دانشکده علوم ریاضی

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

# بررسی رشدقدرمطلق چندجمله‌ای‌ها با محدودیت روی ریشه ها

نگارش

الهه خجسته نژاد

اساتید راهنما

دکتر نادر جعفری راد و دکتر احمد زیره

تیرماه ۱۳۹۲

## تشکر و قدردانی

با حمد و سپاس فراوان از خداوند منان که به من توفیق آموختن پرتوئی از دانش را عطا فرمود.

قلم از نگارش حق زحمات و مساعدت‌های اساتید گرانقدر و دوستان بزرگوار ناتوان است، اما وظیفه حکم می‌کند که هر چند ناچیز ولی در حد توان تشکر و قدردانی نمایم.

در ابتدا از اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر جعفری راد و آقای دکتر زیره که با راهنماییهای خود افق تازه‌ای برایم ایجاد نمودند و همچنین از آقای دکتر ابطحی و سرکار خانم دکتر دسترنج که قبول داوری پایان‌نامه‌را داشتند، کمال تشکر را دارم.

همچنین از خانواده و تمام دوستانی که مرا در این مهم یاری نمودند، تشکر می‌نمایم.

# چکیده


یکی از مهم‌ترین قضایایی که به اکسترمم یک تابع تحلیلی می‌پردازد، اصل ماکزیمم قدرمطلق است.

از آن‌جایی‌که چند جمله‌ای‌ها نقش بسزایی در هر شاخه‌ای از ریاضیات دارند، و با توجه به این‌که چند جمله‌ای‌ها، توابع تحلیلی هستند، این قضیه بیان می‌کند که قدرمطلق یک چند جمله‌ای غیر ثابت ماکزیمم مقدارش را بر روی مرز ناحیه اختیار می‌کند.

وجودی بودن قضیه ماکزیمم قدرمطلق، روشی برای به‌دست آوردن مقادیر ماکزیمم قدرمطلق ارائه نمی‌دهد، بنابراین مطالعات و تحقیقات فراوانی در جهت تقریب این مقادیر انجام گرفته است.

ما نیز با ارائه این رساله گامی در جهت تعمیم و بهبود آن‌ها برمی‌داریم.

در این رساله تلاش می‌شود، تا تقریبی برای اکسترمم مطلق چند جمله‌ای‌های مختلط، با درنظر گرفتن موقعیت ریشه‌ها، ارائه شود.

در این راستا، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم با ارائه دو بخش، به آهنگ رشد چند جمله‌ای‌هایی با محدودیت روی ریشه‌های آن، می‌پردازیم. بخش دوم از این فصل مربوط به نتایج جدیدی می‌باشد که موفق به اثبات آنها شده‌ام.

در فصل سوم با ارائه دو بخش، به بیان نامساوی‌هایی برای مشتق چند جمله‌ای‌ها خواهیم پرداخت.

# فهرست مندرجات

# فصل ۱

# پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

یکی از مهم‌ترین قضایایی که به اکسترمم مطلق یک تابع تحلیلی می‌پردازد، اصل اکسترمم مطلق است. از آن‌جایی‌که چند جمله‌ای‌ها نقش بسزایی در هر شاخه‌ای از ریاضیات دارند، و با توجه به این‌که چند جمله‌ای‌ها، توابع تحلیلی هستند، این قضیه بیان می‌کند که قدرمطلق یک چند جمله‌ای غیر ثابت اکسترمم مقدارش را بر مرز ناحیه مورد بررسی اتخاذ می‌نماید.
وجودی بودن قضیه اکسترمم مطلق، روشی برای به‌دست آوردن مقادیر اکسترمم ارائه نمی‌دهد، بنابراین مطالعات و تحقیقات فراوانی در جهت تقریب این مقادیر انجام گرفته است.
ما نیز با ارائه این رساله گامی در جهت تعمیم و بهبود آن‌ها برمی‌داریم.
این فصل شامل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصول بعد می‌باشد.

## ۱.۱ نمادها و تعاریف

**تعریف ۱.۱.۱** هر مجموعه همبند و باز در $\mathbb{C}$، میدان نامیده می‌شود. میدان را معمولاً با $D$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۲.۱.۱** یک میدان به همراه بعضی، هیچ یک و یا همگی نقاط مرزی‌اش را ناحیه گوییم.

**تعریف ۳.۱.۱** مجموعه $X$ در $\mathbb{R}^n$ محدب نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دو نقطه مفروض $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به $X$، و هر $t \in (۰, ۱)$ داشته‌باشیم

$$tx_۱+(۱-t)x_۲ \in X$$

**تعریف ۴.۱.۱** اشتراک همه مجموعه‌های محدب شامل یک مجموعه از نقاط در $\mathbb{R}^n$ را کلاف محدب آن مجموعه گوییم.

**تعریف ۵.۱.۱** فرض کنیم $f : D \to \mathbb{C}$ یک تابع، $z_۰ \in \mathbb{C}$. در این صورت $f$ را در $z_۰$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_۰$ مشتق پذیر باشد.

**تعریف ۶.۱.۱** نقطه $z_۰$ را نقطه تکین تابع $f$ نامیم، اگر $f$ در نقطه $z_۰$ مشتق پذیر نباشد ولی در هر همسایگی $z_۰$ نقطه‌ای موجود باشد که $f$ در آن نقطه تحلیلی شود. بعلاوه، اگر تابع در یک همسایگی نقطه تکین، تحلیلی باشد در این صورت آن نقطه‌را نقطه تکین تنها می‌نامیم.

**تعریف ۷.۱.۱** یک خم پیوسته در صفحه مختلط به‌صورت پارامتری به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (a \leq t \leq b),$$

که در آن $x(t)$ و $y(t)$ توابعی حقیقی و پیوسته از متغیر حقیقی $t$ هستند، به‌طوری‌که نقطه $z(a)$ نقطه آغازی و $z(b)$ را نقطه پایانی نامیده می‌شود. گاهی خم را با $C$ می نمایانیم.

اگر نقطه آغازی و پایانی خم $C$ بر هم منطبق شوند ($z(a) = z(b)$)، در این‌صورت $C$ را یک خم بسته می‌نامند. اگر هر وقت $t_۱ \neq t_۲$، داشته‌باشیم $z(t_۱) \neq z(t_۲)$، در این‌صورت $C$ با خودش تلاقی نمی‌کند و این خم را ساده می‌نامند. و خم بسته‌ای را که در فاصله $a \leq t < b$ ساده باشد، خم ساده بسته نامند.

## ۲.۱ قضایای پایه

در این بخش چند قضیه پایه‌ای از آنالیز مختلط که در فصول بعدی مورد نیاز می‌باشند را بیان می‌کنیم.

**قضیه ۲.۲.۱** ( اساسی جبر ) اگر $P(z)$، $P(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ $(a_n \neq 0)$ چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد. آن‌گاه $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$، موجودند به‌طوری‌که

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i) \tag{1}$$

که در آن $z_i$ ها لزوماً متمایز نیستند.

**قضیه ۳.۲.۱** ( میانگین گاوس[۱] ) اگر $f(z)$ در قرص بسته $|z - z_0| \leq r$ تحلیلی باشد، آن‌گاه

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \tag{2}$$

**قضیه ۴.۲.۱** ( اصل ماکزیمم مطلق ) اگر $f(z)$ در میدان کراندار $D$ تحلیلی و بر بستار آن، $\bar{D}$ پیوسته باشد، آن‌گاه $|f(z)|$ ماکزیممی بر مرز $D$ دارد. به‌علاوه در نقاط درونی ماکزیمم ندارد، مگر این‌که تابع ثابت باشد.

**قضیه ۵.۲.۱** ( اصل مینیمم مطلق ) فرض کنیم $f(z)$ در میدان $D$ تحلیلی و در $D$، $f(z) \neq 0$، در این‌صورت $|f(z)|$ نمی‌تواند مینیممی در $D$ داشته باشد مگر این‌که $f(z)$ ثابت باشد. اگر $|f(z)|$ همچنین بر $\bar{D}$ پیوسته باشد، آن‌گاه $|f(z)|$ مینیمی بر مرز دارد.

**قضیه ۶.۲.۱** ( روشه[۲] ) فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی خم ساده بسته $C$ تحلیلی باشند و بر $C$، $|g(z)| < |f(z)|$، دراین‌صورت $f(z) + g(z)$ و $f(z)$ درون $C$ تعداد صفرهای برابر دارند.

---
[۱] Gauss
[۲] Rouche

**قضیه ۷.۲.۱** ( نامساوی کوشی [۳]) اگر $f(z)$ بر ناحیه $|z-z_{\circ}| \leq R$ تحلیلی باشد و برای $|z| \leq R$، $|f(z)| \leq M$ آن‌گاه به ازای هر $n = ۱, ۲, \cdots$

$$|f^{(n)}(z_{\circ})| \leq \frac{n!M}{R^n}. \qquad (۳)$$

**قضیه ۸.۲.۱** ( تعمیم لم شوارتز[۴])[۳۳] اگر $f(z)$ درون و بر روی دایره واحد تحلیلی باشد و روی $|z| = ۱$، $|f(z)| \leq M$ و $f(\circ) = \alpha$ به‌طوری‌که $M > |\alpha| > \circ$، آن‌گاه

$$|f(z)| \leq M\frac{M|z| + |\alpha|}{|\alpha||z| + |M|} \qquad (|z| < ۱). \qquad (۴)$$

**قضیه ۱۱.۲.۱** [۳۲] فرض کنید $q(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد بطوریکه تمام ریشه هایش در دیسک بسته $|z| \leq ۱$ قراردارد. اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه $n$ باشد که برای $|z| = ۱$، $|p(z)| \leq |q(z)|$ آن‌گاه

$$|p(z)| \leq |q(z)| \qquad (|z| > ۱). \qquad (۵)$$

با قرار دادن $q(z) = Mz^n$، که $M = \max_{|z|=۱} |p(z)|$، در قضیه فوق نتیجه زیر حاصل می شود.

**قضیه ۱۲.۲.۱** [۳۲] اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه $n$، آن‌گاه

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq R^n \max_{|z|=۱} |p(z)| \qquad (R > ۱). \qquad (۶)$$

بابکار بردن قضیه فوق برای چند جمله ای $p(rz)$ و $R = ۱/r$، نتیجه زیر حاصل می شود.

**قضیه ۱۳.۲.۱** [۲] اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه $n$، آن‌گاه

$$\max_{|z|=r} |p(z)| \geq r^n \max_{|z|=۱} |p(z)| \qquad (\circ < r \leq ۱). \qquad (۷)$$

---
[۳] Cauchy
[۴] Schwarz

**قضیه ۷.۲.۱** (نامساوی کوشی [۳]) اگر $f(z)$ بر ناحیه $|z-z_{\circ}| \leq R$ تحلیلی باشد و برای $|z| \leq R$، $|f(z)| \leq M$ آن‌گاه به ازای هر $n = ۱, ۲, \cdots$

$$|f^{(n)}(z_{\circ})| \leq \frac{n!M}{R^n}. \qquad (۳)$$

**قضیه ۸.۲.۱** (تعمیم لم شوارتز[۴])[۳۳] اگر $f(z)$ درون و بر روی دایره واحد تحلیلی باشد و روی $|z| = ۱$، $|f(z)| \leq M$ و $f(\circ) = \alpha$ به‌طوری‌که $M > |\alpha| > \circ$، آن‌گاه

$$|f(z)| \leq M\frac{M|z| + |\alpha|}{|\alpha||z| + |M|} \qquad (|z| < ۱). \qquad (۴)$$

**قضیه ۱۱.۲.۱** [۳۲] فرض کنید $q(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد بطوریکه تمام ریشه هایش در دیسک بسته $|z| \leq ۱$ قراردارد. اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه $n$ باشد که برای $|z| = ۱$، $|p(z)| \leq |q(z)|$ آن‌گاه

$$|p(z)| \leq |q(z)| \qquad (|z| > ۱). \qquad (۵)$$

با قرار دادن $q(z) = Mz^n$، که $M = \max_{|z|=۱} |p(z)|$، در قضیه فوق نتیجه زیر حاصل می شود.

**قضیه ۱۲.۲.۱** [۳۲] اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه $n$، آن‌گاه

**تعریف ۳.۱.۱** مجموعه $X$ در $\mathbb{R}^n$ محدب نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دو نقطه مفروض $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به $X$، و هر $t \in (۰, ۱)$ داشته‌باشیم

$$tx_۱ + (۱-t)x_۲ \in X$$

**تعریف ۴.۱.۱** اشتراک همه مجموعه‌های محدب شامل یک مجموعه از نقاط در $\mathbb{R}^n$ را کلاف محدب آن مجموعه گوییم.

**تعریف ۵.۱.۱** فرض کنیم $f : D \to \mathbb{C}$ یک تابع، $z_۰ \in \mathbb{C}$. در این صورت $f$ را در $z_۰$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_۰$ مشتق پذیر باشد.

**تعریف ٦.۱.۱** نقطه $z_۰$ را نقطه تکین تابع $f$ نامیم، اگر$f$ در نقطه$z_۰$ مشتق پذیر نباشد ولی در هر همسایگی $z_۰$ نقطه‌ای موجود باشد که $f$ در آن نقطه تحلیلی شود. بعلاوه، اگر تابع در یک همسایگی نقطه تکین، تحلیلی باشد در این صورت آن نقطه‌را نقطه تکین تنها می‌نامیم.

**تعریف ۷.۱.۱** یک خم پیوسته در صفحه مختلط به‌صورت پارامتری به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (a \leq t \leq b),$$

**تعریف ۳.۱.۱** مجموعه $X$ در $\mathbb{R}^n$ محدب نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دو نقطه مفروض $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به $X$، و هر $t \in (۰, ۱)$ داشته‌باشیم

$$tx_۱ + (۱ - t)x_۲ \in X$$

**تعریف ۴.۱.۱** اشتراک همه مجموعه‌های محدب شامل یک مجموعه از نقاط در $\mathbb{R}^n$ را کلاف محدب آن مجموعه گوییم.

**تعریف ۵.۱.۱** فرض کنیم $f : D \to \mathbb{C}$ یک تابع، $z_۰ \in \mathbb{C}$. در این صورت $f$ را در $z_۰$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_۰$ مشتق پذیر باشد.

**تعریف ٦.۱.۱** نقطه $z_۰$ را نقطه تکین تابع $f$ نامیم، اگر $f$ در نقطه $z_۰$ مشتق پذیر نباشد ولی در هر همسایگی $z_۰$ نقطه‌ای موجود باشد که $f$ در آن نقطه تحلیلی شود. بعلاوه، اگر تابع در یک همسایگی نقطه تکین، تحلیلی باشد در این صورت آن نقطه‌را نقطه تکین تنها می‌نامیم.

**تعریف ۷.۱.۱** یک خم پیوسته در صفحه مختلط به‌صورت پارامتری به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad\qquad (a \leq t \leq b),$$

**تعریف ۳.۱.۱** مجموعه $X$ در $\mathbb{R}^n$ محدب نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دو نقطه مفروض $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به $X$، و هر $t \in (۰, ۱)$ داشته‌باشیم

$$tx_۱+(۱-t)x_۲ \in X$$

**تعریف ۴.۱.۱** اشتراک همه مجموعه‌های محدب شامل یک مجموعه از نقاط در $\mathbb{R}^n$ را کلاف محدب آن مجموعه گوییم.

**تعریف ۵.۱.۱** فرض کنیم $f : D \to \mathbb{C}$ یک تابع، $z_۰ \in \mathbb{C}$. در این صورت $f$ را در $z_۰$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_۰$ مشتق پذیر باشد.

**تعریف ۶.۱.۱** نقطه $z_۰$ را نقطه تکین تابع $f$ نامیم، اگر $f$ در نقطه $z_۰$ مشتق پذیر نباشد ولی در هر همسایگی $z_۰$ نقطه‌ای موجود باشد که $f$ در آن نقطه تحلیلی شود. بعلاوه، اگر تابع در یک همسایگی نقطه تکین، تحلیلی باشد در این صورت آن نقطه‌را نقطه تکین تنها می‌نامیم.

**تعریف ۷.۱.۱** یک خم پیوسته در صفحه مختلط به‌صورت پارامتری به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad\qquad (a \leq t \leq b),$$

**تعریف ۳.۱.۱** مجموعه $X$ در $\mathbb{R}^n$ محدب نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دو نقطه مفروض $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به $X$، و هر $t \in (۰, ۱)$ داشته‌باشیم

$$tx_۱ + (۱ - t)x_۲ \in X$$

**تعریف ۴.۱.۱** اشتراک همه مجموعه‌های محدب شامل یک مجموعه از نقاط در $\mathbb{R}^n$ را کلاف محدب آن مجموعه گوییم.

**تعریف ۵.۱.۱** فرض کنیم $f : D \to \mathbb{C}$ یک تابع، $z_۰ \in \mathbb{C}$. در این صورت $f$ را در $z_۰$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_۰$ مشتق پذیر باشد.

**تعریف ۶.۱.۱** نقطه $z_۰$ را نقطه تکین تابع $f$ نامیم، اگر $f$ در نقطه $z_۰$ مشتق پذیر نباشد ولی در هر همسایگی $z_۰$ نقطه‌ای موجود باشد که $f$ در آن نقطه تحلیلی شود. بعلاوه، اگر تابع در یک همسایگی نقطه تکین، تحلیلی باشد در این صورت آن نقطه‌را نقطه تکین تنها می‌نامیم.

**تعریف ۷.۱.۱** یک خم پیوسته در صفحه مختلط به‌صورت پارامتری به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (a \leq t \leq b),$$

**قضیه ۱۴.۲.۱** [۳۲] اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه $n$ و $q(z) = z^n\overline{p(1/\overline{z})}$ آن‌گاه

$$|p(Rz)| + |q(Rz)| \leq (R^n + 1) \max_{|z|=1} |p(z)| \qquad (R > 1, |z| = 1). \tag{8}$$

**قضیه ۱۵.۲.۱** (قضیه گاوس—لوکاس[5])[۳۲] همه نقاط بحرانی یک چندجمله‌ای غیر ثابت، در کلاف محدب مجموعه ریشه‌های آن واقعند.

[5] Gauss-Lucas

# فصل ۲

# نامساوی برای رشد قدرمطلق چندجمله‌ای‌ها

در این فصل به مطالعه رشد قدرمطلق آن دسته از چند جمله‌ای‌هایی از درجه $n$، که در دیسک $|z| < k$، $(k > ۰)$ ریشه‌ای ندارند، می‌پردازیم.
برای این منظور دربخش اول تعمیم‌های بدست آمده از نامساوی آنکنی[۱] و ریولین[۲] را ارائه می‌نماییم.

## ۱.۲ تعمیم‌هایی از نامساوی آنکنی و ریولین

فرض کنیم $p(z)$ چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد. طبق قضیه ۱۲.۲.۱، برای $R \geq ۱$ داریم

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq R^n \max_{|z|=۱} |p(z)|$$

آنکنی و ریولین[۱] نامساوی فوق را بهبود دادند و ثابت کردند اگر $p(z)$ چند جمله‌ایی از درجه $n$ که هیچ ریشه‌ای در $|z| < ۱$ نداشته باشد، آن‌گاه برای $R \geq ۱$

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq \left(\frac{R^n + ۱}{۲}\right) \max_{|z|=۱} |p(z)|. \qquad (۱)$$

عزیز[۳][۳] نامساوی (۱) را بهبود بخشید و ثابت کرد اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ و

[۱] N. C. Ankeny
[۲] T. J. Rivlin
[۳] A. Aziz

$p(z) \neq 0$ در $|z| < 1$، آن‌گاه برای $R \geq 1$

$$\max_{|z|=R}|p(z)| \leq \left(\frac{R^n+1}{2}\right)\max_{|z|=1}|p(z)| - \left(\frac{R^n-1}{2}\right)\min_{|z|=1}|p(z)|. \tag{2}$$

تساوی در نامساوی بالا برای چند جمله‌ای به فرم $p(z) = z^n + 1$ برقرار است.

رحمان[4] و شیمایسر[5][31] نامساوی (۱) را در حالت کلی تعمیم دادند و ثابت کردند، اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ و $p(z) \neq 0$ در $|z| < k$ ($k \geq 1$)، آن‌گاه برای $1 \leq R \leq k^2$

$$\max_{|z|=R}|p(z)| \leq \left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n \max_{|z|=1}|p(z)|. \tag{3}$$

تساوی در نامساوی بالا برای چند جمله‌ای به فرم $p(z) = (z+k)^n$ برقرار است.

در ادامه این فصل برای اختصار از نمادهای زیر استفاده می کنیم.

$m(p,t) := \min_{|z|=t}|p(z)|$، مقدار می‌نیمم قدر مطلق $|p(z)|$ روی دایره $|z| = t$

و $M(p,t) := \max_{|z|=t}|p(z)|$، مقدار ماکزیمم قدر مطلق $|p(z)|$ روی دایره $|z| = t$.

عزیز[8] نامساوی (۳) را بهبود بخشید و قضیه زیر را اثبات کرد.

**قضیه ۱.۱.۲** اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد. $p(z) \neq 0$ در $|z| < k$ ($k \geq 1$)، آنگاه برای $1 \leq R \leq k^2$

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n M(p,1) - \{\left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n - 1\}m(p,k). \tag{4}$$

**برهان** فرض می‌کنیم $m = m(p,k)$، آنگاه برای $|z| = k$، $m \leq |p(z)|$.

چون $p(z)$ در $|z| < k$ صفری ندارد، طبق قضیه روشه، برای هر عدد حقیقی یا مختلط $\alpha$ به طوری که

---
[4] Q. I. Rahman
[5] G. Schmeisser

$|\alpha| < ۱$ ، تمام صفرهای چندجمله‌ای $F(z) := p(z) + \alpha m$ در $|z| \geq k$ قرار می‌گیرد. فرض می‌کنیم صفرهای $F(z)$ ، به صورت $R_۱e^{i\theta_۱}, R_۲e^{i\theta_۲}, ..., R_ne^{i\theta_n}$ باشد. آنگاه برای $j = ۱, ..., n$ ، $R_j \geq k$ و

$$F(z) = a\prod_{j=۱}^{n}(z - R_je^{i\theta_j})$$

بنابراین برای هر $۱ \leq R \leq k^۲$ و برای هر $\theta$ که $۰ \leq \theta < ۲\pi$، داریم

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(Re^{i\theta})}{F(e^{i\theta})}\right| &= \prod_{j=۱}^{n}\left|\frac{Re^{i\theta} - R_je^{i\theta_j}}{e^{i\theta} - R_je^{i\theta_j}}\right| \leq \prod_{j=۱}^{n}\left(\frac{R + R_j}{۱ + R_j}\right)\\ &\leq \prod_{j=۱}^{n}\left(\frac{R+k}{۱+k}\right) = \left(\frac{R+k}{۱+k}\right)^n.\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $۱ \leq R \leq k^۲$ و برای هر $\theta$ که $۰ \leq \theta < ۲\pi$ ،

$$|F(Re^{i\theta})| \leq \left(\frac{R+k}{۱+k}\right)^n |F(e^{i\theta})| \tag{۵}$$

حال در (۵)، $F(z)$ را با $p(z) + \alpha m$ جایگزین می‌کنیم پس برای هر $\alpha$ به طوری که $|\alpha| < ۱$ و $۰ \leq \theta < ۲\pi$ و $۱ \leq R \leq k^۲$ ،

$$\left|p(Re^{i\theta}) + \alpha m\right| \leq \left(\frac{R+k}{۱+k}\right)^n \left|p(e^{i\theta}) + \alpha m\right| \tag{٦}$$

چون $p(z)$ در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ صفری ندارد و برای $|z| = k$ داریم $m \leq |p(z)|$.

بنابراین طبق اصل می‌نیمم قدرمطلق، برای هر $\theta$ که $۰ \leq \theta < ۲\pi$ داریم $m \leq |p(e^{i\theta})|$.

حال آرگومان $\alpha$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای $|z| = ۱$،

$$|p(z) + \alpha m| = |p(z)| - |\alpha|m$$

بنابراین، نامساوی (٦) را می‌توان برای $۱ \leq R \leq k^۲$ و $۰ \leq \theta < ۲\pi$ ، به صورت زیر نوشت.

$$|p(Re^{i\theta})| - |\alpha|m \leq \left(\frac{R+k}{۱+k}\right)^n \left\{|p(e^{i\theta})| - |\alpha|m\right\}$$

حال با میل دادن $|\alpha| \to ۱$،

$$|p(Rz)| \leq \left(\frac{R+k}{۱+k}\right)^n |p(z)| - \left\{\left(\frac{R+k}{۱+k}\right)^n - ۱\right\}m$$

بنابراین، برای $|z| = ۱$ و $۱ \leq R \leq k^۲$ ،

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R+k}{۱+k}\right)^n M(p,۱) - \left\{\left(\frac{R+k}{۱+k}\right)^n - ۱\right\} m(p,k).\square$$

در قضیه فوق بر روی $R$ محدودیت وجود دارد. عزیز[۸] در قضیه زیر این محدودیت را برداشته است.

**قضیه ۲.۱.۲** اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد، که $p(z) \neq ۰$ در $|z| < k$ $(k \geq ۱)$، آنگاه برای $R > ۱$ داریم

$$M(p,R) \leq \frac{(R+k)^n}{(R+k)^n + (۱+Rk)^n} \times \left\{(R^n+۱)M(p,۱) - \left(R^n - \left(\frac{۱+Rk}{R+k}\right)^n\right) m(p,k)\right\} \qquad (۷)$$

نامساوی (۷) تعمیمی از نامساوی (۲) است.(در حالت $k = ۱$، نامساوی (۷) به نامساوی (۲) تبدیل می‌شود.)

برای اثبات قضیه فوق به لم‌های زیر نیاز داریم.

**لم ۳.۱.۲** [۸] اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد، که $p(z) \neq ۰$ در $|z| < k$ $(k > ۰)$، آنگاه برای هر $R \geq ۱$، $r \leq k$ و هر $\theta$ که $۰ \leq \theta < ۲\pi$ داریم

$$|p(Rre^{i\theta})| \leq \left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n |R^n p(\frac{re^{i\theta}}{R})| - \left\{\left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n R^n - ۱\right\} m(p,k) \qquad (۸)$$

**برهان:** برای $R = ۱$ نتیجه واضح است زیرا با قرار دادن $R = ۱$ در رابطه (۸) داریم

$$|p(re^{i\theta})| \leq \left(\frac{r+k}{r+k}\right)^n |p(re^{i\theta})| - \left\{\left(\frac{r+k}{r+k}\right)^n - ۱\right\} m(p,k)$$

$$|p(re^{i\theta})| \leq |p(re^{i\theta})| - \circ.$$

حال فرض می‌کنیم $R > ۱$ باشد. اگر $p(z)$ چندجمله‌ای باشد که همه صفرهایش در $|z| \geq k$ قرار بگیرد و $m = m(p, k)$ ، بنابراین طبق اصل می‌نیمم قدرمطلق ، برای $|z| \leq k$ نتیجه می‌شود $m \leq |p(z)|$.

حال نشان می‌دهیم برای هر عدد مختلط $\alpha$ به طوری که $|\alpha| \leq ۱$ ، تمام صفرهای چندجمله‌ای $F(z) := p(z) + \alpha m$ در $|z| \geq k$ قرار می‌گیرد. اگر $m = \circ$ ، آنگاه واضح است که $p(z)$ روی $|z| = k$ صفر دارد زیرا $m = \min_{|z|=k} |p(z)| = \circ$.

حال فرض می‌کنیم که همه صفرهای $p(z)$ در $|z| > k$ قرار بگیرد، بنابراین $m = \min_{|z|=k} |p(z)| > \circ$. در نتیجه $\frac{m}{p(z)}$ در $|z| \leq k$ تحلیلی است. و برای $|z| = k$ داریم $|\frac{m}{p(z)}| \leq ۱$. چون $\frac{m}{p(z)}$ ثابت نیست از اصل ماکزیمم قدرمطلق نتیجه می‌شود،

$$m < |p(z)| \qquad , (|z| < k) \tag{۹}$$

حال برای اینکه ثابت کنیم، صفرهای $F(z)$ در $|z| \geq k$ قرار می‌گیرند، از فرض خلف استفاده می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم حداقل یکی از صفرهای $F(z)$ در $|z| < k$ قرار بگیرند و $z_\circ$ یک صفر دلخواه آن باشد به طوری که $|z_\circ| < k$ ، آنگاه

$$p(z_\circ) + \alpha m = F(z_\circ) = \circ$$

بنابراین

$$|p(z_\circ)| = |\alpha m| \leq m$$

و این با (۹) در تناقض است. پس صفرهای $F(z)$ در $|z| \geq k$ قرار می‌گیرد.

فرض می‌کنیم صفرهای $F(z)$ ، به صورت $R_۱e^{i\theta_۱}, R_۲e^{i\theta_۲}, ..., R_ne^{i\theta_n}$ باشد. آنگاه برای $j = ۱, ..., n$،

$R_j \geq k$ و

$$F(z) = a\prod_{j=1}^{n}(z - R_j e^{i\theta_j})$$

بنابراین برای هر $R > 1$ و $r \leq k$ و برای هر $\theta$ که $0 \leq \theta < 2\pi$ ،

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(Rre^{i\theta})}{R^n F(\frac{re^{i\theta}}{R})}\right| &= \prod_{j=1}^{n}\left|\frac{Rre^{i\theta} - R_j e^{i\theta_j}}{re^{i\theta} - RR_j e^{i\theta_j}}\right| \\
&= \prod_{j=1}^{n}\left|\frac{\frac{Rre^{i\theta} - R_j e^{i\theta_j}}{e^{i\theta_j}}}{\frac{re^{i\theta} - RR_j e^{i\theta_j}}{e^{i\theta_j}}}\right| \\
&= \prod_{j=1}^{n}\left|\frac{Rre^{i(\theta-\theta_j)} - R_j}{re^{i(\theta-\theta_j)} - RR_j}\right| \qquad (10)
\end{aligned}$$

چون $R_j \geq k \geq r$ و $R > 1$ بنابراین

$$\left|\frac{rRe^{i(\theta-\theta_j)} - R_j}{re^{i(\theta-\theta_j)} - RR_j}\right| = \left|\frac{Rr\cos(\theta-\theta_j) + iRr\sin(\theta-\theta_j) - R_j}{r\cos(\theta-\theta_j) + i\sin(\theta-\theta_j) - RR_j}\right| \qquad (11)$$

از (۱۱) و اینکه $|z|^2 = z\bar{z}$ بدست می‌آوریم،

$$\begin{aligned}
\left|\frac{rRe^{i(\theta-\theta_j)} - R_j}{re^{i(\theta-\theta_j)} - RR_j}\right| &= \left(\frac{R^2r^2 + R_j^2 - 2RrR_j\cos(\theta-\theta_j)}{r^2 + R^2R_j^2 - 2RrR_j\cos(\theta-\theta_j)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{R^2r^2 + R_j^2 + 2RrR_j}{r^2 + R^2R_j^2 + 2RrR_j}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{Rr + R_j}{r + RR_j}\right) \\
&\leq \left(\frac{Rr + k}{r + Rk}\right) \qquad (12)
\end{aligned}$$

برای بدست آوردن اولین نامساوی در (۱۲)، تعریف می‌کنیم،

$$f(t) := \frac{R^2r^2 + R_j^2 - 2RrR_jt}{r^2 + R^2R_j^2 - 2RrR_jt}$$

از $f(t)$ مشتق می‌گیریم داریم

$$f'(t) = \frac{-2RrR_j[(r + RR_j)^2 - (Rr + R_j)^2]}{(r^2 + R^2R_j^2 - 2RrR_jt)^2}$$

با فرض اینکه $R_j \geq r$ ،

$$(r + RR_j)^2 - (Rr + R_j)^2 \geq 0$$

بنابراین $f'(t) \geq 0$. پس تابع $f$ روی بازه $[-1, 1]$ نزولی است و ماکزیمم مقدار خود را در $t = -1$ می‌گیرد و اولین نامساوی (۱۲) حاصل می‌شود.

به طریق مشابه، آخرین نامساوی در (۱۲) نیز حاصل می‌شود.

حال با استفاده از (۱۰) و (۱۲) برای هر $\theta$ به طوری که $0 \leq \theta < 2\pi$ و $R > 1$ و $r \leq k$ نتیجه می‌شود

$$\left|F(Rre^{i\theta})\right| \leq \left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n R^n F(\frac{re^{i\theta}}{R})$$

حال $F(z)$ را با $p(z) + \alpha m$ جایگزین می‌کنیم و برای هر $\alpha$ به طوری که $|\alpha| \leq 1$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ و $R > 1$ و $r \leq k$،

$$\left|p(Rre^{i\theta}) + \alpha m\right| \leq \left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n \left|R^n p(\frac{re^{i\theta}}{R}) + R^n \alpha m\right| \tag{۱۳}$$

چون $r \leq k$ و $R > 1$ بنابراین $\frac{r}{R} < k$ و برای $|z| = 1$ داریم $|\frac{rz}{R}| \leq k$.

حال آرگومان $\alpha$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $|\alpha| = 1$ و برای $|z| = 1$ ، می‌توان قسمتی از طرف راست نامساوی (۱۳) را به صورت زیر نوشت.

$$\left|p\left(\frac{rz}{R}\right) + \alpha m\right| = \left|p(\frac{rz}{R})\right| - m \tag{۱۴}$$

حال (۱۴) را در (۱۳) جایگزین می‌کنیم و برای $|z| = 1$ و $R \geq 1$ و $r < k$ بدست می‌آوریم

$$|p(Rrz)| - m \leq \left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n \left|R^n p(\frac{rz}{R})\right| - \left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n R^n m$$

بنابراین

$$|p(Rrz)| \leq \left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n \left|R^n p(\frac{rz}{R})\right| - \left\{\left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n R^n - 1\right\} m(p,k).$$

□

عزیز و محمد [۵] لم زیر را ثابت کردند. اما در اینجا اثبات آن را با استفاده از لم قبل ارائه می‌دهیم.

**لم ۴.۱.۲** اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد و $q(z) = z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ آنگاه برای $R \geq 1$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ ،

$$|p(Re^{i\theta})| + |q(Re^{i\theta})| \leq (R^n + 1)M(p, 1) \tag{15}$$

**برهان:** فرض می‌کنیم $M = M(p, 1)$. آنگاه برای $|z| = 1$ داریم $|p(z)| \leq M$.
با استفاده از قضیه روشه، برای هر عدد حقیقی یا مختلط $\lambda$ به طوری که $|\lambda| > 1$، چندجمله‌ای $F(z) = p(z) - \lambda M$ در $|z| < 1$ صفری ندارد.
حال لم ۳.۱.۲ را برای چندجمله‌ای $F(z)$ ، برای $r = 1 = k$ و هر $0 \leq \theta < 2\pi$ و $R > 1$ به کار می‌بریم،

$$\begin{aligned} |F(Re^{i\theta})| &\leq R^n|F(\frac{e^{i\theta}}{R})| - (R^n - 1)m(F, 1) \\ &\leq \left|R^nF(\frac{e^{i\theta}}{R})\right| \end{aligned} \tag{16}$$

اگر $G(z) = z^n\overline{F(\frac{1}{\bar{z}})}$ ، آنگاه $G(z) = q(z) - \bar{\lambda}z^nM$ و

$$|G(Re^{i\theta})| = |R^ne^{in\theta}\overline{F(\frac{e^{i\theta}}{R})}| = |R^nF(\frac{e^{i\theta}}{R})|$$

با استفاده از (۱۶)، برای $R \geq 1$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ داریم

$$|p(Re^{i\theta}) - \lambda M| = |F(Re^{i\theta})| \leq |G(Re^{i\theta})| = |q(Re^{i\theta}) - \bar{\lambda}R^ne^{in\theta}M| \tag{17}$$

آرگومان $\lambda$ در طرف راست نامساوی بالا را طوری انتخاب می‌کنیم به طوری که

$$|p(Re^{i\theta})| - |\lambda|M \leq |\lambda|R^nM - |q(Re^{i\theta})|$$

یا

$$|p(Re^{i\theta})| + |q(Re^{i\theta})| \leq (R^n + 1)|\lambda|M$$

حال با میل دادن $|\lambda| \to 1$ اثبات کامل می‌شود. □

**برهان قضیه ۲.۱.۲** چندجمله‌ای $p(z)$ شرایط لم ۳.۱.۲ را دارا می باشد پس با قرار دادن $r = ۱$ در نامساوی (۸) داریم

$$|p(Re^{i\theta})| \leq \left(\frac{R+k}{۱+Rk}\right)^n \left|R^n p(\frac{e^{i\theta}}{R})\right| - \left\{\left(\frac{R+k}{۱+Rk}\right)^n R^n - ۱\right\} m(p,k) \qquad (۱۸)$$

از طرفی $q(z) = z^n \overline{p(\frac{۱}{\bar{z}})}$، بنابراین

$$|q(Re^{i\theta})| = |R^n p(\frac{e^{i\theta}}{R})| \qquad (۱۹)$$

با جایگزینی (۱۹) در (۱۸) نتیجه می‌شود

$$|p(Re^{i\theta})| \leq \left(\frac{R+k}{۱+Rk}\right)^n |q(Re^{i\theta})| - \left\{\left(\frac{R+k}{۱+Rk}\right)^n R^n - ۱\right\} m(p,k)$$

با اضافه کردن مقدار $(\frac{R+k}{۱+Rk})^n|p(Re^{i\theta})|$ به هر دو طرف نامساوی فوق داریم

$$\frac{(R+k)^n + (۱+Rk)^n}{(۱+Rk)^n}|p(Re^{i\theta})| \leq$$
$$\left(\frac{R+k}{۱+Rk}\right)^n \left\{|p(Re^{i\theta})| + |q(Re^{i\theta})|\right\} - \left\{\left(\frac{R+k}{۱+Rk}\right)^n R^n - ۱\right\} m(p,k) \qquad (۲۰)$$

با استفاده از (۲۰) و لم ۴.۱.۲ داریم

$$\frac{(R+k)^n + (۱+Rk)^n}{(۱+Rk)^n}|p(Re^{i\theta})| \leq$$
$$\frac{(R+k)^n(۱+R^n)}{(۱+Rk)^n} M(p,۱) - \left\{\left(\frac{R+k}{۱+Rk}\right)^n R^n - ۱\right\} m(p,k)$$
$$= \left(\frac{R+k}{۱+Rk}\right)^n \left[(R^n+۱)M(p,۱) - \left\{R^n - \left(\frac{۱+Rk}{R+k}\right)^n\right\} m(p,k)\right] \qquad (۲۱)$$

از (۲۱)، نتیجه می‌شود

$$M(p,R) \leq \frac{(R+k)^n}{(R+k)^n + (۱+Rk)^n} \times$$
$$\left\{(R^n+۱)M(p,۱) - \left(R^n - \left(\frac{۱+Rk}{R+k}\right)^n\right) m(p,k)\right\}$$

$\square$

با توجه به کرانهای بدست آمده فوق، سؤالات زیر مطرح می شوند.

۱ — آیا موقعیت ریشه ها نقشی در کران ایفا می کنند. به طور دقیق تر اگر $p(z) = a\prod_{v=۱}^{n}(z - z_v)$ به

طوری که $1 \leq k_v \leq |z_v|$ ، آیا $k_v$ ها می توانند در کران تغییری ایجاد کنند یا مستقیماً در کران ظاهر شوند؟

۲– آیا امکان دارد کرانهای بدست آمده به تعداد یا تمام ضرایب $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1$، چند جمله ای $p(z) = \sum_{v=1}^{n} a_v z^v$ بستگی داشته باشد یاتعدادی از ضرایب در کران نقشی ایفا کنند؟

در ارتباط با سؤالات فوق قضایای زیر بدست آمده است.

قضیه زیر منسوب به عزیز و زرگر[6] [۹] است.

**قضیه ۵.۱.۲** اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله ای از درجه $n$ باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد ، آنگاه برای $0 \leq r \leq \rho \leq k$ داریم

$$\begin{aligned} &M(p,\rho) \\ &\leq \left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n \left[1 - \frac{k(k-\rho)(n|a_0| - k|a_1|)n}{(k^2+\rho^2)n|a_0| + 2k^2\rho|a_1|}\left(\frac{\rho-r}{k+\rho}\right)\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^{n-1}\right] M(p,r) \\ &- \left[\frac{(n|a_0|\rho + k^2|a_1|)(r+k)}{(\rho^2+k^2)n|a_0| + 2k^2\rho|a_1|}\left\{\left(\left(\frac{\rho+k}{r+k}\right)^n - 1\right) - n(\rho - r)\right\}\right] m(p,k) \quad (22) \end{aligned}$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) = (z+k)^n$ برقرار است.

برای اثبات قضیه فوق به لم های زیر نیاز داریم.

**لم ۶.۱.۲** اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد، آنگاه

$$M(p', 1) \leq n\frac{(n|a_0| + k^2|a_1|)}{(1+k^2)n|a_0| + 2k^2|a_1|}M(p, 1) \quad (23)$$

[6] A. B. Zargar

این لم منسوب به گویل[۷]، رحمان و شیمایسر [۲۵] است.

**لم ۷.۱.۲** اگر $p(z)=\sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد که هیچ صفری در $|z|<k$ برای $k>0$ نداشته باشد ، آنگاه برای $0\le rR\le k^2$ و $r\le k$ داریم

$$M(p,r)\ge\left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n M(p,R)+\left[1-\left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n\right]m(p,k) \tag{24}$$

این لم منسوب به عزیز و زرگر[۷] است.

**برهان قضیه ۵.۱.۲** چون $p(z)$ هیچ صفری در $|z|<k$ برای $k\ge 1$ ندارد، بنابراین چندجمله‌ای $T(z)=p(tz)$ هیچ صفری در $|z|<\frac{k}{t}$ برای $0<t\le k$ ندارد. با استفاده از لم ۶.۱.۲ برای چندجمله‌ای $T(z)$، $k$ را با $\frac{k}{t}\ge 1$ جایگزین می‌کنیم، بدست می‌آوریم

$$M(T',1)\le n\left\{\frac{(n|a_0|+\frac{k^2}{t^2}|ta_1|)}{(1+\frac{k^2}{t^2})n|a_0|+2\frac{k^2}{t^2}|ta_1|}\right\}M(T,1)$$

بنابراین

$$M(p',t)\le n\left\{\frac{(n|a_0|t+k^2|a_1|)}{(t^2+k^2)n|a_0|+2k^2t|a_1|}\right\}M(p,t) \tag{25}$$

حال برای $0\le r\le\rho\le k$ و $0\le\theta<2\pi$ و به وسیله نامساوی (۲۵) داریم

$$\begin{aligned}|p(\rho e^{i\theta})-p(re^{i\theta})|&\le\int_r^\rho |p'(te^{i\theta})|dt\\&\le\int_r^\rho n\left\{\frac{(n|a_0|t+k^2|a_1|)}{(t^2+k^2)n|a_0|+2k^2t|a_1|}\right\}M(p,t)dt\end{aligned} \tag{26}$$

لم ۷.۱.۲ را برای $R=t$ به کار می‌بریم به طوری که $0\le r\le t\le\rho\le k$ و $0\le rt\le k^2$ ،

$$\begin{aligned}|p(\rho e^{i\theta})-p(re^{i\theta})|&\le\int_r^\rho n\left\{\frac{(n|a_0|t+k^2|a_1|)}{(t^2+k^2)n|a_0|+2k^2t|a_1|}\right\}\\&\quad\times\left(\frac{t+k}{r+k}\right)^n\left\{M(p,r)-\left(1-\left(\frac{r+k}{t+k}\right)^n\right)m(p,k)\right\}dt\\&\le n\left\{\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\\&\quad\times\int_r^\rho\left(\frac{t+k}{r+k}\right)^n\left\{M(p,r)-\left(1-\left(\frac{r+k}{t+k}\right)^n\right)m(p,k)\right\}dt\end{aligned}$$

---
[۷] K. Govil

برای $0 \le r \le \rho \le k$ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
&M(p,\rho)\\
&\quad\le \left[1+\frac{n(k+\rho)}{(k+r)^n}\left\{\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\int_r^\rho (k+t)^{n-1}dt\right]M(p,r)\\
&\quad -n\left\{\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\int_r^\rho\left(\left(\frac{t+k}{r+k}\right)^n-1\right)dt\; m(p,k)\\
&\quad\le\left[1-\left\{\frac{(k+\rho)(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\right.\\
&\qquad\left.+\left\{\frac{(k+\rho)(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n\right]M(p,r)\\
&\quad -n\left[\left\{\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\int_r^\rho\left(\frac{(t+k)^{n-1}}{(r+k)^{n-1}}-1\right)dt\right]m(p,k)\\
&\quad=\left[\left(\frac{\rho^2n|a_0|+k^2n|a_0|+2k^2\rho|a_1|-kn|a_0|\rho-k^3|a_1|-n|a_0|\rho^2-\rho k^2|a_1|}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{nk|a_0|\rho+k^3|a_1|+|a_0|\rho^2n+k^2\rho|a_1|}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right)\left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n\right]M(p,r)\\
&\quad -n\left[\left\{\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\int_r^\rho\left(\frac{(t+k)^{n-1}}{(r+k)^{n-1}}-1\right)dt\right]m(p,k)\\
&\quad=\left[\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right.\\
&\qquad\left.+\left\{1-\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n\right]M(p,r)\\
&\quad -n\left\{\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\int_r^\rho\left(\frac{(t+k)^{n-1}}{(r+k)^{n-1}}-1\right)dt\right]m(p,k)\\
&\quad=\left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n\left[1-\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\left\{1-\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^n\right\}\right]M(p,r)\\
&\quad -n\left\{\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\frac{1}{(r+k)^{n-1}}\\
&\qquad\times\left\{\frac{(\rho+k)^n-(r+k)^n}{n}-(\rho-r)\right\}m(p,k)\\
&\quad=\left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n\left[1-\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right.\\
&\qquad\left.\times\frac{(\rho-r)}{(k+\rho)\left\{1-\frac{k+r}{k+\rho}\right\}}\left\{1-\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^n\right\}\right]M(p,r)\\
&\quad -\left[\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right.\\
&\qquad\left.\times(r+k)\left\{\left\{\left(\frac{\rho+k}{r+k}\right)^n-1\right\}-n(\rho-r)\right\}\right]m(p,k)
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n \left[1 - \frac{k(k-\rho)(n|a_0| - k|a_1|)n}{(k^2+\rho^2)n|a_0| + 2k^2\rho|a_1|}\left(\frac{\rho - r}{k+\rho}\right)\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^{n-1}\right] M(p,r)$$
$$-\left[\frac{(n|a_0|\rho + k^2|a_1|)(r+k)}{(\rho^2+k^2)n|a_0| + 2k^2\rho|a_1|}\left\{\left(\left(\frac{\rho+k}{r+k}\right)^n - 1\right) - n(\rho - r)\right\}\right] m(p,k)$$

$\square$

قضیه زیر منسوب به گویل و نویدیکونگ[8]،[۲۳] است.

**قضیه ۸.۱.۲** اگر $p(z) = a_n\prod_{v=1}^{n}(z - z_v)$ و $a_n \neq 0$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد و $|z_v| \geq k_v > 1$ به طوری که $1 \leq v \leq n$ ، آنگاه

اگر $n > 2$

$$M(p,R) \leq \frac{(R^n+1)}{2}\left[1 - \left(\frac{R^n - 1}{R^n+1}\right)\frac{1}{1 + \frac{2}{n}\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{k_v - 1}}\right] M(p,1)$$
$$-|p'(0)|\left(\frac{R^n - 1}{n} - \frac{R^{n-2} - 1}{n-2}\right) \tag{27}$$

و اگر $n = 2$

$$M(p,R) \leq \frac{(R^2+1)}{2}\left[1 - \left(\frac{R^2 - 1}{R^2+1}\right)\frac{(k_1 - 1)(k_2 - 1)}{(k_1k_2 - 1)}\right] M(p,1) - |p'(0)|\frac{(R-1)^2}{2} \tag{28}$$

برای اثبات قضیه فوق به لم‌های زیر نیاز داریم.

**لم ۹.۱.۲** اگر $p(z) = a_n\prod_{v=1}^{n}(z - z_v)$ و $a_n \neq 0$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد و $|z_v| \geq k_v > 1$ به طوری که $1 \leq v \leq n$ ، آنگاه

$$M(p',1) \leq n\left\{\frac{\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{k_v - 1}}{\sum_{v=1}^{n}\frac{k_v+1}{k_v-1}}\right\} M(p,1) \tag{29}$$

---
[8] G. N. Nyuydinkong

تساوی برای $p(z)=(z+k)^n$ به طوری که $k\geq ۱$ ، برقرار است.
این لم منسوب به گویل و لابل [۹] [۲۲] است.

**لم ۱۰.۱.۲** اگر $p(z)=\sum_{v=۰}^{n}a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد، آنگاه برای $R>۱$،
اگر $n\geq ۲$،

$$M(p,R)\leq R^n M(p,۱)-(R^n-R^{n-۲})|p(۰)| \tag{۳۰}$$

اگر $n=۱$،

$$M(p,R)\leq RM(p,۱)-(R-۱)|p(۰)| \tag{۳۱}$$

برای هر $R$ ، ضریب $|p(۰)|$ بهترین حالت ممکن است. این لم منسوب به فراپیر[۱۰]، رحمان [۱۱] و راچویا[۱۲] [۱۳] است.

**لم ۱۱.۱.۲** اگر $p(z)=a_n\prod_{v=۱}^{n}(z-z_v)$ و $a_n\neq ۰$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد و $|z_v|\geq k_v>۱$ به طوری که $۱\leq v\leq n$ ، آنگاه برای $R>۱$ و $۰\leq\theta<۲\pi$،
اگر $n\geq ۳$،

$$|p'(Re^{i\theta})|\leq nR^{n-۱}\left\{\frac{\sum_{v=۱}^{n}\frac{۱}{k_v-۱}}{\sum_{v=۱}^{n}\frac{k_v+۱}{k_v-۱}}\right\}M(p,۱)-(R^{n-۱}-R^{n-۳})|p'(۰)| \tag{۳۲}$$

اگر $n=۲$،

$$|p'(Re^{i\theta})|\leq R\left\{\frac{k_۱+k_۲-۲}{k_۱k_۲-۱}\right\}M(p,۱)-(R-۱)|p'(۰)| \tag{۳۳}$$

---
[۹] G. Labelle
[۱۰] C. Frappier
[۱۱] Q. I. Rahman
[۱۲] S. Ruscheweyh

**برهان:** چون $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n > 2$ و چندجمله‌ای $p'(z)$ از درجه $n \geq 2$ است، با به کاربردن لم ۱۰.۱.۲ برای $p'(z)$، داریم

$$|p'(Re^{i\theta})| \leq R^{n-1} M(p', 1) - (R^{n-1} - R^{n-3})|p'(0)| \tag{۳۴}$$

حال از ترکیب (۳۴) و لم ۹.۱.۲ نتیجه حاصل می‌شود. □

**برهان قضیه ۸.۱.۲** . برای هر $\theta$ به طوری که $0 \leq \theta < 2\pi$ ،

$$p(Re^{i\theta}) - p(e^{i\theta}) = \int_1^R e^{i\theta} p'(re^{i\theta})dr$$

بنابراین

$$|p(Re^{i\theta}) - p(e^{i\theta})| \leq \int_1^R |p'(re^{i\theta})|dr \tag{۳۵}$$

از ترکیب (۳۵) با لم ۱۱.۱.۲ داریم

$$\begin{aligned} |p(Re^{i\theta}) - p(e^{i\theta})| \leq\ & n \left\{ \frac{\sum_{v=1}^{n} \frac{1}{k_v - 1}}{\sum_{v=1}^{n} \frac{k_v + 1}{k_v - 1}} \right\} M(p, 1) \int_1^R r^{n-1} dr \\ & - \int_1^R (r^{n-1} - r^{n-3}) dr |p'(0)| \end{aligned} \tag{۳۶}$$

$$\begin{aligned} &= (R^n - 1) \left\{ \frac{\sum_{v=1}^{n} \frac{1}{k_v - 1}}{\sum_{v=1}^{n} \frac{k_v + 1}{k_v - 1}} \right\} M(p, 1) - \left( \frac{R^n - 1}{n} - \frac{R^{n-2} - 1}{n - 2} \right) |p'(0)| \\ &= \frac{(R^n - 1)}{\left( 1 + \frac{\sum_{v=1}^{n} \frac{k_v}{k_v - 1}}{\sum_{v=1}^{n} \frac{1}{k_v - 1}} \right)} M(p, 1) - \left( \frac{R^n - 1}{n} - \frac{R^{n-2} - 1}{n - 2} \right) |p'(0)| \\ &= \frac{(R^n - 1)}{\left( \frac{n + \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{k_v - 1}}{\sum_{v=1}^{n} \frac{1}{k_v - 1}} + 1 \right)} M(p, 1) - \left( \frac{R^n - 1}{n} - \frac{R^{n-2} - 1}{n - 2} \right) |p'(0)| \\ &= \frac{(R^n - 1)}{\left( 2 + \frac{n}{\sum_{v=1}^{n} \frac{1}{k_v - 1}} \right)} M(p, 1) - \left( \frac{R^n - 1}{n} - \frac{R^{n-2} - 1}{n - 2} \right) |p'(0)| \\ &= \frac{R^n - 1}{2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{n} \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{k_v - 1}}} \right\} M(p, 1) - \left( \frac{R^n - 1}{n} - \frac{R^{n-2} - 1}{n - 2} \right) |p'(0)| \\ &= \frac{R^n - 1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{n} \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{k_v - 1}} \right\} M(p, 1) - \left( \frac{R^n - 1}{n} - \frac{R^{n-2} - 1}{n - 2} \right) |p'(0)| \end{aligned}$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
|p(Re^{i\theta})| &\leq \frac{R^n-1}{2}\left\{1-\frac{1}{1+\frac{2}{n}\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{k_v-1}}\right\}M(p,1)+M(p,1)\\
&\qquad -\left(\frac{R^n-1}{n}-\frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)|\\
&=\left\{\frac{R^n+1}{2}-\frac{\frac{R^n-1}{2}}{1+\frac{2}{n}\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{k_v-1}}\right\}M(p,1)-\left(\frac{R^n-1}{n}-\frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)|\\
&=\frac{R^n+1}{2}\left\{1-\left(\frac{R^n-1}{R^n+1}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{k_v-1}}\right)\right\}M(p,1)\\
&\qquad -\left(\frac{R^n-1}{n}-\frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)|
\end{aligned}
$$

بنابراین نامساوی (۲۷) ثابت می‌شود.

حال، لم ۱۱.۱.۲ را برای چندجمله‌ای درجه ۲ در نظر بگیریم، در این صورت

$$
|p'(Re^{i\theta})| \leq R\left\{1-\frac{(k_1-1)(k_2-1)}{(k_1k_2-1)}\right\}M(p,1)-(R-1)|p'(0)|
$$

حال می‌توان با اثباتی مشابه، نامساوی (۲۸) را ثابت کرد. □

**نکته ۱۲.۱.۲** چون برای $R>1$ تابع $\frac{(R^x-1)}{x}$ یک تابع صعودی نسبت به $x$ است، بنابراین عبارت $\left(\frac{R^n-1}{n}-\frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)|$ همیشه نامنفی است. در نتیجه کران نامساوی (۲۷) در قضیه ۸.۱.۲، بهبودی از نامساوی (۱) می‌باشد.

**نکته ۱۳.۱.۲** از صورت قضیه ۸.۱.۲ چنین به نظر می‌رسد که باید برای استفاده از آن، تمام صفرهای چندجمله‌ای را داشته باشیم، درصورتی که این لازم نیست. بدون شک، اگر تعدادی از صفرهای چندجمله‌ای معلوم باشد نیز کفایت می کند. به ویژه، اگر چندجمله‌ای $p(z)$ از حاصل ضرب دو یا چند، چندجمله‌ای که صفرهایشان در $|z|\geq k_1>1$ و $|z|\geq k_2>1$ و...و $|z|\geq k_v>1$ به طوری که $1\leq v\leq n$ ، قرار می گیرند تشکیل شده باشد.

اگر چندجمله‌ای $p(z)$ هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ نداشته باشد، نتایج زیر را از قضیه ۸.۱.۲ بدست می آوریم.

**نتیجه ۱۴.۱.۲** اگر $p(z) = \sum_{v=۰}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq ۲$ باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ نداشته باشد ، آنگاه

اگر $n > ۲$

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R^n + k}{۱ + k}\right) M(p,۱) - |a_۱| \left(\frac{R^n - ۱}{n} - \frac{R^{n-۲} - ۱}{n - ۲}\right) \qquad (۳۷)$$

اگر $n = ۲$

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R^۲ + k}{۱ + k}\right) M(p,۱) - |a_۱| \frac{(R - ۱)^۲}{۲} \qquad (۳۸)$$

به ویژه، اگر $k = ۱$ ، آنگاه

**نتیجه ۱۵.۱.۲** اگر $p(z) = \sum_{v=۰}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq ۲$ باشد که هیچ صفری در $|z| < ۱$ نداشته باشد ، آنگاه

اگر $n > ۲$

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R^n + ۱}{۲}\right) M(p,۱) - |a_۱| \left(\frac{R^n - ۱}{n} - \frac{R^{n-۲} - ۱}{n - ۲}\right) \qquad (۳۹)$$

اگر $n = ۲$

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R^۲ + ۱}{۲}\right) M(p,۱) - |a_۱| \frac{(R - ۱)^۲}{۲} \qquad (۴۰)$$

تساوی در نامساوی‌های (۳۹) و (۴۰) برای چندجمله‌ای $p(z) = \lambda + \mu z^n$ با $|\mu| = |\lambda|$ ، برقرار است.

اگر در نامساوی‌های (۳۷) و (۳۸) ، طرفین را بر $R^n$ تقسیم کنیم و $R \longrightarrow \infty$ ، آنگاه

**نتیجه ۱۶.۱.۲** اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq 2$ باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد، آنگاه

$$|a_n| + \frac{|a_1|}{n} \leq \left(\frac{1}{1+k}\right) M(p, 1) \tag{41}$$

به ویژه، اگر $k = 1$ ، آنگاه

**نتیجه ۱۷.۱.۲** اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq 2$ باشد که هیچ صفری در $|z| < 1$ نداشته باشد، آنگاه

$$|a_n| + \frac{|a_1|}{n} \leq \frac{1}{2} M(p, 1) \tag{42}$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای $p(z) = \lambda + \mu z^n$ با $|\mu| = |\lambda|$ ، برقرار می‌شود.

در ادامه این بخش نتایج بدست آمده برای چند جمله ایهای خاص به شکل $p(z) = a_0 + \sum_{\nu=t}^{n} a_\nu z^\nu,\ 1 \leq t \leq n$ را ارائه می دهیم. برای سادگی در نمایش کران از نماد $\|p\| = \max_{|z|=1} |p(z)|$ استفاده می کنیم. گویل[13] [۲۱] قضیه زیر را اثبات کرد.

**قضیه ۱۸.۱.۲** اگر $p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$، $p(z) \neq 0$ در $|z| < 1$، آن‌گاه برای $R \geq 1$

$$\begin{aligned}\max_{|z|=R} |p(z)| \leq \left(\frac{R^n + 1}{2}\right) \|p\| - \frac{n}{2} \left(\frac{\|p\|^2 - 4|a_n|^2}{\|p\|}\right) \\ \times \left\{\frac{(R-1)\|p\|}{\|p\| + 2|a_n|} - \ln\left(1 + \frac{(R-1)\|p\|}{\|p\| + 2|a_n|}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{43}$$

[13] N. K. Govil

تساوی در نامساوی بالا برای چند جمله‌ای‌هایی به فرم $p(z)=\lambda+\mu z^n$، $|\mu|=|\lambda|$، برقرار است.
گاردنر[۱۴]، گویل و ویمز[۱۵][۱۶] قضیه فوق را برای چند جمله‌ای‌هایی به فرم $p(z)=a_\circ+\sum_{\nu=t}^{n}a_\nu z^\nu,\ ۱\leq t\leq n$، تعمیم دادند و قضیه زیر را ثابت کردند.

**قضیه ۱۹.۱.۲** اگر $p(z)=a_\circ+\sum_{\nu=t}^{n}a_\nu z^\nu,\ ۱\leq t\leq n$، یک چند جمله‌ای از درجه $n$، $p(z)\neq\circ$ در $|z|<k(k\geq ۱)$ باشد، آن‌گاه برای $R\geq ۱$

$$\begin{aligned}M(p,R)\leq&\\ &\left(\frac{R^n+k^t}{۱+k^t}\right)\|p\|-\left(\frac{R^n-۱}{۱+k^t}\right)m-\frac{n}{۱+k^t}\left(\frac{(\|p\|-m)^۲-(۱+k^t)^۲|a_n|^۲}{(\|p\|-m)}\right)\\ &\times\left\{\frac{(R-۱)(\|p\|-m)}{(\|p\|-m)+(۱+k^t)|a_n|}-\ln\left(۱+\frac{(R-۱)(\|p\|-m)}{(\|p\|-m)+(۱+k^t)|a_n|}\right)\right\},\quad(۴۴)\end{aligned}$$

به‌طوری‌که $m=m(p,k)$.

حال در جهت بهبود نامساوی بالا به بیان و اثبات قضیه‌ای که توسط گاردنر، گویل و ماساکولا[۱۶] [۱۴] به‌دست آمده، می‌پردازیم.

**قضیه ۲۰.۱.۲** اگر $p(z)=a_\circ+\sum_{\nu=t}^{n}a_\nu z^\nu,\ ۱\leq t\leq n$، یک چند جمله‌ای از درجه $n$، $p(z)\neq\circ$ در $|z|<k(k\geq ۱)$، آن‌گاه برای $R\geq ۱$،

$$\begin{aligned}M(p,R)\leq&\\ &\left(\frac{R^n+s_\circ}{۱+s_\circ}\right)\|p\|-\left(\frac{R^n-۱}{۱+s_\circ}\right)m-\frac{n}{۱+s_\circ}\left(\frac{(\|p\|-m)^۲-(۱+s_\circ)^۲|a_n|^۲}{(\|p\|-m)}\right)\\ &\times\left\{\frac{(R-۱)(\|p\|-m)}{(\|p\|-m)+(۱+s_\circ)|a_n|}-\ln\left(۱+\frac{(R-۱)(\|p\|-m)}{(\|p\|-m)+(۱+s_\circ)|a_n|}\right)\right\},\quad(۴۵)\end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$m=\min_{|z|=k}|p(z)|$$

---
[۱۴] R. B. Gardner
[۱۵] A.Weems
[۱۶] S. R. Musukula

$$s_{\circ} = k^{t+۱}\frac{(\frac{t}{n})\frac{|a_t|}{|a_{\circ}|-m}k^{t-۱}+۱}{(\frac{t}{n})\frac{|a_t|}{|a_{\circ}|-m}k^{t+۱}+۱}.$$

برای اثبات قضیه فوق به لم‌های زیر نیاز داریم.

**لم ۲۱.۱.۲** اگر $f(z)$ در داخل و روی دایره واحد تحلیلی باشد و با فرض $\|f\| = \max_{|z|=۱}|f(z)|$، اگر $a = f(\circ)$ باشد، به‌طوری‌که $|a| < \|f\|$، آن‌گاه برای $|z| < ۱$،

$$|f(z)| < \left(\frac{\|f\||z|+|a|}{\|f\|+|a||z|}\right)\|f\|.$$

لم فوق تعمیمی از لم شوارتز می‌باشد [۳۳].

با به‌کاربردن لم فوق برای $q(z) = z^n p(\frac{۱}{z})$، با توجه به این‌که $\|q\| = \|p\|$، لم زیر نتیجه می‌شود.

**لم ۲۲.۱.۲** اگر $p(z) = \sum_{\nu=\circ}^{n} a_\nu z^\nu$، یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد، برای $|z| = R \geq ۱$،

$$|p(z)| \leq \left(\frac{\|p\|+R|a_n|}{R\|p\|+|a_n|}\right)\|p\|R^n.$$

از لم (۲۲.۱.۲)، فوراً لم زیر نتیجه می‌شود [۲۰].

**لم ۲۳.۱.۲** اگر $p(z) = \sum_{\nu=\circ}^{n} a_\nu z^\nu$، یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد، آن‌گاه برای $|z| = R \geq ۱$،

$$|p(z)| \leq R^n\left(۱-\frac{(\|p\|-|a_n|)(R-۱)}{(R\|p\|+|a_n|)}\right)\|p\|.$$

**لم ۲۴.۱.۲** اگر $p(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$، یک چند جمله‌ای از درجه $n$ و $|z|=R\geq 1$ باشد، آن‌گاه

$$f(x)=\left(1-\frac{(x-n|a_n|)(R-1)}{(Rx+n|a_n|)}\right)x$$

برای $x>0$، تابع صعودی است.

لم بالا به گویل [۲۰] نسبت داده شده است.

لم بعدی منسوب به رحمان و استنکویز[۱۷] [۳۴]، می‌باشد.

**لم ۲۵.۱.۲** اگر $p(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ چند جمله‌ای از درجه $n$، $p(z)\neq 0$ در $|z|<k$،$(k>0)$، آن‌گاه برای $|z|<k$، $|p(z)|>m$ و به ویژه $|a_0|>m$، به‌طوری‌که $m=m(p,k)$.

**برهان:** بدون از دست دادن کلیت می توان فرض کرد، $p(z)$ صفری روی $|z|=k$ ندارد. در غیر این‌صورت نتیجه به‌طور بدیهی برقرار است. چون چند جمله‌ای $p(z)$، در $|z|\leq k$ تحلیلی است، و صفری در $|z|\leq k$ ندارد، طبق اصل مینیمم قدرمطلق برای $|z|<k$، $|p(z)|>m$ و به وضوح برای حالت خاص $|a_0|=|p(0)|>m$. $\square$

**لم ۲۶.۱.۲** اگر $p(z)=a_0+\sum_{\nu=t}^{n} a_\nu z^\nu$،$(1\leq t\leq n)$، و $p(z)\neq 0$ برای $|z|<k$ $(k\geq 1)$، آن‌گاه

$$\frac{a_t k^t}{|a_0|-m}\leq \frac{n}{t}.$$

---
[۱۷] J. Stankiewicz

به‌طوری‌که $m = m(p,k)$.

لم فوق منسوب به گاردنر، گویل و ویمز[۱۵]، می‌باشد.

**لم ۲۷.۱.۲** اگر $p(z) = a_\circ + \sum_{\nu=t}^{n} a_\nu z^\nu$، $(1 \leq t \leq n)$، و $p(z) \neq \circ$ برای $|z| < k$ $(k \geq 1)$، آن‌گاه

$$s_\circ = k^{t+1}\frac{(\frac{t}{n})\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t-1}+1}{(\frac{t}{n})\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t+1}+1} \geq k^t, \qquad t \geq 1.. \tag{۴۶}$$

به‌طوری‌که $m = m(p,k)$.

**برهان:** اگر ما لم (۲۶.۱.۲) را برای چند جمله‌ای $p(z)$، به‌کار بریم، خواهیم داشت

$$\frac{|a_t|k^t}{|a_\circ|-m} \leq \frac{n}{t}$$

که با نامساوی زیر معادل است.

$$\frac{t}{n}\left(\frac{|a_t|k^{t+1}}{|a_\circ|-m}\right)+1 \leq \frac{t}{n}\left(\frac{|a_t|k^t}{|a_\circ|-m}\right)+k,$$

و نامساوی (۴۶) را نتیجه می‌دهد. □

لم بالا به گاردنر[۱۸]، گویل و ویمز [۱۵] نسبت داده می‌شود. لم زیر منسوب به گاردنر، گویل و ویمز [۱۵] می‌باشد.

**لم ۲۸.۱.۲** اگر $p(z) = a_\circ + \sum_{\nu=t}^{n} a_\nu z^\nu$، $1 \leq t$، چند جمله‌ای از درجه $n$، $p(z) \neq \circ$ برای $|z| < k (k \geq 1)$، آن‌گاه

$$M(p',1) \leq \frac{n}{1+s_\circ}(M(p,1)-m(p,k)), \tag{۴۷}$$

[۱۸] R. B. Gardner

به‌طوری‌که

$$s_\circ = k^{t+1}\left(\frac{(\frac{t}{n})\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t-1}+1}{(\frac{t}{n})\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t+1}+1}\right)$$

**لم ۲۹.۱.۲** اگر $p(z) = a_\circ + \sum_{\nu=t}^{n} a_\nu z^\nu$، $1 \leq t$، چند جمله‌ای از درجه $n$، $p(z) \neq \circ$ برای $|z| < k$ $(k \geq 1)$، آن‌گاه

$$|a_n| \leq \frac{1}{1+s_\circ}(\|p\| - m), \tag{۴۸}$$

به‌طوری‌که

$$s_\circ = k^{t+1}\left(\frac{(\frac{t}{n})\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t-1}+1}{(\frac{t}{n})\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t+1}+1}\right),$$

**برهان:** اگر $p(z) = \sum_{\nu=\circ}^{n} a_\nu z^\nu$ و آن‌گاه $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1}$، از این‌رو با به‌کار بردن نامساوی کوشی برای $p'(z)$ داریم

$$|na_n| \leq \|p'\|. \tag{۴۹}$$

از طرف دیگر به وسیله لم (۲۸.۱.۲)،

$$\|p'\| \leq \frac{n}{1+s_\circ}(\|p\| - m). \tag{۵۰}$$

با ترکیب (۴۹) و(۵۰) نتیجه بدست می‌آید. □

**برهان قضیه ۲۰.۱.۲** ابتدا با توجه به این‌که برای هر $\theta$، $\circ \leq \theta \leq 2\pi$ می‌باشد، داریم

$$p(Re^{i\theta}) - p(e^{i\theta}) = \int_1^R p'(re^{i\theta})e^{i\theta}dr.$$

از این‌رو

$$|p(Re^{i\theta}) - p(e^{i\theta})| \leq \int_1^R |p'(re^{i\theta})e^{i\theta}|dr,$$

با استفاده از لم (۲۳.۱.۲) برای $p'(z)$، که یک چند جمله‌ای از درجه $(n-1)$، خواهیم داشت

$$|p(Re^{i\theta}) - p(e^{i\theta})| \leq \int_1^R r^{n-1}\left(1 - \frac{(\|p'\| - n|a_n|)(r-1)}{(r\|p'\| + n|a_n|)}\right)\|p'\|dr, \tag{51}$$

با استفاده از لم (۲۴.۱.۲)، تابع زیر انتگرال در (۵۱) یک تابع صعودی نسبت به $\|p'\|$ می‌باشد، از این‌رو با به‌کار بردن لم (۲۸.۱.۲) در (۵۱)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&|p(Re^{i\theta}) - p(e^{i\theta})| \\
&\leq \int_1^R r^{n-1}\left(1 - \frac{\{\frac{n}{1+s_0}(\|p\|-m) - n|a_n|\}(r-1)}{r\frac{n}{1+s_0}(\|p\|-m) + n|a_n|}\right)\frac{n}{1+s_0}(\|p\|-m)dr \\
&= \frac{n}{1+s_0}(\|p\|-m)\int_1^R r^{n-1}\left(1 - \frac{\{(\|p\|-m) - (1+s_0)|a_n|\}(r-1)}{r(\|p\|-m) + (1+s_0)|a_n|}\right)dr \\
&= \frac{n}{1+s_0}(\|p\|-m)\int_1^R r^{n-1}dr - \frac{n}{1+s_0}((\|p\|-m) - (1+s_0)|a_n|) \\
&\qquad \times \int_1^R \left(\frac{r^{n-1}(r-1)(\|p\|-m)}{r(\|p\|-m) + (1+s_0)|a_n|}\right)dr.
\end{aligned} \tag{52}$$

از نامساوی (۴۸) در لم (۲۹.۱.۲)، داریم

$$(\|p\|-m) - (1+s_0)|a_n| \geq 0,$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&|p(Re^{i\theta}) - p(e^{i\theta})| \\
&\leq \frac{R^n - 1}{1+s_0}(\|p\|-m) - \frac{n}{1+s_0}\left((\|p\|-m) - (1+s_0)|a_n|\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times \int_1^R \left(\frac{(r-1)(\|p\|-m)}{r(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}\right)dr\\
&= \frac{R^n-1}{1+s_0}(\|p\|-m) - \frac{n}{1+s_0}((\|p\|-m)-(1+s_0)|a_n|)\\
&\quad \times \int_1^R \left(1-\left(\frac{(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}{r(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}\right)\right)dr\\
&= \frac{R^n-1}{1+s_0}(\|p\|-m) - \frac{n}{1+s_0}((\|p\|-m)-(1+s_0)|a_n|)\\
&\quad \times \left\{(R-1)-\left(\frac{(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|)}{(\|p\|-m)}\right)\ln\left(\frac{R(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}{(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}\right)\right\}\\
&= \frac{R^n-1}{1+s_0}(\|p\|-m) - \frac{n}{1+s_0}((\|p\|-m)-(1+s_0)|a_n|)\\
&\quad \times \left(\frac{(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}{(\|p\|-m)}\right)\\
&\quad \times \left\{\left(\frac{(R-1)(\|p\|-m)}{(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}\right)-ln\left(\frac{R(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}{(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}\right)\right\}\\
&= \frac{R^n-1}{1+s_0}(\|p\|-m) - \frac{n}{1+s_0}\left(\frac{(\|p\|-m)^2-(1+s_0)^2|a_n|^2}{(\|p\|-m)}\right)\\
&\quad \times \left\{\left(\frac{(R-1)(\|p\|-m)}{(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}\right)-ln\left(\frac{R(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}{(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}\right)\right\},
\end{aligned} \tag{53}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
M(p,R) \le &\left(\frac{R^n+s_0}{1+s_0}\right)\|p\| - \left(\frac{R^n-1}{1+s_0}\right)m - \frac{n}{1+s_0}\left(\frac{(\|p\|-m)^2-(1+s_0)^2|a_n|^2}{(\|p\|-m)}\right)\\
&\times \left\{\left(\frac{(R-1)(\|p\|-m)}{(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}\right)-ln\left(1+\frac{(R-1)(\|p\|-m)}{(\|p\|-m)+(1+s_0)|a_n|}\right)\right\},
\end{aligned} \tag{54}$$

و به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود. □

با توجه به این‌که طبق لم (۲.۱.۲۷)، $s_0 > k^t$، و از طرفی تابع $f(x) = (\frac{R^n+x}{1+x})\|p\| - (\frac{R^n-1}{1+x})m$ یک تابع نزولی نسبت به $x$ می‌باشد. بنابراین می توان نتیجه زیر را از قضیه (۲.۱.۲۰) بدست آوریم.

**نتیجه ۲.۱.۳۰** اگر $p(z) = a_0 + \sum_{\nu=t}^{n} a_\nu z^\nu$ $(1 \le t \le n)$، چند جمله‌ای از درجه $n$، $p(z) \neq 0$ در $|z| < k$ $(k \ge 1)$ باشد، آن‌گاه برای $R \ge 1$،

$$M(p,R) \le \left(\frac{R^n+k^t}{1+k^t}\right)\|p\| - \left(\frac{R^n-1}{1+k^t}\right)m(p,k). \tag{55}$$

حالت خاصی از نتیجه فوق برای $t = k = ۱$،به قضیه‌ای از عزیز و داوود [۴] تبدیل می‌شود.
اگر دو طرف نامساوی (۵۵) را به $R^n$ تقسیم کنیم و آن‌گاه $R \to \infty$، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

**نتیجه ۳۱.۱.۲** اگر $p(z) = a_۰ + \sum_{\nu=t}^{n} a_\nu z^\nu$ $(۱ \leq t \leq n)$، چند جمله‌ای از درجه $n$، $p(z) \neq ۰$ در $|z| < k$ $(k \geq ۱)$، آن‌گاه

$$|a_n| \leq \frac{۱}{۱ + k^t}(\|p\| - m(p,k)),$$

.

## ۲.۲ رشد قدرمطلق چندجمله‌ای‌ها و استفاده از ضریب $\beta$

در این بخش به تعمیم های دیگری از نامساوی (۱) می پردازیم. در انتهای بخش نیز نتیجه جدید که بدست آورده ایم را ارائه می دهیم.
نامساوی (۱) توسط جین[۱۹][۲۸] به صورت زیر تعمیم یافت.

**قضیه ۱.۲.۲** اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد و $p(z) \neq ۰$ در $|z| < ۱$، آنگاه برای هر $\beta$ با $|\beta| \leq ۱$، $R \geq ۱$ و $|z| = ۱$

$$|p(Rz) + \beta(\frac{R+۱}{۲})^n p(z)| \leq \frac{۱}{۲}\{|R^n + \beta(\frac{R+۱}{۲})^n| + |۱ + \beta(\frac{R+۱}{۲})^n|\} \max_{|z|=۱} |p(z)|. \quad (۵۶)$$

نامساوی (۵۶) توسط دوان و هانس[۲۰][۱۱] به صورت زیر بهبود یافته است.

[۱۹] Jain
[۲۰] Hans

**قضیه ۲.۲.۲** اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد و $p(z) \neq ۰$ در $|z| < ۱$، آنگاه برای هر $\beta$ با $|\beta| \leq ۱$، $R \geq ۱$ و $|z| = ۱$

$$\begin{aligned}|p(Rz)+ \quad & \beta(\frac{R+۱}{۲})^n p(z)| \leq \frac{۱}{۲}\{\{|R^n + \beta(\frac{R+۱}{۲})^n| + |۱ + \beta(\frac{R+۱}{۲})^n|\} \max_{|z|=۱} |p(z)| \\ & -\{|R^n + \beta(\frac{R+۱}{۲})^n| - |۱ + \beta(\frac{R+۱}{۲})^n|\} \min_{|z|=۱} |p(z)|\}. \qquad (۵۷)\end{aligned}$$

نتیجه فوق بهترین حالت ممکن است و تساوی برای $p(z) = z^n + ۱$ برقرار است.

همچنین در همان مقاله، دوان و هانس قضیه زیر را اثبات کردند.

**قضیه ۳.۲.۲** اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد به طوریکه تمام ریشه‌هایش در دیسک $|z| \leq ۱$ واقع است. آنگاه برای هر $\beta$ با $|\beta| \leq ۱$، $R \geq ۱$

$$\min_{|z|=۱} |p(Rz) + \beta(\frac{R+۱}{۲})^n p(z)| \geq \{|R^n + \beta(\frac{R+۱}{۲})^n|\} \min_{|z|=۱} |p(z)|. \qquad (۵۸)$$

نتیجه فوق بهترین حالت ممکن است و تساوی در نامساوی فوق برای $p(z) = az^n$ برقرار است.

ما در این بخش دو قضیه فوق را تعمیم می دهیم. ابتدا تعمیم قضیه(۳.۲.۲).

**قضیه ۴.۲.۲** اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد به طوریکه تمام ریشه‌هایش در دیسک $|z| \leq k$، $(k \leq ۱)$ واقع است. آنگاه برای هر $\beta$ با $|\beta| \leq ۱$، $R \geq ۱$

$$\min_{|z|=۱} |p(Rz) + \beta(\frac{R+k}{۱+k})^n p(z)| \geq k^{-n}\{|R^n + \beta(\frac{R+k}{۱+k})^n|\} \min_{|z|=k} |p(z)|. \qquad (۵۹)$$

نتیجه فوق بهترین حالت ممکن است و تساوی در نامساوی فوق برای $p(z) = a(\frac{z}{k})^n$ برقرار است. برای اثبات قضیه به لم زیر نیاز داریم.

**لم ۵.۲.۲** اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد به طوریکه تمام ریشه‌هایش در دیسک $|z| \leq k$،($k \leq 1$) واقع است. آنگاه برای هر $R \geq 1$ و $|z| = 1$

$$|p(Rz)| \geq (\frac{R+k}{1+k})^n |p(z)|. \qquad (60)$$

لم فوق منسوب به عزیز[3] است.

**برهان قضیه ۴.۲.۲** اگر چند جمله‌ای $p(z)$ ریشه‌ای بر $|z| = k$ داشته باشد، در این صورت نامساوی(۵۹) بدیهی می‌باشد. بنابراین فرض کنیم تمام ریشه‌های چند جمله‌ای $p(z)$ داخل ناحیه $|z| < k$ است. در این صورت $m = \min_{|z|=k} |p(z)| > 0$، پس برای هر $|\alpha| < 1$،برای $|z| = k$ داریم $|\alpha m(\frac{z}{k})^n| < m \leq |p(z)|$. حال با استفاده از قضیه روشه، نتیجه می‌شود که تمام ریشه‌های چند جمله‌ای $G(z) = p(z) - \alpha m(\frac{z}{k})^n$ در ناحیه $|z| < k$ قرار دارد. با استفاده از لم ۵.۲.۲ برای چند جمله‌ای $G(z)$، نتیجه می شود که برای هر $|\alpha| < 1$، $R \geq 1$ و $|z| = 1$

$$|p(Rz) - \alpha m(\frac{Rz}{k})^n| \geq (\frac{R+k}{1+k})^n |p(z) - \alpha m(\frac{z}{k})^n|. \qquad (61)$$

بنابراین برای هر $|\beta| < 1$، چند جمله‌ای

$$T(z) = p(Rz) - \alpha R^n m(\frac{z}{k})^n + \beta(\frac{R+k}{1+k})^n \{p(z) - \alpha m(\frac{z}{k})^n\}. \qquad (62)$$

ریشه ای بر روی دایره $|z| = 1$ ندارد.

یعنی برای $|z| = 1$

$$T(z) = \{p(Rz) + \beta(\frac{R+k}{1+k})^n p(z)\} - \alpha m(\frac{z}{k})^n\{R^n + \beta(\frac{R+k}{1+k})^n\} \neq 0. \tag{۶۳}$$

در نتیجه

$$|p(Rz) + \beta(\frac{R+k}{1+k})^n p(z)| \geq mk^{-n}|R^n + \beta(\frac{R+k}{1+k})^n|. \tag{۶۴}$$

اگر نامساوی (۶۴) برقرار نباشد، پس نقطه $z_0$ با $|z_0| = 1$ موجود است به طوریکه

$$|p(Rz_0) + \beta(\frac{R+k}{1+k})^n p(z_0)| < m|(\frac{z_0}{k})^n||R^n + \beta(\frac{R+k}{1+k})^n|. \tag{۶۵}$$

حال با قرار دادن

$$\alpha = \frac{\{p(Rz_0) + \beta(\frac{R+k}{1+k})^n p(z_0)\}}{m(\frac{z_0}{k})^n\{R^n + \beta(\frac{R+k}{1+k})^n\}}. \tag{۶۶}$$

نتیجه می‌شود $|\alpha| < 1$ و با جایگزینی $\alpha$ در رابطه (۶۳)، نتیجه می شود $T(z_0) = 0$. که با رابطه (۶۳) تناقض دارد. بنابراین فرض خلف باطل و نامساوی (۶۵) برقرار است. □

با قرار دادن $\beta = 0$ در قضیه ۴.۲.۲ نتیجه زیر بدست می آید.

**نتیجه ۶.۲.۲** اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$، به طوریکه تمام ریشه‌هایش در دیسک $|z| \leq k$،($k \leq 1$) واقع باشد. آنگاه برای هر $R \geq 1$

$$k^n \min_{|z|=R}|p(z)| \geq R^n \min_{|z|=1}|p(z)|. \tag{۶۷}$$

در ادامه با استفاده از قضیه ۴.۲.۲، قضیه زیر رااثبات می کنیم. قضیه زیر تعمیمی از قضیه ۲.۲.۲ است.

**قضیه ۷.۲.۲** اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد و $p(z) \neq 0$ در $|z| < k$،($k \leq 1$) آنگاه برای هر $\beta$ با $|\beta| \leq 1$، $R \geq 1$ و $|z| = 1$

$$|p(Rz)+\quad\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^np(z)| \leq \tfrac{1}{2}\{\{k^{-n}|R^n+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n|+|1+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n|\}\max_{|z|=k}|p(z)|$$
$$-\{k^{-n}|R^n+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n|-|1+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n|\}\min_{|z|=k}|p(z)|\}. \qquad (۶۸)$$

نتیجه فوق بهترین حالت ممکن است و تساوی برای $p(z)=z^n+k^n$ برقرار است.
برای اثبات قضیه به لم های زیر نیاز داریم.

**لم ۸.۲.۲** فرض کنیم $F(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$، به طوریکه تمام ریشه هایش داخل ناحیه $|z|\leq k$،($k\leq 1$) واقع است، و $p(z)$ نیز چند جمله ای از درجه حداکثر $n$ باشد. اگر برای $|z|=k$، $|p(z)|\leq|F(z)|$ آنگاه برای هر $\beta$ با $|\beta|\leq 1$، $R\geq 1$ و $|z|=1$

$$|p(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^np(z)|\leq|F(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^nF(z)|. \qquad (۶۹)$$

**برهان:** برای هر $\alpha$ با $|\alpha|<1$، از قضیه روشه نتیجه می شود که تعداد صفرهای چند جمله ایهای $F(z)$ و $F(z)+\alpha p(z)$ درون $|z|<1$ برابرند. از طرفی با استفاده از $|p(z)|\leq|F(z)|$، هر ریشه $F(z)$ ریشه ای برای $p(z)$ است. بنابراین تمام ریشه های $F(z)+\alpha p(z)$ در $|z|\leq k$ قرار دارد. حال لم ۵.۲.۲ را برای چند جمله‌ای $F(z)+\alpha p(z)$ در نظر می گیریم. در نتیجه برای هر $|\alpha|<1$، $R\geq 1$ و $|z|=1$

$$|F(Rz)+\alpha p(Rz)|\geq(\frac{R+k}{1+k})^n|F(z)+\alpha p(z)|. \qquad (۷۰)$$

بنابراین برای هر $|\beta|<1$، چند جمله‌ای

$$T(z)=F(Rz)+\alpha p(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n\{F(z)+\alpha p(z)\}. \qquad (۷۱)$$

ریشه ای بر روی دایره $|z| = ۱$ ندارد.

یعنی برای $|z| = ۱$

$$T(z) = \{F(Rz) + \beta(\frac{R+k}{۱+k})^n F(z)\} + \alpha\{p(Rz) + \beta(\frac{R+k}{۱+k})^n p(z)\} \neq ۰. \quad (۷۲)$$

یعنی برای هر $|\alpha| < ۱$

$$|F(Rz) + \beta(\frac{R+k}{۱+k})^n F(z)| \neq |\alpha||p(Rz) + \beta(\frac{R+k}{۱+k})^n p(z)|. \quad (۷۳)$$

در نتیجه

$$|F(Rz) + \beta(\frac{R+k}{۱+k})^n F(z)| \geq |p(Rz) + \beta(\frac{R+k}{۱+k})^n p(z)|. \quad (۷۴)$$

$\square$

با قرار دادن $F(z) = (\frac{z}{k})^n \max_{|z|=k} |p(z)|$ در لم ۸.۲.۲، نتیجه زیر بدست می‌آید.

**لم ۹.۲.۲** فرض کنیم $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد. آنگاه برای هر $\beta$ با $|\beta| \leq ۱$، $R \geq ۱$ و $|z| = ۱$

$$|p(Rz) + \beta(\frac{R+k}{۱+k})^n p(z)| \leq k^{-n}|R^n + \beta(\frac{R+k}{۱+k})^n| \max_{|z|=k} |p(z)|. \quad (۷۵)$$

**لم ۱۰.۲.۲** فرض کنیم $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد. آنگاه برای هر $\beta$ با $|\beta| \leq ۱$، $R \geq ۱$ و $|z| = ۱$

$$|p(Rz) + \beta(\tfrac{R+k}{۱+k})^n p(z)| + |Q(Rz) + \beta(\tfrac{R+k}{۱+k})^n Q(z)| \leq$$

$$\{k^{-n}|R^n + \beta(\tfrac{R+k}{۱+k})^n| + |۱ + \beta(\tfrac{R+k}{۱+k})^n|\} \max_{|z|=k} |p(z)|. \quad (۷۶)$$

به طوریکه $Q(z)=(\frac{z}{k})^n\overline{p(\frac{k^2}{\overline{z}})}$.

**برهان:** قرار می دهیم $M=\max_{|z|=k}|p(z)|$. با استفاده از قضیه روشه، برای مقادیر $\alpha$ با $|\alpha|>1$، نتیجه می شود که چندجمله‌ای $G(z)=p(z)-\alpha M$ هیچ ریشه ای در $|z|<k$ ندارد. بنابراین تمام ریشه‌های چندجمله‌ای $H(z)=(\frac{z}{k})^n\overline{G(\frac{k^2}{\overline{z}})}$ در دیسک $|z|\leq k$ قرار دارد به علاوه برای $|z|=k$، $|H(z)|=|G(z)|$. حال با استفاده از لم ۸.۲.۲، برای $|\beta|\leq 1$، $R\geq 1$ و $|z|=1$ داریم.

$$|G(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^nG(z)|\leq|H(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^nH(z)|. \qquad (77)$$

حال با جایگزینی

$$H(z)=(\frac{z}{k})^n\overline{G(\frac{k^2}{\overline{z}})}=(\frac{z}{k})^n\overline{p(\frac{k^2}{\overline{z}})}-\overline{\alpha}(\frac{z}{k})^nM=Q(z)-\overline{\alpha}(\frac{z}{k})^nM. \qquad (78)$$

بدست می آوریم

$$|\{p(Rz)-\alpha M\}+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n\{p(z)-\alpha M\}|\leq$$
$$|\{Q(Rz)-\overline{\alpha}R^n(\tfrac{z}{k})^nM\}+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n\{Q(z)-\overline{\alpha}(\tfrac{z}{k})^nM\}|. \qquad (79)$$

در نتیجه

$$|p(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^np(z)-\alpha(1+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)M|\leq$$
$$|Q(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^nQ(z)-\overline{\alpha}(\tfrac{z}{k})^n(R^n+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)M|. \qquad (80)$$

از طرفی، برای $|z|=k$، $|p(z)|=|Q(z)|$، یعنی $M=\max_{|z|=k}|Q(z)|$. بنابراین با استفاده از لم ۹.۲.۲ برای چندجمله‌ای $Q(z)$ داریم

$$|Q(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^nQ(z)|\leq|\alpha|k^{-n}|R^n+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n|M. \qquad (81)$$

در نتیجه با استفاده از آرگومان مناسب برای $\alpha$ داریم

$$\begin{aligned}&|Q(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^nQ(z)-\overline{\alpha}(\frac{z}{k})^n(R^n+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n)M| =\\ &|\alpha|k^{-n}|R^n+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n)M|-|Q(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^nQ(z)|.\end{aligned} \tag{۸۲}$$

با ترکیب (۸۰) و (۸۲) داریم

$$\begin{aligned}&|p(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^np(z)|-|\alpha||1+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)M| \leq\\ &|\alpha|k^{-n}|R^n+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)M|-|Q(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^nQ(z)|.\end{aligned} \tag{۸۳}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}&|p(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^np(z)|+|Q(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^nQ(z)| \leq\\ &|\alpha|\{k^{-n}|R^n+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)|+|1+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)|\}M.\end{aligned} \tag{۸۴}$$

حال با میل دادن $|\alpha|\to 1$ نتیجه حاصل می‌شود. □

**برهان قضیه ۷.۲.۲** قرار می دهیم $m=\min_{|z|=k}|p(z)|$. با استفاده از قضیه روشه، برای مقادیر $\alpha$ با $|\alpha|<1$، نتیجه می شود که چندجمله‌ای $G(z)=p(z)-\alpha m$ هیچ ریشه ای در $|z|<k$ ندارد. بنابراین تمام ریشه‌های چندجمله‌ای $H(z)=(\frac{z}{k})^n\overline{G(\frac{k^2}{\overline{z}})}$ در دیسک $|z|\leq k$ قرار دارد به علاوه برای $|z|=k$، $|G(z)|=|H(z)|$. حال با استفاده از لم ۸.۲.۲، برای $|\beta|\leq 1$، $R\geq 1$ و $|z|=1$ داریم.

$$|G(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^nG(z)|\leq|H(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^nH(z)|. \tag{۸۵}$$

حال با جایگزینی

$$H(z)=(\frac{z}{k})^n\overline{G(\frac{k^2}{\overline{z}})}=(\frac{z}{k})^n\overline{p(\frac{k^2}{\overline{z}})}-\overline{\alpha}(\frac{z}{k})^nm=Q(z)-\overline{\alpha}(\frac{z}{k})^nm. \tag{۸۶}$$

بدست می آوریم

$$\begin{aligned}&|\{p(Rz)-\alpha m\}+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n\{p(z)-\alpha m\}| \leq\\ &|\{Q(Rz)-\overline{\alpha}R^n(\tfrac{z}{k})^nm\}+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n\{Q(z)-\overline{\alpha}(\tfrac{z}{k})^nm\}|.\end{aligned} \tag{۸۷}$$

در نتیجه

$$|p(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n p(z)-\alpha(1+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)m| \leq$$
$$|Q(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n Q(z)-\overline{\alpha}(\tfrac{z}{k})^n(R^n+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)m|. \quad (88)$$

از طرفی، برای $|z|=k$، $p(z)=Q(z)$، یعنی $m=\min_{|z|=k}|Q(z)|$. بنابراین با استفاده از قضیه ۴.۲.۲ برای چندجمله‌ای $Q(z)$ داریم

$$|Q(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n Q(z)| \geq |\alpha| k^{-n} |R^n+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n| m. \quad (89)$$

در نتیجه با استفاده از آرگومان مناسب برای $\alpha$ داریم

$$|Q(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n Q(z)-\overline{\alpha}(\frac{z}{k})^n(R^n+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n)m| =$$
$$|Q(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n Q(z)| - |\alpha| k^{-n} |R^n+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n)m|. \quad (90)$$

با ترکیب (۸۸) و (۹۰) داریم

$$|p(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n p(z)| - |\alpha||1+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)m| \leq$$
$$|Q(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n Q(z)| - |\alpha| k^{-n} |R^n+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)m|. \quad (91)$$

در نتیجه

$$|p(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n p(z)| - |Q(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n Q(z)| \leq$$
$$-|\alpha|\{k^{-n}|R^n+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)| + |1+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)|\}m. \quad (92)$$

حال با میل دادن $|\alpha| \to 1$ داریم

$$|p(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n p(z)| - |Q(Rz)+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n Q(z)| \leq$$
$$-\{k^{-n}|R^n+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)| + |1+\beta(\tfrac{R+k}{1+k})^n)|\}m. \quad (93)$$

از طرف دیگر با استفاده از لم ۲.۲.۱۰ داریم

$$|p(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n p(z)|+|Q(Rz)+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n Q(z)|\leq$$

$$\{k^{-n}|R^n+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n|+|1+\beta(\frac{R+k}{1+k})^n|\}\max_{|z|=k}|p(z)|. \qquad (۹۴)$$

حال با جمع دوطرف روابط(۹۳) و (۹۴) قضیه اثبات می‌شود. □

# فصل ۳

# نامساوی‌هایی برای مشتق چند جمله‌ای‌ها

اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد، با یک نتیجه‌گیری فوری از قضیه برنشتاین[۱] [۳۶] بر روی مشتق چند جمله‌ای‌های مثلثاتی، نامساوی زیر به‌دست می آید.

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |p(z)|. \qquad (1)$$

تساوی در نامساوی (۱) فقط وقتی $p(z)$ تمام ریشه‌هایش را در مبدأ داشته باشد برقراراست. بنابراین طبیعی است، بهبودی به موجب فرضیات مناسب روی ریشه‌های $p(z)$ در نامساوی (۱) دیده شود.
بر اساس حدس اردوش[۲]، اگر $p(z)$ ریشه‌ای در $|z| < 1$ نداشته باشد، می‌توان نامساوی زیر را که بعداً به وسیله لکس[۳] [۲۹] اثبات شده را جایگزین نامساوی (۱) کرد.

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \leq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |p(z)|. \qquad (2)$$

از طرف دیگر توران[۴] [۳۷] نشان داد، اگر $p(z)$ تمام ریشه‌هایش را در $|z| \leq 1$ داشته باشد، آن‌گاه

[۱] S. Bernsteion
[۲] P. Erdös
[۳] P. D. Lax
[۴] P. Turan

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq \frac{n}{2}\max_{|z|=1}|p(z)|. \qquad (3)$$

تساوی در (۳) برای چند جمله‌ای از درجه $n$، در حالی که تمام ریشه‌هایش را روی $|z| = 1$ داشته باشد، برقرار است. پس از آن، عزیز و داوود [۴] نامساوی (۳) را به صورت زیر بهبود دادند.

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq \frac{n}{2}\left\{\max_{|z|=1}|p(z)| + \min_{|z|=1}|p(z)|\right\}. \qquad (4)$$

مالک [۳۰]، نشان داد که اگر $p(z)$ ریشه‌ای در $|z| < k$، به‌طوری‌که $k \geq 1$ نداشته باشد، آن‌گاه

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \leq \frac{n}{1+k}\max_{|z|=1}|p(z)|. \qquad (5)$$

پس از آن مالک [۳۰]، نامساوی زیر را برای چند جمله‌ای‌های از درجه $n$، که تمام ریشه‌هایش در $|z| \leq k$ به‌طوری‌که $k \leq 1$ باشد، اثبات کرد.

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq \frac{n}{1+k}\max_{|z|=1}|p(z)|. \qquad (6)$$

گویل[۱۹] برای چند جمله‌ای‌هایی که تمام ریشه‌هایش در $|z| < k$, $(k \geq 1)$ باشد، نامساوی زیر را اثبات کرد.

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq \frac{n}{1+k^n}\max_{|z|=1}|p(z)|. \qquad (7)$$

نتیجه به‌دست آمده بهترین نتیجه ممکن، و تساوی در (۷) برای چند جمله‌ای $p(z) = z^n + k^n$ برقرار است.

## ۱.۳ نامساوی برای مشتق چندجمله‌ای‌هایی که ریشه‌هایش در $|z| < k$، $(k > \circ)$ واقعند

اگر چه نامساوی (۷) دقیق است، اما دارای دو ایراد است. اول این‌که، کران در این نامساوی فقط به ریشه با بزرگترین اندازه وابسته است و منوط به دیگر ریشه‌ها، حتی ریشه‌هایی که در همسایگی مبدأ قرار دارند، نمی‌شوند. برای مثال نامساوی (۷) برای هر دو چند جمله‌ای $p_۱(z) = (z + l)^n$ و $p_۲(z) = z^{n-۱}(z + l)$، به‌طوری‌که $l$ یک عدد مثبت دلخواه باشد، کران یکسان $\frac{n}{(۱+l)^n}$، تخصیص می‌دهد. هر چند $p_۲(z)$، (n-1) ریشه‌اش را در مبدأ و تنها یک ریشه‌اش دارای اندازه $l$ می‌باشد.
دوم این‌که چون تساوی در رابطه (۷)، برای $p(z) = z^n + k^n$ برقرار می‌باشد، نامساوی (۷) امکان به‌دست آوردن کران دقیق‌تری را برای چند جمله‌ای‌های $\sum_{\nu=\circ}^{n} a_\nu z^\nu$ به‌طوری‌که همه ضرایب $a_۱, ..., a_{n-۱}$ در آن صفر نیستند را فراهم نمی‌سازد. بنابراین به بیان و اثبات قضیه زیر که منسوب به گویل [۱۸] می باشد، می‌پردازیم. به‌طوری‌که کران به‌دست آمده در آن وابسته به موقعیت تمام ریشه‌ها و ضرایب $a_۱, ..., a_{n-۱}$ چند جمله‌ای $\sum_{\nu=\circ}^{n} a_\nu z^\nu$ می‌باشد.

**قضیه ۱.۱.۳** اگر $p(z) = \sum_{\nu=\circ}^{n} a_\nu z^\nu = a_n \prod_{\nu=۱}^{n} (z - z_\nu)$ $(a_n \neq \circ)$، یک چند جمله‌ای از درجه $n \geq ۲$ باشد، به‌طوری‌که $|z_\nu| \leq k_\nu (۱ \leq \nu \leq n)$ و $k = \max(k_۱, k_۲, ..., k_n) \geq ۱$ باشد، آن‌گاه برای $n > ۲$

$$\begin{aligned}\max_{|z|=۱} |p'(z)| \geq &\frac{۲}{(۱ + k^n)} \left( \sum_{\nu=۱}^{n} \frac{k}{k + k_\nu} \right) \max_{|z|=۱} |p(z)| \\ &+ \frac{۲|a_{n-۱}|}{(۱ + k^n)} \sum_{\nu=۱}^{n} \frac{۱}{(k + k_\nu)} \left( \frac{k^n - ۱}{n} - \frac{k^{n-۲} - ۱}{n - ۲} \right) \\ &+ |a_۱| \left( ۱ - \frac{۱}{k^۲} \right), \end{aligned} \tag{۸}$$

و برای $n = ۲$

$$\begin{aligned}\max_{|z|=۱} |p'(z)| \geq &\frac{۲}{(۱ + k^n)} \sum_{\nu=۱}^{n} \frac{k}{k + k_\nu} \max_{|z|=۱} |p(z)| \\ &+ \frac{(k - ۱)^n}{(۱ + k^n)} |a_۱| \sum_{\nu=۱}^{n} \frac{۱}{(k + k_\nu)} + |a_۱| \left( ۱ - \frac{۱}{k} \right). \end{aligned} \tag{۹}$$

تساوی در (۸) و (۹) برای $p(z) = z^n + k^n$ برقرار است.

برای اثبات قضیه بالا به لم‌های زیر نیاز داریم.

**لم ۲.۱.۳** اگر $p(z) = a_n \prod_{\nu=1}^{n} (z - z_\nu)$ چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد، به‌طوری‌که تمام صفرهای آن $|z_\nu| \leq 1$ $(1 \leq \nu \leq n)$ باشد، آن‌گاه

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \geq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(1 + |z_\nu|)} \max_{|z|=1} |p(z)|. \qquad (10)$$

اگر تمام ریشه‌های چند جمله‌ای $p(z)$ مثبت باشند، تساوی در (۱۰) برقرار است .

لم بالا منسوب به جیروکس[۵]، رحمان و شیمایسر[۶][۱۷] می‌باشد.

**لم ۳.۱.۳** اگر $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد، آنگاه برای $R > 1$،

اگر $n \geq 2$

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq R^n \max_{|z|=1} |p(z)| - \left(R^n - R^{n-2}\right) |p(0)|. \qquad (11)$$

اگر $n = 1$

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq R \max_{|z|=1} |p(z)| - (R - 1) |p(0)|. \qquad (12)$$

نتیجه بالا منسوب به فراپیر[۷]، رحمان و راچویا[۸][۱۳] می‌باشد.

**لم ۴.۱.۳** اگر $p(z) = a_n \prod_{\nu=1}^{n} (z - z_\nu)$ $(a_n \neq 0)$ چند جمله‌ایی از درجه $n$ باشد، $|z_\nu| \geq 1$ $(1 \leq \nu \leq n)$، آنگاه برای $R \geq 1$،

[۵] Giroux
[۶] Schmeisser
[۷] Frappier
[۸] Ruscheweyh

اگر $n > ۲$

$$\max_{|z|=R}|p(z)| \leq \frac{(R^n - ۱)}{۲}\max_{|z|=۱}|p(z)| - |a_۱|\left(\frac{R^n - ۱}{n} - \frac{R^{n-۲} - ۱}{n-۲}\right). \qquad (۱۳)$$

اگر $n = ۲$

$$\max_{|z|=R}|p(z)| \leq \frac{(R^۲ - ۱)}{۲}\max_{|z|=۱}|p(z)| - |a_۱|\left(\frac{(R-۱)^۲}{۲}\right). \qquad (۱۴)$$

تساوی برای $p(z) = (z^n + ۱)$ برقرار است.

**برهان:** برای هر $\phi$، $۰ \leq \phi < ۲\pi$، داریم

$$p\left(Re^{i\phi}\right) - p\left(e^{i\phi}\right) = \int_۱^R e^{i\phi}p'\left(re^{i\phi}\right)dr,$$

یا

$$\left|p\left(Re^{i\phi}\right) - p\left(e^{i\phi}\right)\right| \leq \int_۱^R \left|p'\left(re^{i\phi}\right)\right| dr.$$

حال ابتدانامساوی (۱۱) از لم ۳.۱.۳ و سپس نامساوی (۲) را در چند جمله‌ای $p'(z)$، به‌طوری‌که از درجه $n \geq ۲$ می‌باشد، به‌کار بریم، نامساوی زیر به‌دست می آید.

$$\begin{aligned}\left|p\left(Re^{i\phi}\right) - p\left(e^{i\phi}\right)\right| &\leq \frac{n}{۲}\left(\max_{|z|=۱}|p(z)|\int_۱^R r^{n-۱}dr\right.\\ &\quad \left.- \int_۱^R\left(r^{n-۱} - r^{n-۳}\right)dr|a_۱|\right)\\ &= \frac{(R^n - ۱)}{۲}\max_{|z|=۱}|p(z)| - |a_۱|\left(\frac{R^n - ۱}{n} - \frac{\left(R^{n-۲} - ۱\right)}{n-۲}\right),\end{aligned}$$

و به این تربیت اثبات نامساوی (۱۳) لم ۴.۱.۳ کامل می‌شود. اگر نامساوی (۱۲) از لم ۳.۱.۳ و نامساوی (۲) را در اثبات بالا بکار ببریم نامساوی (۱۴) بدست می آید. □

برهان قضیه۱.۱.۳: ابتدا نامساوی (۸) را اثبات می‌کنیم. در این‌جا $p(z)$ از درجه $n > ۲$ است. چون ریشه‌های چند جمله‌ای $p(z)$، $z_\nu(۱ \leq \nu \leq n)$ می‌باشد، ریشه‌های چند جمله‌ای $P(z) = p(kz)$،

$\frac{z_\nu}{k}(1 \le \nu \le n)$ و چون تمام ریشه‌های چند جمله‌ای $p(z)$ در $k < |z|$، بنابراین تمام ریشه‌های $P(z)$ در $1 \le |z|$ می‌باشد. بنابر لم (۲.۱.۳)

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \ge \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{|z_\nu|}{k}\right)} \max_{|z|=1} |P(z)|,$$

یا

$$k \max_{|z|=k} |p'(z)| \ge \sum_{\nu=1}^{n} \frac{k}{(k + |z_\nu|)} \max_{|z|=k} |p(z)|. \tag{15}$$

چون چند جمله‌ای $p(z)$ از درجه $n > 2$، چند جمله‌ای $p'(z)$ از درجه $n \ge 2$، از این‌رو با به‌کار بردن لم (۳.۱.۳) در $p'(z)$، برای $k \ge 1$، داریم

$$\max_{|z|=k} |p'(z)| \le k^{n-1} \max_{|z|=1} |p'(z)| - \left(k^{n-1} - k^{n-3}\right) |a_1|. \tag{16}$$

از ترکیب (۱۵) با (۱۶) برای $k \ge 1$، داریم

$$k^n \max_{|z|=1} |p'(z)| - (k^n - k^{n-2})|a_1| \ge \sum_{\nu=1}^{n} \frac{k}{(k + |z_\nu|)} \max_{|z|=k} |p(z)|. \tag{17}$$

فرض کنید $q(z) = z^n p\left(\frac{1}{z}\right)$. چون چند جمله‌ای $p(z)$ تمام ریشه‌ایش در $|z| \le k(k \ge 1)$، تمام ریشه‌های چند جمله‌ای $q\left(\frac{z}{k}\right)$ در $1 < |z|$ می‌باشد. از این‌رو با به‌کار بردن لم (۴.۱.۳) در چند جمله‌ای $q(\frac{z}{k})$، برای $k \ge 1$ داریم

$$\begin{aligned}\max_{|z|=k} \left|q\left(\frac{z}{k}\right)\right| \le{}& \frac{(k^n + 1)}{2} \max_{|z|=1} \left|q\left(\frac{z}{k}\right)\right| \\ &-\frac{|a_{n-1}|}{k}\left(\frac{k^n - 1}{n} - \frac{k^{n-2} - 1}{n-2}\right),\end{aligned}$$

که معادل است با

$$\begin{aligned}\max_{|z|=k} |p(z)| \ge{}& \frac{2k^n}{(1 + k^n)} \max_{|z|=1} |p(z)| \\ &+\frac{2\,|a_{n-1}|\,k^{n-1}}{1 + k^n}\left(\frac{k^n - 1}{n} - \frac{k^{n-2} - 1}{n-2}\right).\end{aligned} \tag{18}$$

با ترکیب (۱۷) و (۱۸)،

$$\frac{k^n}{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{k}{(k+|z_\nu|)}} \max_{|z|=1} |p'(z)| - \frac{(k^n - k^{n-2})}{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{k}{(k+|z_\nu|)}} |a_1|$$

$$\geq \frac{۲k^n}{(۱+k^n)} \max_{|z|=۱} |p(z)| + \frac{۲|a_{n-۱}|k^{n-۱}}{۱+k^n} \left( \frac{k^n - ۱}{n} - \frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲} \right),$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \max_{|z|=۱} |p'(z)| &\geq \frac{۲}{۱+k^n} \sum_{\nu=۱}^{n} \frac{k}{k+|z_\nu|} \max_{|z|=۱} |p(z)| \\ &+ \frac{۲|a_{n-۱}|}{(۱+k^n)} \left( \frac{k^n-۱}{n} - \frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲} \right) \sum_{\nu=۱}^{n} \frac{۱}{k+|z_\nu|} \\ &+ |a_۱| \left( ۱ - \frac{۱}{k^۲} \right) \\ &\geq \frac{۲}{۱+k^n} \sum_{\nu=۱}^{n} \frac{k}{k+k_\nu} \max_{|z|=۱} |p(z)| \\ &+ \frac{۲|a_{n-۱}|}{(۱+k^n)} \left( \frac{k^n-۱}{n} - \frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲} \right) \sum_{\nu=۱}^{n} \frac{۱}{k+k_\nu} \\ &+ |a_۱| \left( ۱ - \frac{۱}{k^۲} \right), \end{aligned}$$

که همان نامساوی (۸) می‌باشد.

برای اثبات نامساوی (۹) همان روند اثبات نامساوی (۸) است، اما به‌جای نامساوی (۱۱)، نامساوی (۱۲) از لم (۳.۱.۳) را استفاده کرده و از بیان جزئیات پرهیز می‌کنیم. □

چون $(۱ \leq \nu \leq n)$ $\frac{k}{(k+k_\nu)} \geq \frac{۱}{۲}$، از قضیه (۱.۱.۳) به‌طور خاص نتیجه زیر حاصل می‌شود.

**نتیجه ۵.۱.۳** اگر $p(z) = a_n \prod_{\nu=۱}^{n} (z - z_\nu)$ $(a_n \neq ۰)$، چند جمله‌ای از درجه $n$، به‌طوری‌که تمام ریشه‌هایش در $|z| \geq k$ $(k \geq ۱)$،قرار داشته باشد. آنگاه

برای $n > ۲$

$$\begin{aligned} \max_{|z|=۱} |p'(z)| &\geq \frac{n}{(۱+k^n)} \max_{|z|=۱} |p(z)| \\ &+ \frac{n|a_{n-۱}|}{(۱+k^n)k} \left( \frac{k^n-۱}{n} - \frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲} \right) \\ &+ |a_۱| \left( ۱ - \frac{۱}{k^۲} \right) \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

و برای $n = ۲$

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \geq \frac{n}{(۱+k^n)} \max_{|z|=۱} |p(z)| + \frac{(k-۱)^n}{(۱+k^n)k}|a_۱| + |a_۱|\left(۱ - \frac{۱}{k}\right). \qquad (۲۰)$$

تساوی در (۱۹) و (۲۰) برای $p(z) = z^n + k^n$ برقرار است.

به آسانی می‌توان تحقیق کرد، اگر $۱ < k$ و $۲ < n$ باشد، آن‌گاه $۰ < \left(\frac{k^n-۱}{n} - \frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲}\right)$ و از این‌رو برای چندجمله‌ای از درجه $n > ۱$، نامساوی (۸) و (۹) دقیق‌تر از نامساوی (۷) می‌باشد. در حقیقت به غیر از حالتی که تمام ریشه‌های $p(z)$ در روی $|z| = k$ قرار داشته باشد، یعنی $a_۱ = ۰$ و $a_{n-۱} = ۰, \cdots$ باشد، کران به‌دست آمده در قضیه (۱.۱.۳) همواره ظریف‌تر از کران در نامساوی (۷) می باشد.

و به سادگی می‌توان دید که کران به‌دست آمده در قضیه (۱.۱.۳) کلی‌تر و دقیق‌تر است از نتیجهٔ زیر، که منسوب به عزیز [۲] می‌باشد.

**قضیه ۶.۱.۳** اگر تمام ریشه‌های چند جمله‌ای $p(z) = \prod_{\nu=۱}^{n}(z - z_\nu)$ از درجه $n$، در $|z| \leq k$ ($k \geq ۱$) قرار داشته باشد، آن‌گاه

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \geq \frac{۲}{(۱+k^n)} \sum_{\nu=۱}^{n} \frac{k}{(k+|z_\nu|)} \max_{|z|=۱} |p(z)|. \qquad (۲۱)$$

تساوی در (۲۱) برای $p(z) = z^n + k^n$ برقرار است.

در پایان این بخش در جهت دقیق‌تر کردن و تعمیم نامساوی (۴) به بیان و اثبات قضیه زیر که منسوب به عزیز و زرگر [۷] می‌پردازیم.

**قضیه ۷.۱.۳** اگر $p(z)$ چند جمله‌ای از درجه $n$ و تمام ریشه‌هایش در $|z| \leq k(k \leq ۱)$ باشد، آن‌گاه برای $rR \geq k^۲$ و $r \leq R$، داریم

$$\max_{|z|=R}|p'(z)| \geq \frac{n(R+k)^{n-1}}{(r+k)^n}\left\{\max_{|z|=r}|p(z)| + \min_{|z|=k}|p(z)|\right\}. \tag{۲۲}$$

تساوی در (۲۲) برای چند جمله‌ای $p(z)=(z+k)^n$ برقرار است.

برای اثبات قضیه بالا به لم زیر نیاز داریم.

**لم ۸.۱.۳** اگر $p(z)=\sum_{j=0}^{n} c_j z^j$ چند جمله‌ای از درجه $n$، به‌طوری‌که تمام ریشه‌هایش در $|z|<k$ $(k>0)$، برای $rR\geq k^2$ و $r\leq R$

$$|p(Rz)| \geq \left(\frac{R+k}{r+k}\right)^n |p(rz)| \qquad |z|=1. \tag{۲۳}$$

تساوی در (۲۳) برای چند جمله‌ای $p(z)=(z+k)^n$ برقرار است.

**برهان:** چون تمام ریشه‌های $p(z)$ در $|z|\leq k$ $(k>0)$،

$$p(z)=c\prod_{j=1}^{n}(z-R_je^{i\theta_j})$$

به‌طوری‌که $R_j\leq k(j=1,2,...,n)$، بنابراین برای $0\leq\theta\leq 2\pi$،

$$\left|\frac{p(re^{i\theta})}{p(Re^{i\theta})}\right| = \prod_{j=1}^{n}\left|\frac{re^{i\theta}-R_je^{i\theta_j}}{Re^{i\theta}-R_je^{i\theta_j}}\right| = \prod_{j=1}^{n}\left|\frac{re^{i(\theta-\theta_j)}-R_j}{Re^{i(\theta-\theta_j)}-R_j}\right| \tag{۲۴}$$

برای $R\geq r$ و $Rr\geq R_j^2$ و برای هر $0\leq\theta\leq 2\pi$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\left|\frac{re^{i(\theta-\theta_j)}-R_j}{Re^{i(\theta-\theta_j)}-R_j}\right|^2 &= \left|\frac{r^2+R_j^2-2rR_j\cos(\theta-\theta_j)}{R^2+R_j^2-2RR_j\cos(\theta-\theta_j)}\right| \\ &\leq \left(\frac{r+R_j}{R+R_j}\right)^2.\end{aligned}$$

چون $R_j\leq k$ $(j=1,2,...,n)$، بنابراین از نامساوی (۲۴) نتیجه می‌شود، اگر $rR\geq k^2$ و $r\leq R$، آن‌گاه

$$\left|\frac{p(re^{i\theta})}{p(Re^{i\theta})}\right| \leq \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{r+R_j}{R+R_j}\right) \leq \left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n.$$

از این‌رو برای $r \leq R$، $rR \geq k^{۲}$ و برای هر $\theta$، $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$

$$|p(re^{i\theta})| \leq \left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n |p(Re^{i\theta})|$$

و این اثبات لم (۸.۱.۳) را کامل می‌کند. □

برهان قضیه۷.۱.۳: فرض کنید $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$، آن‌گاه $m \leq |p(z)|$ برای $|z| = k$.

چون همه ریشه‌های $p(z)$ در $۱ \leq k \leq |z|$ قرار دارد، بنابراین برای هر عدد مختلط $\alpha$ به‌طوری‌که $|\alpha| < ۱$، با استفاده از قضیه روشه برای $m > ۰$، چند جمله‌ای $G(z) = p(z) + \alpha m$ تمام ریشه‌هایش را در $۱ \leq k \leq |z|$ دارد، و بنابراین تمام ریشه‌های $H(z) = G(Rz)$ در $۱ < \frac{k}{R} \leq |z|$.

از این‌رو اگر $z_۱, z_۲, ..., z_n$ ریشه‌های $H(z)$ باشند، سپس $۱ \leq \frac{k}{R} \leq |z_j|$ $(j = ۱, ۲, ..., n)$ و درنتیجه

$$\frac{zH'(z)}{H(z)} = \sum_{j=۱}^{n} \frac{z}{z - z_j}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Re\frac{e^{i\theta}H'(e^{i\theta})}{H(e^{i\theta})} &= \sum_{j=۱}^{n} Re\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z_j} \\ &\geq \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{۱ + \frac{k}{R}} \\ &= \sum_{j=۱}^{n} \frac{R}{R+k} = \frac{nR}{R+k}, \end{aligned}$$

برای هر نقطه $e^{i\theta}$ $(۰ \leq \theta \leq ۲\pi)$ که ریشه $H(z)$ نباشد.

از این‌رو

$$\left|\frac{H'(e^{i\theta})}{H(e^{i\theta})}\right| \geq Re\left|\frac{e^{i\theta}H'(e^{i\theta})}{H(e^{i\theta})}\right| \geq \frac{nR}{R+k}, \qquad (۲۵)$$

برای هر نقطه $e^{i\theta}$، $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$ که ریشه $H(z)$ نباشد.

چون (۲۵) برای نقاط $e^{i\theta}$، که ریشه‌ای از $H(z)$ باشند، بدیهی است.

از این‌رو برای $|z| = ۱$

$$|H'(z)| \geq \frac{nR}{R+k}|H(z)|;$$

با جایگزین کردن $G(Rz)$ به جای $H(z)$، برای $|z| = ۱$

$$|G'(Rz)| \geq \frac{n}{R+k}|G(Rz)|.$$

حال با به‌کار بردن لم (۸.۱.۳) در چند جمله‌ای $G(z)$ برای $|z| = ۱$

$$|G'(Rz)| \geq \frac{n}{R+k}\left(\frac{R+k}{r+k}\right)^n |G(rz)|, \tag{۲۶}$$

به‌طوری‌که $R \leq r$ و $rR \geq k^۲$ (با توجه به این‌که $r \leq R$ و $rR \geq k^۲$ می‌توان نتیجه گرفت $R \geq k$).

چون $G(z) = p(z) + \alpha m$ پس از نامساوی (۲۶) برای $|z| = ۱$ داریم

$$|p'(Rz)| \geq \frac{n(R+k)^{n-۱}}{(r+k)^n}|p(rz) + \alpha m|, \tag{۲۷}$$

حال می توان باانتخاب یک آرگومان مناسب $\alpha$ در طرف راست نامساوی (۲۷) داشته باشیم،

$$|p'(Rz)| \geq \frac{n(R+k)^{n-۱}}{(r+k)^n}\{|p(rz)| + |\alpha| m\}$$

به‌طوری‌که $r \leq R$ و $rR \geq k^۲$.

سپس با میل دادن $|\alpha| \to ۱$، داریم

$$\max_{|z|=R}|p'(z)| \geq \frac{n(R+k)^{n-۱}}{(r+k)^n}\left\{\max_{|z=r}|p(z)| + \min_{|z|=k}|p(z)|\right\}$$

واین اثبات قضیه (۷.۱.۳) را کامل می‌کند. □

اگر در قضیه (۷.۱.۳)، قرار دهیم $r = k = ۱$، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

**نتیجه ۹.۱.۳** اگر $p(z)$ چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد و تمام ریشه‌هایش در $|z| \leq ۱$، آن‌گاه برای $R \geq ۱$

$$\max_{|z|=R}|p'(z)| \geq \frac{n}{۲}\left(\frac{R+۱}{۲}\right)^{n-۱}\left\{\max_{|z|=۱}|p(z)| + \min_{|z|=۱}|p(z)|\right\}.$$

نتیجه به‌دست آمده، بهترین نتیجه ممکن و تساوی در (۲۸) برای $p(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^n$ برقرار است.

**نکته ۱۰.۱.۳** نتیجه (۹.۱.۳) برای $R = 1$، همان نامساوی (۴) می‌شود.

در ابتدای بخش، سوالی در مورد موقعیت ریشه‌هاو ارتباط آن با کران بدست آمده مطرح کردیم. حال برای تکمیل بحث موردی را در نظر می‌گیریم که مبدا ریشه چندجمله ای باشد.

این قضیه منسوب به عزیز و شاه[9] [٦] است که تعمیمی از نامساوی (۳) می‌باشد.

**قضیه ۱۱.۱.۳** اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد که تمام صفرهایش در $1 \le k \le |z|$ قرار بگیرد و مبدأ صفر مرتبه $t$ ام آن باشد، آنگاه

$$M(p', 1) \ge \frac{n + kt}{1 + k} M(p, 1) \tag{۲۸}$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) = z^t (z + k)^{n-t}$ به طوری که $0 < t \le n$ ، اتفاق می‌افتد.

قضیه‌زیر منسوب به عزیز و زرگر است[۹] و بهبودی از قضیه ۱۱.۱.۳ می‌باشد.

**قضیه ۱۲.۱.۳** اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد که تمام صفرهایش در $1 \le k \le |z|$ قرار بگیرد و مبدأ صفر مرتبه $t$ ام آن باشد، آنگاه

$$M(p', 1) \ge \frac{n + kt}{1 + k} M(p, 1) + \frac{n - t}{(1 + k)k^t} m(p, k) \tag{۲۹}$$

---

[9] W. M. Shah

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) = z^t(z+k)^{n-t}$ به طوری که $\circ < t \le n$ ، اتفاق می‌افتد.

**برهان:** اگر $m = m(p,k)$ ، آنگاه برای $|z| = k$ ، $m \le |p(z)|$ . بنابراین برای $|z| = k$ داریم

$$m|\frac{z}{k}|^t \le |p(z)|$$

چون تمام صفرهای $p(z)$ در $|z| \le k \le ۱$ قرار می‌گیرد و مبدأ یک صفر مرتبه $t$ ام آن است، بنابراین برای هر عدد مختلط $\alpha$ به طوری که $|\alpha| < ۱$ ، طبق قضیه روشه، تمام صفرهای چندجمله‌ای $G(z) = p(z) + \frac{\alpha m}{k^t} z^t$ در $|z| \le k$ برای $k \le ۱$ قرار می‌گیرد به طوری که مبدأ یک صفر مرتبه $t$ ام آن است و $m > \circ$.

بنابراین می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$G(z) = z^t H(z) \qquad (۳۰)$$

بنابراین، $H(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n-t$ است که تمام صفرهایش در $|z| \le k$ برای $k \le ۱$ قرار می‌گیرد. از (۳۰) بدست می آوریم

$$\frac{zG'(z)}{G(z)} = t + \frac{zH'(z)}{H(z)} \qquad (۳۱)$$

اگر $z_۱, z_۲, ..., z_{n-t}$ صفرهای $H(z)$ باشند، آنگاه $|z_v| \le k \le ۱$ و از (۳۱) داریم

$$\begin{aligned}\Re\left\{\frac{e^{i\theta}G'(e^{i\theta})}{G(e^{i\theta})}\right\} &= t + \Re\left\{\frac{e^{i\theta}H'(e^{i\theta})}{H(e^{i\theta})}\right\} \\ &= t + \Re\sum_{v=۱}^{n-t}\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_v} \\ &= t + \sum_{v=۱}^{n-t}\Re\left(\frac{۱}{۱-z_v e^{-i\theta}}\right) \qquad (۳۲)\end{aligned}$$

به طوری که، $e^{i\theta}$ ها برای $\circ \le \theta < ۲\pi$ ، صفر $H(z)$ نیستند. یعنی $e^{i\theta}$ ها خارج دایره $|z| \le k \le ۱$ هستند. اکنون اگر $|w| \le k \le ۱$ ، آنگاه

$$\Re\left(\frac{۱}{۱-w}\right) \ge \frac{۱}{۱+k}$$

اگر در نامساوی (۳۲) از نتیجه بالا استفاده کنیم، آنگاه

$$\begin{aligned} |\frac{G'(e^{i\theta})}{G(e^{i\theta})}| &\geq \Re\left(\frac{e^{i\theta}G'(e^{i\theta})}{G(e^{i\theta})}\right) \\ &= t + \sum_{v=۱}^{n-t} \Re\left(\frac{۱}{۱ - z_v e^{-i\theta}}\right) \\ &\geq t + \frac{n-t}{۱+k} \end{aligned}$$

بنابراین

$$|G'(e^{i\theta})| \geq \frac{n+tk}{۱+k}|G(e^{i\theta})| \tag{۳۳}$$

به طوری که، $e^{i\theta}$ ها برای $۰ \leq \theta < ۲\pi$ ، صفر $G(z)$ نیستند. چون نامساوی (۳۳) به طور بدیهی، برای نقاط $e^{i\theta}$ ، $۰ \leq \theta < ۲\pi$ که صفرهای $p(z)$ باشند، برقرار است، بنابراین برای $|z| = ۱$ داریم

$$|G'(z)| \geq \frac{n+tk}{۱+k}|G(z)| \tag{۳۴}$$

در (۳۴)، $G(z)$ را با $p(z) + \frac{\alpha m}{k^t}z^t$ به طوری که $|\alpha| < ۱$ جایگزین می‌کنیم و برای $|z| = ۱$ داریم

$$|p'(z) + \frac{\alpha t m}{k^t}z^{t-۱}| \geq \frac{n+tk}{۱+k}|p(z) + \frac{\alpha m}{k^t}z^t| \tag{۳۵}$$

ارگومان $\alpha$ را طوری انتخاب می‌کنیم به طوری که برای $|z| = ۱$ ،

$$|p(z) + \frac{\alpha m}{k^t}z^t| = |p(z)| + |\alpha|\frac{m}{k^t}$$

این را در (۳۵) جایگزین می‌کنیم و برای $|z| = ۱$ داریم

$$|p'(z)| + \frac{t|\alpha|m}{k^t} \geq \frac{n+tk}{۱+k}\left[|p(z)| + |\alpha|\frac{m}{k^t}\right]$$

حال، $|\alpha| \longrightarrow ۱$ و برای $|z| = ۱$ ،

$$\begin{aligned} |p'(z)| &\geq \frac{n+tk}{۱+k}|p(z)| + \left[\frac{n+tk}{۱+k} - t\right]\frac{m}{k^t} \\ &= \frac{n+tk}{۱+k}|p(z)| + \frac{n-t}{۱+k}\cdot\frac{m}{k^t} \end{aligned}$$

بنابراین

$$M(p', ۱) \geq \frac{n+kt}{۱+k}M(p, ۱) + \frac{n-t}{(۱+k)k^t}m(p,k)$$

□

اگر در قضیه ۱۲.۱.۳، حالت $k=1$ را در نظر بگیریم، نتیجه زیر بدست می‌آید که بهبودی و تعمیمی از (۴) می باشد.

**نتیجه ۱۳.۱.۳** اگر $p(z)=\sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد که تمام صفرهایش در $|z|\leq 1$ قرار بگیرد و مبدأ صفر مرتبه $t$ ام آن باشد، آنگاه برای $|z|=1$،

$$M(p',1)\geq \frac{n+t}{2}M(p,1)+\frac{n-t}{2}m(p,k) \tag{36}$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z)=(z+k)^n$ اتفاق می‌افتد.

## ۲.۳ نامساوی برای چند جمله‌ای‌هایی که ریشه‌ای در $|z|<k$ $(k\geq 1)$ ندارند

در این بخش ابتدا قضیه زیر را که منسوب به عزیز و زرگر [7] می‌باشد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

**قضیه ۱.۲.۳** اگر $p(z)=a_0+\sum_{j=m}^{n} a_j z^j$ ریشه‌ای در $|z|<k$ $(k\geq 1)$ نداشته باشد، آن‌گاه برای $0<r\leq R\leq k$،

$$\max_{|z|=R}|p'(z)|\leq \frac{nR^{m-1}(R^m+k^m)^{\frac{n}{m}-1}}{(r^m+k^m)^{\frac{n}{m}}}\max_{|z|=r}|p(z)|. \tag{37}$$

نتیجه به‌دست آمده، بهترین نتیجه ممکن و تساوی در (۳۷) برای $p(z)=(z^m+k^m)^{\frac{n}{m}}$، به‌طوری‌که $n$ مضربی از $m$ است، برقرار است.

برای اثبات این قضیه به لم‌های زیر نیاز داریم.

**لم ۲.۲.۳** اگر $p(z) = a_0 + \sum_{j=m}^{n} a_j z^j$ چند جمله‌ای از درجه $n$، که ریشه‌ای در $k$ > $|z|$ $(k \geq 1)$ نداشته باشد، آن‌گاه

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \leq \frac{n}{1+k^m} \max_{|z|=1} |p(z)|. \tag{۳۸}$$

تساوی در (۳۸) برای $p(z) = (z^m + k^m)^{\frac{n}{m}}$، وقتی $n$ مضربی از $m$ باشد، برقرار است.

لم بالا منسوب به چان و مالک [۱۰] است.

**لم ۳.۲.۳** اگر $p(z) = a_0 + \sum_{j=m}^{n} a_j z^j$ چند جمله‌ای از درجه $n$، که ریشه‌ای در $k$ > $|z|$ $(k > 0)$ نداشته باشد، آن‌گاه برای $0 < r \leq R \leq k$،

$$\max_{|z|=r} |p(z)| \geq \left(\frac{r^m + k^m}{R^m + k^m}\right)^{\frac{n}{m}} \max_{|z|=R} |p(z)|. \tag{۳۹}$$

تساوی در (۳۹) برای $p(z) = (z^m + k^m)^{\frac{n}{m}}$، وقتی $n$ مضربی از $m$ باشد، برقرار است.

لم بالا منسوب به جین[10] [۲۷] می‌باشد.

برهان قضیه۱.۲.۳: با توجه به فرض قضیه چند جمله‌ای $p(z) = a_0 + \sum_{j=m}^{n} a_j z^j$ ریشه‌ای در $|z| < k$ $k > 0$ ندارد. بنابراین $F(z) = p(Rz)$ ریشه‌ای در $|z| < \frac{k}{R}$ به‌طوری‌که $\frac{k}{R} \geq 1$، ندارد.

با به‌کار بردن لم (۲.۲.۳) در چند جمله‌ای $F(z)$، خواهیم داشت

$$\max_{|z|=1} |F'(z)| \leq \frac{n}{1+\frac{k^m}{R^m}} \max_{|z|=1} |F(z)|$$

بنابراین

$$\max_{|z|=R} |p'(z)| \leq \frac{nR^{m-1}}{R^m + k^m} \max_{|z|=R} |p(z)|. \tag{۴۰}$$

اگر $0 < r \leq R \leq K$، از لم (۳.۲.۳)

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq \left(\frac{R^m + k^m}{r^m + k^m}\right)^{\frac{n}{m}} \max_{|z|=r} |p(z)|. \tag{۴۱}$$

[10] V. K. Jain

از ترکیب (۴۰) و (۴۱) خواهیم داشت

$$\max_{|z|=R}|p'(z)| \leq \frac{nR^{m-1}(R^m+k^m)^{\frac{n}{m}-1}}{(r^m+k^m)^{\frac{n}{m}}}\max_{|z|=r}|p(z)|.$$

و به این ترتیب اثبات قضیه (۱.۲.۳) کامل می‌شود. □

**یادآوری ۴.۲.۳** در ابتدای فصل ۳ دیدیم، مالک برای چندجمله‌ای $p(z)$ که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد، نشان داد

$$M(p', 1) \leq \frac{n}{1+k}M(p, 1) \tag{42}$$

□

گویل، رحمان و شمیسر[11] [۲۵] نامساوی (۴۲) را بهبود دادند و قضیه زیر را اثبات کردند.

**لم ۵.۲.۳** اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد، آنگاه

$$M(p', 1) \leq n\frac{(n|a_0| + k^2|a_1|)}{(1+k^2)n|a_0| + 2k^2|a_1|}M(p, 1) \tag{43}$$

دوان[12] و میر[13] [۱۲] تعمیمی از نامساوی (۴۳) ارائه دادند و قضیه زیر را بدست آوردند.

**قضیه ۶.۲.۳** اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد، آنگاه برای $0 < r \leq \rho \leq k$ داریم

$$M(p', \rho) \leq \frac{n(\rho+k)^{n-1}}{(k+r)^n}\left\{1 - \frac{k(k-\rho)(n|a_0| - k|a_1|)n}{(k^2+\rho^2)n|a_0| + 2k^2\rho|a_1|} \times \left(\frac{\rho - r}{k+\rho}\right)\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^{n-1}\right\}M(p, r) \tag{44}$$

---

[11] G. Schmeisser
[12] K. K. Dewan
[13] A. Mir

قضیه زیر منسوب به عزیز و زرگر[۹] است و بهبودی از قضیه ۶.۲.۳ می‌باشد.

**قضیه ۷.۲.۳** اگر $p(z)=\sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n$ باشد که هیچ صفری در $|z|<k$ برای $k\geq 1$ نداشته باشد، آنگاه برای $0\leq r\leq \rho\leq k$ داریم

$$\begin{aligned} M(p',\rho) \leq{}& \frac{n(\rho+k)^{n-1}}{(k+r)^n} \\ &\times\left\{1-\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)n}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\left(\frac{\rho-r}{k+\rho}\right)\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^{n-1}\right\}M(p,r) \\ &-n\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)\left[\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right. \\ &\left.\times\left\{\left(\left(\frac{\rho+k}{r+k}\right)^n-1\right)-n(\rho-r)\right\}\right]m(p,k) \end{aligned} \tag{45}$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z)=(z+k)^n$ اتفاق می‌افتد.
برای اثبات قضیه به لم زیر نیاز داریم.

**لم ۸.۲.۳** اگر $p(z)=\sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله ای از درجه $n$ باشد که هیچ صفری در $|z|<k$ برای $k\geq 1$ نداشته باشد ، آنگاه برای $0\leq r\leq \rho\leq k$ داریم

$$\begin{aligned} &M(p,\rho) \\ &\leq\left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n\left[1-\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)n}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\left(\frac{\rho-r}{k+\rho}\right)\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^{n-1}\right]M(p,r) \\ &-\left[\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)(r+k)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\left\{\left(\left(\frac{\rho+k}{r+k}\right)^n-1\right)-n(\rho-r)\right\}\right]m(p,k) \end{aligned} \tag{46}$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z)=(z+k)^n$ اتفاق می‌افتد.

**برهان قضیه۷.۲.۳:** چون چندجمله‌ای $p(z)=\sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ هیچ صفری در $|z|<k$ برای $k\geq 1$ ندارد، بنابراین چندجمله‌ای $F(z)=p(\rho z)$ هیچ صفری در $|z|<\frac{k}{\rho}$ برای $\frac{k}{\rho}\geq 1$ ندارد. با استفاده از نامساوی (۴۲) برای چندجمله‌ای $F(z)$،

$$M(F',1)\leq \frac{n}{1+\frac{k}{\rho}}M(F,1)$$

بنابراین

$$M(p',\rho)\leq \frac{n}{\rho+k}M(p,\rho) \tag{۴۷}$$

اکنون اگر $0\leq r\leq \rho\leq k$، آنگاه از نامساوی (۴۶) از لم ۸.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} M(p',\rho)\leq{}& \frac{n(\rho+k)^{n-1}}{(k+r)^n}\\ &\times\left\{1-\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)n}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\left(\frac{\rho-r}{k+\rho}\right)\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^{n-1}\right\}M(p,r)\\ &-n\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)\left[\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right.\\ &\left.\times\left\{\left(\left(\frac{\rho+k}{r+k}\right)^n-1\right)-n(\rho-r)\right\}\right]m(p,k)\end{aligned}$$

□

جین [۲۶] با بررسی روی مشتقات چند جمله‌ای‌هایی که ریشه‌ای در $|z|<k$ $(k\geq 1)$ ندارند، قضیه زیر را اثبات کرد.

**قضیه ۹.۲.۳** فرض $p(z)$ چند جمله‌ای از درجه $n$، که ریشه‌ایی در $|z|<k$ $(k\geq 1)$ نداشته باشد، اگر $0\leq s<n$، آن‌گاه برای $R\geq k$

$$M\left(p^{(s)},R\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{d^s}{dR^s}\left(R^n+k^n\right)\right\}\left(\frac{2}{(1+k)}\right)^n M(p,1), \tag{۴۸}$$

و برای $1\leq R\leq k$،

$$M\left(p^{(s)},R\right)\leq\left(\frac{1}{R^s+k^s}\right)\left[\left\{\frac{d^s}{dx^s}(1+x^n)\right\}_{x=1}\right]\left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n M(p,1). \tag{۴۹}$$

تساوی در (۴۸) با ($k=1$ و $s=0$) برای $p(z)=z^n+1$ و تساوی در (۴۹) با ($s=1$) برای $p(z)=(z+k)^n$ برقرار است.

برای اثبات قضیه فوق به لم‌های زیر نیاز داریم.

**لم ۱۰.۲.۳** اگر $P(z)$ چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد، به‌طوری‌که تمام ریشه‌هایش در $|z| \leq ۱$ و اگر $p(z)$ چند جمله‌ای حداکثر از درجه $n$ باشد، به‌طوری‌که

$$|p(z)| \leq |P(z)|, \qquad |z| = ۱ \tag{۵۰}$$

آن‌گاه برای $۰ \leq s < n$،

$$\left|p^{(s)}(z)\right| \leq \left|P^{(s)}(z)\right|, \qquad |z| \geq ۱. \tag{۵۱}$$

**برهان:** تابع $\frac{p(z)}{P(z)}$ در ناحیه $|z| > ۱$ تحلیلی می باشد. بنابراین طبق اصل ماکزیمم قدر مطلق داریم

$$|p(z)| \leq |P(z)|, \qquad |z| \geq ۱ \tag{۵۲}$$

بنابراین برای هر $\lambda$ با $|\lambda| > ۱$ چند جمله‌ای

$$p(z) - \lambda P(z)$$

طبق قضیه روشه، ریشه‌ای در $|z| > ۱$ ندارد.

بنابراین طبق قضیه گاوس–لوکاس چند جمله‌ای

$$p^{(s)}(z) - \lambda P^{(s)}(z), \qquad ۱ \leq s < n$$

ریشه‌ای در $|z| > ۱$، برای $|\lambda| > ۱$ ندارد، در نتیجه

$$\left|p^{(s)}(z)\right| \leq \left|P^{(s)}(z)\right|, \qquad |z| > ۱$$

از این‌رو

$$\left|p^{(s)}(z)\right| \leq \left|P^{(s)}(z)\right|, \qquad |z| \geq ۱, \quad ۱ \leq s < n$$

و به این ترتیب اثبات لم (۱۰.۲.۳) کامل می‌شود. □

**لم ۱۱.۲.۳** اگر $P(z)$ چند جمله‌ای از درجه $n$ باشد، آنگاه برای $0 \leq s < n$

$$\left|p^{(s)}(z)\right| + \left|q^{(s)}(z)\right| \leq \left\{\left|\frac{d^s}{dz^s}(1)\right| + \left|\frac{d^s}{dz^s}(z^n)\right|\right\} M(p,1), \qquad |z| \geq 1, \qquad (53)$$

به‌طوری‌که

$$q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\overline{z}})}.$$

**برهان:** طبق قضیه روشه چند جمله‌ای

$$t(z) = p(z) - \lambda M(p,1) \qquad |\lambda| > 1$$

، ریشه ای در $|z| < 1$ ندارد. بنابراین تمام ریشه‌های چند جمله‌ای

$$T(z) = z^n \overline{t(\frac{1}{\overline{z}})} = q(z) - \overline{\lambda} M(p,1) z^n,$$

در $|z| \leq 1$ قرار دارد و

$$|t(z)| \leq |T(z)| \qquad |z| = 1$$

حال با به‌کار بردن لم (۱۰.۲.۳) برای چند جمله‌ایهای $t(z)$ و $T(z)$ داریم

$$\left|p^{(s)}(z) - \lambda M(p,1)\frac{d^s}{dz^s}(1)\right| \leq \left|q^{(s)}(z) - \overline{\lambda} M(p,1)\frac{d^s}{dz^s}(z^n)\right|, \qquad |z| \geq 1.$$

با اعمال نامساوی مثلث در طرف چپ نامساوی فوق داریم.

$$|p^{(s)}(z)| - |\lambda| M(p,1) |\frac{d^s}{dz^s}(1)| \leq |\overline{\lambda} M(p,1)\frac{d^s}{dz^s}(z^n) - q^{(s)}(z)|, \qquad |z| \geq 1.$$

(۵۴)

مجدد لم (۱۰.۲.۳) را برای چند جمله‌ایهای $q(z)$ و $z^n M(p, 1)$، برای $0 \leq s < n$ در نظر بگیریم. در این صورت داریم

$$\left|q^{(s)}(z)\right| \leq M(p, 1)\left|\frac{d^s}{dz^s}(z^n)\right|, \qquad |z| \geq 1,$$

بنابراین با انتخاب یک آرگومان مناسب از $\lambda$ داریم

$$|\overline{\lambda} M(p, 1)\frac{d^s}{dz^s}(z^n) - q^{(s)}(z)| = |\lambda| M(p, 1)|\frac{d^s}{dz^s}(z^n)| - |q^{(s)}(z)| \tag{55}$$

با جایگزاری (۵۵) در نامساوی (۵۴)

$$\left|p^{(s)}(z)\right| - |\lambda| M(p, 1)\left|\frac{d^s}{dz^s}(1)\right| \leq \left|\lambda| M(p, 1)|\frac{d^s}{dz^s}(z^n)\right| - \left|q^{(s)}(z)\right|,$$
$$|z| \geq 1, |\lambda| > 1, 0 \leq s < n.$$

حال با میل دادن $|\lambda| \to 1$ در نامساوی بالا، نتیجه به‌دست می‌آید. □

**لم ۱۲.۲.۳**  اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه n، که ریشه‌ایی در $|z| < k$ $(k \geq 1)$ نداشته باشد، آنگاه برای $1 \leq R \leq k^2$

$$M(p, R) \leq \left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n M(p, 1).$$

لم فوق منسوب به عزیز و محمد[14] [۵] است.

**لم ۱۳.۲.۳**  اگر $p(z)$ چند جمله‌ای از درجه $n$، که ریشه‌ایی در $|z| < k$ $(k \geq 1)$ نداشته باشد، آن‌گاه برای $|z| \geq 1$ و $s \geq 1$

$$\left|p^{(s)}(z)\right| \leq \frac{n(n-1)...(n-s+1)}{(1+k^s)} M(p, 1).$$

[14] Q. G. Mohammad

لم بالا منسوب به گویل و رحمان [۲۴] است.

از لم (۱۳.۲.۳) به سادگی می‌توان لم زیر را به‌دست آورد.

**لم ۱۴.۲.۳** اگر $p(z)$ چند جمله‌ای از درجه $n$، که ریشه‌ایی در $|z| < k$ $(k \geq ۱)$ نداشته باشد، آن‌گاه برای $۰ \leq s < n$

$$M\left(p^{(s)}, ۱\right) \leq \left(\frac{۱}{۱+k^s}\right) M(p, ۱) \left[\left\{\frac{d^s}{dx^s}(۱+x^n)\right\}_{x=۱}\right].$$

برهان قضیه۹.۲.۳: چند جمله‌ای $P(z) = p(kz)$ را در نظر بگیرید. در این صورت $P(z)$ ریشه ای در $|z| < ۱$ ندارد. با قرار دادن چند جمله‌ای

$$Q(z) = z^n \overline{P\left(\frac{۱}{\overline{z}}\right)}$$

داریم

$$|P(z)| \leq |Q(z)|, \qquad |z| = ۱$$

و تمام ریشه‌های $Q(z)$ در $|z| \leq ۱$ قرار دارد. بنابراین با به‌کار بردن لم (۱۰.۲.۳) برای چند جمله‌ایهای $P(z)$ و $Q(z)$، برای $۰ \leq s < n$ و $t \geq ۱$

$$\left|P^{(s)}(te^{i\theta})\right| \leq \left|Q^{(s)}(te^{i\theta})\right|. \qquad ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \tag{۵۶}$$

از لم (۱۱.۲.۳) برای $t \geq ۱$ و $۰ \leq s < n$ داریم

$$\left|P^{(s)}(te^{i\theta})\right| + \left|Q^{(s)}(te^{i\theta})\right| \leq \left\{\frac{d^s}{dt^s}(۱+t^n)\right\} M(P, ۱), \qquad ۰ \leq \theta \leq ۲\pi$$

با استفاده از نامساوی (۵۶) در نامساوی فوق خواهیم داشت

$$۲|P^{(s)}(te^{i\theta})| \leq \left|P^{(s)}(te^{i\theta})\right| + \left|Q^{(s)}(te^{i\theta})\right| \leq \left\{\frac{d^s}{dt^s}(۱+t^n)\right\} M(P, ۱), \qquad ۰ \leq \theta \leq ۲\pi$$

یعنی

$$\left|p^{(s)}(te^{i\theta})\right| \leq \left(\frac{۱}{۲}\right) \left\{\frac{d^s}{dt^s}(۱+t^n)\right\} M(P, ۱),$$

با جایگزینی $P(z) = p(kz)$ نتیجه می شود

$$\left|p^{(s)}(kte^{i\theta})\right| \leq \left(\frac{۱}{۲k^s}\right)\left\{\frac{d^s}{dt^s}(۱+t^n)\right\}M(p,k).$$

آن‌گاه با استفاده از لم (۱۲.۲.۳) در نامساوی بالا برای حالت $R = k$ داریم

$$\left|p^{(s)}(kte^{i\theta})\right| \leq \left(\frac{۱}{۲k^s}\right)\left(\frac{۲k}{۱+k}\right)^n M(p,۱)\left\{\frac{d^s}{dt^s}(۱+t^n)\right\}, \qquad (۵۷)$$

بنابراین با فرض $kt = R$ در نامساوی (۵۷)

$$M\left(p^{(s)},R\right) \leq \left(\frac{۱}{۲}\right)\left\{\frac{d^s}{dR^s}(R^n+k^n)\right\}\left(\frac{۲}{۱+k}\right)^n M(p,۱),$$

که همان نامساوی (۳۹) می‌باشد.

بدین صورت نامساوی (۴۸) بدست می آید.

برای اثبات نامساوی (۴۹)، با فرض $(۱ \leq R \leq k)$، نتیجه می‌شود که چند جمله‌ای $p(Rz)$ ریشه‌ای در $|z| < \frac{k}{R}$ ندارد. حال با به‌کار بردن لم (۱۴.۲.۳) برای چندجمله‌ای $p(Rz)$ داریم $۰ \leq s < n$

$$M\left(p^{(s)},R\right) \leq \left(\frac{۱}{R^s+k^s}\right)M(p,R)\left[\left\{\frac{d^s}{dx^s}(۱+x^n)\right\}_{x=۱}\right],$$

با ترکیب نامساوی بالا و لم (۱۲.۲.۳)، نامساوی (۴۹) به‌دست می‌آید.

و این اثبات قضیه (۹.۲.۳) را کامل می‌کند. □

# کتاب‌نامه

[1] N. C. Ankeny and T. J. Rivillin, On a theorem of S. Bernstein, Pacific J. Math., 5 (1955), 849-852.

[2] A. Aziz, Inequalities for the derivative of a polynomial, Proc. Amer. Math. Soc., 89 (1983), 259-266.

[3] A. Aziz, Growth of polynmials whose zeros are within or outside a circle, Bull. Austral. Math. Soc. 35 (1987) 247-256.

[4] A. Aziz and Q. M. Dawood, Inequalities for the polynomial and its derivative, J. Approx. Theory., 54 (1988), 306-313.

[5] A. Aziz and Q. M Mohammad, Growth of polynomials with zeros outside a circle, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 549-553.

[6] A. Aziz and W. M. Shah, Inequalities for the polynomial and its derivative, Math. Inequal. Appl., 7 (3) (2004), 379-391.

[7] A. Aziz and B. A. Zargar, Inequalities for the polynomial and its derivative, Math. Inequal. Appl., 1(4) (1998), 543-550.

[8] A. Aziz and B. A. Zargar, Growth of maximum modulus of polynomials with prescribed zeros, Glasnik Matematticki, 37(57) (2002), 73-81.

[9] A. Aziz and B. A. Zargar, Inequalities for the maximum modulus of the derivative of a polynomial, JIPAM. J. Inequal. Pure. Appl. Math, 8(2) (2007), 1-15.

[10] T. N. Chan and M. A. Malik, On Erdös- Lax theorem, Proc. Indian Acad. Sci., 92 (1983), 191-193.

[11] K. K. Dewan, and S. Hans, Some polynomial inequalities in the complex domain, Anal. Theory . Appl. , 26 (2010) 1-6.

[12] K. K. Dewan and A. Mir, On the maximum modulus of a polynomials and its derivatives, International J. Math. Sci., 16 (2005), 2641-2645.

[13] C. Frappier, Q. I. Rahman and St. Ruscheweyh, New inequalities for polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 288 (1985), 69-99.

[14] R. B. Gardner, N. K. Govil and S. R. Musukula, Rate of growth of polynomials not vanishing inside a circle, JIPAM . J. Inequal. Pure Appl. Math. 6 (2) (2005), 1-9.

[15] R. B. Gardner, N. K. Govil and A. Weems, Some results concerning rate of growth of polynomials, East J. Approx., 10 (2004), 301-312.

[16] R. B. Gardner, N. K. Govil and A. Weems, Growth of polynomials not vanishing inside a circle, International J. Pur. Appl. Math., 13 (2004), 491-498.

[17] A. Girox, Q. I. Rahman and Schmeisser, On Berstein's inequality, Canad. J. Math., 31 (1979), 347-353.

[18] N. K. Govil, Inequalities for the derivative of a polynomial, J. Approx. Theory., 63 (1990), 65-71.

[19] N. K. Govil, On the derivative of a polynomial, Proc. Amer. Math. Soc., 41 (1973), 543-546.

[20] N. K. Govil, On the maximum modulus of polynomials, J. Math. Anal. Appl., 112 (1985) 253-258.

[21] N. K. Govil, On the maximum modulus of polynomials not vanishing inside the unit circle, Approx. Theory and its Appl., 5 (1989), 79-82.

[22] N. K. Govil and G. Labelle, On Berstein's inequality, J. Math. Anal. Appl. 126 (1987), 494-500.

[23] N. k. Govil and G. N. Nyuydinkong, On maximum modoulus of polynomials not vanishig inside a circle, J. Interdisciplinary Math., 4 (2001), 93-100.

[24] N. k. Govil and Q. I. Rahman, Functions of exponential type not vanishing hn a help plane and related polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. 137 (1969)., 501-517.

[25] N. K. Govil, Q. I. Rahman and Schmeisser, On the derivative of a polynomial, Illinois. J. Math., 23 (1979), 319-329.

[26] V. K. Jain, A generalization of Ankeny and Rivilin's Result on the Maximum modulus of polynomials not vanishing in the interior of the unit circle, Turk. J. Math., 31 (2007), 89-94.

[27] V. K. Jain, On the maximum modulus of polynomials with zeros outside a circle, Glasink Matematick, 29 (49) (1994), 267-274.

[28] V. K. Jain, Generalization of certain well known inequalities for polynomials, Glasink Matematick, 32 (1997), 45-51.

[29] P. D. Lax, Proof of a conjectuer of P. Erdös on the derivative of a polynomial., Bull. Amer. Math. Soc., 50 (1944), 509-513.

[30] M. A. Malik, On the derivative of a polynomial, J. London Math. Soc., 1 (1969) 57-60.

[31] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, Les ine'galite's de Markoff et de Bernstein, Les Presses de l' Universite' de Montre'al. Canada, 1983.

[32] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, Analytic theory of polynomials, Oxford University Press, 2002.

[33] Z. Nehari, Conformal Mapping, Mc Graw Hil, New York, 1952.

[34] Q. I. Rahman and J. Stankiewicz, Differential inequalities and local valency, Pacific J. Math., 54 (1974), 165-181.

[35] T. J. Rivlin, On the maximum modulus of polynomials, Amer. Math., Monthly 67 (1960), 251-253.

[36] A. C. Schaeffer, Inequalities of A. Markoff and S. Berstein for polynomials and related functions, Bull. Amer. Math. Soc., 47 (1941), 565-579.

[37] P. Turan, Ueber die ableitung von polynomen, Compositio Math., 7 (1939), 89-95.

# واژه نامه‌ی فارسی به انگلیسی

اصل ........ Principle

اکسترمال ........ Extremal

بهبود ........ Refinement

تحلیلی ........ Analytic

تعمیم ........ Generalization

چندجمله‌ای ........ Polynomial

درجه ........ Degree

درون ........ Inside

ریشه ........ Zero

صفر شدن ........ Vanish

کران ........ Bound

مبدأ ........ Origin

مختلط ........ Complex

مشتق ........ Derivative

ناحیه ........ Region

نامساوی ........ Inequality

# واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی

| | |
|---|---|
| Analytic | تحلیلی |
| Argument | شناسه |
| Bound | کران |
| Complex | مختلط |
| Convex hull | کلاف محدب |
| Derivative | مشتق |
| Equivalent | معادل |
| Improved | تعمیم |
| Inequality | نامساوی |
| Inside | درون |
| Modulus | قدرمطلق |
| Polynomial | چندجمله‌ای |
| Positive | مثبت |
| Principle | اصل |
| Refinement | بهبود |
| Region | ناحیه |
| Vanish | صفر شدن |