از مسیرP خواهیم داشت). چون از لم (۴.۴.۳) داریم که تعداد برگ‌های مجاور به v_1، حداکثر یکی است پس حداقل ۱ رأس پشتیبان $a_1 \neq v$

در مجاورت $v_۱$ هست. برگ مجاور به $a_۱$ را $a_۲$ می‌گیریم. رأس‌های $a_۱$ و v در درخت $\gamma_{r۲}$−یالی بحرانی T نامجاورند لذا از قضیه (۳.۴.۳) داریم: $\gamma_{r۲}$−تابعی مانند h تعریف شده بر T هست که در یکی از شرایط زیر صدق می‌کند:

i) $\{|h(a_۱)|,|h(v)|\}=\{۱,۲\}$ و اگر برای $a\in\{a_۱,v\}$ داشته باشیم $|f(a)|=۱$ آن‌گاه $pn[a,f]=\{a\}$.

ii) $\{|h(a_۱)|,|h(v)|\}=\{۱\}$ و رأس $a\in\{a_۱,v\}$وجود دارد به‌طوری که $pn[a,h]=\{a\}$ و

$\bigcup_{b\in N(a)}h(b)=\{۱,۲\}\backslash h(c)$ هرگاه $\{c\}=\{a_۱,v\}\backslash\{a\}$. نخست، فرض کنیم h در شرط i صدق کند. در آن‌صورت، چون $|h(a_۱)|=۱$ یا $|h(v)|=۱$ پس برای 2RDF بودن h باید به‌ترتیب $|h(a_۲)|=۱$ یا $|h(z)|=۱$. پس داریم

$$|h(v)|+|h(z)|+|h(a_۱)|+|h(a_۲)|\geq ۴. \qquad (۱۴.۳)$$

حال نشان می‌دهیم h در شرط i صدق نمی‌کند یعنی فرض قبل باطل است. برای این منظور $h(v_۱)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $h(v_۱)\neq\emptyset$ آن‌گاه بدون کاسته شدن از کلیت مطلب، قرض می‌کنیم $۱\in h(v_۱)$. با این توصیف، $h(a_۱)$ و $h(v)$ را به $\emptyset$ تغییر و $h(a_۲)$ و $h(z)$ را به $\{۲\}$ تغییر می‌دهیم. تابع جدید یک 2RDF روی T است که بنا به رابطه‌ی (۱۴.۳) داری وزن کمتر از $w(h)=\gamma_{r۲}(T)$ است و این تناقض است. پس $h(v_۱)=\emptyset$. اما در این‌صورت نیز می‌توانیم $h(v)$ و $h(a_۱)$ را به $\emptyset$ و $h(a_۲)$ و $h(z)$ را به $\{۲\}$ و $h(v_۱)$ را به $\{۱\}$ تغییر داده و مجددا بنا به رابطه‌ی (۱۴.۳) یک 2RDF با وزن کمتر از $w(h)=\gamma_{r۲}(T)$ داشت که تناقض است. پس با صادق بودن h در شرط i، مقدار $h(v_۱)$ نه می‌تواند $\emptyset$ و نه می‌تواند غیر$\emptyset$ باشد! واین یعنی h در شرط i صدق نمی‌کند.

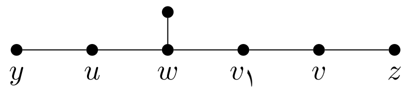
حال فرض کنیم h در شرط ii صدق کند. در این‌صورت، چون $|h(a_۱)|=۱$ و $|h(v)|=۱$ پس برای 2RDF بودن h باید $|h(a_۲)|=|h(z)|=۱$. بنابراین

$$|h(a_۱)|+|h(a_۲)|+|h(v)|+|h(z)|\geq ۴ \qquad (۱۵.۳)$$

و مشابه اثبات برای شرط i، در این‌جا نیز می‌توانیم با رابطه‌ی $h(v_۱)\neq\emptyset$ به تناقض برسیم لذا $h(v_۱)=\emptyset$. اما در آن‌صورت نیز با تغییر $h(v_۱)$ به $\{۲\}$ و $h(a_۱)$ و $h(v)$ به $\emptyset$ و $h(a_۲)$ و$h(z)$ به $\{۱\}$ یک 2RDF جدید روی T به‌دست می‌آوریم که بنا به رابطه‌ی (۱۵.۳) دارای وزن کمتر از $w(h)=\gamma_{r۲}(T)$ است و این تناقض است. پس در این‌جا نیز مقدار $h(v_۱)$ نه برابر با $\emptyset$ و نه برابر با غیر$\emptyset$ است! و این یعنی h در شرط ii نیز صادق نمی‌باشد. به این نتیجه رسیدیم که h تعریف شده بر درخت T در هیچ‌کدام از شرایط i و ii صدق نمی‌کند لذا بنا به قضیه (۳.۴.۳) چنین درختی $\gamma_{r۲}$−یالی بحرانی نخواهد بود پس فرض (خلف) مبنی بر $\deg_T(v_۱)\geq ۴$ باطل است.

تاکنون ثابت کردیم $\deg_T(w)\leq ۳$ و $\deg_T(v_۱)\leq ۳$. در ادامه ثابت می‌کنیم که$\deg_T(w)=۲$. برای این منظور، فرض می‌کنیم $\deg_T(w)=۳$. یک همسایه‌ی غیر از u وv برای w،یا برگ است یا رأس پشتیبان (چون در غیر این‌صورت، مسیری با طول بیشتر از طول مسیرP در T وجود خواهد داشت). اگر w یک رأس پشتیبان نباشد (برگ باشد) پس رأس پشتیبان $a_۱\neq u$ وجود دارد که در مجاورت w است. $a_۲$ را برگ مجاور به $a_۱$ می‌گیریم. اگر $f(w)$ را به $\{۱\}$ و $f(a_۱)$ و $f(u)$ را به $\emptyset$ و $f(y)$ و $f(a_۲)$ را به $\{۲\}$ تغییر دهیم، یک 2RDF روی T با وزن $\gamma_{r۲}(T)-۱=w(f)-۱$ به‌دست می‌آوریم که تناقض است. پس w یک رأس پشتیبان است و بنا به لم(۴.۴.۳) دقیقا یک برگ در مجاورت آن قرار دارد. با این حال سراغ $v_۱$ می‌رویم.

اگر $\deg(v_1) = 2$ آن‌گاه $\gamma_{r2}(T) = 5$ (شکل (۲.۳)) هم‌چنین داریم $\gamma_{r2}(T+uv) = 5$ و این با $\gamma_{r2}-$یالی بحرانی بودن T تناقض دارد. پس $\deg_T(v_1) = 3$.



شکل ۲.۳: درخت T

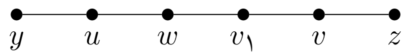
مشابه مطالبی که برای w گفتیم، در این‌جا نیز همسایه‌ی سوم v_1 (غیر از w و v)، یا یک رأس پشتیبان است یا یک برگ. لذا اگر v_1 رأس پشتیبان نباشد، آن‌گاه یک رأس پشتیبان $a_1 \neq v$ در مجاورت v_1 قرار دارد و بنا به لم (۴.۴.۳)، $\deg_T(a_1) = 2$ و داریم $\gamma_{r2}(T) = \gamma_{r2}(T + a_1 v) = 6$ که به $\gamma_{r2}-$یالی بحرانی بودن T در تناقض است پس v_1 یک رأس پشتیبان است.

اما در این‌صورت نیز خواهیم داشت $\gamma_{r2}(T) = \gamma_{r2}(T+uv) = 6$ که تناقض است. در نتیجه به وجود همسایه‌ی سوم برای w، همواره T درختی غیر $\gamma_{r2}-$یالی بحرانی است لذا $\deg_T(w) = 2$.

اینک با این توصیف از T، مجددا سراغ v_1 می‌رویم. اگر $\deg_T(v_1) = 2$ آن‌گاه $T = P_6$ (شکل(۳.۳)) و از گزاره‌ی (۱.۲.۲)فصل ۲ داریم

$$\gamma_{r2}(T) = \lfloor \frac{6}{2} \rfloor + 1 = \gamma_{r2}(T+uv)$$

و این هم تناقض با $\gamma_{r2}-$یالی بحرانی بودن T است پس $\deg_T(v_1) = 3$. بنابراین v_1 یا یک رأس پشتیبان است و یا یک همسایه‌ی پشتیبان غیر از v دارد. در زیر نشان می‌دهیم که هر دو وضعیت به تناقض منجر می‌شوند.

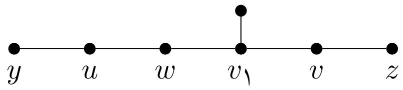


شکل ۳.۳: درخت T

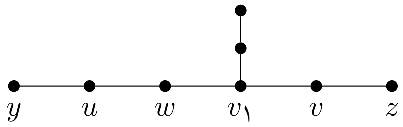
اگر v_1 یک رأس پشتیبان باشد(شکل(۴.۳)) آن‌گاه $\gamma_{r2}(T) = \gamma_{r2}(T + uv) = 5$ و این تناقض است و اگر v_1رأس پشتیبانی نباشد (یک همسایه‌ی پشتیبان داشته باشد)(شکل (۵.۳))، آن‌گاه $\gamma_{r2}(T) = 5 = \gamma_{r2}(T+yz)$ و این نیز تناقض است. در نتیجه، چنین درختی وجود ندارد یعنی $\mathrm{diam}(T) \neq 5$.

حالت۳) $\mathrm{diam}(T) \geq 6$. در این مورد نیز فرض می‌کنیم $v_1 \in N(v)\setminus\{z\}$. چون $\mathrm{diam}(T) \geq 6$ پس طول مسیر از w به v_1، حداقل برابر با ۲است (w وv_1 نامجاورند) لذا بنا به قضیه (۳.۴.۳)، یک $\gamma_{r2}-$تابع مانند g روی T وجود دارد به‌طوری که در یکی از شرایط زیر صدق می‌کند:

i) $\{|g(w)|, |g(v_1)|\} = \{1, 2\}$ و اگر برای $a \in \{w, v_1\}$ داشته باشیم $|g(a)| = 1$، آن‌گاه $pn[a, g] = \{a\}$.



شکل ۴.۳: درخت T



شکل ۵.۳: درخت T

ii) $\{|g(w)|, |g(v_۱)|\} = \{۱\}$ و رأس $a \in \{w, v_۱\}$ وجود دارد به‌طوری که $pn[a, g] = \{a\}$ و $\bigcup_{v\in N(a)} g(v) = \{۱, ۲\}\setminus g(d)$ هرگاه $\{d\} = \{w, v_۱\}\setminus\{a\}$. بدون از ذست دادن کلیت، در هر دو شرط می‌توان فرض کرد $g(v_۱) = \{۱\}$. هم‌چنین برای برقراری رابطه‌ی $pn[v_۱, g] = \{v_۱\}$، باید داشته باشیم $g(v) \neq \emptyset$ و $g(z) \neq \emptyset$. $g(v)$ را به $\emptyset$ و $g(z)$ را به $\{۲\}$ تغییر می‌دهیم. تابع جدید یک 2RDF روی $V(T)$ با وزن کمتر از $w(g) = \gamma_{r۲}(T)$ است و این تناقض است. بنابراین، فرض اولیه مبنی بر $\mathrm{diam}(T) \geq ۶$ نیز نادرست است.

با توجه به حالات ۱، ۲ و۳ می‌گوییم درخت $\gamma_{r۲}$−یالی بحرانی وجود ندارد.

□

فصل ۴

کران‌هایی روی عدد ۲–احاطه‌گری رنگین‌کمانی و ارتباط آن با مفهوم احاطه‌گری رومی

۱.۴ مقدمه

تعریف ۱.۱.۴. تابع احاطه‌گری رومی[۱]:
تابع $f : V(G) \rightarrow \{۰, ۱, ۲\}$ را یک تابع احاطه‌گری رومی روی گراف G گوییم هرگاه به‌ازای هر رأس $u \in V(G)$ که $f(u) = ۰$، حداقل یک رأس $v \in N_G(u)$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f(v) = ۲$.

وزن[۲] یک تابع احاطه‌گری رومی f برابر است با $\sum_{u \in V(G)} f(u)$ که با نماد $w'(f)$ نمایش داده می‌شود.
عدد احاطه‌گری رومی گراف[۳] G را با نماد $\gamma_R(G)$ نمایش داده و $\gamma_R(G) = Min_f w'(f)$ یعنی کمترین وزن یک تابع اجاطه‌گری رومی روی گراف G از میان همه‌ی توابع احاطه‌گری رومی روی گراف G.

تعریف ۲.۱.۴. تابع k–احاطه‌گری رومی[۴]:
اگر در تعریف تابع احاطه‌گری رومی، هر رأس u که $f(u) = ۰$ مجاور با حداقل k رأس $v \in V(G)$ که $f(v) = ۲$ باشد آن‌گاه f یک تابع k–احاطه‌گری رومی روی گراف G خواهد بود.

همچنین مشابه قبل، $\gamma_{RK}(g) = Min_f w'(f)$ و $w'(f) = \sum_{u \in V(G)} f(u)$ به‌ترتیب، وزن f و عدد k–احاطه‌گری رومی گراف G می‌باشد که در تعریف $\gamma_{RK}(G)$، مینیمم روی تمام وزن‌های توابع k–احاطه‌گری رومی f روی گراف G گرفته شده است.
تابع احاطه‌گری رومی، همان تابع ۱–احاطه‌گری رومی است لذا برای هر گراف G، $\gamma_R(G) = \gamma_{R۱}(G)$.

تعریف ۳.۱.۴. ستاره دوگانه $DS_{r,s}$ (دوبل–ستاره)[۵]:
یک درخت با قطر ۳، که در آن دقیقا دو رأس پشتیبان با درجه‌های به‌ترتیب $s + ۱$ و $r + ۱$ (هماهنگ با

[۱] Roman dominating function
[۲] weight
[۳] Roman domination number
[۴] k-Roman dominating function
[۵] double-star

نماد $DS_{r,s}$) وجود دارد را ستاره دوگانه $DS_{r,s}$ می‌گوییم.

تعریف ۴.۱.۴. زیرتقسیم کردن یک یال[۶]:
یک زیرتقسیم از یال uv، با حذف یال uv و اضافه‌کردن یک رأس جدید w و دو یال جدید uw و wv به‌دست می‌آید.

تعریف ۵.۱.۴. عنکبوت (عنکبوت زخمی)[۷] :
گرافی است که از زیرتقسیم کردن بعضی (حداکثر $t-1$ تا) یال‌های ستاره‌ی $K_{1,t}$ به‌دست می‌آید. (توجه می‌کنیم که اگر همه‌ی t یال ستاره‌ی $K_{1,t}$ زیرتقسیم شود، آن‌گاه گراف حاصل یک عنکبوت سالم است.)

تعریف ۶.۱.۴. مرکز عنکبوت[۸]:
مرکز یکتای ستاره‌ی $K_{1,t}$ را مرکز عنکبوت به‌دست آمده از این ستاره نیز می‌گویند. توجه می‌کنیم که تنها یک رأس از عنکبوت P_4 (به‌دست آمده از ستاره‌ی $P_3 \simeq K_{1,2}$) می‌تواند مرکز آن باشد.

در این فصل، گاهی اوقات یک تابع ۲−احاطه‌گری رنگین‌کمانی را با نماد (V_0, V_1^1, V_1^2, V_2) نمایش می‌دهیم که در آن $V_0 = \{v \in V(G) : f(v) = \emptyset\}$، $V_1^1 = \{v \in V(G) : f(v) = \{1\}\}$، $V_1^2 = \{v \in V(G) : f(v) = \{2\}\}$ و $V_2 = \{v \in V(G) : f(v) = \{1,2\}\}$. از آن‌جا که همواره یک تناظر یک‌به‌یک بین هر 2RDF مانند f روی گراف G و افراز منظم (V_0, V_1^1, V_1^2, V_2) از $V(G)$ وجود دارد، به‌کاربردن چنین نمادی برای سادگی، کار به‌جایی است.
بحث تعیین کران را به دو بخش تقسیم می‌کنیم، یکی برای کران‌های بالا و دیگری برای کران‌های پایین.

۲.۴ تعیین کران‌های بالا برای عدد ۲−احاطه‌گری رنگین‌کمانی

گزاره ۱.۲.۴. [۱۶] *فرض می‌کنیم G یک عنکبوت از مرتبه‌ی $|V(G)| = n \geq 3$ باشد. در آن‌صورت $\gamma_{r2}(G) \leq \frac{3n}{4}$. به‌علاوه، تساوی در این رابطه، تنها برای یک مسیر از مرتبه‌ی ۴ (P_4) برقرار است.*

برهان. فرض می‌کنیم u مرکز گراف G باشد و u دارای x همسایه‌ی پشتیبان (رأس پشتیبان) و y همسایه‌ی غیرپشتیبان باشد. در این‌صورت، از تعریف عنکبوت داریم $n = 2x + y + 1$. با توجه به مقادیر x و y توابع $f : V(G) \longrightarrow P(\{1,2\})$ را با ضابطه‌های زیر داریم:

اگر $x \geq 3$ یا $y \geq 2$، آن‌گاه
$$f(v) = \begin{cases} \{1,2\} & v = u \\ \{1\} \text{ یا } \{2\} & \mathrm{d}(u,v) = 2 \\ \emptyset & \mathrm{o.w} \end{cases}.$$
هر رأس پشتیبان (دارای مقدار $\emptyset$) به‌وسیله‌ی u احاطه می‌شود، لذا f یک 2RDF است و داریم
$$\gamma_{r2}(G) \leq w(f) = 2 + x \leq \frac{3}{4}(2x + y + 1) = \frac{3n}{4}.$$

---
[۶] subdivision of a edge
[۷] spider(wounded spider)
[۸] center of spider

اگر $x = ۲$ و $y \geq ۱$، آن‌گاه

$$f(v) = \begin{cases} \{۱\} & v = u \\ \{۲\} & \text{برگ باشد} v \\ \emptyset & \text{o.w} \end{cases} .$$

هر رأس پشتیبان (دارای مقدار $\emptyset$) به‌وسیله‌ی u و برگ مجاور به خود احاطه می‌شود، پس f یک 2RDF است و داریم

$$\gamma_{r۲}(G) \leq w(f) = ۱ + x + y = ۳ + y \leq \frac{۳}{۴}(۵ + y) = \frac{۳n}{۴}.$$

اگر $x = y = ۱$، آن‌گاه $G \simeq P_۴$ و بنا به گزاره (۱.۲.۲) در فصل ۲،

$$\gamma_{r۲}(G) = \lfloor \frac{۴}{۲} \rfloor + ۱ = ۳\frac{n}{۴}.$$

□

قضیه ۲.۲.۴. [۱۶] *اگر T یک درخت از مرتبه‌ی $n \geq ۳$ باشد، آن‌گاه* $\gamma_{r۲}(T) \leq ۳\frac{n}{۴}$.

برهان. از استقراء روی n استفاده می‌کنیم. برای گام استقراء، درختان با تعداد رأس کم یا قطر کوچک را در نظر می‌گیریم و حکم را برای آن‌ها ثابت می‌کنیم. اگر $\mathrm{diam}(T) = ۲$، آن‌گاه T دارای یک رأس احاطه‌گر است($\gamma(T) = ۱$) . اگر به رأس مذکور، مقدار $\{۱,۲\}$ اختصاص دهیم آن‌گاه، سایر رأس‌ها احاطه می‌شوند لذا $\gamma_{r۲}(T) \leq ۲$ و چون در این حالت $n \geq ۳$ پس $\gamma_{r۲}(T) \leq ۳\frac{n}{۴}$.

اگر $\mathrm{diam}(T) = ۳$، آن‌گاه T دارای یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۲ رأسی است. با اختصاص مقدار $\{۱,۲\}$ به هر کدام از رأس‌های مجموعه‌ی مذکور، سایر رأس‌ها احاطه گردیده لذا $\gamma_{r۲}(T) \leq ۴$. اگر در این حالت، $n \geq ۶$ باشد آن‌گاه حکم قضیه برقرار است. درختان با ۴ رأس و ۵ رأس در این حالت، عنکبوت هستند لذا از گزاره‌ی (۱.۲.۴) حکم برای آن‌ها برقرار است. (توجه داریم که از شرط $\mathrm{diam}(T) = ۳$ داریم $n \geq ۴$.)

همچنین، اگر $T \simeq P_۴$ آن‌گاه بنا به گزاره (۱.۲.۲) در فصل۲، $\gamma_{r۲}(T) = ۳\frac{n}{۴}$.

حال، بنا به فرض استقراء برای هر زیر درخت T' با n' رأس که $۳ \leq n' < n$، یک 2RDF مانند f' روی T' با وزن حداکثر $۳\frac{n'}{۴}$ وجود دارد.

با یافتن زیردرخت T' و در نظر گرفتن f' روی آن، f' را به یک 2RDF مانند f روی T توسعه می‌دهیم.

برای دستیابی به این هدف، مسیر P را در T طوری انتخاب می‌کنیم که نخست، P بلندترین مسیر در T باشد. سپس، رأس پشتیبان v در P دارای ماکسیمم درجه باشد (یعنی از میان تمام رأس‌های پشتیبانی چون x که رأس پایانی یک مسیر با طول ماکسیمم در T هستند، داشته باشیم $\deg_T(x) \leq \deg_T(v)$) و u را یک همسایه‌ی غیربرگ v در نظر می‌گیریم. آن‌گاه حالات زیر را خواهیم داشت:

حالت۱) $\deg_T(v) > ۲$. زیردرخت T' را با حذف v و برگ‌های مجاور آن به‌دست می‌آوریم. سپس تابع f را روی $V(T)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $x \in V(T)$،

$$f(x) = \begin{cases} \{۱,۲\} & x = v \\ \emptyset & \text{برگ مجاور به } v \text{ باشد } x \\ f'(x) & \text{o.w} \end{cases} .$$

رأس v (با مقدار $\{۱,۲\}$) هر برگ مجاور به v را احاطه می‌کند، لذا f یک 2RDF روی T است و اگر مسیر P' باقی‌مانده‌ی مسیر P در T' باشد (یعنی تحدید P به زیردرخت T')، آن‌گاه با توجه به تعریف P'

داریم $|V(P')| = |V(P)| - ۲$. از $\mathrm{diam}(T) \geq ۴$ می‌دانیم $|V(P)| \geq ۵$ در نتیجه $|V(P')| \geq ۳$ لذا $|V(T')| = n' \geq ۳$، بنابراین می‌توان فرض استقراء را برای T' به‌کار برد. از مطالب گفته شده داریم

$$\gamma_{r۲}(T) \leq w(f) = w(f') + ۲ \leq ۳\frac{n'}{۴} + ۲. \tag{۱.۴}$$

چون $\deg_T(v) > ۲$ پس v حداقل ۲ برگ مجاور دارد (اگر vیک همسایه‌ی غیربرگ دیگر غیر از u داشته باشد، آن‌گاه P بلندترین مسیر در T نخواهد بود). لذا $n' \leq n - ۳$ و از رابطه‌ی (۱.۴) داریم

$$\gamma_{r۲}(T) \leq ۳\frac{n'}{۴} + ۲ \leq ۳\frac{n-۳}{۴} + ۲ < ۳\frac{n}{۴}.$$

حالت۲) $\deg_T(v) = \deg_T(u) = ۲$. در این مورد، رأس v تنها یک برگ مجاور مانند l دارد. زیردرخت T' را با حذف رأس‌های u، v و l از T به‌دست می‌آوریم. همان‌طور که در حالت۱ ثابت کردیم، در این‌جا نیز داریم $|P| \geq ۵$. بنابراین $|P'| \geq ۵ - ۳ = ۲$. اگر $n' = ۲$ (یعنی $T' = P'$) آن‌گاه درخت T یک مسیر از مرتبه‌ی ۵ ($P_۵$) است که می‌توان یک 2RDF با وزن ۳ روی آن تعریف کرد و $۳\frac{۵}{۴} > ۳$. اگر $n' \geq ۳$، آن‌گاه از فرض استقراء یک 2RDF مانند f' روی T' وجود دارد که $w(f') \leq ۳\frac{n'}{۴}$. با این حال، تابع f را روی $V(T)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $x \in V(T)$،

$$f(x) = \begin{cases} \{۱, ۲\} & x = v \\ \emptyset & x \in \{u, l\} \\ f'(x) & \text{o.w} \end{cases}.$$

در این‌جا نیز v رأس‌های u و l را احاطه می‌کند پس f یک 2RDF روی T است و داریم

$$w(f) \leq w(f') + ۲ \leq ۳\frac{n'}{۴} + ۲ = ۳\frac{n-۳}{۴} + ۲ < ۳\frac{n}{۴}.$$

حالت۳) $\deg_T(v) = ۲$ و $\deg_T(u) > ۲$. بنا به انتخاب مسیر P، هر همسایه‌ی پشتیبان رأس u دارای درجه‌ی ۲ خواهد بود. (در انتخاب P، v رأس پشتیبان با بیشترین درجه اختیار شده بود)

برای پرداختن به این حالت، ۲ زیرحالت را در نظر می‌گیریم:

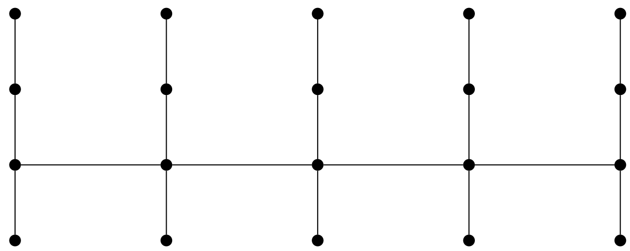
۱) هر همسایه‌ی u، یا یک رأس پشتیبان باشد یا یک برگ. در این‌صورت T یک عنکبوت است (اگر هیچ برگی در مجاورت u نباشد آن‌گاه T یک عنکبوت سالم است) . لذا از گزاره‌ی (۱.۲.۴) و این که $T \neq P_۴$ (اگر هیچ رأس پشتیبانی در مجاورت u نباشد آن‌گاه $\mathrm{diam}(T) \leq ۳$) داریم $\gamma_{r۲}(T) \leq ۳\frac{n}{۴}$.

۲) u همسایه‌ای مانند t داشته باشد که نه یک رأس پشتیبان است و نه یک برگ. در این‌صورت، گراف $T - tu$ شامل دو مولفه‌ی همبندی T' و T'' است به‌طوری که T'' یک عنکبوت شامل رأس u است. از انتخاب رأس t داریم $|V(T')| \geq ۳$. لذا بنا به فرض استقراء، $\gamma_{r۲}(T') \leq ۳\frac{|V(T')|}{۴}$. از گزاره‌ی (۱.۲.۴) برای T'' نیز داریم $\gamma_{r۲}(T'') \leq ۳\frac{|V(T'')|}{۴}$. از این رو

$$\gamma_{r۲}(T) \leq \gamma_{r۲}(T') + \gamma_{r۲}(T'') \leq ۳\frac{n}{۴}.$$

□

فرض می‌کنیم L_k شامل اجتماع k رونوشت از مسیر $P_۴$، به‌علاوه یک مسیر از مرتبه‌ی k شامل رأس‌های مرکزی این k تا مسیر باشد. آن‌گونه که در شکل (۱.۴) دیده می‌شود. (توجه داریم که رأس مرکزی (مرکز) یک مسیر $P_۴$ منحصر به فرد است)



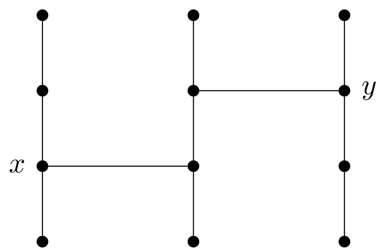
شکل ۱.۴: درخت L_5

حال، فرض می‌کنیم G یک گراف دارای زیرگراف القایی P_4 باشد به‌طوری که فقط مرکز P_4 بتواند با رأس‌های زیرگراف $G-P_4$ مجاور باشد. در این‌صورت هر 2RDF روی G باید دارای وزن حداقل ۳ روی P_4 باشد. چون در درخت L_k، تعداد k مسیر مجزای P_4 با ویژگی یادشده داریم، پس $\gamma_{r2}(L_k) \geq 3k = 3\frac{n}{4}$. چنین رونوشت‌هایی از مسیرهای P_4 را می‌توان فراهم کرد و این حقیقت به ما اجازه‌ی طبقه‌بندی درخت‌هایی را می‌دهد که به کران بالای خود در قضیه (۲.۲.۴) می‌رسند.

قضیه ۳.۲.۴. [۱۶] *فرض کنیم T یک درخت از مرتبه‌ی $n \geq 3$ باشد. در این‌صورت خواهیم داشت: $\gamma_{r2}(T) = 3\frac{n}{4}$ اگر و تنها اگر $V(T)$ قابل افراز به مجموعه‌های مسیر P_4 القایی باشد به‌طوری که زیرگراف القا شده به‌وسیله‌ی رأس‌های مرکزی این مسیرها، همبند باشد.*

برهان. ابتدا حالت برگشت قضیه را ثابت می‌کنیم. می‌دانیم اگر زیرگراف القایی H از گراف G، یکریخت با مسیر P_4 باشد و رأس‌های غیرمرکزی H، همسایه‌ای در $G\backslash H$ نداشته باشند، آن‌گاه هر 2RDF روی $V(G)$ باید دارای وزن حداقل ۳ روی $V(H)$ باشد. بنابراین، اگر f یک 2RDF روی درخت T با ساختار توصیف شده در صورت قضیه باشد آن‌گاه $\sum_{v\in V(P_4)} |f(v)| \geq 3$ که مسیر P_4 عضو افراز $V(T)$ است، لذا $\gamma_{r2}(T) \geq 3\frac{n}{4}$. از قضیه (۲.۲.۴) می‌دانیم $\gamma_{r2}(T) \leq 3\frac{n}{4}$. از این‌رو $\gamma_{r2}(T) = 3\frac{n}{4}$.
برای اثبات حالت رفت قضیه از استقراء روی n استفاده می‌کنیم و به دلیل مشابهت با اثبات قضیه (۲.۲.۴)، در بسیاری از موارد به آن اثبات ارجاع می‌دهیم. برای پایه‌ی استقراء، به پایه‌ی استقراء در آن اثبات توجه می‌کنیم و می‌بینیم که اگر $T \neq P_4$، آن‌گاه یک 2RDF با وزن کمتر از $3\frac{n}{4}$ روی T قابل تعریف است که با فرض (فرض فعلی یعنی $\gamma_{r2}(T) = 3\frac{n}{4}$) در تناقض است. البته برای P_4 چنین نیست. بنابراین حکم برای پایه‌ی استقراء برقرار است.
با توجه به اثبات مذکور، اکنون در مورد درختان با قطر حداقل ۴ بحث می‌کنیم و برای فرض استقراء، هر زیردرخت T' با n' رأس که $n' \geq 3$ (از درخت T با n رأس) و $\gamma_{r2}(T') = 3\frac{n'}{4}$ را دارای ساختار توصیف شده در صورت قضیه می‌گیریم. مسیر P به‌همراه رأس v گفته شده در آن اثبات را نیز در نظر می‌گیریم. با این حال، حالات مطرح شده در آن اثبات را بررسی می‌کنیم. در حالات ۱و۲ دیده شد که یک 2RDF با وزن کمتر از $3\frac{n}{4}$ روی T قابل تعریف است که با فرض قضیه تناقض دارد. پس حالات ۱و۲ برای درخت T درست نیست. برای بررسی حالت۳، رأس‌های u و t، هم‌چنین T'، T'' و n' را همان‌گونه که در اثبات مذکور آمده‌اند، در نظر می‌گیریم. در زیرحالت ۱.۳ (Tیک عنکبوت است و $T \neq P_4$)، مجددا یک 2RDF با وزن کمتر از $3\frac{n}{4}$ روی T قابل تعریف است. پس حالت ۳ قسمت ۱ نیز در مورد T درست نیست. اما در زیرحالت۲.۳، می‌دانیم برای برقراری فرض قضیه یعنی $\gamma_{r2}(T) = 3\frac{n}{4}$ باید $n' = n-4$ و $T'' \simeq P_4$ (برای

برقراری $\gamma_{r2}(T'') = 3\frac{|V(T'')|}{4}$) و $\gamma_{r2}(T') = 3\frac{n'}{4}$باشد (چون $\gamma_{r2}(T) \leq \gamma_{r2}(T') + \gamma_{r2}(T'')$)، که در این‌صورت از فرض استقراء برای T' داریم : T' دارای ساختار بیان شده در صورت قضیه است.
اینک، کافی است ثابت کنیم اتصال T'' به T' به صورتی است که درخت T دارای ساختار بیان شده در صورت قضیه است، یعنی تنها اتصال میان آن‌ها از مرکز T'' به مرکز یک P_4 انتهایی در T' است. (لازم به ذکر است که یالی از برگ‌های T'' به درخت T' وجود ندارد چون در غیر این‌صورت P بلندترین مسیر در T نخواهد بود.) برای این منظور، فرض می‌کنیم یک مسیر القایی P_4 در T وجود داشته باشد که هر دو رأس پشتیبان آن از درجه‌ی ۳ باشند (فرض خلف) یعنی یک زیردرخت القاییH به‌صورت شکل (۲.۴) در T وجود داشته باشد.



شکل ۲.۴: زیردرخت القایی H

تابعf را روی $V(H)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $v \in V(H)$،

$$f(v) = \begin{cases} \{1, 2\} & v \in \{x, y\} \\ \{1\} & v \notin N[x] \cup N[y] \\ \emptyset & \text{o.w} \end{cases} .$$

رأس‌های x و y، همسایگان خود را احاطه می‌کنند لذا f یک 2RDF روی H است. آن‌گاه از قضیه (۲.۲.۴) داریم

$$\gamma_{r2}(T) \leq \gamma_{r2}(H) + \gamma_{r2}(T - H) \leq w(f) + 3\frac{n - 12}{4} \leq 8 + 3\frac{n - 12}{4} < 3\frac{n}{4}$$

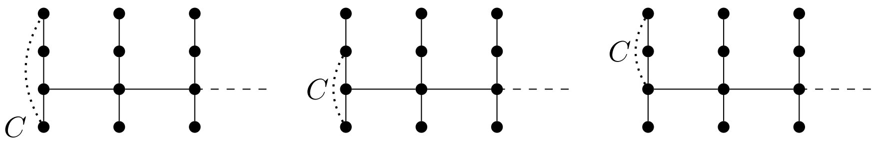
و این با فرض قضیه (یعنی $\gamma_{r2}(T) = 3\frac{n}{4}$) در تناقض است. پس ساختار T به‌صورت بیان شده در قضیه است. □

می‌دانیم عدد k–احاطه‌گری رنگین‌کمانی با اضافه‌کردن یال‌های یک گراف افزایش نمی‌یابد. به این‌ترتیب، از قضایای (۲.۲.۴) و (۳.۲.۴) می‌توانیم یک کران بالای عمومی برای عدد ۲–احاطه‌گری رنگین‌کمانی گراف‌ها به‌دست آوریم. نتیجه‌ی بعد به این امر می‌پردازد. قبل از ارایه‌ی نتیجه، تعریف تاج یک گراف H را که با نماد $cor(H)$ یا HoK_1 نشان داده می‌شود را از فصل ۳ یادآوری می‌کنیم. $cor(H)$ گرافی است که از اضافه کردن یک یال آویزان به هر رأس گراف H به‌دست می‌آید.

نتیجه ۱.۲.۴. [۱۶] اگر G گراف همبندی از مرتبه‌ی $n \geq 3$ باشد، آن‌گاه $\gamma_{r2}(G) \leq 3\frac{n}{4}$. به‌علاوه، در این رابطه، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \simeq P_4$ یا $G \simeq cor(C_4)$ یا $V(G)$ قابل افراز به k ($k \geq 3$) رونوشت از مسیر P_4 باشد به‌طوری‌که همه‌ی این K رونوشت P_4 بتوانند فقط به‌وسیله‌ی مرکزهای خود به یکدیگر متصل باشند.(توجه می‌کنیم که مرکز هر مسیر P_4 یکتاست.)

برهان. فرض کنیم T درخت فراگیر گراف همبند G باشد. از قضیه (۲.۲.۴) می‌دانیم $\gamma_{r۲}(T) \leq ۳\frac{n}{۴}$.
همان طور که قبل از قضیه گفتیم، عدد ۲−احاطه‌گری رنگین‌کمانی یک گراف با افزایش تعداد یال‌ها افزایش نمی‌یابد، لذا $\gamma_{r۲}(G) \leq \gamma_{r۲}(T) \leq ۳\frac{n}{۴}$.
برای اثبات قسمت دوم نتیجه (یعنی تساوی در رابطه‌ی قبل)، ابتدا نشان می‌دهیم اگر G به یکی از صورت‌های گفته شده باشد، آن‌گاه $\gamma_{r۲}(G) = ۳\frac{n}{۴}$. اگر $G \simeq P_۴$ آن‌گاه بنا به گزاره‌ی (۱.۲.۲) در فصل ۲، $\gamma_{r۲}(G) = ۳ = ۱ + \lfloor \frac{۴}{۲} \rfloor$. اگر $G \simeq cor(C_۴)$ آن‌گاه بنا به گزاره‌ای در فصل ۳، $\gamma_{r۲}(cor(C_۴)) = ۳ \cdot ۱$ $۳ \cdot ۲ = ۴ + \lceil \frac{۴}{۲} \rceil$ وبالاخره اگر $V(G)$ قابل افراز به $k \geq ۳$ تا رونوشت مسیر $P_۴$ باشد به‌طوری که فقط مرکزهای آن‌ها به یکدیگر متصل باشد، آن‌گاه بنا به قضیه (۳.۲.۴)، $\gamma_{r۲}(G) = ۳\frac{n}{۴}$.

حال فرض می‌کنیم $\gamma_{r۲}(G) = ۳\frac{n}{۴}$. نشان می‌دهیم G به یکی از صورت‌های گفته شده در نتیجه است. اگر G درخت باشد، از قضیه (۳.۲.۴) حکم ثابت است. پس فرض می‌کنیم G درخت نباشد و T درخت فراگیر G باشد. چون $\gamma_{r۲}(T) \geq \gamma_{r۲}(G)$ (زیرا کاهش تعداد یال‌ها ممکن است عدد k−احاطه‌گری رنگین‌کمانی را افزایش دهد اما کاهش نمی‌دهد.) و بنا به قضیه (۲.۲.۴)، مقدار $۳\frac{n}{۴}$ کران بالای $\gamma_{r۲}(T)$ است، پس $\gamma_{r۲}(T) = ۳\frac{n}{۴}$، در نتیجه بنا به قضیه (۳.۲.۴)، $V(T)$ قابل افراز به (k)رونوشت از مسیر $P_۴$ است به‌طوری‌که همه‌ی این K رونوشت $P_۴$ فقط می‌توانند به‌وسیله‌ی مرکزهای خود به یکدیگر متصل باشند. چون $\gamma_{r۲}(G) \in \mathbb{Z}^+$ پس n مضرب ناصفری از ۴ است. اگر $n = ۴$ آن‌گاه $G \simeq P_۴$. اگر $n = ۸$ آن‌گاه $cor(C_۴)$ تنها گراف اکسترمال (اکنون $\gamma_{r۲}(G) = ۶ = ۳ \cdot ۲$ اما با وجود یک یال دیگر کمتر از ۶ می‌شود) می‌باشد، پس $G \simeq cor(C_۴)$. اگر $n \geq ۱۲$ آن‌گاه، چون G درخت نیست، یک یال $e \in E(G) - E(T)$ وجود دارد به‌طوری که $T \cup e$ شامل یک دور C است. (توجه می‌کنیم که T درخت فراگیر و به‌صورت گفته شده در قضیه (۳.۲.۴)ست.) دو امکان برای دور C وجود دارد:
۱) دور C شامل هیچ یال متصل کننده‌ی دو مرکز از مرکزهای رونوشت‌های $P_۴$ نباشد یعنی دور C تنها از چند رأس یک رونوشت $P_۴$ تشکیل شده باشد. حالت‌هایی که در شکل‌های (۳.۴) دیده می‌شوند.



شکل ۳.۴: حالت‌های مختلف دور C

در این‌صورت، یک 2RDF روی $T \cup e$ می‌توان یافت که روی رونوشت $P_۴$ یادشده (مربوط به دور C) دارای وزن ۲ است (می‌بینیم که در یک حالت دور C از مرتبه‌ی ۴ است لذا تابع مذکور روی آن وزن ۲ دارد و در حالات دیگر، یک رأس از دور C سه رأس دیگر را احاطه می‌کند یعنی مجددا وزن تابع مذکور روی آن برابر ۲ است). بنابراین یک 2RDF روی G با وزن $۳\frac{n}{۴} - ۱$ قابل تعریف است و این تناقض است.
۲) دور C شامل یال e' باشد به‌طوری که e' متصل کننده‌ی دو رأس مرکزی (مرکز) از رونوشت‌های $P_۴$ است. درخت $T \cup e - e'$ به شکل گفته شده در قضیه (۳.۲.۴) نیست، لذا بنا به آن قضیه $\gamma_{r۲}(T \cup e - e') < ۳\frac{n}{۴}$ در نتیجه $\gamma_{r۲}(T) < ۳\frac{n}{۴}$ و این نیز تناقض است. پس برای $n \geq ۱۲$، G یک درخت به‌صورت گفته شده

است.

□

حال یک کران بالا برای عدد ۲–احاطه‌گری رنگین‌کمانی، برحسب جملاتی از مرتبه‌ی گراف و قطر گراف ارایه می‌دهیم.

قضیه ۴.۲.۴. [۱۶] *برای هر گراف همبند G از مرتبه‌ی n داریم*

$$\gamma_{r2}(G) \leq n - \left\lceil \frac{\mathrm{diam}(G) - 1}{2} \right\rceil.$$

به‌علاوه، این کران در دسترس (دقیق) است.

برهان. فرض می‌کنیم $P = v_1 v_2 \dots v_{\mathrm{diam}(G)+1}$ یک مسیر قطری در G و f یک γ_{r2}–تابع روی P باشد. بنا به گزاره‌ی (۱.۲.۲) در فصل۲، $w(f) = \lfloor \frac{\mathrm{diam}(G)+1}{2} \rfloor + 1$. حال، تابع $g : V(G) \to P(\{1,2\})$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in V(P) \\ \{1\} & \mathrm{o.w} \end{cases}.$$

چون f یک γ_{r2}–تابع روی P است، به‌وضوح g نیز یک 2RDF روی G است. از این‌رو

$$\begin{aligned}\gamma_{r2}(G) \leq w(G) = w(f) + (n - \mathrm{diam}(G) - 1) &= n - \left\lfloor \frac{\mathrm{diam}(G) - 1}{2} \right\rfloor \\ &= n - \left\lceil \frac{1 - \mathrm{diam}(G)}{2} \right\rceil.\end{aligned}$$

(توجه داریم که برای هر عدد a داریم $\lfloor a \rfloor = -\lceil -a \rceil$)
از گزاره‌ی (۱.۲.۲) در فصل۲، برای هر مسیر P_n داریم $\gamma_{r2}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ و $\mathrm{diam}(P_n) = n - 1$ بنابراین

$$n - \left\lceil \frac{\mathrm{diam}(P_n) - 1}{2} \right\rceil = n - \left\lceil \frac{n - 2}{2} \right\rceil = \begin{cases} n - \frac{n}{2} + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 & n \text{ زوج} \\ n - \frac{n+1}{2} + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 & n \text{ فرد} \end{cases}.$$

یعنی خانواده‌ی همه‌ی مسیرها به این کران می‌رسند پس این کران در دسترس (دقیق) است. □

در زیر خواهیم دید که کران بالا برای عدد ۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی در رده‌ی بزرگی از گراف‌ها قابل بهبود است. با لم زیر شروع می‌کنیم.

لم ۵.۲.۴ [۶]

i) برای $n \geq 3$ که $n \neq 4$ داریم $\gamma_{r2}(P_n) \leq 2\frac{n}{3}$.

ii) برای $n \geq 3$ داریم $\gamma_{r2}(C_n) \leq 2\frac{n}{3}$.

برهان. i) از گزاره‌ی (۱.۲.۲)فصل۲ داریم: برای $n \geq 1$، $\gamma_{r2}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. اگر $\frac{n}{2} + 1 \leq 2\frac{n}{3}$ آن‌گاه $n \geq 6$ یعنی برای $n \geq 6$ حکم برقرار است. برای $n = 3,5$ نیز برقراری حکم واضح است.

ii) از گزاره‌ی (۲.۲.۲) در فصل ۲ داریم: برای $n \geq 3$، $\gamma_{r2}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$. چون $\lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \leq 1$ پس $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ در نتیجه از i برای $n \geq 3$ و $n \neq 4$ داریم $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \leq 2\frac{n}{3}$. برقراری حکم برای $n = 4$ نیز واضح است. □

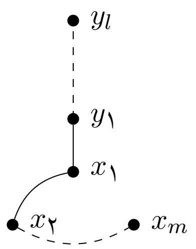
فرض می‌کنیم $m \geq ۳$ و $l \geq ۱$ اعداد صحیحی باشند و $C = x_۱x_۲\dots x_mx_۱$ یک دور از مرتبه‌ی m و $P = y_۱y_۲\dots y_l$ نیز یک مسیر از مرتبه‌ی l باشد. در این‌صورت گراف $C_{m,l}$ را این‌گونه می‌سازیم: $V(C_{m,l}) = V(C) \cup V(P)$ و $E(C_{m,l}) = E(C) \cup E(P) \cup \{x_۱y_۱\}$. لم زیر درمورد این رده از گراف‌ها است.

لم ۶.۲.۴. [۶] *برای* $m \geq ۳$ *و* $l \geq ۱$ *داریم* $\gamma_{r۲}(C_{m,l}) \leq ۲\frac{|V(C_{m,l})|}{۳}$.

برهان. اگر $(m, l) = (۳, ۱)$ آن‌گاه f با ضابطه‌ی زیر یک $\gamma_{r۲}$–تابع روی $C_{۳,۱}$ است:
برای هر $v \in V(C_{۳,۱})$،

$$f(v) = \begin{cases} \{۱, ۲\} & v = x_۱ \\ \emptyset & \text{o.w} \end{cases}.$$

پس $\gamma_{r۲}(C_{۳,۱}) = ۲ \leq ۲\frac{۴}{۳}$.
حال، فرض می‌کنیم $(m, l) \neq (۳, ۱)$.در گراف G یال $x_۱x_m$ را حذف می‌کنیم تا به مسیر همیلتونی P برسیم(شکل (۴.۴)). چون با اضافه کردن یک یال، عدد ۲–احاطه‌گری رنگین‌کمانی یک گراف افزایش نمی‌یابد، پس $\gamma_{r۲}(C_{m,l}) = \gamma_{r۲}(P)$ و در این‌صورت از قسمت i لم (۵.۲.۴) برای $(m, l) \neq (۳, ۱)$ داریم $\gamma_{r۲}(C_{m,l}) \leq ۲\frac{|V(C_{m,l})|}{۳}$.



شکل ۴.۴: مسیر P

□

یک گراف G را مینیمال گوییم هرگاه $\delta(G) \geq ۲$ و به‌ازای هر $e \in E(G)$ داشته باشیم $\delta(G - e) = ۱$.
با این تعریف، سراغ قضیه‌ی بعد می‌رویم.

قضیه ۷.۲.۴. [۶] *اگر* G *یک گراف از مرتبه‌ی* n *و* $\delta(G) \geq ۲$*، آن‌گاه* $\gamma_{r۲}(G) \leq ۲\frac{n}{۳}$.

برهان. با استقراء روی n قضیه را ثابت می‌کنیم. اگر $n \geq ۳$ آن‌گاه، چون $\delta(G) \geq ۲$ پس $n = ۳$ و $\delta(G) = ۲$ است یعنی در این حالت $G \simeq C_۳$ که از قسمت ii لم (۵.۲.۴) حکم برقرار است. پس فرض می‌کنیم $n \geq ۴$ و فرض استقراء را برقراری حکم برای هر گراف H با مرتبه‌ی n' که $n' < n$ و $\delta(H) \geq ۲$ می‌گیریم.

اگر یال‌های G را به دلخواه شماره‌گذاری کنیم و $E(G) = \{e_۱, e_۲, \dots, e_m\}$، می‌دانیم که رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\gamma_{r۲}(G) \leq \gamma_{r۲}(G - e_۱) \leq \gamma_{r۲}(G - \{e_۱, e_۲\}) \leq \dots \leq \gamma_{r۲}(G - \{e_۱, e_۲, \dots, e_m\})$$

و از طرف دیگر با حذف تعداد k یال که $1 \leq k \leq m-1$ از گراف G به گرافی با حداقل درجه‌ی ۱ می‌رسیم لذا $G - \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ یک گراف مینیمال خواهد بود و $\gamma_{r2}(G) \leq \gamma_{r2}(G - \{e_1, \dots e_{k-1}\})$

بنابراین کافی است حکم را برای گراف مینیمال $G - \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ ثابت کنیم. در این‌صورت برای سادگی کار G را مینیمال در نظر می‌گیریم و حکم را برای آن ثابت می‌کنیم. اگر G همبند نباشد آن‌گاه $G_1, \dots, G_m$ را مولفه‌های همبندی G می‌گیریم. چون به‌ازای هر G_i که $1 \leq i \leq m$ داریم $|(G_i)| < n$ و از فرض قضیه نیز برای هر کدام از G_iها داریم $\delta(G_i) \geq 2$ لذا بنا به فرض استقراء $\gamma_{r2}(G_i) \leq 2\frac{|V(G_i)|}{3}$ که $i \in \{1, \dots, m\}$. در نتیجه

$$\gamma_{r2}(G) = \sum_{1 \leq i \leq m} \gamma_{r2}(G_i) \leq \sum_{1 \leq i \leq m} 2\frac{|V(G_i)|}{3} = \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{m} |V(G_i)| = \frac{2}{3}n$$

و حکم در این حالت برقرار است.

به‌این ترتیب فرض می‌کنیم که G همبند است و دو حالت را برای $\Delta(G)$ در نظر می‌گیریم. اول این که $\Delta(G) = 2$. در این حالت با توجه به همبندی G، گراف G یک دور است و از این‌رو از لم (۵.۲.۴) قسمت ii داریم $\gamma_{r2}(G) \leq 2\frac{n}{3}$، پس حاصل مطلوب ماست. اینک، حالت دوم را فرض می‌کنیم یعنی $\Delta(G) \geq 3$.

اگر $V_{\geq 3}(G)$ را مجموعه‌ی رأس‌های از درجه‌ی حداقل ۳ در G و $V_2(G)$ را مجموعه‌ی رأس‌های از درجه‌ی ۲ در G بگیریم، آن‌گاه چون $\delta(G) \geq 2$ پس $V_{\geq 3}(G) = V(G) - V_2(G)$.

$V_{\geq 3}(G)$ مجموعه‌ای مستقل است زیرا اگر حداقل دو رأس از آن مانند u و v به همدیگر متصل باشند ($uv \in E(G)$) آن‌گاه $\delta(G - uv) \geq 2$ (چون درجه‌ی هرکدام حداقل ۳است) و این با فرض مینیمال بودن G درتناقض است.

یک مسیر P در گراف G را ماکسیمال گوییم هرگاه $V(P) \subseteq V_2(G)$ و هر رأس پایانی P با یک رأس از $V_{\geq 3}(G)$ مجاور باشد. برای هر $i \geq 1$، فرض می‌کنیم $\mathscr{P}_i = \{P \colon$ مسیری ماکسیمال و $|V(P)| = i$ باشد $\}$. قرار می‌دهیم $\mathscr{P} = \bigcup_{i \geq 1} \mathscr{P}_i$. ادعا می‌کنیم که $\{V(P) \colon P \in \mathscr{P}\} \cup \{V_{\geq 3}(G)\}$ یک افراز برای $V(G)$ است. این ادعا را به‌صورت زیر ثابت می‌کنیم:

به‌ازای هر مسیر ماکسیمال P، $V(P) \subseteq V_2(G)$ پس برای هر $P \in \mathscr{P}$،

$$V(P) \cap V_{\geq 3}(G) = \emptyset. \tag{۲.۴}$$

اگر $P_1, P_2 \in \mathscr{P}$ و $v \in P_1 \cap P_2$ باشد، چون درجه‌ی هر رأس P_1 و P_2 برابر ۲ است لذا $P_1 = P_2$، پس برای هر $P_1, P_2 \in \mathscr{P}$، به‌طوری که $P_1 \neq P_2$،

$$V(P_1) \cap V(P_2) = \emptyset. \tag{۳.۴}$$

اگر $u \in V(G)$ و $u \notin V_{\geq 3}(G)$ و $u \notin V(\mathscr{P})$ آن‌گاه با توجه به همبندی G و $\delta(G) \geq 2$، u عضو یک مسیر غیرماکسیمال در G است لذا، مجددا بنا به همبندی G داریم $\Delta(G) = 2$. این تناقض است. پس برای هر $u \in V(G)$،

$$u \in V(\mathscr{P}) \cup V_{\geq 3}(G). \tag{۴.۴}$$

از روابط (۲.۴)، (۳.۴) و (۴.۴) ادعا ثابت می‌شود.

حال برای هر $P \in \mathscr{P}$ قرار می‌دهیم

$X_P = \{u \in V_{\geq 3}(G) \colon$ با یک رأس پایانی v از مسیر P مجاور باشد $u\}$. بنا به تعریف یک مسیر ماکسیمال

P، $۲ \leq |X_P| \leq ۱$ (توجه می‌کنیم که اگر $|X_P| > ۲$ آن‌گاه درجه‌ی رأسی از P، حداقل ۳ است و این امکان ندارد و هرگاه $|X_P| = ۱$ آن‌گاه P به همراه رأس مجاور خود از $V_{\geq ۳}(G)$ یک طوقه است). از مستقل بودن $V_{\geq ۳}(G)$ نتیجه می‌گیریم که بین هر دو رأس از آن، یک مسیر از $\mathscr{P}$ وجود دارد لذا $V_{\geq ۳}(G) = \bigcup_{P\in\mathscr{P}} X_P$. فرض می‌کنیم یک مسیر ماکسیمال P چنان موجود باشد که $\delta(G-V(P)) \geq ۱$. اگر $a \in V_{\geq ۳}(G)$ را مجاور به یک رأس پایانی P بگیریم، از فرض مذکور (یعنی $\delta(G - V(P)) \geq ۱$) داریم $\deg_{G-V(P)}(a) \leq ۱$. در نتیجه $X_P = \{a\}$ و $\deg_G(a) = ۳$. آن‌گاه $|V(P)| \geq ۲$ (توجه داریم که یال موازی نداریم!). اینک، اگر فرض کنیم $N_G(a) - V(P) = \{b\}$ (چون $a \in V_{\geq ۳}(G)$ و $V_{\geq ۳}(g)$ مجموعه‌ای مستقل است پس $b \in V_۲(G)$)، آن‌گاه یک مسیر ماکسیمال منحصر به فرد P' وجود دارد که b یک رأس پایانی آن است (منحصر به فرد است چون $b \in V_۲(P)$). چون زیرگراف $G - (V(P) \cup V(P') \cup \{a\})$ دارای مینیمم درجه‌ی ۲ است (چون مسیر P' طوقه نیست پس $\deg_{G-V(P)\cup V(P')\cup\{a\}}(a') \geq ۲$ که $a' \in X_P$) پس بنا به فرض استقراء

$$\begin{aligned}\gamma_{r۲}(G - (V(P) \cup V(P') \cup \{a\})) &\leq ۲\frac{|V(G) - (V(P) \cup V(P') \cup \{a\})|}{۳}\\ &= ۲\frac{|V(G)| - |(V(P) \cup V(P') \cup \{a\})|}{۳}\end{aligned}$$

از طرف دیگر، $G[V(P) \cup V(P') \cup \{a\}] \simeq C_{|V(P)|+۱,|V(P')|}$ لذا بنا به لم (۶.۲.۴)، $\gamma_{r۲}(G[V(P) \cup V(P') \cup \{a\}]) \leq ۲\frac{|V(P)\cup V(P')\cup\{a\}|}{۳}$ از این‌رو

$$\gamma_{r۲}(G) \leq \gamma_{r۲}(G - (V(P) \cup V(P') \cup \{a\})) + \gamma_{r۲}(G[V(P) \cup V(P') \cup \{a\}]) \leq ۲\frac{|V(G)|}{۳}.$$

پس حکم در این حالت برقرار است. بنابراین، فرض می‌کنیم به‌ازای هر $P \in \mathscr{P}$ داشته باشیم $\delta(G - V(P)) \geq ۲$. با این حال، اگر $\mathscr{P} - (\mathscr{P}_۱ \cup \mathscr{P}_۲ \cup \mathscr{P}_۴) \neq \emptyset$، فرض می‌کنیم $p \in \mathscr{P} - (\mathscr{P}_۱ \cup \mathscr{P}_۲ \cup \mathscr{P}_۴)$. در این‌صورت با توجه به $\delta(G - v(p)) \geq ۲$ از فرض استقراء داریم $\gamma_{r۲}(G - V(P)) \leq ۲\frac{|V(G)-V(P)|}{۳}$ و از طرف دیگر، از لم (۵.۲.۴) قسمت ii داریم $\gamma_{r۲}(P) \leq ۲\frac{|V(P)|}{۳}$. در نتیجه

$$\gamma_{r۲}(G) \leq \gamma_{r۲}(G - V(P)) + \gamma_{r۲}(P) \leq ۲\frac{|V(G)|}{۳}$$

و این نتیجه‌ی مطلوب است. برای کامل شدن اثبات، کافی است حکم را در حالتی که $\mathscr{P} - (\mathscr{P}_۱ \cup \mathscr{P}_۲ \cup \mathscr{P}_۴) = \emptyset$ ثابت کنیم. برای این منظور، ابتدا فرض می‌کنیم $\mathscr{P} = \mathscr{P}_۱ \cup \mathscr{P}_۲ \cup \mathscr{P}_۴$ و قرار می‌دهیم $l = |V_{\geq ۳}(G)|$ و برای هر $i \in \{۱, ۲, ۴\}$، $m_i = |\mathscr{P}_i|$. چون $V(G) = V_{\geq ۳}(G) \cup V(\mathscr{P})$ پس $n = l + m_۱ + ۲m_۲ + ۴m_۴$. سپس فرض می‌کنیم $W = \{u\colon$ u یک رأس داخلی یک مسیر $P_۴$ باشد$\}$. در هر مسیر $P \in \mathscr{P}_۴$، تنها دو رأس داخلی وجود دارد پس $|W| = ۲m_۴$.

تابع $f_\circ : V(G) \to P(\{۱, ۲\})$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $u \in V(G)$،

$$f_\circ(u) = \begin{cases}\{۱, ۲\} & u \in V_{\geq ۳}(G)\\ \{۱\} & u \in W\\ \emptyset & \text{o.w}\end{cases}.$$

هر $u \in V(P)$ برای $P \in \mathscr{P}_1$ یا $P \in \mathscr{P}_2$ و هر $u \in V(P)\backslash W$ برای $P \in \mathscr{P}_4$، در مجاورت رأسی از $V_{\geq 3}(G)$ است پس f_0 یک 2RDF است و داریم

$$w(f_0) = 2l + |W| = 2l + 2m_4 = \frac{2l + 2m_4}{l + m_1 + 2m_2 + 4m_4} n.$$

با این حال، اگر $\frac{2l+2m_4}{l+m_1+2m_2+4m_4} \leq \frac{2}{3}$ آن‌گاه حکم ثابت شده است. لذا فرض می‌کنیم $\frac{2l+2m_4}{l+m_1+2m_2+4m_4} > \frac{2}{3}$ و نشان می‌دهیم با وجود این شرط نیز حکم برقرار است. از فرض فوق داریم

$$2l > m_1 + 2m_2 + m_4 \tag{5.4}$$

ادعا(شماره ۱): $\frac{m_1+2m_2+3m_4}{l+m_1+2m_2+4m_4} < \frac{2}{3}$.

اثبات ادعا: از نامساوی (۵.۴) داریم

$$\begin{aligned} &2l + \big(2(m_1 + 2m_2 + 4m_4) - 3(m_1 + 2m_2 + 3m_4)\big) \\ &> (m_1 + 2m_2 + m_4) + \big(2(m_1 + 2m_2 + 4m_4) - 3(m_1 + 2m_2 + 3m_4)\big) = 0. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 2(l + m_1 + 2m_2 + 4m_4) &> 3(m_1 + 2m_2 + 3m_4) \\ \frac{2}{3} &> \frac{m_1 + 2m_2 + 3m_4}{l + m_1 + 2m_2 + 4m_4}. \end{aligned}$$

حال، گراف چندگانه H را (روی $V_{\geq 3}(G)$) از گراف G به روش زیر می‌سازیم:

به‌ازای هر $P \in \mathscr{P}$، مسیر P را حذف کرده و یک یال بین دو رأس X_P (یا روی یک رأس، هرگاه $|X_P| = 1$) اضافه می‌کنیم.

برای گراف H این ویژگی‌ها را داریم:

۱) چون $V(H)$ همان $V_{\geq 3}(G)$ با همان درجات است پس $\delta(H) \geq 3$.

۲) $V_{\geq 3}(G)$ مجموعه‌ای مستقل است لذا بین هر دو رأس از آن، مسیری از $\mathscr{P}$ قرار داشته، در نتیجه با توجه به تعریف H داریم

$$|E(H)| = |\mathscr{P}| = m_1 + m_2 + m_4. \tag{6.4}$$

۳) چون G همبند است پس گراف H نیز همبند است.

اکنون، T را درخت فراگیر H می‌گیریم.

ادعا(شماره۲): یک رأس $x_0 \in V(H)$ وجود دارد که بر حداقل دو یال از $E(H) - E(T)$ واقع است.

اثبات ادعا: فرض کنیم $|V(H)| = 1$. در این‌صورت $|V_{\geq 3}(G)| = 1$، لذا در گراف G، به‌ازای هر مسیر $p \in \mathscr{P}$ داریم $|X_P| = 1$. در نتیجه، هر یال از گراف H یک طوقه است. پس $E(T) = \emptyset$. چون $\delta(H) \geq 3$، پس رأس یکتای گراف H بر حداقل ۲ یال از $E(H) - E(T)$ واقع است. (توجه می‌کنیم که $V(H) = \emptyset$ یعنی $V_{\geq 3}(G) = \emptyset$، نتیجه می‌دهد که G یک مسیر است و از لم (۵.۲.۴) قسمت i حکم برای آن ثابت است.) پس فرض می‌کنیم $|V(H)| \geq 2$ و x یک برگ از درخت T باشد. اگر فرض (خلف) کنیم که x بر حداکثر یک یال از $E(H) - E(T)$ واقع است، بنا به $\delta(H) \geq 3$ ، نخست، x نمی‌تواند بر هیچ یالی از $E(H) - E(T)$ واقع نباشد. سپس، x بر دقیقا یک طوقه e از $E(H) - E(T)$ واقع است. (هر طوقه بر

یک رأس متضمن ۲ درجه است) لذا $\deg_H(x)=۳$ پس $\deg_G(x)=۳$ و این نتیجه می‌دهد که دقیقا یک مسیر ماکسیمال P وجود دارد به‌طوری که $X_P=\{x\}$. در این‌صورت، $\deg_{G-v(p)}(x)=۱$ که با فرض $\delta(G-V(P))\geq ۲$ برای هر مسیر P، تناقض دارد. بنابراین برگ x بر حداقل ۲ یال از $E(H)-E(T)$ واقع است.

تابع $f_۱^*: V(H)\to P(\{۱,۲\})$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $u\in V(H)$،

$$f_۱^*(u)=\begin{cases}\{۱\} & \text{زوج باشد } \mathrm{d}_T(x_۰,u)\\ \{۲\} & \text{فرد باشد } \mathrm{d}_T(x_۰,u)\end{cases}.$$

$E_{x_۰}$ را زیرمجموعه‌ای از یال‌های $E(H)-E(T)$ می‌گیریم که در گراف H، بر رأس $x_۰$ واقع هستند. از انتخاب $x_۰$ داریم $|E(x_۰)|\geq ۲$. برای هر یال $e\in E(H)-(E(T)\cup E_{x_۰})$، $v_e\in V(H)$ را رأسی می‌گیریم که بر یال e در H واقع است و قرار می‌دهیم $U_۱=\{v_e\colon e\in E(H)-(E(T)\cup E_{x_۰})\}$. توجه می‌کنیم که بنا به تعریف $U_۱$، $x_۰\notin U_۱$.

تابع $f_۲^*: V(G)-V_{\geq ۳}(G)\to P(\{۱,۲\})$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
به‌ازای هر $x\in\bigcup_{P\in\mathscr{P}_۱}V(P)$ قرار می‌دهیم $f_۲^*(x)=\emptyset$. به‌ازای هر $P\in\mathscr{P}_۲$ که $P=u_۱u_۲$ و $N_G(u_۱)=\{u_۲,w\}$ قرار می‌دهیم $f_۲^*(u_۱)=\emptyset$ و $f_۲^*(u_۲)=\{۱,۲\}-f_۱^*(w)$. (توجه می‌کنیم که $w\in V_{\geq ۳}(G)$.) و به‌ازای هر $P\in\mathscr{P}_۴$ که $P=u_۱u_۲u_۳u_۴$ و $N_G(u_۱)=\{u_۲,w\}$ و $N_G(u_۴)=\{u_۳,w'\}$، قرار می‌دهیم $f_۲^*(u_۱)=f_۲^*(u_۴)=\emptyset$، $f_۲^*(u_۲)=\{۱,۲\}-f_۱^*(w)$ و $f_۲^*(u_۳)=\{۱,۲\}-f_۱^*(w')$.

تابع $f^*: V(G)\to P(\{۱,۲\})$ رابا ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $u\in V(G)$،

$$f^*(u)=\begin{cases}\{۱,۲\} & u\in U_۱\cup\{x_۰\}\\ f_۱^*(u) & u\in V_{\geq ۳}(G)-(U_۱\cup\{x_۰\})\\ f_۲^*(u) & u\in V(G)-V_{\geq ۳}(G).\end{cases}$$

بنا به تعریف f^*، اگر $f^*(u)=\emptyset$ آن‌گاه $u\in V(G)-V_{\geq ۳}(G)$ می‌باشد و $v\in N_G(u)$ وجود دارد که $v\in V_{\geq ۳}(G)$. دو حالت پیش می‌آید:

۱) $v\in U_۱\cup\{x_۰\}$ آن‌گاه از تعریف f^*، رأس u احاطه می‌شود.

۲) $v\in V_{\geq ۳}(G)-(U_۱\cup\{x_۰\})$ آن‌گاه از تعریف f^* و سپس تعریف $f_۱^*$، رأس u احاطه می‌شود. پس f^* یک 2RDF است. برای وزن f^* داریم

$$w(f^*)=۲|U_۱\cup\{x_۰\}|+\sum_{u\in V_{\geq ۳}(G)-(U_۱\cup\{x_۰\})}|f_۱^*(u)|+|\mathscr{P}_۲|+۲|\mathscr{P}_۴|$$

لذا، از تعریف $f_۱^*$

$$\begin{aligned}w(f^*)&=۲|U_۱\cup\{x_۰\}|+\sum_{u\in V_{\geq ۳}(G)-(U_۱\cup\{x_۰\})}۱+m_۲+۲m_۴\\ &=۲|U_۱\cup\{x_۰\}|-|U_۱\cup\{x_۰\}|+\sum_{u\in V_{\geq ۳}(G)}۱+m_۲+۲m_۴\end{aligned}$$

و مجددا از تعریف f_1^* و فراگیر بودن درخت T برای H داریم

$$\begin{aligned}
w(f^*) &= |U_1 \cup \{x_0\}| + w(f_1^*) + m_2 + 2m_4 \\
&\leq (|E(H)| - (|E(T)| + |E_{x_0}|) + 1) + |V(T)| + m_2 + 2m_4 \\
&\leq (|E(H)| - (|E(T)| + 2) + 1) + (|E(T)| + 1) + m_2 + 2m_4 \\
&= |E(H)| + m_2 + 2m_4 \\
&= (m_1 + m_2 + m_4) + m_2 + 2m_4 \\
&= \frac{m_1 + 2m_2 + 3m_4}{l + m_1 + 2m_2 + 4m_4} n \\
&< \frac{2}{3} n.
\end{aligned}$$

از نکات ذیل برای به‌دست آوردن روابط فوق استفاده کردیم:

۱) قضیه‌ی (۲۳.۲.۱) از فصل ۱. ۲) $|E_{x_0}| \geq 2$. ۳) رابطه‌ی (۶.۴). ۴) ادعای شماره‌ی ۱.

□

در ادامه، با ساختن گراف‌هایی به‌عنوان مثال برای قضیه (۷.۲.۴)، نشان می‌دهیم که کران مذکور در دسترس (دقیق) است. برای نشان دادن این موضوع ابتدا به لم زیر توجه می‌کنیم.

لم ۸.۲.۴. [۶] *فرض می‌کنیم G یک گراف باشد و $v \in V(G)$. اگر f یک γ_{r2}–تابع روی $V(G)$ باشد و $f(v) = \emptyset$، آن‌گاه $\gamma_{r2}(G - v) \leq \gamma_{r2}(G)$.*

برهان. اگر G، v و f را آن‌چنان که در صورت قضیه آمده‌اند در نظر بگیریم، $f\big|_{G-v}$ یک 2RDF روی $G - v$ است لذا

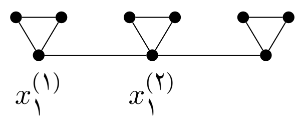
$$\gamma_{r2}(G - v) \leq \sum_{u \in V(G) \setminus \{v\}} |f(u)| = \sum_{u \in V(G)} |f(u)| = \gamma_{r2}(G).$$

□

فرض می‌کنیم G_0 گراف تهی (یعنی $E(G_0) = \emptyset$) و l عدد صحیح مثبتی باشد. برای هر i که $1 \leq i \leq l$، گراف $C^{(i)} = x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)} x_1^{(i)}$ را یک مثلث (دور C_3) می‌گیریم و گراف G_l را به‌صورت زیر می‌سازیم:

$$G_l = (\bigcup_{1 \leq i \leq l} C^{(i)}) \cup \{x_1^{(i)} x_1^{(i+1)} : 1 \leq i \leq l - 1\}$$

گراف G_3 در شکل (۵.۴) نشان داده شده است.



شکل ۵.۴: گراف G_3

با توجه به ساختار G_l داریم $\delta(G_l) = 2$، همچنین $G_1 \simeq C_3$.

گزاره ۹.۲.۴. [۶] *برای هر* $l \geq 0$ *داریم* $|V(G_l)| = 3l$ *و* $\gamma_{r2}(G_l) = 2l = 2\frac{|V(G_l)|}{3}$.

برهان. بنا به تعریف گراف G_l برای هر $l \geq 0$، $V(G_l)$ به l مجموعه‌ی ۳ عضوی افراز می‌شود لذا $|V(G_l)| = 3l$. برای اثبات قسمت دوم حکم از استقراء روی l استفاده می‌کنیم.
بنا به تعریف عدد ۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی، $\gamma_{r2}(G_0) = 0 = 2 \cdot 0$ و بنا به لم (۵.۲.۴) قسمت ii، $\gamma_{r2}(G_1) = \gamma_{r2}(C_3) = 2 = 2 \cdot 1$. پس گزاره برای $l \leq 1$ برقرار است (پایه‌ی استقراء). لذا می‌توانیم فرض کنیم $l \geq 2$ و برای اثبات آن، چون از قضیه (۷.۲.۴) برای G_l ($\delta(G_l) \geq 2$) داریم $\gamma_{r2}(G_l) \leq 2\frac{|V(G_l)|}{3} = 2\frac{3l}{3} = 2l$ پس کافی است نشان دهیم $\gamma_{r2}(G_l) \geq 2l$.
برای این منظور f را یک γ_{r2}-تابع روی G_l می‌گیریم. اگر $f(x_1^{(l)}) = \emptyset$ آن‌گاه بنا به لم (۸.۲.۴)، $\gamma_{r2}(G_l) \geq \gamma_{r2}(G_l - x_1^{(l)})$ و چون $G_{l-1} + P_2 \simeq (G_l - x_1^{(l)})$ پس

$$\gamma_{r2}(G_l) \geq \gamma_{r2}(G_l - x_1^{(l)}) = \gamma_{r2}(G_{l-1} + P_2) = \gamma_{r2}(G_{l-1}) + \gamma_{r2}(P_2)$$

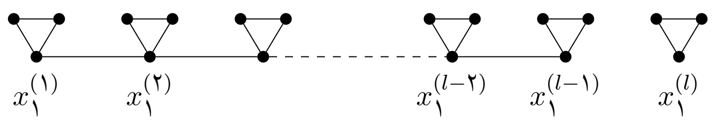
از فرض استقراء داریم $\gamma_{r2}(G_{l-1}) = 2(l-1)$ و برای P_2 نیز داریم $\gamma_{r2}(P_2) = 2$ در نتیجه $\gamma_{r2}(G_l) \geq 2 + 2l - 2 = 2l$ لذا $\gamma_{r2}(G_l) = 2l$.
اما اگر $f(x_1^{(l)}) = \emptyset$ آن‌گاه دو حالت را باید در نظر گرفت:
۱) $f(x_1^{(l-1)}) \neq \emptyset$ آن‌گاه $x_1^{(l)} \notin pn[x_1^{(l-1)}, f]$ و $x_1^{(l-1)} \notin pn[x_1^{(l)}, f]$ لذا روی $G_l - x_1^{(l-1)}x_1^{(l)}$ یک 2RDF است و چون $G_l - x_1^{(l-1)}x_1^{(l)} \simeq G_{l-1} + G_1$ (شکل(۶.۴)) از این‌رو

$$\gamma_{r2}(G_l) \geq \gamma_{r2}(G_l - x_1^{(l-1)}x_1^{(l)}) = \gamma_{r2}(G_{l-1} + G_1) = \gamma_{r2}(G_{l-1}) + \gamma_{r2}(G_1)$$

و چون در ابتدا ثابت کردیم $\gamma_{r2}(G_1) = 2$ و از فرض استقراء داریم $\gamma_{r2}(G_{l-1}) = 2(l-1)$ لذا $\gamma_{r2}(G_l) \geq 2(l-1) + 2 = 2l$ پس $\gamma_{r2}(G_l) = 2l$.
۲) $f(x_1^{(l-1)}) = \emptyset$. از لم (۸.۲.۴) داریم $\gamma_{r2}(G_l) \geq \gamma_{r2}(G_l - x_1^{(l-1)})$. چون $G_l - x_1^{(l-1)} = G_{l-2} + P_2 + G_1$ (شکل(۷.۴)) و از ابتدای اثبات داریم $\gamma_{r2}(G_1) = 2$، هم‌چنین می‌دانیم $\gamma_{r2}(P_2) = 2$ و از فرض استقراء نیز داریم $\gamma_{r2}(G_{l-2}) = 2(l-2)$ پس

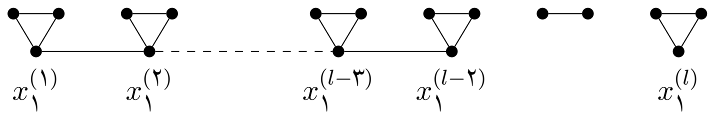
$$\begin{aligned}\gamma_{r2}(G_l) \geq \gamma_{r2}(G_l - x_1^{(l-1)}) &= \gamma_{r2}(G_l + P_2 + G_1)\\ &= \gamma_{r2}(G_{l-2}) + \gamma_{r2}(P_2) + \gamma_{r2}(G_1)\\ &= 2(l-2) + 2 + 2 = 2l\end{aligned}$$

لذا $\gamma_{r2}(G_l) = 2$.



شکل ۶.۴: گراف $G_l - x_1^{(l-1)}x_1^{(l)}$

□



شکل ۷.۴: گراف $G_l - x_1^{(l-1)}$

۳.۴ تعیین کران‌های پایین برای عدد۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی

در قضیه زیر، یک کران پایین برای عدد ۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی یک درخت، بر حسب جملاتی از عدد احاطه‌گری، ماکسیمم درجه و تعداد برگ‌ها و رأس‌های پشتیبان درخت ارایه می‌دهیم. نمادهای $l(T)$ و $p(T)$ به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی تعداد برگ‌ها و تعداد رأس‌های پشتیبان درخت T می‌باشند.

قضیه ۱.۳.۴. [۱۶] *برای هر درخت T با حداقل ۳ رأس داریم* $\gamma_{r2}(T) \geq \gamma(T) + \lceil \frac{l(T)-p(T)}{\Delta(T)} \rceil$.

برهان. با استقراء روی مرتبه‌ی T، قضیه را ثابت می‌کنیم. برای پایه‌ی استقراء، درختان با قطر کوچک را در نظر می‌گیریم. اگر $\operatorname{diam}(T) \leq 2$ آن‌گاه T یک رأس احاطه‌گر دارد یعنی $\gamma(t) = 1$. اگر به رأس مذکور مقدار $\{1, 2\}$ اختصاص دهیم، بقیه رأس‌ها همگی احاطه می‌شوند لذا $\gamma_{r2}(T) = 2$. توجه می‌کنیم که چون $|V(T)| \geq 3$ پس $\operatorname{diam}(T) \neq 1$ و $T \simeq K_{1,r}$ که $r > 1$. به این ترتیب $p(T) = 1$ و $\Delta(T) = l(T)$ لذا حکم قضیه به‌صورت تساوی برقرار است.
اگر $\operatorname{diam}(T) = 3$ آن‌گاه $p(T) = 2$ و $l(T) = n - 2$ و $\gamma(T) = 2$. از طرف دیگر، هر درخت با قطر ۳ یک ستاره‌ی دوگانه $DS_{r,s}$ که $s \geq 1$ و $r \geq 1$ است، بنابراین حالات زیر را داریم:
۱) اگر حداقل یکی از پارامترهای r یا s برابر با ۱ باشد آن‌گاه $\gamma_{r2}(T) = 3$.
۲) اگر هر دو پارامتر بزرگتر از ۱ باشند آن‌گاه $\gamma_{r2}(T) = 4$.
در حالت ۱داریم $\Delta(T) = n - 2$ لذا $l(T) - p(T) = n - 4 \leq n - 2 = \Delta(T)$ یعنی حکم در این حالت برقرار است و در حالت ۲ داریم

$$n = \Delta(T) + (\Delta(T) - k) + 2 = 2\Delta(T) - k + 2 \qquad (7.4)$$

که در آن $k \in \mathbb{Z}$ و $1 \leq k < \Delta(T)$ بنابراین اگر $\frac{l(T)-p(T)}{\Delta(T)} > 2$ (یعنی حکم برقرار نباشد) آن‌گاه $n > 2\Delta(T) + 4$ که با توجه به مقدار n از رابطه‌ی (۷.۴) نتیجه می‌گیریم $-k - 2 > 4$ و این تناقض است لذا در این حالت نیز حکم برقرار است.
هم‌چنین دیده می‌شود اگر T ستاره‌ی دوگانه‌ی $DS_{r,1}$ که $r \geq 2$ باشد، آن‌گاه

$$\gamma_{r2}(T) = 3 = \gamma(T) + \lceil \frac{l(T) - p(T)}{\Delta(T)} \rceil = 2 + 1$$

و اگر T ستاره‌ی دوگانه‌ی $DS_{r,s}$ که $r \geq s \geq 4$ باشد آن‌گاه

$$\gamma_{r2}(T) = 4 = \left\lceil \frac{l(T) - p(T)}{\Delta(T)} \right\rceil = 2 + 2\,.$$

حال فرض می‌کنیم T درختی باشد که $\operatorname{diam}(T) \geq 4$. P را یک مسیر قطری (به طول قطر T) در T می‌گیریم که شامل دو رأس پشتیبان مانند v و v' است. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $\deg_T(v) \leq \deg_T(v')$. رأس u را همسایه‌ی غیربرگی برای v می‌گیریم که در این‌صورت $u \in V(P)$ (اگر $u \notin V(P)$ آن‌گاه P بلندترین مسر نخواهد بود).

فرض می‌کنیم L مجموعه‌ی رأس‌های v و همه‌ی برگ‌های مجاور به آن باشد و $F(u)$ مجموعه همه‌ی مقادیر رأس u تحت تمام $\gamma_{r۲}$–تابع‌های تعریف شده روی $T-L$ باشد.
ادعا۱: $\gamma(T-L) \leq \gamma(T) \leq \gamma(T-L) + ۱$

اثبات ادعا: اگر S یک کوچک‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر برای درخت $T-L$ باشد، آن‌گاه $S \cup \{v\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای درخت T است. بنابراین $\gamma(T) \leq \gamma(T-L) + ۱$.
برای اثبات نامعادله‌ی سمت چپ، فرض (خلف) کنیم $\gamma(T-L) > \gamma(T)$ و S یک کوچک‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر برای T باشد. بنا به تعریف L داریم $v \in S$. چون u تنها رأس از مجموعه‌ی $T-L$ است که در همسایگی v قرار دارد، لذا $(S \backslash \{v\}) \cup \{u\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $T-L$ است. بنابراین
$$\gamma(T-L) \leq |S \backslash \{v\}| + ۱ = |S| = \gamma(T)$$
و این تناقض است.

ادعا۲: $p(T-L) \leq p(T) \leq p(T-L) + ۱$

اثبات ادعا: در این‌جا، حالت‌های ممکن به‌صورت زیر هستند:
۱) رأس u تنها برگ همسایه‌ی رأس پشتیبانی مانند v'' در درخت $T-L$ باشد. در این حالت چون u در درخت T یک برگ نیست (رأس v'' رأس پشتیبانی از درخت T نیست) و v یک رأس پشتیبان از درخت T است، داریم $p(T) = p(T-L)$.
۲) رأس u در $T-L$ یک برگ نباشد یا v'' همسایه‌ی برگ دیگری غیر از u نیز داشته باشد. در این حالت $p(T) = p(T-L) + ۱$.
بنابراین از حالت‌های ۱ و۲ داریم
$$p(T-L) \leq p(T) \leq p(T-L) + ۱.$$

چون $\deg_T(v) \leq \deg_T(v')$ پس $\Delta(T-L) = \Delta(T)$. حال، با توجه به آن‌چه گفته شد، وضعیت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:
وضعیت۱) $\deg_T(v) = ۲$ و $F(u) = \{\{۱\}, \{۲\}, \{۱,۲\}\}$. در این مورد، با اختصاص دادن یک زیرمجموعه تک عضوی از $\{۱,۲\}$ به یکی از رأس‌های v و برگ مجاورش، به‌ازای هر $\gamma_{r۲}$–تابع تعریف شده روی $T-L$، یک $\gamma_{r۲}$–تابع روی T خواهیم داشت لذا $\gamma_{r۲}(T) = \gamma_{r۲}(T-L) + ۱$. پس از فرض استقراء داریم $\gamma_{r۲}(T-L) \geq \gamma(T-L) + \lceil \frac{l(T-L)-p(T-L)}{\Delta(T-L)} \rceil$. در نتیجه
$$\begin{aligned}\gamma_{r۲}(T) = \gamma_{r۲}(T-L) + ۱ &\geq \gamma(T-L) + \left\lceil \frac{l(T-L) - p(T-L)}{\Delta(T-L)} \right\rceil + ۱\\ &\geq \gamma(T) + \left\lceil \frac{l(T-L) - p(T-L)}{\Delta(T-L)} \right\rceil\\ &= \gamma(T) + \left\lceil \frac{l(T) - p(T)}{\Delta(T)} \right\rceil.\end{aligned}$$

برای به‌دست آوردن رابطه‌ی آخر، از این مطلب استفاده کردیم که اگر $p(T-L) = P(T)$ آن‌گاه

$l(T-L)=l(T)$ و در غیر این‌صورت $p(T-L)=p(T)-۱$ و $l(T-L)=l(T)-۱$.

وضعیت۲) $\deg_T(v)\geq ۳$ یا $\deg_T(v)=۲$ و $F(u)=\{\emptyset\}$. در این مورد $\gamma_{r۲}(T)=\gamma_{r۲}(T-L)+۲$. در نتیجه

$$\gamma_{r۲}(T)=\gamma_{r۲}(T-L)+۲ \tag{۸.۴}$$
$$\geq \gamma(T-L)+\left\lceil\frac{l(T-L)-p(T-L)}{\Delta(T-L)}\right\rceil+۲ \tag{۹.۴}$$
$$\geq \gamma(T)+\left\lceil\frac{l(T-L)-p(T-L)}{\Delta(T-L)}\right\rceil+۱ \tag{۱۰.۴}$$
$$\geq \gamma(T)+\left\lceil\frac{l(T)-p(T)}{\Delta(T)}\right\rceil. \tag{۱۱.۴}$$

نامعادله‌ی (۹.۴) با توجه به فرض استقرا به‌دست آمد. درستی نامعادله‌ی (۱۱.۴) نیز به صورت زیر ثابت می‌شود:

چون $\deg_T(v)\leq \deg_T(v')$، بنابراین $l(T)-l(T-L)\leq\Delta(T)$، لذا $\frac{l(T)-l(T-L)}{\Delta(T)}\leq ۱$. از طرفی
$$l(T)-p(T)=\big(l(T)-l(T-L)\big)+\big(l(T-L)-p(T)\big).$$

از نامعادلات ادعای ۲، دو حالت زیر را داریم:

حالت ۱) $p(T)=p(T-L)$، در این صورت

$$\frac{l(T)-p(T)}{\Delta(T)}=\frac{l(T)-l(T-L)}{\Delta(T)}+\frac{l(T-L)-p(T)}{\Delta(T)}$$
$$\leq ۱+\frac{l(T-L)-p(T-L)}{\Delta(T)}.$$

حالت ۲) $p(T)=p(T-L)+۱$، در این صورت

$$\frac{l(T)-p(T)}{\Delta(T)}=\frac{l(T)-l(T-L)}{\Delta(T)}+\frac{l(T-L)-p(T)-۱}{\Delta(T)}$$
$$\leq ۱+\frac{l(T-L)-p(T-L)}{\Delta(T)}-\frac{۱}{\Delta(T)}$$
$$\leq ۱+\frac{l(T-L)-p(T-L)}{\Delta(T)}.$$

اینک، با توجه به تساوی $\Delta(T)=\Delta(T-L)$ داریم
$$\left\lceil\frac{l(T)-p(T)}{\Delta(T)}\right\rceil\leq ۱+\left\lceil\frac{l(T-L)-p(T-L)}{\Delta(T-L)}\right\rceil.$$

□

در اثبات فوق، چندین مثال از درخت‌های با قطر حداکثر ۳، که به کران بالای خود در قضیه (۱.۳.۴) می‌رسند، ارایه شد. طبقه‌بندی همه‌ی این گراف‌های اکسترمال را به عنوان یک مسأله‌ی باز مطرح می‌کنیم. در ادامه، کران پایین دیگری برای عدد ۲-احاطه‌گری رنگین‌کمانی یک گراف دلخواه بر حسب قطر آن گراف ارایه می‌دهیم.

قضیه ۲.۳.۴. [۱۶] *برای هر گراف همبند G داریم*

$$\gamma_{r2}(G) \geq \left\lceil \frac{2\mathrm{diam}(G)+2}{5} \right\rceil.$$

برهان. فرض می‌کنیم $f = (V_0, V_1^1, V_1^2, V_2)$ یک $2RDF$ روی G باشد. یک مسیر دلخواه به طول $\mathrm{diam}(G)$ را در G در نظر می‌گیریم. اگر به‌ازای هر رأس $v \in V_1^1 \cup V_1^2 \cup V_2$ قرار دهیم $N[v] = H_v$ آن‌گاه در مسیر قطری مورد نظر، حداکثر ۲ یال از هر زیرگراف القا شده‌ی $G[H_v]$ به‌ازای هر رأس $v \in V_1^1 \cup V_1^2 \cup V_2$ وجود دارد. مطلب گفته شده از تعریف مسیر نتیجه می‌شود زیرا در غیر این‌صورت، مسیر مورد نظر از رأس v حداقل ۲ بار عبور می‌کند و این تناقض است. از طرف دیگر، اگر $v \in V_0$ آن‌گاه برای احاطه‌شدن v، رأس v همسایه‌ای از V_2 و یا آن‌که دو همسایه‌ی مختلف به‌ترتیب از V_1^1 و V_1^2 دارد. در این‌صورت برای محاسبه‌ی طول این مسیر یعنی همان $\mathrm{diam}(G)$، اگر از یال‌های گفته شده در بالا صرف‌نظر کنیم آن‌گاه مسیر موردنظر شامل حداکثر $Min\{|V_1^1|, |V_1^2|\} + |V_2| - 1$ یال دیگر متصل به همسایه‌های رأس‌های عضو $v \in V_1^1 \cup V_1^2 \cup V_2$ است. بنابراین

$$\begin{aligned}
\mathrm{diam}(G) &\leq 2(|V_1^1| + |V_1^2| + |V_2|) + Min\{|V_1^1|, |V_1^2|\} + |V_2| - 1 \\
&\leq 2(|V_1^1| + |V_1^2| + |V_2|) + \frac{(|V_1^1| + |V_1^2|)}{2} + |V_2| - 1 \\
&= \frac{5}{2}((|V_1^1| + |V_1^2| + 2|V_2|) - 2|V_2| - 1 \\
&\leq \frac{5}{2}\gamma_{r2}(G) - 1.
\end{aligned}$$

و چون $\gamma_{r2}(G)$ عددی صحیح است پس درستی حکم قضیه ثابت شد.

□

کران یادشده در قضیه قبل، در دسترس (دقیق) است زیرا اگر G یکریخت با مسیر P_3 باشد، خواهیم داشت

$$\gamma_{r2}(P_3) = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + 1 = 2 = \left\lceil \frac{2\mathrm{diam}(P_3)+2}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{2(2)+2}{5} \right\rceil = 2.$$

هم‌چنین اگر $G \simeq C_4$ آن‌گاه

$$\gamma_{r2}(C_4) = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{4}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor = 2 = \left\lceil \frac{2\mathrm{diam}(C_4)+2}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{2(3)+2}{5} \right\rceil = 2.$$

۴.۴ ارتباط ۲−احاطه‌گری رنگین‌کمانی با مفهوم احاطه‌گری رومی

نخست به گزاره‌ی زیر توجه می‌کنیم.

گزاره ۱.۴.۴. (*کوکاین و همکاران.* [۴]) *برای هر گراف G داریم:*

$$\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

در حقیقت می‌توانیم پارامتر $\gamma_{r2}(G)$ را نیز در نامعادله‌های گزاره‌ی (۱.۴.۴) وارد کنیم. این مطلب، گزاره‌ی بعدی را تشکیل می‌دهد.

گزاره ۲.۴.۴. [۱۵] *برای هر گراف G داریم* $\gamma(G) \leq \gamma_{r2}(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $\gamma(G) \leq \gamma_{r2}(G)$. برای این منظور، فرض می‌کنیم
$f : V(G) \to P(\{1\})$ یک γ_{r1}-تابع (یا همان تابع احاطه‌گری معمولی) و
$g : V(G) \to P(\{1,2\})$ یک γ_{r2}-تابع روی G باشند. در این‌صورت به‌ازای هر $v \in V(G)$ که $f(v) = \emptyset$ داریم $\sum_{u\in N_G(v)} |f(u)| \geq 1$ و به‌ازای هر $v' \in V(G)$ که $g(v') = \emptyset$ داریم $\sum_{u'\in N_G(v')} |g(u')| \geq 2$. در نتیجه $\gamma(G) \leq \gamma_{r2}(G)$.
حال ثابت می‌کنیم $\gamma_{r2}(G) \leq \gamma_R(G)$. فرض می‌کنیم $f = (V_0, V_1^1, V_1^2, V_2)$ یک تابع احاطه‌گری رومی بهینه روی گراف G باشد. در این‌صورت $V_0 \subseteq N(V_2)$ (بنا به تعریف f). اگر به‌ازای هر $v \in V(G)$ قرار دهیم

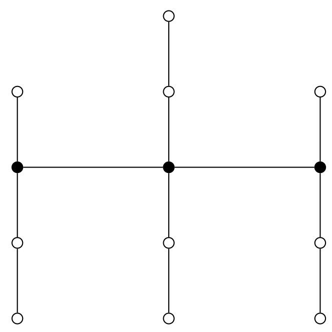
$$g(v) = \begin{cases} \emptyset & v \in V_0 \\ \{1\}\text{یا}\{2\} & v \in V_1 \\ \{1,2\} & v \in V_2 \end{cases}$$

آن‌گاه g یک 2RDF روی G است(چون $V_0 \subseteq N(V_2)$) و داریم

$$\gamma_{r2}(G) \leq w(G) = |V_1| + 2|V_2| = \sum_{u\in V(G)} f(u) = \gamma_R(G).$$

□

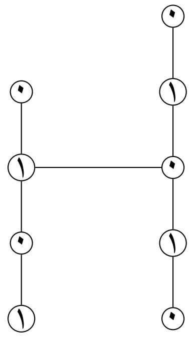
در اینجا رده‌هایی از گراف‌ها را معرفی می‌کنیم تا در قضیه بعد از آن‌ها استفاده کنیم. اگر هر رأس یک گراف همبند H را با رأس مرکزی یک مسیر P_5 یا با رأس داخلی یک مسیر P_4 یکی بگیریم (و مسیرهای مذکور را برای هر رأس H به گراف H بیفزاییم) به‌طوری که این مسیرها رأس-مجزا باشند، گراف جدیدی حاصل می‌شود که رده‌ی همه‌ی این چنین گراف‌های به‌دست آمده از یک گراف همبند H را با $\mathscr{F}$ نشان می‌دهیم.(شکل(۸.۴)) خانواده‌ی گراف‌هایی از $\mathscr{F}$ که در آن‌ها هر رأس H را با رأس داخلی یک مسیر P_4 یکی گرفته‌ایم، با نماد $\mathscr{F}'$ مشخص می‌شود.



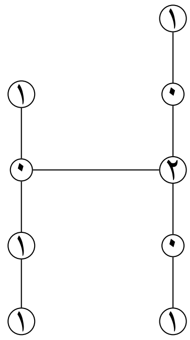
شکل ۸.۴: یک گراف عضو $\mathscr{F}$ به‌دست آمده از مسیر P_3

قضیه ۳.۴.۴. (*فورن و همکاران.* [۵]) *برای هر گراف G از مرتبه‌ی $n \geq 3$ داریم* $\gamma_R(G) + \frac{\gamma(G)}{2} \leq n$.
به‌علاوه، تساوی در رابطه‌ی اخیر برقرار است اگر و تنها اگر G یکی از گراف‌های C_4، C_5 و $cor(C_4)$ باشد و یا $G \in \mathscr{F}$.

حال اگر G گرافی از $\mathscr{F}$ باشد که از $k_۱$ مسیر $P_۴$ و $k_۲$ مسیر $P_۵$ تشکیل شده باشد، آن‌گاه $\gamma(G) = ۲k_۱ + ۲k_۲$ و $\gamma_{r۲}(G) = ۳k_۱ + ۳k_۲$. (این مطلب در شکل‌های (۹.۴) و (۱۰.۴) برای گراف G که از ۱ مسیر $P_۴$ و ۱ مسیر $p_۵$ تشکیل شده است دیده می‌شود. اعداد ۰، ۱ و ۲ به‌ترتیب به معنی $\emptyset$، $\{۱\}$ و $\{۲\}$ است.)



شکل ۹.۴: گراف G



شکل ۱۰.۴: گراف G

نتیجه ۱.۴.۴. [۱۵] برای هر گراف همبند G از مرتبه‌ی $n \geq ۳$ داریم $\gamma_{r۲}(G) + \frac{\gamma(G)}{۲} \leq n$. به‌علاوه، در رابطه‌ی اخیر تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G گراف $cor(C_۴)$ باشد یا $G \in \mathscr{F}'$.

برهان. از قضیه قبل و گزاره‌ی (۲.۴.۴) قسمت اول نتیجه برقرار است. حالت برگشت قسمت دوم نتیجه نیز از قضیه‌ی قبل برقرار است. حالت رفت قسمت دوم نتیجه را به این صورت ثابت می‌کنیم: می‌دانیم برای هر گراف $G \in \mathscr{F}'$ که از k مسیر $P_۴$ ساخته شده است، داریم $\gamma(G) = ۲k$ و $\gamma_{r۲}(G) = ۳k$. لذا $\gamma_{r۲}(G) + \frac{\gamma(G)}{۲} = ۴k = n$. برای $cor(C_۴)$ نیز اثبات واضح است. □

اگر $\gamma_{r۲}(G) = ۱$، آن‌گاه G گرافی بدیهی است یعنی همه‌ی گراف‌های G با مرتبه‌ی حداقل ۲ دارای $\gamma_{r۲}(G) \geq ۲$ هستند. گزاره‌ی بعد به گراف‌های G با $\gamma_{r۲}(G) = ۲$ می‌پردازد.

گزاره ۴.۴.۴. [۱۵] *فرض می‌کنیم G گرافی با $|V(G)| = n \geq ۲$ باشد. در این‌صورت داریم:*
$\gamma_{r۲}(G) = ۲$ اگر و تنها اگر $K_{۱,n-۱}$ یا $K_{۲,n-۲}$ زیرگراف فراگیر G باشد.

برهان. اثبات حالت برگشت گزاره بدیهی است. برای اثبات حالت رفت قضیه، نخست فرض می‌کنیم $n = ۲$. در این‌صورت G یا یک یال است و یا دو رأس تنها. اگر G یک یال باشد آن‌گاه $K_{۱,۱}$ زیرگراف فراگیر G

است و اگر دو رأس تنها باشد آن‌گاه $k_{۲,۰}$ زیرگراف فراگیر G است. حال، فرض می‌کنیم $|V(G)| \geq ۳$. از گزاره‌ی (۲.۴.۴) داریم $\gamma(G) \leq \gamma_{r۲}(G) = ۲$. f را یک $\gamma_{r۲}$–تابع روی G می‌گیریم و چون $w(f) = ۲$ پس دو حالت برای تعریف f داریم:

۱) یک رأس $w \in V(G)$ وجود داشته باشد که $f(w) = \{۱, ۲\}$ و به بقیه‌ی رأس‌ها مقدار $\emptyset$ اختصاص داده شود. در این‌صورت $\gamma(G) = ۱$ لذا G دارای زیرگراف $K_{۱,n-۱}$ است.

۲) دو رأس u و v از $V(G)$ وجود داشته باشند به‌طوری که $f(u) = \{۱\}$ و $f(v) = \{۲\}$ و به هر رأس دیگری مقدار $\emptyset$ اختصاص داده شود. در این‌صورت، بنا به تعریف f برای هر $x \in V(G) - \{u, v\}$ داریم $\{u, v\} \subseteq N_G(x)$ و این یعنی $K_{۲,n-۲}$ زیرگراف فراگیری از G است. □

اگر v را رأسی در گراف G بگیریم که $\deg_G(v) = \Delta(G)$ آن‌گاه به‌وضوح، تابع $f : V(G) \to P(\{۱, ۲\})$ با ضابطه‌ی زیر یک 2RDF روی G است:

برای هر $u \in V(G)$،

$$f(u) = \begin{cases} \emptyset & u \in N(v) \\ \{۱\} \text{یا} \{۲\} & u \in V(G) - N[v] \\ \{۱, ۲\} & u = v \end{cases}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \gamma_{r۲}(G) \leq w(f) = |V(G) - N[v]| + ۲ &= |V(G) - N(v)| - ۱ + ۲ \\ &= n - \Delta(G) + ۱. \end{aligned}$$

در نتیجه گزاره‌ی زیر را ثابت کرده‌ایم.

گزاره ۵.۴.۴. [۱۵] *اگر G گرافی از مرتبه‌ی n باشد آن‌گاه $\gamma_{r۲}(G) \leq n - \Delta(G) + ۱$.*

حال با یادآوری از فصل ۱ بر این مطلب که $\bar{G}$ گراف مکمل برای گراف G است، قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۴.۴. [۱۵] *اگر G گرافی از مرتبه‌ی $n \geq ۳$ باشد آن‌گاه $۵ \leq \gamma_{r۲}(G) + \gamma_{r۲}(\bar{G}) \leq n + ۲$. به‌علاوه، در رابطه‌ی اخیر تساوی‌ها نیز می‌توانند اتفاق بیفتند.*

برهان. ابتدا کران پایین را ثابت می‌کنیم. چون G حداقل ۳ رأس دارد پس $\gamma_{r۲}(G) \geq ۲$. می‌دانیم $|V(\bar{G})| = |V(G)|$، پس $\gamma_{r۲}(\bar{G}) \geq ۲$. حال فرض (فرض خلف) کنیم که ۵ یک کران پایین برای $\gamma_{r۲}(G) + \gamma_{r۲}(\bar{G})$ نباشد. در این‌صورت $\gamma_{r۲}(G) = \gamma_{r۲}(\bar{G}) = ۲$. در نتیجه بنا به گزاره‌ی (۴.۴.۴) گراف G دارای زیرگراف فراگیر $K_{۱,n-۱}$ یا $K_{۲,n-۲}$ است و $\bar{G}$ نیز چنین است. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) G دارای زیرگراف فراگیر $K_{۱,n-۱}$ باشد. آن‌گاه بنا به تعریف، $\bar{G}$ دارای یک رأس تنهاست لذا $\gamma_{r۲}(\bar{G}) \geq ۳$ (با توجه به آن‌که $|V(\bar{G})| \geq ۳$) و این تناقض است.

۲) گراف G دارای زیرگراف فراگیر $K_{۲,n-۲}$ باشد. آن‌گاه $|V(G)| \geq ۴$ و $\bar{G}$ شامل دو مولفه است که یکی از آن‌ها یک یال می‌باشد. بنابراین $\gamma_{r۲}(\bar{G}) \geq ۴$ (توجه داریم که $|V(\bar{G})| \geq ۴$) و این تناقض است. پس $\gamma_{r۲}(G) + \gamma_{r۲}(\bar{G}) \geq ۵$. همچنین با توجه به حالت ۱، اگر G (باتوجه به $\bar{G}$) دارای یک رأس احاطه‌گر

باشد (یعنی دارای زیرگراف فراگیر $K_{1,n-1}$ باشد) و $\bar{G}$ نیز (با توجه به G) دارای یک رأس تنها مانند x باشد به‌طوری که $\gamma_{r2}(\bar{G}-x)=2$، آن‌گاه $\gamma_{r2}(G)+\gamma_{r2}(\bar{G})=2+(2+1)=5$.
برای اثبات کران بالا، نخست از گزاره‌ی (۵.۴.۴) داریم

$$\begin{aligned}\gamma_{r2}(G)+\gamma_{r2}(\bar{G}) &\leq (n-\Delta(G)+1)+(n-\Delta(\bar{G})+1)\\ &=(n-\Delta(G)+1)+(\delta(G)+1+1)=n-\Delta(G)+\delta(G)+3\\ &\leq n+3. \end{aligned} \tag{۱۲.۴}$$

حال، اگر $\gamma_{r2}(G)+\gamma_{r2}(\bar{G})=n+3$ آن‌گاه در کل رابطه‌ی (۱۲.۴) تساوی برقرار است. لذا $\Delta(G)=\delta(G)$ و این یعنی به‌ازای یک $k\in\mathbb{Z}$، G گرافی k−منظم است. چون G، k−منظم است پس $\bar{G}$ نیز گرافی $n-k-1$−منظم خواهد بود.بنا به این تقارن برای G و $\bar{G}$، با فرض $k\leq\frac{n-1}{2}$ از کلیت اثبات چیزی کاسته نمی‌شود. چون در سراسر رابطه‌ی (۱۲.۴) تساوی برقرار است، پس

$$\gamma_{r2}(G)=n-\Delta(G)+1=n-k+1 \tag{۱۳.۴}$$

$$\gamma_{r2}(\bar{G})=n-\Delta(\bar{G})+1=n-(n-1-k)+1=k+2. \tag{۱۴.۴}$$

اینک، فرض کنیم $v\in V(G)$. اگر یک رأس $u\in V(G)-N[v]$ حداقل دو همسایه در $G-N[v]$ داشته باشد، تابع f را با ضابطه‌ی زیر روی $V(G)$ تعریف می‌کنیم:
برای هر $s\in V(G)$،

$$f(s)=\begin{cases}\{1,2\} & s\in\{v,u\}\\ \{1\} & s\in V(G)-(N[v]\cup N[u])\\ \emptyset & \text{o.w}\end{cases}.$$

هر رأس با مقدار $\emptyset$ به‌وسیله‌ی u و v احاطه می‌شوند لذا f یک 2RDF است و داریم

$$\begin{aligned}w(f)&=|f(u)|+|f(v)|+[n-|N[v]\cup N[u]|]\\ &\leq 2+2+[n-((k+1)+3)]=n-k\end{aligned}$$

و این با رابطه‌ی (۱۳.۴) درتناقض است. در نتیجه، هر رأس $u\in V(G)-N[v]$ حداقل $k-1$ همسایه در $N[v]$ دارد و چون u خارج از $N[v]$ است پس u نمی‌تواند همسایه‌ای برای v باشد. در نتیجه رأس $u\in V(G)-N[v]$ حداقل $k-1$ همسایه در $N(V)$ دارد. اگر $u\in N(v)$ باشد و حداقل ۳ همسایه در $G-N[v]$ داشته باشد، مجددا همان تابع f تعریف شده روی G در بالا، یک 2RDF روی G با وزن حداکثر $n-k$ است که تناقض است. پس هر $u\in N(v)$ نیز حداکثر ۲ همسایه در $G-N[v]$ دارد.
با این حساب، اگر m تعداد یال‌های بین رأس‌های $N(v)$ و رأس‌های $V(G)-N[v]$ باشد آن‌گاه $(k-1)(n-k-1)\leq m\leq 2k$. چون $k\geq 2$ پس طرف چپ نامعادله‌ی فوق نامنفی است، لذا می‌توانیم از نامعادله‌ی مذکور داشته باشیم $n\leq k+1+\frac{2k}{k-1}$. از طرف دیگر بنا به فرضی که برای مقدار k کردیم (یعنی $k\leq\frac{n-1}{2}$) داریم $n\geq 2k+1$. در نتیجه، از این دو داریم $k\leq\frac{2k}{k-1}$، و این ایجاب می‌کند که $2\leq k\leq 3$.
اگر $k=2$، آن‌گاه $n\leq k+1+\frac{2k}{k-1}=7$ و همچنین $n\geq 2k+1=5$. اما می‌دانیم $\gamma_{r2}(C_5)=3$ و

$\gamma_{r2}(C_7) = \gamma_{r2}(C_6) = 4$ و $2\gamma_{r2}(C_3) = \gamma_{r2}(C_3) + \gamma_{r2}(C_4) = 4$ و این با $\gamma_{r2}(G) = n - k + 1$ در تناقض است. اگر $k = 3$، آن‌گاه $n = 7$ و این نیز تناقض است، چون گراف، ۳–منظم (درجه‌ی هر رأس، فرد است) و از مرتبه‌ی فرد (۷) است (بنا به فصل ۱، تناقض است). برای $K = 1$، تنها مثال، گراف K_2 است که برای آن داریم $\gamma_{r2}(G) + \gamma_{r2}(\bar{G}) = n + 2$. برای $k = 0$، تنها مثال، گراف $G = \bar{G}$ (گراف تهی) است که برای آن نیز داریم $\gamma_{r2}(G) + \gamma_{r2}(\bar{G}) = n + 2$. لذا تساوی برقرار است. از این‌رو $\gamma_{r2}(G) + \gamma_{r2}(\bar{G}) \leq n + 2$. □

برای پرداختن به قضیه بعد، ابتدا لم زیر را می‌بینیم.

لم ۷.۴.۴. (*کوکاین و همکاران.* [۴]) *برای هر* $n \geq 1$ *داریم* $\gamma_R(P_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

قضیه ۸.۴.۴. [۶] *اگر* T *یک درخت از مرتبه‌ی* $n \geq 3$ *باشد، آن‌گاه* $\frac{\gamma_{r2}(T)+\gamma_R(T)}{2} \leq 3\frac{n}{4}$.

برهان. از استقراء روی n استفاده می‌کنیم. اگر $n = 3$ (پایه‌ی استقراء)، آن‌گاه $T \simeq P_3$ لذا (از گزاره‌ی (۱.۲.۲) در فصل۲ و لم (۷.۴.۴)) داریم $3 \cdot \frac{3}{4} > \frac{2+2}{2} = \frac{\gamma_{r2}(T)+\gamma_R(T)}{2}$. بنابراین فرض می‌کنیم $n \geq 4$.
فرض استقراء را برقراری حکم برای هر زیردرخت T' که $3 \leq |V(T')| < n$ می‌گیریم.
قرار می‌دهیم $d = \mathrm{diam}(T)$ و مسیر $x_0 x_1 \ldots x_d$ (مسیر قطری) را در T در نظر می‌گیریم به‌طوری که $\deg_T(x_1) \geq \deg_T(x_{d-1})$. چون T یک یال نیست پس $d \geq 2$.
اگر $d = 2$، آن‌گاه T یک رأس احاطه‌گر دارد که x_1 است. لذا $\deg_T(x_1) = n - 1$ بنابراین با اختصاص $\{1, 2\}$ به x_1 و $\emptyset$ به بقیه‌ی رأس‌ها، یک 2RDF روی T خواهیم داشت لذا $\gamma_{r2}(T) \leq 2$. هم‌چنین با اختصاص ۲ به x_1 و ۰ به بقیه‌ی رأس‌ها، یک تابع احاطه‌گری رومی روی T داریم لذا $\gamma_R(T) \leq 2$ (به‌طور دقیق‌تر $\gamma_R(T) = \gamma_{r2}(T) = 2$).
از این‌رو $3 \cdot \frac{n}{4} > 2 \geq \frac{\gamma_{r2}(T)+\gamma_R(T)}{2}$ (چون $n \geq 4$). بنابراین فرض می‌کنیم $d \geq 3$.
یک یال $e \in E(G)$ را مجاز می‌گوییم هرگاه هر دو مولفه‌ی درخت $T - e$ دارای مرتبه‌ی حداقل ۳ باشند.
حال، با فرض این که T یک یال مجاز e داشته باشد و T_1 و T_2 مولفه‌های درخت $T - e$ باشند، از فرض استقراء برای هر $i = 1, 2$ داریم $\frac{\gamma_{r2}(T_i)+\gamma_R(T_i)}{2} \leq 3\frac{|V(T_i)|}{4}$.
با اضافه کردن یک یال، عدد ۲–احاطه‌گری رنگین‌کمانی و عدد احاطه‌گری رومی افزایش نمی‌یابند لذا $\gamma_{r2}(T) \leq \gamma_{r2}(T - e) = \gamma_{r2}(T_1) + \gamma_{r2}(T_2)$ و $\gamma_R(T) \leq \gamma_R(T - e) = \gamma_R(T_1) + \gamma R(T_2)$
درنتیجه

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_{r2}(T) + \gamma_R(T)}{2} &\leq \frac{\gamma_{r2}(T_1) + \gamma_{r2}(T_2)}{2} + \frac{\gamma_R(T_1) + \gamma_R(T_2)}{2} \\
&= \frac{\gamma_{r2}(T_1) + \gamma_R(T_1)}{2} + \frac{\gamma_{r2}(T_2) + \gamma_R(T_2)}{2} \\
&\leq 3\frac{|V(T_1)|}{4} + 3\frac{|V(T_2)|}{4} \\
&= 3\frac{|V(T_1)| + |V(T_2)|}{4} = 3\frac{n}{4}.
\end{aligned}$$

بنابراین در این حالت حکم برقرار است. فرض می‌کنیم T هیچ یال مجازی ندارد. در این‌صورت، اگر $d \geq 5$ آن‌گاه x_2x_3 یک یال مجاز خواهد بود (یک مولفه شامل حداقل سه رأس x_0، x_1 و x_2 است و مولفه‌ی دیگر

شامل حداقل سه رأس x_3، x_4 و x_5 است) که تناقض است. پس $3 \leq d \leq 4$.
فرض می‌کنیم $d = 3$. آن‌گاه T دارای دو رأس احاطه‌گر x_1 و x_2 است. پس $V(T) = N_T[x_1] \cup N_T[x_2]$.
تابع $f_1 : V(T) \to \{0, 1, 2\}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $u \in V(T)$،

$$f_1(u) = \begin{cases} 2 & u = x_1 \\ 1 & u \in N_T(x_2) - \{x_1\} \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}.$$

همسایگان x_1 به‌وسیله‌ی x_1 احاطه می‌شوند لذا f_1 یک تابع احاطه‌گری رومی روی T است و داریم

$$w(f_1) = f_1(x_1) + |N_T(x_2) - \{x_1\}| = 2 + \deg_T(x_2) - 1 = 1 + \deg_T(x_2).$$

از طرف دیگر، از گزاره‌ی (۲.۴.۴) داریم $\frac{\gamma_{r2}(T)}{2} \leq \frac{\gamma_R(T)}{2}$ در نتیجه

$$\frac{\gamma_{r2}(T) + \gamma_R(T)}{2} \leq \gamma_R(T) \leq 1 + \deg_T(x_2). \qquad (15.4)$$

چون x_1x_2 یک یال مجاز نیست و $\deg_T(x_1) \geq \deg_T(x_2)$ (بنا به فرضی که در شروع اثبات برای مسیر $x_0x_1 \dots x_d$ کردیم) پس $N_T(x_2) = \{x_1, x_3\}$ و از طرف دیگر $n \geq 4$ لذا $\frac{\deg_T(x_1)+\deg_T(x_2)}{2} = \frac{n}{2} \geq \deg_T(x_2)$ ومجددا، بنا به $n \geq 4$ داریم $\deg_T(x_2)+1 \leq \frac{n}{2}+1 \leq 3\frac{n}{4}$ پس در این حالت نیز حکم ثابت شد. در ادامه حکم را برای حالت $d = 4$ ثابت می‌کنیم. به‌ازای هر $y \in N_T(x_2)$، چون x_2y یک یال مجاز نیست و آن مولفه‌ای که شامل رأس x_2 است از مرتبه‌ی حداقل ۳ می‌باشد، پس مولفه‌ی دیگر $T - x_2y$ (یعنی مولفه‌ی شامل رأس y) از مرتبه‌ی حداکثر ۲ است. لذا T درختی است که از یک ستاره با رأس مرکزی x_2 به‌دست آمده به‌طوری که هر یال آن حداکثر یک بار زیرتقسیم شده است. (توجه داشته باشیم که اگر یک همسایه‌ی x_2 مانند y دارای درجه‌ی بیشتر از ۲ باشد، آن‌گاه x_2y یک یال مجاز خواهد بود و این امکان ندارد.) اگر قرار دهیم $X_1 = \{u \in V(T) \colon \mathrm{d}(x_2, u) = 2\}$، آن‌گاه هر رأس عضو X_1 در T دارای درجه‌ی ۱ است. چون هر یال ستاره‌ی اولیه، حداکثر ۱ بار زیرتقسیم شده است تعداد برگ‌های با فاصله‌ی ۲ از x_2، حداکثر برابر با تعداد همسایه‌های x_2 است یعنی $|X_1| \leq \deg_T(x_2)$. با توجه به ساختار T داریم $V(T) = \{x_2\} \cup N_T(x_2) \cup X_1$ لذا $n = 1 + \deg_T(x_2) + |X_1|$.
حال، تابع $f_2 : V(T) \to \{0, 1, 2\}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $u \in V(T)$،

$$f_2(u) = \begin{cases} 2 & u = x_2 \\ 1 & u \in X_1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}.$$

همسایه‌های x_2 به‌وسیله‌ی x_2 احاطه می‌شوند پس f_2 یک تابع احاطه‌گری رومی روی T است درنتیجه $\gamma_R(T) \leq w(f_2) = 2 + |X_1|$ و چون از گزاره‌ی (۲.۴.۴) داریم $\frac{\gamma_{r2}(T)}{2} \leq \frac{\gamma_R(T)}{2}$ پس

$$\frac{\gamma_{r2}(T) + \gamma_R(T)}{2} \leq \gamma_R(T) \leq |X_1| + 2 = \frac{|X_1| + 2}{\deg_T(x_2) + |X_1| + 1}n.$$

به‌این ترتیب، اگر $\frac{|X_1|+2}{\deg_T(x_2)+|X_1|+1} \leq \frac{3}{4}$ آن‌گاه حکم ثابت است. نشان می‌دهیم در حالتی که $\frac{|X_1|+2}{\deg_T(x_2)+|X_1|+1} > \frac{3}{4}$ نیز حکم برقرار است.
اگر $\frac{|X_1|+2}{\deg_T(x_2)+|X_1|+1} > \frac{3}{4}$ آن‌گاه $|X_1| + 4 \geq 3\deg_T(x_2)$ و چون $|X_1| \geq \deg_T(x_2)$ پس

$$|X_1| + 4 \geq 3\deg_T(x_2) \geq 3|X_1| \qquad (16.4)$$

یعنی $۲ \leq |X_۱|$. چون $x_۰, x_۴ \in X_۱$ پس $|X_۱| = ۲$. از $|X_۱| = ۲$ و رابطه‌ی (۱۶.۴) داریم $\deg_T(x_۲) = |X_۱| = ۲$ و از این‌رو $T \simeq P_۵$. لذا از گزاره‌ی (۱.۲.۲) در فصل ۲ و لم (۷.۴.۴) داریم $\frac{\gamma_{r۲}(T)+\gamma_R(T)}{۲} = \frac{۴+۳}{۲} < ۳\frac{۵}{۴}$ و اثبات کامل شد.

$\square$

فرض می‌کنیم T درخت فراگیر گراف همبند G از مرتبه‌ی حداقل ۳ باشد. آن‌گاه $\frac{\gamma_{r۲}(T)+\gamma_R(T)}{۲} \leq ۳\cdot\frac{n}{۴}$. با افزایش تعداد یال‌ها، عدد ۲–احاطه‌گری رنگین‌کمانی و عدد احاطه‌گری رومی افزایش نمی‌یابند (بلکه ممکن است کاهش یابند)، در نتیجه $\frac{\gamma_{r۲}(G)+\gamma_R(G)}{۲} \leq ۳\cdot\frac{n}{۴}$. این مطلب را به‌صورت نتیجه‌ی بعدی می‌آوریم.

نتیجه ۲.۴.۴. [۶] اگر G گراف همبندی از مرتبه‌ی $n \geq ۳$ باشد، آن‌گاه $\frac{\gamma_{r۲}(G)+\gamma_R(G)}{۲} \leq ۳\cdot\frac{n}{۴}$.

وو [۹] و جعفری‌راد [۱۰] در قضیه (۳.۲.۴) و نتیجه‌ی (۱.۲.۴) رده‌ی خاصی از گراف‌های A_n را معرفی کردند که $\gamma_{r۲}(A_n) = ۳\frac{n}{۴}$. اینک، چون از گزاره‌ی (۲.۴.۴) داریم $\gamma_{r۲}(A_n) \leq \gamma_R(A_n)$، پس $\gamma_R(A_n) \geq ۳\frac{n}{۴}$ و از این‌رو $\frac{\gamma_{r۲}(A_n)+\gamma_R(A_n)}{۲} \geq ۳\cdot\frac{n}{۴}$. لذا کران بالا در نتیجه‌ی (۲.۴.۴) در دسترس (دقیق) است.

برای هر گراف G با مرتبه‌ی حداقل ۳ از گزاره‌ی (۲.۴.۴) داریم $\frac{\gamma_{r۲}(G)}{۲} \leq \frac{\gamma_R(G)}{۲}$، در نتیجه $\gamma_{r۲}(G) \leq \frac{\gamma_{r۲}(G)+\gamma_R(G)}{۲} \leq ۳\cdot\frac{n}{۴}$ که از نتیجه‌ی (۲.۴.۴) به‌دست آمد. به این‌ترتیب، نتیجه‌ی مهم قضایای (۲.۲.۴) و (۳.۲.۴) را به روشی دیگر ثابت کرده‌ایم.
در این‌جا حدسی مرتبط با نتیجه‌ی (۲.۴.۴) را می‌آوریم.

حدس ۱.۴.۴. [۶] اگر G گرافی همبند از مرتبه‌ی $n \geq ۳$ و $\delta(G) \geq ۲$ باشد و $G \not\simeq C_۵$، آن‌گاه $\frac{\gamma_{r۲}(G)+\gamma_R(G)}{۲} \leq ۲\frac{n}{۳}$.

اگر حدس فوق درست باشد، آن‌گاه قضیه‌ی (۷.۲.۴) از آن نتیجه می‌شود.

لم ۹.۴.۴. *(کوکاین و همکاران. [۴]) فرض کنیم f یک γ_R–تابع روی گراف G باشد. در این‌صورت، هیچ یالی از G بین رأس‌های مجموعه‌ی $\{v \in V(G) \colon f(v) = ۱\}$ و مجموعه‌ی $\{v \in V(G) \colon f(v) = ۲\}$ وجود ندارد.*

مجددا یادآوری می‌کنیم که از گزاره‌ی (۲.۴.۴) برای هر گراف G داریم $\gamma_{r۲}(G) \leq \gamma_R(G)$. اکنون برعکس این مطلب، کران بالایی برای $\gamma_R(G)$ ارایه می‌دهیم که برحسب $\gamma_{r۲}(G)$ می‌باشد.

گزاره ۱۰.۴.۴. [۶] *برای هر گراف G داریم* $\gamma_R(G) \leq ۳\frac{\gamma_{r۲}(G)}{۲}$.

برهان. f را یک $\gamma_{r۲}$–تابع روی G می‌گیریم و فرض می‌کنیم برای $i = ۱, ۲$، $X_i = \{u \colon i \in f(u)\}$. بنابراین $\gamma_{r۲}(G) = w(f) = |X_۱| + |X_۲|$. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $|X_۲| \leq |X_۱|$. در این‌صورت $\frac{|X_۲|}{۲} \leq \frac{|X_۱|}{۲}$ بنابراین $\frac{\gamma_{r۲}(G)}{۲} = \frac{|X_۱|+|X_۲|}{۲} \leq |X_۱|$.

[۹] Wu
[۱۰] Jafari Rad

حال، تابع $g : V(G) \to \{۰, ۱, ۲\}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $u \in V(G)$،

$$g(u) = \begin{cases} ۰ & u \in \{x \in V(G) \colon f(x) = \emptyset\} \\ ۱ & u \in \{x \in V(G) \colon f(x) = \{۲\}\} \\ ۲ & u \in \{x \in V(G) \colon ۱ \in f(x)\} \end{cases}.$$

چون f یک $\gamma_{r۲}$−تابع روی G است، پس اگر $g(u) = ۰$ (یعنی $f(u) = \emptyset$) آن‌گاه یک رأس $v \in N_G(u)$ وجود دارد به‌طوری که $g(v) = ۲$ (یعنی $۱ \in f(v)$). لذا g یک تابع احاطه‌گری رومی روی G است و داریم

$$w(G) \leq ۲|X_۱| + |X_۲| = |X_۱| + (|X_۱| + |X_۲|) \leq \frac{\gamma_{r۲}(G)}{۲} + \gamma_{r۲}(G). \qquad (۱۷.۴)$$

از این‌رو $\gamma_R(G) \leq ۳\frac{\gamma_{r۲}(G)}{۲}$.
(توجه می‌کنیم که اگر $u \in X_۲$، آن‌گاه لزوما $g(u)$ برابر ۱ نیست لذا در رابطه‌ی (۱۷.۴) وزن تابع g حداکثر برابر با $۲|X_۱| + |X_۲|$ است و نه دقیقا برابر با آن.) □

قضیه ۱۱.۴.۴. *(فوجیتا و فورویا. [۶]) فرض می‌کنیم برای هر گراف H، $\mu(H)$ متغیری از این گراف باشد به‌طوری که $۰ \leq \mu(H) \leq \gamma_R(H)$. G را گراف همبندی از مرتبه‌ی n می‌گیریم و فرض می‌کنیم $k \geq ۰$ یک عدد صحیح باشد. در این‌صورت، $\gamma_R(G) = \mu(G) + k$ اگر و تنها اگر هر دو شرط زیر برای G برقرار باشد:*

i) $V(G)$ شامل یک زیر مجموعه‌ی U نباشد به‌طوری که

$$n - \mu(G) + ۲|U| - k + ۱ \leq |N_G[u]| \leq n - \mu(G) + ۲|U|.$$

ii) $V(G)$ شامل یک زیرمجموعه‌ی U باشد به‌طوری که $|N_G[U]| = n - \mu(G) + ۲|U| - k$.

با یادآوری $\gamma_{r۲}(G) \leq \gamma_R(G) \leq ۳\frac{\gamma_{r۲}(G)}{۲}$ (از گزاره‌های (۲.۴.۴) و (۱۰.۴.۴)) سراغ نتیجه‌ی بعد می‌رویم که از قضیه (۱۱.۴.۴) به سادگی به دست می‌آید.

نتیجه ۳.۴.۴. [۶] فرض می‌کنیم G یک گراف همبند از مرتبه‌ی n باشد و k یک عدد صحیح که $۰ \leq k \leq \frac{\gamma_{r۲}(G)}{۲}$ است. در این‌صورت $\gamma_R(G) = \gamma_{r۲}(G) + k$ اگر و تنها اگر هر دو شرط زیر برقرار باشند:

i) $V(G)$ شامل یک زیر مجموعه‌ی U نباشد به‌طوری که

$$n - \gamma_{r۲}(G) + ۲|U| - k + ۱ \leq |N_G[u]| \leq n - \gamma_{r۲}(G) + ۲|U|$$

ii) $V(G)$ شامل یک زیرمجموعه‌ی U باشد به‌طوری که $|N_G[U]| = n - \gamma_{r۲}(G) + ۲|U| - k$.

توجه داریم که در نتیجه‌ی فوق، شرط $k \leq \frac{\gamma_{r۲}(G)}{۲}$ برای نقض نشدن $\gamma_R(G) \leq ۳\frac{\gamma_{r۲}(G)}{۲}$ می‌باشد.

مراجع

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, Fifth printing. Elsevier, New York (1982).

[2] B. Bresar, T. K. Sumenjak, *On the 2-rainbow domination in graphs*, Discrete Appl. Math. 155 (2007) 2394-2400.

[3] B. Bresar, M. A. Henning, D. F. Rall, *Rainbow domination in graphs*, Taiwanese J. Math. 12, 201-213 (2008).

[4] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer Jr, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, *Roman domination in graphs*, Discrete Math. 278 (2004) 11-22.

[5] O. Favaron, H. Karami, R. Khoeilar, S. M. Sheikholeslami, *On the Roman domination number of a graph*, Discrete Math. 309 (2009) 3447-3451.

[6] S. Fujita, M. Furuya, *Diffrence between 2-rainbow domination and Roman domination in graphs*, Discrete Appl. Math. 161 (2013) 806-812.

[7] A. Hansberg, N. Jafari Rad and L. Volkmann *Vertex and edge critical Roman domination in graphs*, Utilitas Mathematica. 92 (2013) 73-96.

[8] A. Hansberg, N. Jafari Rad and L. Volkmann, *Characterization of Roman domination critical unicyclic graphs*, Utilitas Mathematica. 86 (2011) 129-146.

[9] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs* , Marcel Dekker, New york, 1998.

[10] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater (Eds.), *Domination in Graphs: Advanced Topics* , Marcel Dekker, New york, 1998.

[11] N. Jafari. Rad, *Critical concept for 2-rainbow domination in graphs* , Australasian J. Combinatorics, 51 (2011) 49-60.

[12] Chunling Tong, Xiaohui Lin, Yuansheng Yang, Meiqin Luo, *2-rainbow domination of generalized Petersen garphs P(n,2)*, Discrete Appl. Math. 157 (2009) 1932-1937.

[13] V. G. Vizing, *Some unsolved problems in graph theory*, Uspekhi Mat. Nauk 23 (1968) 117-134.

[14] M. Watkins, *A theorem on tait colorings with an application to the generalized Petersen graph*, Journal of Combinatorial Theory 6 (1969) 152-164.

[15] Y. Wu, H. Xing, *Note on 2-rainbow domination and Roman domination in graphs*, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 706-709.

[16] Y. Wu, N. Jafari. Rad, *Bounds on the 2-rainbow domination number of graphs*, Graphs and Combinatorics, 29 (2013) 1125-1133.

[17] G. Xu, *2-rainbow domination in generalized Petersen graphs P(n,3)*, Discrete Appl. Math. 157 (2009) 2570-2573.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

برگ .... leaf

تابع احاطه‌گری رومی .... Roman dominating function

تابع k-احاطه‌گری رنگین‌کمانی .... k-rainbow dominating function

تابع k-احاطه‌گری رومی .... k-Roman dominating function

تاج .... corona

دور .... cycle

رأس پشتیبان .... support vertex

زیرتقسیم .... subdivision

عدد احاطه‌گری .... domination number

عنکبوت(عنکبوت زخمی) .... spider(wounded spider)

قطر .... diameter

گذرگاه .... trail

گراف پترسن توسعه یافته .... generalized Petersen graph

گراف خورشید .... sun graph

گراف ستاره .... star graph

گراف ستاره‌ی دوگانه .... double-star graph

گراف وتری .... chordal graph

مجموعه‌ی احاطه‌گر .... dominating set

مجموعه‌ی همسایگی خصوصی باز .... open private neighbor set

مجموعه‌ی همسایگی خصوصی بسته .... closed private neighbor set

مسیر .... path

همسایگی باز .... open neighborhood

همسایگی بسته .... closed neighborhood

یال آویزان .... pendant edge

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

گراف وتری	chordal graph
همسایگی بسته	closed neighborhood
مجموعه‌ی همسایگی خصوصی بسته	closed private neighbor set
تاج	corona
بحرانی	critical
دور	cycle
قطر	diameter
مجموعه‌ی احاطه‌گر	dominating set
عدد احاطه‌گری	domination number
گراف ستاره‌ی دوگانه	double-star graph
گراف پترسن توسعه یافته	generalized petersen graph
تابع k-احاطه‌گری رنگین‌کمانی	k-rainbow dominating function
تابع k-احاطه‌گری رومی	k-Roman dominating function
برگ	leaf
همسایگی باز	open neighborhood
مجموعه‌ی همسایگی خصوصی باز	open private neighbor set
مسیر	path
یال آویزان	pendant edge
تابع احاطه‌گری رومی	Roman dominating function
عنکبوت(عنکبوت زخمی)	spider(wounded spider)

گراف ستاره .... star graph

زیرتقسیم .... subdivision

گراف خورشید .... sun graph

رأس پشتیبان .... support vertex

گذرگاه .... trail

Aabstract

For an arbitrary graph G, a function $f : V(G) \to P(\{1,2\})$ is called a 2-rainbow dominating function (or simply 2RDF) of G, if for each vertex $v \in V(G)$ such that $f(v) = \emptyset$, $\bigcup_{u \in N(v)} f(u) = \{1,2\}$. The weight of a 2-rainbow dominating function f with notation $w(f)$ is defined as $w(f) = \sum_{v \in V(G)} |f(v)|$. The minimum weight of a 2RDF of G over all such functions is called the 2-rainbow domination number of G, and is denoted by $\gamma_{r2}(G)$.
In the first chapter of this dissertation, we state required definitions and theorems of graph theory. In Chapter 2, we give exact values of 2-rainbow domination number in *paths, cycles* and *sun graphs.* We also give some bounds for the 2-rainbow domination number of *generalized Petersen graphs* $GP(n,k)$. In Chapter 3, we study *critical* concept for 2-rainbow domination in graphs, and we obtain characterizations of *2-rainbow domination vertex (edge) critical graphs* and *2-rainbow domination vertex (edge) super critical graphs.* Finally, in Chapter 4, we present several sharp lower and upper bounds for γ_{r2} of an arbitrary graph. Moreover, we study the relationship between 2-rainbow domination and other kinds of domination in graphs.
Keywords:
Domination, Domination number, Rainbow domination

Shahrood University of Technology
Faculty of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in

Applied Mathematics

Results on rainbow domination in graphs

Supervisor

Dr. Nader Jafari Rad

by

Seyed Mohammad Hosseini

January 2014