دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گزارش نهایی طرح پژوهشی

تعیین قطر در گرافهای احاطه بحرانی انقباضی

مجری طرح :

نادر جعفری راد

عضو هیئت علمی دانشکده ریاضی

کد طرح ۲۳۰۱۸

پاییز۱۳۸۷

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است وتاریخ تصویب و خاتمه آن به ترتیب ۸۷/۳/۵ و ۸۷/۸/۲۶ می باشد .

فهرست مطالب

چکیده:

راس v در یک گراف G را یک راس احاطه بحرانی نامیم هرگاه عدد احاطه کنندگی گراف G-v حاصل از حذف راس v کوچکتر از عدد احاطه کنندگی گراف G باشد.

گراف G را یک گراف احاطه بحرانی انقباضی نامیم هرگاه عدد احاطه کنندگی آن با انقباض هر یال از گراف کاهش پیدا کند. G را گرافی k- احاطه بحرانی انقباضی نامیم هرگاه G گرافی احاطه بحرانی انقباضی باشد و عدد احاطه کنندگی آن k باشد. ***T.Burton*** و ***D.P.Sumner*** در سال ۲۰۰۶ در مقاله

[Domination dot-critical graphs, Discrete Mathematics, 306 (2006), 11-18]

حد اکثر قطر گرافهای۳- احاطه بحرانی انقباضی G که فاقد راس بحرانی هستند را بدست آورده و مساله تعیین حد اکثر قطر را برای حالتهای با $k \geq 4$ به عنوان مساله باز مطرح نمودند. مساله فوق در حالت خاص $k=4$ در سال ۲۰۰۷ توسط ***Z.Chengye*** و همکاران او حل شد. اما برای $k \geq 5$ این مساله همچنان باز می باشد. در این پژوهش مساله فوق را بررسی و با ارائه حد اکثر قطر در حالت کلی مساله جوابی برای آن ارائه نمودهایم. نتایج حاصل از این طرح جهت چاپ در مجله بسیار قوی ***Discrete Applied Mathematics*** پذیرفته شده است.

فصل اول

مفاهیم اولیه و مقدمات

در این فصل به ارائه برخی از تعاریف، مفاهیم و قضایای نظریه گراف که از آنها استفاده می‌کنیم می‌پردازیم. منظور از یک گراف، همواره یک گراف ساده است. یک گراف ساده زوجی به صورت $G=(V,E)$ است که در آن V مجموعه ای از نقاط موسوم به راسها و E مجموعه ای از زیر مجموعه های دو عضوی V است. هر عنصر $e=\{u,v\}$ از E را یک یال نامیده و آن را برای سادگی با uv نشان می دهیم.

۱-۱ احاطه‌کنندگی راسی

تعریف ۱-۱-۱: در یک گراف G مجموعه $S\subseteq V(G)$ را یک مجموعه احاطه‌کننده می‌نامیم هرگاه هر راس از $V(G)-S$ با حداقل یکی از راسهای S مجاور باشد. عدد احاطه‌کنندگی گراف G کمترین اندازه در میان اندازه‌های مجموعه‌های احاطه‌کننده برای G است و آن را با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

هم‌چنین بزرگترین اندازه در بین مجموعه‌های احاطه‌کننده می‌نیمال برای گراف G را با $\Gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

برای راس x از گراف G منظور از همسایگی x که با $N(x)$ نشان داده می‌شود مجموعه تمام راسهای مجاور با x در گراف G است و همسایگی بسته x به صورت زیر $N[x]=N(x)\cup\{x\}$ تعریف می‌شود.

هم‌چنین برای یک زیرمجموعه S از راسهای G همسایگی S در G عبارتست از $N(S)=x\in S\cup N(x)$

و همسایگی بسته S عبارتست از $N[S]=N(S)\cup S$. بنابراین مجموعه S یک مجموعه احاطه‌کننده است هرگاه $N[S]=V(G)$.

قضیه ۱-۱-۲: اگر G گرافی بدون راس تنها باشد آنگاه $\gamma(G)\leq\frac{|V(G)|}{2}$.

برای یک زیر مجموعه S از راسهای گراف G فرض کنید $G[S]$ زیرگراف القایی توسط S باشد.

زیرمجموعه S از مجموعه راسهای گراف G را مستقل نامیم هرگاه هیچ دو راسی از S در گراف G مجاور نباشند.

تعریف ۱-۱-۳: فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌کننده در گراف G باشد در این صورت S را مجموعه‌ای احاطه‌کننده باز یا کامل نامیم هرگاه $G[S]$ راس تنها نداشته باشد.

کوچکترین اندازه مجموعه S در تعریف فوق را عدد احاطه‌کنندگی باز یا کامل گراف G نامیده و با $\gamma_t(G)$ نشان می‌دهیم.

گراف $K_{1,3}$ را پنجه می‌نامیم و منظور از یک گراف بدون پنجه گرافی است که هیچ زیرگرافی القایی یکریخت با $K_{1,3}$ نداشته باشد.

قضیه ۱-۱-٤ : هر گراف بدون پنجه G دارای یک مجموعه احاطه‌کننده مستقل با اندازه $\gamma(G)$ است.

اندازه بزرگترین مجموعه مستقل در گراف G را با $\beta_0(G)$ نشان می‌دهیم.

ویزینگ در سال ۱۹۶۸ مجموعه‌های احاطه‌کننده را در گرافهای حاصل‌ضربی بررسی کرده و حدس زیر را ارائه داد:

حدس ۱-۱-۵(ویزینگ): برای هر دو گراف G و H، $\gamma(G\times H)\geq\gamma(G)\gamma(H)$.

درستی حدس فوق برای بسیاری از دسته‌های گراف‌ها ثابت شده است. اما در حالت کلی هنوز این حدس اثبات یا رد نشده است.

تعریف ۱-۱-٦: گراف G در حدس ویزینگ صدق می‌کند هرگاه برای هر گراف H، $\gamma(G\times H)\geq\gamma(G)\gamma(H)$.

قضیه ۱-۱-۷: اگر $\gamma(G)=1$ یا ۲ آن گاه G در حدس ویزینگ صدق می‌کند.

تعریف ۱-۱-۸: مجموعه احاطه‌کننده S را مجموعه‌ای احاطه‌کننده قوی نامیم هرگاه هر راس x در $V(G)-S$ توسط راسی مانند y از S احاطه شود به طوریکه $deg(y)\geq deg(x)$ کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌کننده قوی در گراف G را با $\gamma_s(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۹: یک ۲ بسته‌بندی از گراف **G**، زیر مجموعه‌ای از راسها مانند **S** است که برای هر $x,y\in S$ داشته باشیم $N[x]\cap N[y]=\phi$. عدد ۲ بسته‌بندی **G** که با $\rho_2(G)$ نشان داده می‌شود کوچکترین اندازه یک ۲ بسته‌بندی گراف **G** می‌باشد.

قضیه ۱-۱-۱۰: برای هر گراف **G**، $\rho(G)\leq\gamma(G)$.

منظور از یک $\gamma(G)-$ مجموعه، مجموعه‌ای احاطه‌کننده از اندازه $\gamma(G)$ خواهد بود و منظور از یک $\gamma_c(G)-$ مجموعه، مجموعه‌ای احاطه‌کننده همبند از اندازه $\gamma_c(G)$ خواهد بود. به همین ترتیب عبارتهای $\gamma_t(G)-$ مجموعه، $i(G)-$ مجموعه، $\beta_0(G)-$ مجموعه و $\Gamma(G)-$ مجموعه با مفاهیم مربوطه به کار می‌روند. برای مطالعه بیشتر در زمینه مجموعه‌های احاطه‌کننده و انواع آن خواننده را به مرجع *[8]* ارجاع می‌دهیم.

1-۲- گرافهای احاطه بحرانی

در سال ۱۹۹۱ فرانک هرری و سایرین مسئله دسته‌بندی شش رده زیر از گرافها را بررسی کردند *[8]*

فرض کنید **G-v** (و به صورت مشابه **G-e**) گراف بدست آمده از **G** با حذف راس **v** (و یا با حذف یال **e**) باشد. رده‌ها بصورت زیر هستند.

۱) برای هر $v\in V(G)$, $\gamma(G-v)\neq\gamma(G)$

۲) برای هر $e\in E(G)$, $\gamma(G-e)\neq\gamma(G)$

۳) برای هر $e\in E(\overline{G})$, $\gamma(G+e)\neq\gamma(G)$

۴) برای هر $v\in V(G)$, $\gamma(G-v)=\gamma(G)$

۵) برای هر $e\in E(G)$, $\gamma(G-e)=\gamma(G)$

۶) برای هر $e\in E(\overline{G})$, $\gamma(G+e)=\gamma(G)$

می‌توان راسهای گراف G را بصورت زیر افراز کرد

$$V(G)=V^{\cdot}\cup V^{+}\cup V^{-}$$

که در آن

$$V^{\cdot}=\{v\in V(G):\ \gamma(G-v)=\gamma(G)\}$$

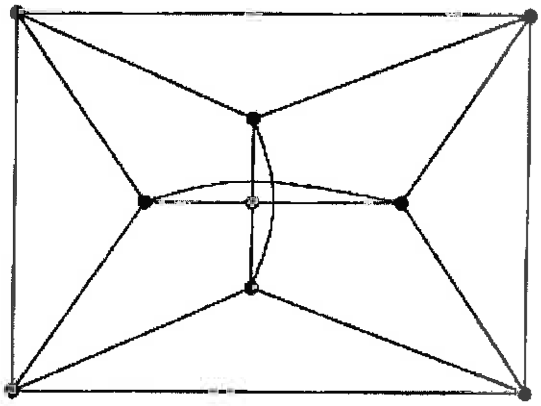
$$V^{+}=\{v\in V(G):\ \gamma(G-v)>\gamma(G)\}$$

$$V^{-}=\{v\in V(G):\ \gamma(G-v)<\gamma(G)\}$$

بسیاری از پژوهشهای جدید نظریه گراف پیرامون این دسته بندی هاست که ما در این نوشتار به دو مورد از آنها اشاره می کنیم.

تعریف *1*-۲-۱: گراف G را احاطه بحرانی نامیم هرگاه $V^{-}=V(G)$. همچنین هر راس در V^{-} را یک راس احاطه بحرانی می نامیم. لذا یک گراف G احاطه بحرانی است هرگاه هر راس آن احاطه بحرانی باشد.

مثال *1*-۲-*2*: گراف زیرگرافی احاطه بحرانی با $\gamma(G)=۳$ است.



شکل ۱-۱

برای راس v از گراف G و مجموعه احاطه کننده S همسایگی اختصاصی v در S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $P_n[v,S]=\{u:N[u]\cap S=\{v\}\}$.

قضیه *1*-۲-*3* : $v\in V^-$ اگر و تنها اگر به ازای یک مجموعه احاطه کننده می‌نیمم S داشته باشیم $P_n[v,S]=\{v\}$.

نتیجه ۱-۲- *4*: گراف G احاطه بحرانی است اگر و تنها اگر برای هر راس v مجموعه احاطه کننده می‌نیمم S موجود باشد به طوری که $P_n[v,S]=\{v\}$.

قضیه *1*-۲-*5* : اگر G گرافی احاطه بحرانی از مرتبه $n=(\Delta(G)+1)(\gamma(G)-1)+1$ باشد آن‌گاه G گرافی منتظم است.

1-۳ گرافهای احاطه کلی بحرانی

Haynes و سایرین در سال ۲۰۰۴ مفهوم احاطه بحرانی را به احاطه کلی بحرانی تعمیم دادند. فرض کنید ***S(G)*** مجموعه راسهای پشتیبان گراف G باشند که بنا به تعریف راسهایی هستند که دارای مجاوری با درجه یک در گراف G می‌باشند.

تعریف *1*-۳-۱: گراف G را احاطه کلی بحرانی یا احاطه مطلق بحرانی نامیم هرگاه برای هر راس $v\in V(G)-S(G)$ داشته باشیم $\gamma_t(G-v)<\gamma_t(G)$. اگر گراف G احاطه کلی بحرانی باشد و $G,\gamma_t(G)=k$ را k-احاطه کلی بحرانی می‌نامیم.

در ذیل مثالهایی از این گرافها را داریم. لازم به ذکر است که یک دور $n-$ راسی با C_n نمایش داده می شود.

مثال *1*-۳-۲: دور C_5 گرافی ۳- احاطه کلی بحرانی است.

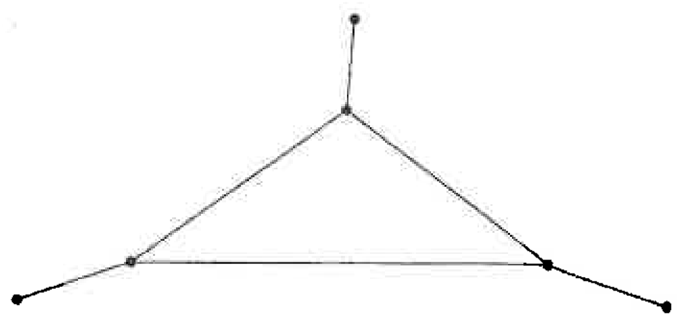
مثال *1*-۳-۳: دور C_6 گرافی ۴- احاطه کلی بحرانی است.

گزاره 1-۳-4: اگر G گـرافی احاطه کلی بحـرانی باشد آن گاه برای هر راس $v \in V(G) - S(G)$ داریم $\gamma_t(G - v) = \gamma_t(G) - 1$. به علاوه یک $\gamma_t(G - v)$ - مجموعه شامل هیچ راسی مجاور با v نمی‌باشد.

گزاره 1-۳-۵: اگر v,u دو راس غیرمجاور در گراف G باشند به طوریکه v راسی غیر پشتیبان بوده و $N(u) \subseteq N(v)$ آن‌گاه G گرافی احاطه کلی بحرانی نیست.

تعریف 1-۳-٦: تاج یک گراف G گرافی است حاصل از G به طوری که به هر راس یک یال آویزان مجاور شده است و آن را با $Cor(G)$ نشان می‌دهیم.

مثال 1-۳-۷: $Cor(C_3)$ به صورت زیر می‌باشد.



شکل ۱-۲

Goddard و همکاران در مقاله

The diameter of total domination vertex critical graphs, Discrete Mathematics 286 (2004), 255-261.

در سال ۲۰۰۴ گرافهای احاطه کلی بحرانی که دارای راس آویزان هستند را دسته‌بندی کردند.

قضیه 1-۳-۸: فرض کنید G گرافی با حداقل سه راس باشد که دارای راس آویزان است. در این صورت G،k-احاطه کلی بحرانی است اگر و تنها اگر $G=Cor(H)$ که در آن H گرافی همبند از مرتبه k با $\delta(H)\geq ۲$ باشد.

بنابر این نتیجه قوی زیر برای یک درخت حاصل می شود.

نتیجه 1-۳-۹: هیچ درختی احاطه کلی بحرانی نیست.

نتیجه دیگر در مورد قطر یک گراف k-احاطه کلی بحرانی با حداقل یک راس آویزان به صورت زیر است.

نتیجه 1-۳-۱۰: اگر G گرافی k-احاطه کلی بحرانی با حداقل یک راس آویزان باشد آن گاه:

۱) اگر $k\in\{۳,۴\}$ آن‌گاه $diam(G)\leq k$.

۲) اگر $k\geq ۵$ آن‌گاه $diam(G)\leq k-1$

سپس گرافهای فاقد راس آویزان مورد بررسی واقع شده و نتایج زیر حاصل شد.

گزاره 1-۳-۱۱: دور C_n گرافی احاطه کلی بحرانی است اگر و تنها اگر (پیمانه ۴) $n\equiv 1,2$.

گزاره 1-۳-۱۲: قطر یک گراف k-احاطه کلی بحرانی حداکثر $۲k$-۳ است.

کران فوق برای قطر یک گراف k-احاطه کلی بحرانی به ازای $k\leq ۸$ به صورت زیر ترمیم یافت.

قضیه 1-۳-۱۳: برای $k\leq ۸$ قطر یک گراف k-احاطه کلی بحرانی حداکثر بصورت زیر است.

k	۳	۴	۵	۶	۷	۸
diam	۳	۴	۶	۷	۹	۱۱

لازم به ذکر است که مساله تعیین قطر در گرافهای k-احاطه کلی بحرانی برای سایر مقادیر k تا کنون باز مانده است. همچنین با توجه به گزاره زیر آنها گرافهایی ساختند که کران‌های قضیه ۵-۲-۱۳ برای آنها قابل دسترسی باشد.

گزاره 1-۳-۱٤: فرض کنید F و H به ترتیب گرافهایی k- احاطه کلی بحرانی و j- احاطه کلی بحرانی با می‌نیمم درجه حداقل ۲ باشند و فرض کنید یک راس از F را بر یک راس از H منطبق نموده و گراف دیگری مانند G بدست آورده‌ایم. اگر $\gamma_t(G) = j+k-1$، آن‌گاه G گرافی احاطه کلی بحرانی است.

کاربرد دیگر گزاره فوق آن است که از گرافهایی احاطه کلی بحرانی مرتبه های کوچکتر می توان گرافهایی احاطه کلی بحرانی مرتبه های بزرگتر به دست آورد.

4-1 گرافهای احاطه بحرانی انقباضی

در سال ۲۰۰۶ **T.Burton** و **D.P.Sumner** در مقاله

Domination dot-critical graphs, Discrete Mathematics, 306 (2006, 11-18

گرافهایی را بررسی کردند که انقباض هر یال آنها منجر به کاهش عدد احاطه کنندگی آنها میشود. فرض کنید uv یالی در گراف G بوده و H گرافی باشد که با انقباض یال uv به دست آمده باشد. در این صورت H را با $G.(uv)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-٤-۱: گراف G را گرافی احاطه بحرانی انقباضی نامیم هرگاه $\gamma(G.(uv)) < \gamma(G)$ برای هر یال uv از گراف G . اگر G گرافی احاطه بحرانی انقباضی باشد و $\gamma(G) = k$ آنگاه G را گرافی k- احاطه بحرانی انقباضی گوییم.

به سادگی میتوان دید که انقباض یک یال عدد احاطه کنندگی گراف را بیش از یک واحد کاهش نمی دهد. لذا نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱-٤-۲: اگر G گرافی احاطه بحرانی انقباضی باشد آنگاه برای هر یال uv خواهیم داشت

$.\gamma(G.(uv)) = \gamma(G) - 1$

لم ۱-٤-۳: فرض کنید a و b راسهایی از گراف G باشند. در این صورت $\gamma(G.(ab)) < \gamma(G)$ اگر و تنها اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱- یک مجموعه احاطه کننده مینیمم S شامل a و b موجود باشد.

۲- حداقل یکی از راسهای a یا b بحرانی باشد.

نتیجه ۱-٤-٤: اگر گراف G فاقد راس احاطه بحرانی باشد آنگاه G احاطه بحرانی انقباضی است اگر و تنها اگر هر دو راس مجاور آن متعلق به یک مجموعه احاطه کننده مینیمم باشند.

گرافهای احاطه بحرانی انقباضی لزوما همبند نیستند. در حالت ناهمبندی هر مولفه آن احاطه بحرانی انقباضی خواهد بود.

لم ۱-٤-۵: گراف ناهمبند G احاطه بحرانی انقباضی است اگر و تنها اگر هر مولفه آن احاطه بحرانی انقباضی باشد.

T.Burton و ***D.P.Sumner*** گرافهای ۲- احاطه بحرانی انقباضی را دسته بندی کردند. آنها سپس گرافهایی را در نظر گرفتند که فاقد راسهای احاطه بحرانی بودند. برای یک گراف G فرض کنید G' مجموعه راسهای احاطه بحرانی G باشد.

قضیه ۱-٤-٦: فرض کنید G گرافی با $G'=\{\}$ باشد. در این صورت G گرافی احاطه بحرانی انقباضی است اگر و تنها اگر G گرافی دوبخشی باشد و هر بخش آن حد اقل باشد.

لم ۱-٤-۷: فرض کنید G گرافی احاطه بحرانی انقباضی باشد. اگر برای دو راس u و v داشته باشیم $N[u] \subseteq N[v]$ آنگاه $v \in G'$.

لذا برای گرافهای دارای راس آویزان نتیجه زیر حاصل می شود.

نتیجه ۱-٤-۸: هر راس آویزان در یک گراف احاطه بحرانی انقباضی راسی احاطه بحرانی است.

T.Burton و ***D.P.Sumner*** سپس قطر گرافهای احاطه بحرانی انقباضی را بررسی کردند. آنها برای یک گراف ۳- احاطه بحرانی انقباضی قضیه زیر را ارائه کردند.

قضیه ۱-٤-۹: قطر یک گراف۳- احاطه بحرانی انقباضی G با $G'=\{\}$ حد اکثر ۳ است.

در پایان آنها مساله باز زیر را برای $k \geq 4$ مطرح کردند.

مساله باز: بهترین کران بالا برای قطر یک گراف k- احاطه بحرانی انقباضی G با $G'=\{\}$ چیست؟

Z.Chengye و همکاران او در سال ۲۰۰۷ در مقاله

Domination dot-critical graphs with no critical vertices, Discrete Mathematics, In press

این مساله را برای $k=4$ حل کردند.

قضیه ۱-٤-۱۰: قطر یک گراف۴- احاطه بحرانی انقباضی G با $G'=\{\}$ حد اکثر ۵ است.

اما مساله تعیین قطر برای $k \geq 5$ همچنان باز می باشد. در این پژوهش سعی بر آن است تا مساله فوق را با ارائه حد اکثر قطر در حالت کلی حل کنیم.

فصل دوم

تعیین قطر گرافهای احاطه بحرانی انقباضی

فرض کنید $k \geq 5$ عددی طبیعی باشد.در این فصل حداکثر قطر را برای یک گراف k –احاطه بحرانی انقباضی G که فاقد راس بحرانی است تعیین می کنیم.

لم 1-2 : فرض کنید S یک مجموعه احاطه کننده می‌نیمم برای گراف k- احاطه بحرانی انقباضی G باشد که در آن $G' = \phi$ و $k \geq 5$. فرض کنید x راسی قطری بوده و برای هر $i=1,2,\ldots,d$ فرض کنید V_i مجموعه همه راسهایی از G باشد که فاصله آنها تا x برابر i است. اگر $v_d \cap S = \phi$ آنگاه $|S \cap (v_{d-1} \cup V_{d-2})| \geq 2$.

اثبات: فرض کنید G گرافی k- احاطه بحرانی انقباضی با $G' = \phi$ و $K \geq 5$ باشد.

فرض کنید x و y راسهایی از G باشند که $d(x, y) = diam(G) = d$. برای $i=1,2,\ldots,d$ فرض کنید

$$V_i = \{v | d(x,v) = i\}$$

لذا $V_0 = \{x\}$ و $y \in V_d$. فرض کنید S مجموعه‌ای احاطه کننده مینیمم برای G باشد که $V_d \cap S = \phi$. فرض کنید (فرض خلف) که $|S \cap (V_{d-2} \cup V_{d-1})| \leq 1$. در این صورت $|V_{d-1} \cap S| = 1$ در نتیجه راسی مانند $v_{d-1} \in V_{d-1} \cap S$ موجود است که v_{d-1} راس y را احاطه می کند. در این صورت $N[y] \subseteq N[V_{d-1}]$. حال بنا به قضیهٔ $y \in G', A$ که یک تناقض می‌باشد. لذا فرض خلف باطل بوده و $|S \cap (V_{d-2} \cup V_{d-1})| \geq 2$.

حال قطر یک گراف گراف k- احاطه بحرانی انقباضی G با $G' = \phi$ را تعیین می کنیم

.قضیه ۲-۲: قطر یک گراف k- احاطه بحرانی انقباضی G با $G' = \phi$ حداکثر ۷ است هر گاه $k=5$ و حداکثر $3k-9$ است هر گاه $k \geq 6$.

اثبات: فرض کنید G گرافی k–احاطه بحرانی انقباضی با $G' = \phi$ باشد که در آن $K \geq 5$. فرض کنید y,x راسهایی از G باشند که $d(x,y) = diam(G) = d$. برای $i=1,2,\ldots,d$ فرض کنید V_i مجموعه همه راسهایی باشد که فاصله آنها از x برابر با i می‌باشد. بنابراین $V_0 = \{x\}$ و $y \in V_d$. فرض کنید $d \geq 5$ باشد. هم‌چنین فرض کنید $v_4 \in V_4$ و $v_5 \in V_5$ دو راس مجاور باشند. بنابر قضیهٔ B یک مجموعه احاطه کنندهٔ می‌نیمم S موجود است که شامل هردوی v_5,v_4 باشد. طبق قضیهٔ A خواهیم داشت $|S \cap (V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_5)| \geq 4$.

برای $k=5$ می‌توان فرض کرد $|S \cap (V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_5)| = 4$ در این صورت $|S \setminus (V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_5)| = 1$ و در نتیجه $d \leq 8$. فرض کنید $d=8$ باشد. طبق لم ۱ نتیجه می گیریم $S \cap V_8 \neq \phi$. در این صورت v_5 با هر راس در مجموعه V_6 مجاور است. فرض کنید $u_6 \in V_6 \cap N(v_5)$ باشد.مجموعه‌ای احاطه کننده می‌نیمم مانند S_0 در G موجود است که شامل u_6,v_5 باشد. واضح است که $S_0 \cap (V_7 \cup V_8) \neq \phi$. به علاوه $S_0 \cap V_4 = \phi$.

حال

$$(S_0 \cap (V_0 \cup \ldots \cup V_5)) \cup (S \cap V_8)$$

یک مجموعه احاطه کننده می‌نیمم برای G با اندازهٔ کمتر از ۵ خواهد شد.این یک تناقض است. لذا $d \geq 7$.

بنابراین از این پس فرض می کنیم $k>5$ باشد. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $d>8$ است. در این صورت مجموعه $V_7 \cup V_8 \cup \ldots \cup V_d$ توسط حداکثر $k-4$ راس از S احاطه می‌شود. چون هر راس از S می‌تواند حداکثر $V_i \cup V_{i+1} \cup V_{i+2}$ را به ازای برخی از i ها احاطه کند نتیجه می گیریم $d \leq 6 + 3(k-4) - 1 = 3k - 7$.

فرض کنید $d=3k-7$ باشد. در این صورت $|S \cap V_d| = |S \cap V_{d-3}| = 1$ و $S \cap (V_{d-2} \cup V_{d-1}) = \phi$. فرض کنید $v_{d-3} \in V_{d-3}$ باشد و $v_{d-2} \in V_{d-2}$ راسی مجاور با v_{d-3} باشد. یک مجموعه احاطه کنندهٔ می‌نیمم مانند S_1 شامل v_{d-2}, v_{d-3} موجود است. با توجه به قضیهٔ A داریم $|S_1 \cap (V_{d-2} \cup V_{d-1} \cup V_d)| \geq 2$.

حال

$$(S_1 \cap (V_0 \cup ... \cup V_{d-3})) \cup (S \cap V_d)$$

یک مجموعه احاطه کننده برای G با اندازهٔ کمتر از k است. این تناقض نشان می‌دهد $d \leq 3k-8$.

فرض کنید $d=3k-8$.

برای $k=6$ داریم $d=10$ اگر $S \cap V_8 \neq \phi$ باشد آنگاه $S \cap (V_6 \cup V_7) = \phi$ خواهد بود. به عنوان یک نتیجه v_5 با هر راس در V_6 مجاور است. فرض کنید $v_6 \in V_6 \cap N(v_5)$ باشد. یک مجموعه احاطه کننده می‌نیمم مانند D_1 شامل v_6, v_5 موجود است. در این صورت

$|D_1 \cap (V_6 \cup V_7 \cup ... \cup V_{10})| \geq 3$ خواهد بود. لذا

$(D_1 \cap (V_0 \cup ... \cup V_5)) \cup (S \cap (V_0 \cup .... \cup V_{10}))$ یک مجموعه احاطه کننده برای G خواهد بود که اندازهٔ آن حداکثر ۵ است. این یک تناقض است. بنابراین $S \cap V_8 = \phi$. اما در این صورت طبق لم۲-۱ ، $|S \cap V_{10}| = |S \cap V_7| = 1$. یک نتیجه فوری آن است که راس موجود در $S \cap V_{10}$ با هر راس در V_9 مجاور است و راس موجود در $S \cap V_7$ با هر راس در V_8 مجاور است. فرض کنید $U_7 \in V_7 \cap S$ و $u_8 \in N(v_7) \cap V_8$ باشد. مجموعه احاطه کنندهٔ می‌نیممی مانند D_2 شامل v_8, v_7 داریم. در این صورت $|D_2 \cap (V_8 \cup V_9 \cup V_{10})| \geq 2$ خواهد بود. حال $(D_2 \cap (V_0 \cup .... \cup V_7)) \cup (S \cap V_{10})$

یک مجموعه احاطه کننده برای G با اندازهٔ حداکثر ۵ می‌باشد. این یک تناقض است.

برای $k=7$ داریم $d=13$. اگر $S \cap V_{11} \neq \phi$ باشد آنگاه $S \cap (V_{12} \cup V_{13}) \neq \phi$ و در نتیجه $|S \cap V_8| = 1$ و $|S \cap (V_7 \cap V_9 \cap V_{10})| = 0$ می‌باشد. فرض کنید $v_8 \in S \cap V_8$ باشد. آنگاه v_8 با هر راس در $V_7 \cup V_9$ مجاور است. فرض کنید $v_9 \in V_9 \cap N(v_7)$ باشد. یک مجموعه احاطه کننده می‌نیمم مانند F_1 شامل v_9, v_8 موجود است. در این صورت $|F_1 \cap (V_9 \cup .... \cup V_{13})| \geq 3$.

اما در این صورت نیز $(F_1 \cap (V_0 \cup .... \cup V_8)) \cup (S \cap (V_9 \cup .... \cup V_{13}))$

یک مجموعه احاطه کننده برای G خواهد شد که اندازه آن حداکثر ۶ است. این تناقض منجر به آن خواهد شد که $S \cap V_{11} = \phi$. بنابر لم ۲-۱ می‌توان فرض کرد $|S \cap V_{10}| = 1, |S \cap V_9| = |S \cap V_{12}| = 0$

فرض کنید $v_{10} \in V_{10} \cap S$ و $v_{11} \in V_{11} \cap N(v_{10})$ باشد. مجموعه احاطه کننده می‌نیممی مانند F_2 شامل v_{11}, v_{10} داریم. به وضوح $F_2 \cap (V_{12} \cup V_{13}) \neq \phi$ حال $(F_2 \cap (V_0 \cup .... \cup V_{10})) \cup (S \cap V_{13})$ یک مجموعه احاطه کننده برای G با اندازهٔ ۶ است. این یک تناقض می‌باشد.

در ادامه اثبات فرض می‌کنیم $K \geq 8$. ادعای زیر را داریم.

ادعا: $|S \cap (V_{d-5} \cup .... \cup V_d)| \leq 3$.

برای اثبات این ادعا با برهان خلف اگر فرض کنیم $|S \cap (V_{d-5} \cup .... \cup V_d)| \geq 4$ باشد آنگاه $V_7 \cup V_8 \cup .... \cup V_{d-7}$ توسط حداکثر $k-8$ راس از S احاطه می‌شود. اما هر $k-8$ راس از S حداکثر می‌توانند راسهای $3k-24$ مجموعه در میان $V_7, V_8, ..., V_{d-7}$ را احاطه کنند در حالیکه $(d-7)-7+1 = 3k-21$. این تناقض است. لذا ادعای فوق درست است. حال $S \cap (V_{d-5} \cup V_{d-4} \cup V_{d-3}) \neq \phi$. حالتهای زیر را داریم:

حالت ۱: $S \cap V_{d-5} \neq \phi$.

فرض کنید $v_{d-5} \in S \cap V_{d-5}$ بوده و $v_{d-4} \in V_{d-4}$ مجاور با v_{d-5} باشد. با توجه به قضیه **B** یک مجموعه احاطه کننده می‌نیمم **S'** شامل این دو راس موجود است. در این صورت $4 \geq |S' \cap (V_{d-5} \cup .... \cup V_d)|$.

حال $(S' \cap (V_0 \cup .... \cup V_{d-5})) \cup (S \cap (V_{d-4} \cup .... \cup V_d))$

یک مجموعه احاطه کننده برای **G** با اندازهٔ کمتر از **k** است که یک تناقض می‌باشد.

حالت ۲: $S \cap V_{d-5} = \phi$.

با توجه به این ادعای اثبات شده $3 \leq |S \cap (V_{d-4} \cup .... \cup V_d)|$.

اگر $3 = |S \cap (V_{d-4} \cup .... \cup V_D)|$ باشد آنگاه $V_7 \cup V_8 \cup .... \cup V_{d-6}$ توسط حداکثر **k-7** راس از **S** احاطه می‌شود. اما هر **k-7** راس از **S** حداکثر راسهای **$3k$-21** مجموعه از $V_{d-6}, ..., V_8, V_7$ را احاطه می‌کنند در حالی که **$d-6-7+1=3k-20$** که یک تناقض است.

بنابراین می‌توان گفت $2 = |S \cap (V_{d-4} \cup ..... \cup V_d)|$. اما در این صورت بنا به لم ۲-۱ داریم $1 = |S \cap V_d| = |S \cap V_{d-3}|$. فرض کنید $u_{d-3} \in S \cap V_{d-3}$ باشد. پس u_{d-3} با هر راس در $V_{d-4} \cup V_{d-2}$ مجاور است. فرض کنید $u_{d-2} \in V_{d-2} \cap N(u_{d-3})$ باشد.

مجموعه احاطه کننده‌ای می‌نیمم مانند **S'_1** شامل **u_{d-3}** و **u_{d-2}** داریم در این صورت $3 \geq |S'_1 \cap (V_{d-3} \cup .... \cup V_D)|$. حال $(S'_1 \cap (V_0 \cup .... \cup V_{d-5})) \cup (S \cap (V_{d-3} \cup .... \cup V_d))$

یک مجموعه احاطه کننده برای **G** با اندازهٔ کمتر از $\gamma(G)$ است. این یک تناقض است. لذا $d \leq 3k-9$.

قضیه ۲-۳: برای $k \geq 7$ یک گراف ۲- همبند و **k**- احاطه بحرانی انقباضی **G** با $G' = \phi$ دارای قطر حداکثر **$2k$-3** است.

اثبات: فرض کنید G گرافی ۲- همبند و k- احاطه بحرانی انقباضی با $G' = \phi$ باشد. فرض کنید x,y راسهایی از G باشند که $d(x,y) = diam(G) = d$. برای $i=1,2,\ldots,d$ فرض کنید V_i مجموعه راسهایی از G باشد که در فاصله i از گرافی ۲- همبند است برای $i=1,2,\ldots,d-1$ داریم $|V_i| \geq 2$. لذا ادعای زیر را داریم.

ادعا: اگر به ازای عددی مانند i داشته باشیم $|S \cap V_i| = 1$ آنگاه

$|S \cap (V_{i-1} \cup V_i \cup V_{i+1})| \geq 2$.

فرض کنید $v_4 \in V_4, v_5 \in V_5$ دو راس مجاور باشند. با توجه به قضیهٔ B یک مجموعه احاطه کننده می‌نیمم S شامل v_5,v_4 موجود است. برای احاطه شدن $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_5$ توسط S خواهیم داشت

$|S \cap (V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_5)| \geq 4$.

بنابراین با توجه به ادعای فوق برای هر $6 \leq i \leq d-3$ خواهیم داشت

$|S \cap (V_i \cup V_{i+1} \cup V_{i+2} \cup V_{i+3})| \geq 2$.

اگر $d=6+4j+r$ که $0 \leq r \leq 3$ آنگاه $k \geq 4+2j+\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$ حال برای $r \in \{1,3\}$ داریم $d \leq 2K-3$ و برای حالت $r \in \{0,2\}$ داریم $d \leq 2k-2$. لذا اثبات برای حالت $r \in \{1,3\}$ کامل است.

فرض کنید $d=2k-2$ و $r \in \{0,2\}$. حالتهای زیر را داریم:

حالت ۱: $r=0$ داریم $|S \cap V_{d-5}| = 1$ و $|S \cap (V_{d-5} \cup \ldots \cup V_d)| = 3$. فرض کنید $v_{d-5} \in S \cap V_{d-5}$ باشد و $v_{d-4} \in V_{d-4}$ مجاور با v_{d-5} باشد. بنا به قضیهٔ B یک مجموعه احاطه کننده می‌نیمم S_1 شامل این دو راس موجود است. در این صورت

$|S_1 \cap (V_{d-5} \cup V_{d-4} \cup \ldots \cup V_d)| = 4$.

$$(S_1 \cap (V_0 \cup V_1 \cup .... \cup V_{d-5})) \cup (S \cap (V_{d-4} \cup .... \cup V_d))$$ حال

یک مجموعه احاطه کننده برای G با اندازهٔ کمتر از k است. این یک تناقض است.

حالت ۲: $r=2$ بنا به لم ۲-۱ داریم

$$|S \cap (V_{d-1} \cup V_{d-2})| = 0, |S \cap V_d| = |S \cap V_{d-4}| = |S \cap V_{d-3}| = 1$$

فرض کنید $v_{d-3} \in S \cap V_{d-3}$ و $v_{d-2} \in V_{d-2}$ دو راس مجاور باشند. مجموعه احاطه کننده‌ای می‌نیمم مانند S_2 شامل این دو راس موجود است. در این صورت

$$|S_2 \cap (V_{d-3} \cup V_{d-2} \cup V_{d-1} \cup V_d)| = 3$$

حال $$(S_2 \cap (V_0 \cup V_1 \cup .... \cup V_{d-3})) \cup (S \cap V_d)$$

یک مجموعه احاطه کننده برای G با اندازهٔ کمتر از K است. این یک تناقض است. لذا $d \leq 2k - 3$.

فهرست منابع و ماخذ

1) T. Burtone and D. P. Sumner, Domination dot-critical graphs, Discrete Mathematics, 306 (2006, 11-18.

2) T. U. Chang, W. E. Clark and E. O. Hare, Domination numbers of complete grid graphs, I, Ars Combinatoria 38 (1994), 97-111.

3) Z. Chengye, Y. Yuansheng, and S. Linlin, Domination dot-critical graphs with no critical vertices, Discrete Mathematics, In press.

4) R. Cherifi, S. Gravier and I. Zighem, Bounds on domination number of complete grid graphs, Ars Combinatoria 60 (2001), 307-311.

5) W. Goddard, T. W. Haynes, M. A. Henning and Lucas C. Vander Merwe, The diameter of total domination vertex critical graphs, Discrete Mathematics 286 (2004), 255-261.

6) S. Gravier and M. Mollard, On domination numbers of Cartesian product of paths, Discrete Mathematics 80 (1997), 247-250.

7) T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, editors. Domination in graphs: Advanced Topics. Marcel Dekker, Inc, New York, NY, 1997.

8) T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, editors. Fundamental of Domination in graph: Advanced Topics. Marcel Dekker, Inc, New York, NY, 1998.

9) D. A. Mojdeh and N. Jafari Rad, On an open problem concerning total domination critical graphs, Exposition Mathematicai, 25 (2007), 2, 175-179.

10) D. A. Mojdeh and N. Jafari Rad, On the total domination critical graphs, Electronic Notes in Discrete Mathematics 24 (2006), 89-92.

11) R. S. Shaheen, On the domination number of m× n toroidal grid graphs, J. Congr Numer. 146 (2000), 187-200.

12) L. Sun, A result on Vizing's conjecture, Discrete Math. 275 (2004), 363-366.

13) D. B. West, Introduction to graph theory, (2nd edition), Prentice-Hall, USA, 2001.

واژه نامه انگلیسی-فارسی

Claw	پنجه
Claw – free	پنجه آزاد
Critical	بحرانی
Domination	احاطه‌گری
Domination critical	احاطه بحرانی
Domination number	عدد احاطه کنندگی
Dominating set	مجموعه احاطه کننده
k – domination	k – احاطه‌گری
Pendant	آویزان
Total domination	احاطه کنندگی کلی
Total domination number	عدد احاطه کنندگی کلی
Total domination critical	احاطه کلی بحرانی