دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش هندسه

عنوان

مقایسه دو روش در یافتن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل

استاد راهنما

دکتر سید رضا حجازی

پژوهشگر

ندا کوشکی

۱۳۹۲/۶/۲۵

نام خانوادگی دانشجو: کوشکی نام: ندا

عنوان: مقایسه دو روش در یافتن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل

استاد راهنما: دکتر سید رضا حجازی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲/۶/۲۵ تعداد صفحات: ۶۹

واژگان کلیدی: تقارن‌ها ، معادلات دیفرانسیل ، فرم‌های دیفرانسیلی ، امتداد دادن ، معادله KdV

چکیده

حل معادلات دیفرانسیل اهمیت خاصی در تمامی علوم دارد چرا که با استفاده از جواب‌ها می‌توان مسایل را تحلیل نمود اما بدست آوردن تمامی جواب‌ها همیشه به راحتی امکان پذیر نیست . بنابراین از ابزارهای کمکی استفاده می‌کنیم. یکی از این ابزارهای کمکی گروه تقارن است ، با داشتن یک جواب و قرار دادن آن در گروه‌های تقارن می‌توان به بسیاری از جواب‌ها رسید ، اما برای بدست آوردن گروه‌های تقارن روش‌های متنوعی وجود دارد . در این پایان نامه سعی بر آن است به دو روش کاربردی‌تر پرداخته شود. در ابتدا روش میدان‌های برداری در بدست آوردن گروه‌های تقارن بررسی شده است و در امتداد آن روش فرم‌های دیفرانسیلی ذکر شده است و همچنین روش $Harrison$ نیز اشاره شده است .

تقدیم به :

همراه بردبار زندگیم ، همسرم

شکوه کوهسار اندیشه ام ، پدرم

خورشید آسمان عاطفه ام ، مادرم

ای دو جهان از قلمت یک رقم　　　　بی رقمت لوح دو عالم عدم
در کف من مشعل توفیق نه　　　　ره به نهان خانهٔ تحقیق نه [1]

[1] نظامی گنجوی

سپاس گزاری...

دمدمه این نای از دم‌های اوست   های و هوی روح از هی های اوست [۲]

سپاس خداوند کارساز بنده نواز را که توفیق پیدا و پنهانش یاری کرد تا این پژوهش سامان و پایان یافت . نگارش این پژوهش ثمره خوشه چینی از خرمن معرفت و دانش استاد بزرگواری است که تلاش‌های مجدانه و مخلصانه ایشان ، حصول به این توفیق را بر نگارنده آسان ساخت .حقیقت آن است که بررسی موضوع این پایان نامه بضاعتی بیش از بضاعت نگارنده می‌خواست ، اما نظر به ضرورت تحقیق و تفحص در این زمینه با علاقه شخصی و بهره‌گیری از نظرات و تجربیات گران سنگ استاد محترم جناب آقای **دکتر سید رضا حجازی** علیرغم مشکلات فراوان پیش رو از جمله کمبود منابع وظیفه خود دانستم در این راه گام نهم . توجه عمیق جناب آقای دکتر حجازی به امور پژوهشی و مشاوره‌های علمی و موشکافانه ایشان نقطه اتکای عظیم و دلگرم کننده‌ای بود که بر کلیه مراحل پژوهش و دشواری‌های آن مستمراً ادامه داشت . بی‌تردید صاحب این قلم محبت‌های بیشمار استاد بزرگوار را فراموش نخواهد کرد و به حکم حدیث شریف «من علمنی حرفاً فقد صیرنی عبداً » خود را مدیون ابدی ارشادهای صمیمانه و بی‌دریغ ایشان می‌داند .

در پایان وظیفه خود می‌دانم از جناب آقای دکتر هادی پسندیده و سرکار خانم دکتر الهام دسترنج که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند کمال تشکر را بنمایم.

گمان مبر که به پایان رسیده کار رزان   هزار باده ناخورده در رگ تاک است.[۳]

ندا کوشکی

۱۳۹۲/۶/۲۵

[۲] مولانا
[۳] حافظ

فهرست مطالب

مقدمه

امروزه ریاضیات نقش بسیار مهم و بارزی در بسیاری از علوم بازی می‌کند وکاربردهای بسیار زیادی دارد یکی از این کاربردها ، حل معادلات دیفرانسیلی است که در علومی مانند مهندسی ، فیزیک ، اقتصاد و ... به کار می‌رود . شاید به جد بتوان گفت معادلات دیفرانسیل زبان اصلی این علوم است .بنابراین حل این معادلات ، کلیدی برای حل مسایلی است که در این علوم مطرح می‌شود و همیشه اولین نکته‌ای که با دیدن یک دستگاه معادلات با آن روبرو هستیم ، یافتن جواب یا جواب‌های آن است . در این راستا روش‌های گوناگونی برای حل معادلات دیفرانسیل مختلف بیان شده است که با طبقه‌بندی معادلات به انواع مختلف روش حل مختص به آن طبقه را شرح می‌دهد. اما در این پایان نامه سعی شده است با دیدگاهی هندسی و به کمک فضاهای جت ، ناورداها ، گروه‌های لی روش‌های بسیار کارآمدی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل بیان شود که کلی بوده و قابل اجرا برای تمامی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی و غیر خطی باشد و به دسته‌ای خاص ، متعلق نباشد.

ماریس سفوس لی[۴] اولین کسی بود که در قرن ۱۹ میلادی ، این روش را آغاز و پایه‌گذاری نمود. در ادامه کارهای ارزشمند او ، دانشمندان بزرگ دیگری همچون کارتان[۵] به تکمیل کار او پرداختند ، که کار او هم‌اکنون نیز موضوعی بسیار کاربردی و مورد استقبال است که مورد بررسی قرار می‌گیرد .

لی نشان داد اگر معادله دیفرانسیل معمولی داده شده ، گروه لی r-پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای بپذیرد مرتبه معادله یکی کاهش می‌یابد از اینرو جواب‌های معادله دیفرانسیل کاهش یافته با یک انتگرال‌گیری جواب‌های معادله دیفرانسیل معمولی اصلی را بدست می‌دهد و اگر معادله دیفرانسیل معمولی داده شده گروه r-پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای بپذیرد و جبر لی متناظر با آن حل‌پذیر باشد مرتبه معادله r مرتبه کاهش می‌یابد که این کاهش مرتبه با ساختن ناورداهای دیفرانسیلی یا به وسیله متغیرهای استاندارد انجام می‌گیرد . بنابراین می‌توان از گروه‌های تقارن علاوه بر کاهش مرتبه معادله دیفرانسیل معمولی برای یافتن جواب یا جواب‌های جدید با استفاده از جواب‌های داده شده اولیه استفاده کرد.

در ادامه دانشمندان دیگری همچون بیانچی[۶] از گروه‌های حل‌پذیر برای کاهش مرتبه سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول استفاده کردند. اما دانشمندان دیگری نیز با استفاده از فرم‌های دیفرانسیلی و فرم‌های کارتان به یافتن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل همت گماردند ، اما چیزی که به دنبال آن بودند نبود و آنها را قانع نمی‌کرد.در ادامه آنها دریافتند که کلید تقارن‌ها استفاده از مشتقات لی است و به روشنی چگونگی کاربرد آنها در همه معادلات دیفرانسیل را مشخص کردند .

[۴] Marius Sophus Lie
[۵] Cartan
[۶] Bianchi

در این پایان‌نامه سعی بر این است که دو روش کاربردی‌تر در حل معادلات دیفرانسیل و بدست آوردن گروه‌های تقارن مورد مطالعه و مقایسه قرار بگیرد. بنابراین در فصل ۱ مطالبی به عنوان مفاهیم اولیه آورده شده که باید در آغاز دانست تا بتوان به مطالعه و بررسی فصول بعدی پرداخت و خواننده بتواند تصویری کلی از مطالب مورد نیاز خود را بدست آورد. در فصل ۲ روش میدان‌های برداری ذکر شده و با مثال به توضیح این روش پرداخته شده است . در فصل ۳ روش فرم‌های دیفرانسیلی آورده شده است و مانند فصل قبل برای درک بهتر به مثال‌ها روی آورده شده است.

در پایان امید است خواننده ضمن مطالعه و فهم مطلب ، علاقه‌مندی لازم برای ادامه کار و تحقیق و بررسی را کسب کرده باشد.

فصل ۱

مفاهیم اولیه و پیش نیازها

۱.۱ مفاهیم بنیادی هندسه

در این فصل مفاهیم ابتدایی مورد نیاز در فصل‌های بعدی توضیح داده شده است.

تعریف ۱.۱.۱. فرض می‌کنیم M یک فضای توپولوژیک باشد آنرا یک منیفلد توپولوژیکی n-بعدی گوئیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

- M هاسدورف باشد ، یعنی برای هر دو نقطه p, q از M زیرمجموعه‌های باز جدا از هم از M مانند U و V موجود باشند به طوری که $p \in U$ و $q \in V$.
- M شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه‌ی شمارا داشته باشد.
- M موضعا اقلیدسی از بعد n باشد، یعنی هر نقطه آن مشمول در یک همسایگی همیومورف با یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد.

تعریف ۲.۱.۱. نگاشت$F : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$هموار یا C^∞ یا دیفرانسیل‌پذیر گویند هرگاه مشتقات جزئی F از هر مرتبه‌ای موجود و پیوسته باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض می‌کنیم $\{U_\alpha\}_\alpha$ گردایه‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های منیفلد M و V_α زیرمجموعه‌های باز همبند از $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر $\cup_\alpha U_\alpha = M$ و $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ همیومورفیسم باشد آنگاه $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ را چارت مختصاتی[1] روی منیفلد M می‌نامیم.

حال اگر (U, φ) و (V, ψ) دو چارت روی منیفلد M باشند نگاشت

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V).$$

را نگاشت گذر از φ به ψ می‌نامیم. دو چارت فوق را به طور هموار سازگار می‌نامیم هرگاه $\psi \circ \varphi^{-1}$ دیفیومورفیسم باشد.

تعریف ۴.۱.۱. اگر M و N منیفلدهایی هموار باشند، نگاشت $F : M \to N$ را نگاشتی هموار گوئیم هرگاه برای هر چارت مختصاتی $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ روی M و هر چارت $\psi_\beta : \tilde{U}_\beta \to \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ روی N نگاشت مرکب $\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم M و N دو منیفلد هموار باشند و $F : M \to N$ نگاشتی هموار باشد F را دیفیومورفیسم گوییم هرگاه F دوسویی باشد و F و F^{-1} هموار باشند .

[1] Chart

تعریف ۶.۱.۱. مجموعه $\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_\alpha$ را یک اطلس روی M می‌نامیم هرگاه اعضای $\mathcal{A}$ دو به دو به طور هموار سازگار باشند. اطلس $\mathcal{A}$ ماکسیمال است هرگاه مشمول در هیچ اطلس دیگری نباشد.

تعریف ۷.۱.۱. یک ساختار هموار روی منیفلد توپولوژیکی M، یک اطلس ماکسیمال هموار است. هر منیفلد توپولوژیکی مجهز به یک ساختار هموار $\mathcal{A}$ را یک منیفلد هموار نامیده و با $(M,\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

مثال ۸.۱.۱.

- کره واحد n-بعدی $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:|x|=1\}$ منیفلد هموار توپولوژیکی n-بعدی است.
- $\mathbb{RP}^n=\{[x]:x\in\mathbb{R}^{n+1}\}$ منیفلد توپولوژیکی هموار n-بعدی است.
- هر فضای برداری n-بعدی مانند $V=\mathrm{span}_\mathbb{R}\{e_1\cdots e_n\}$ یک منیفلد هموار n-بعدی است.
- کلیه ماتریس‌های $M(m\times n,\mathbb{R})$ منیفلد هموار $m\times n$- بعدی و ماتریس‌های $M(m\times n,\mathbb{C})$ منیفلد هموار $2mn$ بعدی است.

قضیه ۹.۱.۱. *اگر M منیفلد هموار m- بعدی و N منیفلد هموار n- بعدی باشند آنگاه حاصلضرب دکارتی $M\times N$ منیفلد هموار $m\times n$- بعدی است.*

برهان. [۱۲] □

لم ۱۰.۱.۱. *هر نگاشت هموار بین دو منیفلد پیوسته است.*

برهان. فرض کنید $F:M\to N$ هموار باشد و $p\in M$. آنگاه چارت‌هایی مانند (U,φ) شامل p و (V,ψ) شامل $F(p)$ موجودند که $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ هموار است آنگاه $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}$ پیوسته است . چون $\varphi:U\to\varphi(U)$ و $\psi:V\to\psi(V)$ همیومورفیسم‌اند بنابراین φ^{-1} و ψ^{-1} پیوسته‌اند.

$$\psi^{-1}\circ(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})\circ\varphi=(\psi^{-1}\circ\psi)\circ F\circ(\varphi^{-1}\circ\varphi)=F|_U$$

لذا $F|_U$ پیوسته است و چون U دلخواه بود بنابراین F روی M پیوسته است. □

قضیه ۱۱.۱.۱. *تابع هموار $F:M\to N$ مفروض است اگر $\dim M=m$ و $\dim N=n$ آنگاه تابع F با ضابطه‌ی $F(p)=(F_1(p),\cdots,F_n(p))$ هموار است هرگاه F_i ها هموار باشند.*

برهان. [۱۲] □

لم ۱۲.۱.۱. *فرض کنید $F:M\to N$ پیوسته باشد، اگر $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ و $\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$ دو اطلس روی M و N باشند آنگاه F هموار است هرگاه $\psi_\beta\circ F\circ\varphi_{\alpha^{-1}}$ هموار باشد.*

برهان. [۱۲] □

لم ۱۳.۱.۱. *ترکیب دو نگاشت هموار، هموار است.*

برهان. [۱۲] □

تعریف ۱۴.۱.۱. نگاشت $F : M \to N$ دیفیومورفیسم موضعی است ، اگر هر نقطه $p \in M$ دارای یک همسایگی باز مانند U باشد که $F(U) \subset N$ باز و $F \mid_U : U \to F(U)$ دیفیومورفیسم باشد.

اگر $F : M \to N$ یک دیفیومورفیسم موضعی و دوسویی باشد در اینصورت به ازای هر $p \in M$ یک همسایگی باز مانند U شامل p و V شامل $F(p)$ موجود است که $F : U \to V$ دیفیومورفیسم است.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند ، نگاشت $\pi : X \to Y$ نگاشت پوششی نام دارد هرگاه π پوشا ، X و Y همبند و موضعاً همبند راهی باشند و برای هر $x \in X$ دارای یک همسایگی باز مانند U باشد به طوری که $\pi^{-1} : \pi(U) \to U$ همیومورفیسم باشد .

تعریف ۱۶.۱.۱. اگر M و $\tilde{M}$ دو منیفلد هموار همبند باشند ، نگاشت پوششی هموار $\pi : \tilde{M} \to M$ یک نگاشت پوشای هموار است اگر هر نقطه $p \in M$ دارای یک همسایگی باز مانند U باشد به طوری که $\pi^{-1} : \pi(U) \to U$ دیفیومورفیسم است.

به $\tilde{M}$ منیفلد پوششی و به M منیفلد پایه پوشش گویند.

تعریف ۱۷.۱.۱. یک برش [۲] از نگاشت پیوسته‌ی $\pi : \tilde{M} \to M$ نگاشت پیوسته‌ای مانند $\sigma : M \to \tilde{M}$ است که $\pi \circ \sigma = Id_M$.

اگر $U \subset M$ باشد و $\sigma : U \to \tilde{M}$ در شرط $\pi \circ \sigma = Id_U$ صدق کند σ یک برش موضعی [۳] است .

لم ۱۸.۱.۱. *فرض کنیم $\pi : \tilde{M} \to M$ یک نگاشت پوششی هموار باشد در اینصورت هر نقطه از $\tilde{M}$ مشمول در یک برش موضعی هموار از π است. علاوه بر این ، اگر $q \in \tilde{M}$ یک همسایگی از $p = \pi(q)$ مانند U و برش هموار‌ی مانند $\sigma : U \to \tilde{M}$ موجود است که $\sigma(p) = q$*

برهان. [۱۲]. □

تعریف ۱۹.۱.۱. نگاشت حقیقی یا برداری مقدار $F : M \to \mathbb{R}(V)$ روی منیفلد توپولوژیکی M مفروض است ، محمل F عبارتست از بستار $\mathrm{supp}F = \{x \in M : f(x) \neq ۰\}$

[۲] Section
[۳] Local Section

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنید $a \in \mathbb{R}^n$ ، مجموعه بردارهای مماس را در نقطه a به صورت $\mathbb{R}^n_a = \{\mathbf{v}_a : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$ در نظر می‌گیریم، روابط زیر بین این بردارها برقرار است:

$$\mathbf{v}_a + \mathbf{w}_a = (\mathbf{v} + \mathbf{w})_a \qquad , \qquad k(\mathbf{v}_a) = (k\mathbf{v})_a$$

با توجه به روابط فوق $\mathbb{R}^n_a$ یک فضای برداری است.

تعریف ۲۱.۱.۱. نگاشت خطی $X : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه a می‌نامیم هرگاه در روابط زیر صدق کند:

$$f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad X(fg)(a) = Xf \cdot g(a) + f(a)X(g)$$

فضای تمام عملگرهای مشتق در نقطه aدر $\mathbb{R}^n$ را با

$$T_a\mathbb{R}^n = \{X : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{مشتق است } X\}$$

نشان می‌دهیم و به آن فضای مماسی $\mathbb{R}^n$ در نقطه a می‌گوییم.

اگر X و Y دو عملگر مشتق در نقطه $a \in \mathbb{R}^n$ باشند داریم:

$$(X + Y)f = Xf + Yf \qquad , \qquad c(Xf) = (cX)f$$

طبق دو ویژگی بالا ، $T_a\mathbb{R}^n$ یک فضای برداری است.

لم ۲۲.۱.۱. *فرض کنید $a \in T_a\mathbb{R}^n$ و $X \in T_a\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه :*

- *اگر f ثابت باشد آنگاه $Xf = ۰$*
- *اگر $f(a) = g(a) = ۰$ آنگاه $X(fg) = ۰$*

برهان. ۱: قرار می‌دهیم $f = c$ و $g = ۱$ بنابراین:

$$X(g) = X(g \cdot g) = gXg + gXg = ۲Xg \Longrightarrow X(g) = ۰$$
$$X(f) = X(cg) = cXg = ۰$$

۲: اثبات بدیهی است .

□

فرض کنیم $\mathbf{v}_a \in \mathbb{R}^n_a$ باشد عملگر خطی $\mathcal{D}_{\mathbf{v}}\big|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{v}}\big|_a f = \mathcal{D}_{\mathbf{v}} f(a) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a+t\mathbf{v})$$

اگر $\mathbf{v}_a = \sum_{i=1}^n v^i e_i|_a$ یک بردار در $\mathbb{R}$ با پایه استاندارد e_i باشد آنگاه طبق قاعده زنجیری مشتق داریم:

$$f = f(x^1, \cdots, x^n), \quad a = (a^1 \cdots a^n), \qquad a + t\mathbf{v} = (a^1 + t\mathbf{v}^1, \cdots, a^n + t\mathbf{v}^n)$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a+t\mathbf{v}) = \frac{d}{dt} f(a^1 + t\mathbf{v}^1, \cdots, a^n + t\mathbf{v}^n) = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{dx^1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{dx^n}{dt}$$

$$= \mathbf{v}^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \cdots + \mathbf{v}^n \frac{\partial f}{\partial x^n} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \mathcal{D}_{\mathbf{v}}\big|_a f$$

بنابراین مجموعه $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_a, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_a \right\}$ یک پایه برای $T_a\mathbb{R}^n$ می‌سازد.

تعریف ۲۳.۱.۱. عملگر خطی $X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه‌ی $p \in M$ می‌نامیم اگر

$$X(fg)(p) = f(p)Xg + g(p)Xf$$

مجموعه تمام عملگرهای مشتق در نقطه $p \in M$ را با

$$T_pM = \{X : C^\infty(M) \to \mathbb{R} | X \text{مشتق است}\}$$

نشان داده و به آن فضای مماسی M در نقطه p گفته می‌شود. به اعضای T_pM بردارهای مماس بر منیفلد گفته می‌شود و T_pM یک فضای برداری n- بعدی است $\sqcup_{p\in M} T_pM = TM$ کلاف مماسی[۴] نامیده می‌شود و منیفلد هموار $2n$ بعدی است.

تعریف ۲۴.۱.۱. اگر $F : M \to N$ یک نگاشت هموار باشد، آنگاه به ازای هر $p \in M$ نگاشت $F_{*p} : T_pM \to T_F(p)N$ را مشتق نگاشت F در نقطه‌ي p می‌نامیم.به F_* نگاشت پیش برنده[۵] گویند.

$$(F_{*p}X)f = X(f \circ F)$$

روابط زیر نیز برقرار است:

[۴] Tangent Bundle
[۵] Push Forward

•

$$F_{*p}(aX+bY)f = a(F_{*p}X)f + b(F_{*p}Y)f$$

•

$$(F_{*p}X)(fg) = f(F(p))(F_{*p}X)g + g(F(p))(F_{*p}X)f$$

لم ۲۵.۱.۱. *دو نگاشت هموار $F: M \longrightarrow N$ و $G: N \longrightarrow P$ مفروض هستند :*

۱)

$$(G\circ F)_* = G_* \circ F_*$$

۲)

$$(Id_M)_* = Id_{T_pM}$$

۳) *اگر F دیفیومورفیسم باشد آنگاه $F_{*p}: T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ ایزومورفیسم است .*

برهان. [۱۲] □

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنیم $I \subset \mathbb{R}$ تابع هموار $\alpha: I \to M$ یک خم هموار روی منیفلد M است و

$$\alpha'(t_\circ) = \dot{\alpha}(t_\circ) = \alpha_* \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_\circ} \in T_{\alpha(t_\circ)}M$$

قضیه ۲۷.۱.۱. *نقطه $p \in M$ است ، اگر $X \in T_pM$ باشد آنگاه X مماس بر یک خم هموار مانند α در M با شرایط زیر است:*

$$\alpha(\circ) = p \qquad\qquad \alpha'(\circ) = X$$

برهان. فرض کنید (U,φ) چارت مختصاتی هموار گذرنده از نقطه p باشد $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ پایه مختصاتی است . خم $\alpha: (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ را به صورت $\alpha(t) = (tX^۱, \cdots, tX^n)$ در این مختصات تعریف می‌کنیم واضح است که این خم ، خم هموار با شرط $\alpha(\circ) = p$ است و محاسبات بالا نشان می‌دهد که

$$\alpha'(\circ) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\alpha(\circ)} = X$$

. □

قضیه ۲۸.۱.۱. *تابع هموار $F: M \to N$ وخم $\alpha: I \to M$ مفروض هستند آنگاه برای $t_\circ \in I$ بردار مماس در نقطه $t = t_\circ$ در خم $F\circ\alpha: I \to N$ به صورت $(F\circ\alpha)'(t_\circ) = F_*(\alpha'(t_\circ))$ بیان می‌شود.*

برهان. داریم:

$$(F\circ\alpha)'(t_\circ)=(F\circ\alpha)_*\frac{d}{dt}\Big|_{t_\circ}=F_*\circ\alpha_*\frac{d}{dt}\Big|_{t_\circ}=F_*\Big(\alpha_*\frac{d}{dt}\Big|_{t_\circ}\Big)=F_*(\alpha'(t_\circ))$$

□

تعریف ۲۹.۱.۱. میدان برداری $\mathbf{v}$ روی M بردار مماس $\mathbf{v}|_x\in T_xM$ در هر نقطه‌ی $x\in M$ می‌باشد که $\mathbf{v}|_x$ به طور هموار از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کند. در مختصات موضعی $(x^1,\dots,x^m)$، میدان برداری برای هر تابع هموار $\xi^i(x)$ از x دارای فرم

$$\mathbf{v}|_x=\xi^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\xi^2\frac{\partial}{\partial x^2}+\cdots+\xi^m\frac{\partial}{\partial x^m}, \tag{۱.۱}$$

می‌باشد. مجموعه تمام میدان‌های برداری هموار روی M را با $\chi(M)$نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۰.۱.۱. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دو میدان برداری روی M باشند، کروشه‌ی لی [۶] آنها، $[\mathbf{v},\mathbf{w}]$، نیز یک میدان برداری است که برای همه توابع هموار $f:M\to\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}](f)=\mathbf{v}(\mathbf{w}(f))-\mathbf{w}(\mathbf{v}(f)). \tag{۲.۱}$$

همچنین در مختصات موضعی، اگر داشته باشیم:

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^m\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},\qquad \mathbf{w}=\sum_{i=1}^m\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

بنابراین داریم:

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}]=\sum_{i=1}^m(\mathbf{v}(\eta^i)-\mathbf{w}(\xi^i))\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\left(\xi^j\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j}-\eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۳.۱}$$

گزاره ۳۱.۱.۱. *میدانهای برداری $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ و $\mathbf{u}$ روی M و ثابت‌های c و c' را در نظر می‌گیریم، کروشه‌ی لی آنها در خواص زیر صدق می‌کند:*

- *دوخطی*

$$[c\mathbf{v}+c'\mathbf{v}',\mathbf{w}]=c[\mathbf{v},\mathbf{w}]+c'[\mathbf{v}',\mathbf{w}],$$

$$[\mathbf{v},c\mathbf{w}+c'\mathbf{w}']=c[\mathbf{v},\mathbf{w}]+c'[\mathbf{v},\mathbf{w}'].$$

- *پادمتقارن*

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}]=-[\mathbf{w},\mathbf{v}].$$

[۶] Lie Bracket

• *اتحاد ژاکوبی*

$$[\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]]+[\mathbf{w},[\mathbf{u},\mathbf{v}]]+[\mathbf{v},[\mathbf{w},\mathbf{u}]]=0.$$

برهان. با استفاده از (۲.۱) و (۳.۱) به آسانی اثبات می‌شود. □

قضیه ۳۲.۱.۱. *اگر* $F:M\to N$ *یک دیفیومورفیسم باشد و* $X_1,X_2\in\chi(M)$

$$F_*[X_1,X_2]=[F_*X_1,F_*X_2] \tag{۴.۱}$$

برهان. [۱۲] □

تعریف ۳۳.۱.۱. نقطه‌ی داده شده‌ی $x\in M$ را در نظر می‌گیریم، تابع خطی و حقیقی مقدار $\omega:T_xM\to\mathbb{R}$ روی فضای مماسی، ۱-فرم دیفرانسیلی در x تعریف می‌کند. فضای ۱-فرم‌ها دوگان فضای برداری مماسی T_xM می‌باشد و فضای هم‌مماسی نامیده شده و به صورت T_x^*M نوشته می‌شود. فضاهای هم‌مماسی با هم تشکیل کلاف هم‌مماسی [۷] $T^*M=\sqcup_{x\in M}T_x^*M$ را می‌دهند که مشابه کلاف مماسی، تشکیل کلاف برداری $2m$-بعدی روی منیفلد m-بعدی M می‌دهد. تابع حقیقی مقدار و هموار $f:M\to\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم، دیفرانسیل آن، $df=\sum_{i=1}^{m}\dfrac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$، ۱-فرم است. در مختصات موضعی $x=(x^1,\ldots,x^m)$ دیفرانسیل‌های dx^i از توابع مختصاتی، که دوگان پایه‌های مختصاتی ∂x^j از فضای مماسی هستند، پایه‌ای برای فضاهای هم‌مماسی در هر نقطه از چارت مختصاتی فراهم می‌کنند. بر حسب این پایه هر ۱-فرم در حالت عمومی فرم مختصات موضعی زیر را دارد:

$$\omega=\sum_{i=1}^{m}h_i(x)dx^i.$$

فرم‌های دیفرانسیلی از مراتب بالاتر به عنوان نگاشت چندخطی متناوب روی فضای مماسی تعریف می‌شوند. بنابراین k-فرم دیفرانسیلی Ω در نقطه‌ی $x\in M$ نگاشت k-خطی زیر است:

$$\Omega:\underbrace{T_xM\times\cdots\times T_xM}_{k\text{بار}}\to\mathbb{R},$$

تابع حقیقی مقدار f به عنوان فرمی از مرتبه‌ی صفر در نظر گرفته می‌شود. فضای همه‌ی k-فرم‌ها در x بوسیله‌ی $\Lambda^kT_x^*M$ نمایش داده می‌شود و فضایی برداری از بعد $\binom{m}{k}$ می‌باشد.

تعریف ۳۴.۱.۱. اگر $F:M\to N$ نگاشتی هموار بین منیفلدها باشد، دیفرانسیل آن dF بردارهای مماس روی M را به بردارهای مماس روی N نگاشت می‌کند. به همین ترتیب نگاشت خطی القایی F^* وجود دارد

[۷] Cotangent Bundle

که هم‌دیفرانسیل F نامیده می‌شود و k-فرم‌های دیفرانسیلی روی N را به k-فرم‌های دیفرانسیلی روی M می‌برد .

$$F^* : \Lambda^k T^*_{F(x)} N \longrightarrow \Lambda^k T^*_x M.$$

که

$$(F^*\omega)X = \omega(F_* X) \qquad\qquad X \in T_p M$$

و ω ، ۱-فرم دیفرانسیلی است . اگر $x = (x^1, \dots, x^m)$ مختصات موضعی روی M و $y = (y^1, \dots, y^n)$ مختصات موضعی روی N باشد، سپس

$$F^*(dy^i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \cdot dx^j,$$

که $y = F(x)$، عملی را از F^* روی ۱-فرم‌های پایه می‌برد. و در حالت کلی نتیجه می‌گیریم:

$$F^*\left(\sum_I \alpha_I(y) dy^I\right) = \sum_{I,J} \alpha_I(F(x)) \frac{\partial y^I}{\partial x^J} dx^J,$$

که $\partial y^I / \partial x^J = \det(\partial y^{i_k} / \partial x^{j_\nu})$، $I = (i_1, \dots, i_k)$ و $J = (j_1, \dots, j_k)$.

نگاشت هم‌دیفرانسیل را نگاشت پس‌کشنده [8] نیز می‌نامند.

لم ۳۵.۱.۱. *اگر $F : M \longrightarrow N$ یک نگاشت و $f \in C^\infty(N)$ باشد آنگاه :*

۱)

$$F^* df = d(f \circ F)$$

۲)

$$F^*(f\omega) = (f \circ F) F^* \omega$$

برهان. [۱۲] □

تعریف ۳۶.۱.۱. فرض می‌کنیم $\mathbf{v}$ میدان برداری روی M و σ میدان برداری یا فرم دیفرانسیلی تعریف شده روی M باشد. مشتق لی [9] σ نسبت به $\mathbf{v}$ و مقدار آن در $x \in M$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\pounds_{\mathbf{v}}(\sigma) = \mathbf{v}(\sigma)|_x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi^*_\varepsilon(\sigma|_{\exp(\varepsilon \mathbf{v})x}) - \sigma|_x}{\varepsilon} = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \phi^*_\varepsilon(\sigma|_{\exp(\varepsilon \mathbf{v})x}). \qquad (۵.۱)$$

توجه کنید که $\mathbf{v}(\sigma)$ شیئی از نوع یکسان با خود σ می‌باشد.

[8] Pull-Back
[9] Lie Derivative

گزاره ۳۷.۱.۱. *فرض کنید $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ میدان‌های برداری هموار روی M باشند. مشتق لی $\mathbf{w}$ نسبت به $\mathbf{v}$ همان کروشه‌ی لی $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ است:*

$$\mathbf{v}(\mathbf{w}) = [\mathbf{v}, \mathbf{w}].$$

برهان. [۱۲]. □

تعریف ۳۸.۱.۱. رتبه نگاشت $F : M \to N$ در نقطه $x \in M$ برابر با رتبه ماتریس ژاکوبین $(\dfrac{\partial F^i}{\partial x^j})$ است. نگاشت F منظم است اگر دارای رتبه ثابت باشد.

قضیه ۳۹.۱.۱. ***قضیه رتبه:*** *فرض کنید $F : M \to N$ یک نگاشت منظم با رتبه ثابت r باشد .در این صورت چارت‌های مختصاتی $x = (x^1, \cdots, x^m)$ روی M و $y = (y^1, \cdots, y^n)$ روی N وجود دارد به طوری که:*

$$y = F(x) = (x^1, \cdots x^r, 0, \cdots, 0)$$

برهان. [۱۲]. □

تعریف ۴۰.۱.۱. مجموعه $\{f_1, \cdots, f_k\}$ از توابع هموار حقیقی مقدار روی منیفلد M مستقل تابعی نامیده می‌شوند اگر برای هر نقطه $x_0 \in M$ همسایگی U و تابع هموار $H(z_1, \cdots, z_k)$ وجود داشته باشد به طوری که برای همه $x \in U$ داشته باشیم $H(f_1(x), \cdots, f_k(x)) = 0$. این توابع وابسته تابعی نامیده می‌شوند اگر این شرط برقرار نباشد.

گزاره ۴۱.۱.۱. *اگر $f_1, \cdots, f_k$ در شرط $df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \neq 0$ صدق کنند مستقل تابعی نامیده می‌شوند در غیراینصورت وابسته تابعی هستند.*

برهان. [۱۷]. □

تعریف ۴۲.۱.۱. منحنی انتگرال از یک میدان برداری $\mathbf{v}$ منحنی پارامتری هموار $x = \phi(\varepsilon)$ می‌باشد به طوری که بردار مماس بر هر نقطه منحنی با مقدار $\mathbf{v}$ در آن نقطه برابر باشد ، یعنی:

$$\dot{\phi}(\varepsilon) = \mathbf{v}|_{\phi(\varepsilon)}, \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

در مختصات موضعی ، بایستی $x = \phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \ldots, \phi^m(\varepsilon))$ جوابی از سیستم معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \qquad i = 1, \ldots, m,$$

باشند که $\xi^i(x)$ ضرایب $\mathbf{v}$ در x می‌باشند.

۲.۱ گروه‌های لی

تعریف ۱.۲.۱. یک گروه لی r-پارامتری ، یک گروه G با ساختار منیفلدی هموار r-بعدی است به طوری که عمل گروهی

$$m : G \times G \to G, \qquad m(g,h) = g \cdot h, \qquad g,h \in G,$$

و وارون

$$i : G \to G, \qquad i(g) = g^{-۱}, \qquad g \in G,$$

نگاشت‌هایی هموار بین منیفلدها باشند.

مثال ۲.۲.۱. • مجموعه اعداد صحیح با عمل جمع ، منیفلد هموار صفر بعدی و یک گروه لی است.

- $G = \mathbb{R}^r$ که دارای ساختار منیفلدی معلومی است را در نظر می‌گیریم ، عمل‌گروه آن را جمع برداری $(x,y) \mapsto x+y$ و نگاشت وارون آن را ، وارون معمولی یک میدان برداری نسبت به عمل جمعی $(-x)$ در نظر می‌گیریم . این دو عملگر به وضوح هموارند بنابراین $\mathbb{R}^r$ گروه لی آبلی r-پارامتری می‌باشد. (عمل جمع بردارها جابجایی‌پذیر می‌باشد.)

- گروه خطی عمومی

$$\mathrm{GL}(n) = \{X : \det X \neq ۰\},$$

شامل همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ وارون‌پذیر با عمل ضرب ماتریس‌ها ، یک گروه لی $n^۲$-پارامتری می‌باشد. گروه خطی ویژه‌ی

$$\mathrm{SL}(n) = \{X \in \mathrm{GL}(n) : \det X = ۱\}$$

شامل همه‌ی ماتریس‌های وارون‌پذیر با دترمینان یک ، یک گروه لی $(n^۲ - ۱)$-پارامتری است. گروه متعامد

$$\mathrm{O}(n) = \{X \in \mathrm{GL}(n) : X^T X = \mathrm{I}\},$$

گروه لی $\frac{n(n-۱)}{۲}$-پارامتری و گروه متعامد ویژه‌ی

$$\mathrm{SO}(n) = \{X \in \mathrm{O}(n) : \det X = ۱\},$$

گروه لی $\frac{n(n-1)}{2}$-پارامتری می‌باشد. همچنین گروه آفین

$$\mathrm{A}(n-1)=\left\{\begin{pmatrix}\mathrm{A} & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} : \mathrm{A}\in \mathrm{GL}(n-1)\ ,\ a\in\mathbb{R}^{n-1}\right\}$$

گروه لی $n(n-1)$-پارامتری است.

•

$$\mathrm{Sp(r)}=\{\mathrm{A}\ \in \mathrm{GL}(2r,\mathbb{R})\ ,\ |\mathrm{A}^T\mathrm{JA}=\mathrm{J}\}$$

که

$$\mathrm{J}=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{I}\\ \mathrm{I} & 0\end{pmatrix}$$

گروه لی $r(2r+1)$ -پارامتری است. اگر همه‌ی این گروه‌های ماتریسی را روی صفحه‌ی مختلط در نظر بگیریم بعد آنها دو برابر می‌شود.

لم ۳.۲.۱. *اگر $G \supset H$ زیر گروه بسته گروه لی G باشد پس H زیر گروه لی G است.*

برهان. [۱۷] □

تعریف ۴.۲.۱. یک عمل گروه تبدیلات روی منیفلد هموار M توسط گروه لی G و نگاشت هموار $\Phi : G\times M\to M$ مشخص می‌شود که $\Phi(g,x)=g\cdot x$ و همچنین در

•

$$e\cdot x=x$$

•

$$g\cdot(h\cdot x)=(g\cdot h)\cdot x \qquad\qquad x\in M, g\in G.$$

صدق می‌کند.

تعریف ۵.۲.۱. فرض می‌کنیم M یک منیفلد هموار باشد . یک گروه موضعی از تبدیلات که روی M عمل می‌کند بوسیله‌ی یک گروه لی G و نگاشت هموار $\Psi : U\longrightarrow M$ داده می‌شود که زیر مجموعه باز U حوزه تعریف عمل گروه است و $\{e\}\times M\subset U\subset G\times M$ و همچنین دارای خواص زیر است :

- اگر $(h,x)\in U$، $(g,\Psi(h,x))\in U$ و همچنین $(g\cdot h,x)\in U$ سپس $\Psi(g,\Psi(h,x))=\Psi(g\cdot h,x)$.

- برای هر $x \in M$، $\Psi(e, x) = x$.
- اگر $(g, x) \in U$ سپس $(g^{-1}, \Psi(g, x)) \in U$ و $\Psi(g^{-1}, \Psi(g, x)) = x$.

تعریف ۶.۲.۱. • زیرگروه $G_x = \{g | g \cdot x = x\} \subset G$ در نقطه $x \in M$ زیرگروه ایزوتروپی G نامیده می‌شود. G گروه لی و M منیفلد مورد نظر است. G_x یک زیرگروه لی است که با استفاده از (۳.۲.۱) اثبات می‌شود.

- گروه تبدیلات ، آزاد عمل می‌کند اگر زیرگروه ایزوتروپی در تمام نقاط برابر همانی باشد یعنی

$$G_x = \{e\} \qquad \forall x \in M$$

- گروه G موضعاً آزاد عمل می‌کند اگر شرط بالا برای همه نقاط $g \neq e$ در همسایگی همانی برقرار باشد.

- گروه تبدیلات به صورت موثر عمل می‌کند اگر عناصر گروهی متفاوت عمل‌های متفاوت داشته باشند به طوری که برای هر $x \in M$ داشته باشیم $g \cdot x = h \cdot x$ اگر و تنها اگر $g = h$.

- زیرگروه ایزوتروپی سراسری $G_M = \{g \mid g.x = x, \quad \forall x \in M\}$، که زیرگروه نرمال بسته از G می‌باشد موثر بودن عمل G را اندازه می‌گیرد به این معنی که G به طور موثر عمل می‌کند اگر وتنها اگر $G_M = \{e\}$. اگر G به طور موثر عمل نکند آن را با گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{G_M}$ که به طور موثر روی M همانند خود G عمل می‌کند جایگزین می‌کنیم. بنابراین در حالت کلی می‌توانیم تصور کنیم که همه‌ی عمل گروه‌ها به طور (موضعاً) موثر عمل می‌کنند. می‌گوییم گروه لی G به طور موضعاً موثر عمل می‌کند اگر زیرگروه ایزوتروپی سراسری G_M زیرگروهی گسسته از G باشد.

۳.۱ معادلات و مجموعه‌های ناوردا

تعریف ۱.۳.۱. فرض می‌کنیم G گروهی موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. زیرمجموعه $\varphi \subset M$، G-ناوردا می‌نامیم هرگاه ، اگر $x \in \varphi$ و $g \in G$ بطوری که $g \cdot x$ تعریف شده باشد داشته باشیم $g \cdot x \in \varphi$.

تعریف ۲.۳.۱. گروه G گروه تقارن از دستگاه معادلات $F_1(x) = \cdots F_k(x) = 0$ نامیده می‌شود اگروتنها اگر $S_F = \{x | F_1(x) = \cdots F_k(x) = 0\}$ یک زیر مجموعه G-ناوردا باشد.

تعریف ۳.۳.۱. یک مدار از گروه تبدیلات موضعی، زیرمجموعه‌ی گروه ناوردای غیرتهی کمین [۱۰] از منیفلد M می‌باشد. به عبارت دیگر، $\mathcal{O} \subset M$ در صورتی مدار است که در شرایط زیر صدق کند:

[۱۰] Minimal

- اگر $x \in \mathcal{O}$، $g \in G$ و $g \cdot x$ تعریف شده باشد، سپس $g \cdot x \in \mathcal{O}$ است.
- اگر $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ و $\tilde{\mathcal{O}}$ در شرط بالا صدق کند آنگاه $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ یا $\tilde{\mathcal{O}}$ تهی باشد.

تعریف ۴.۳.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کند.

- گروه G به طور نیم-منظم [۱۱] عمل می‌کند اگر همه مدارهای آن به عنوان زیرمنیفلدی از M دارای بعد یکسان باشند.
- گروه G به طور منظم عمل می‌کند اگر علاوه بر نیم-منظم بودن عمل ، برای هر نقطه $x \in M$ همسایگی کوچک دلخواه U از x با این خاصیت وجود داشته باشد که هر مدار از G ، U را به زیرمجموعه‌های همبند مسیری تقسیم کند.

گزاره ۵.۳.۱. *یک گروه لی r- پارامتری G روی منیفلد M به صورت موضعاً آزاد عمل می‌کند اگروتنها اگر مدارات G دارای بعد یکسان r باشند . گروه G به صورت موثر آزاد عمل می‌کند اگروتنها اگر مداراتش دارای بعد $s = \mathrm{dim}G - \mathrm{dim}G_M$ باشند.*

برهان. [۱۷]. □

مثال ۶.۳.۱. اگر G_c یک گروه ۱-پارامتری از انتقالات

$$(x, y) \mapsto (x + c\varepsilon, y + \varepsilon), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

برای ثابت c باشد، خطهای $x = cy + d$ ، G_c-ناوردا و G_c یک گروه تقارن برای چنین خطهایی می باشد.

تعریف ۷.۳.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند . تابع $F : M \to N$ که N نیز منیفلد می‌باشد را G-ناوردا می‌گوئیم هرگاه برای هر $x \in M$ و هر $g \in G$ به طوری که $g \cdot x$ تعریف شده باشد داشته باشیم $F(g \cdot x) = F(x)$.

مثال ۸.۳.۱. گروه انتقالات در صفحه (مثال قبل) را در نظر می‌گیریم ، تابع $F(x, y) = x - cy$ یک G_c-ناورداست.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید G یک گروه از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند . یک ناوردا از G تابع حقیقی مقدار $I : M \to \mathbb{R}$ است که برای تمام $g \in G$ داشته باشیم $I(g \cdot x) = I(x)$.

[۱۱] Semi-Regular

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنید G گروه لی عمل کننده روی منیفلد M باشد. تابع $I : M \to \mathbb{R}$ تعریف شده روی زیر مجموعه باز $U \subset M$ ناوردای موضعی نامیده می‌شود هرگاه برای تمام $x \in U$ و تمام تبدیلات $g \in V_x$ که $V_x \subset G$ داشته باشیم $I(g \cdot x) = I(x)$

اگر $I(g \cdot x) = I(x)$ برای همه $x \in U, g \in G$ برقرار باشد به طوری که $g \cdot x \in U$ بنابراین I ناوردای سراسری نامیده می‌شود.

قضیه ۱۱.۳.۱. *فرض کنید G گروه لی باشد که به صورت نیمه منظم روی منیفلد m- بعدی M با مدارات s- بعدی عمل می‌کند . در هر نقطه $x \in M$ تعداد $m - s$ ناوردای موضعی مستقل تابعی $I_1, \cdots, I_{m-s}$ تعریف شده در همسایگی U وجود دارد به طوری که هر ناوردای موضعی دیگر تعریف شده روی U می‌تواند به صورت تابعی از ناورداهای اصلی $I = H(I_1, \cdots, I_{m-s})$ نوشته شود . اگر G به صورت منظم عمل کند دو نقطه $y, x \in U$ در یک مدار قرار می‌گیرند اگروفقط اگر تمام ناورداها برابر باشند یعنی*

$$I_\nu(y) = I_\nu(x) \quad \nu = 1, \cdots, m - s$$

برهان. [۱۷]. $\square$

۴.۱ جبر لی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید G گروهی باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. میدان برداری $\mathbf{v}$ روی M یک G-ناوردا نامیده می‌شود اگر تحت عمل ثابت باشد یعنی $dg(\mathbf{v}|_x) = \mathbf{v}|_{g \cdot x}$ که $g \in G$ و $x \in M$ و $g \cdot x$ تعریف شده است.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید $L_g : h \longrightarrow g \cdot h$ و $R_g : h \longrightarrow h \cdot g$ نگاشت‌های ضربی چپ و راست باشند میدان برداری $\mathbf{v}$ روی G ناوردای چپ نامیده می‌شود اگر $dL_g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ و ناوردای راست نامیده می‌شود اگر $dR_g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ که $g \in G$.

تعریف ۳.۴.۱. جبرلی راست $\mathcal{G}$ از گروه لی G یک فضای برداری از همه‌ی میدان‌های برداری ناوردای راست روی G می‌باشد. به طور عمومی‌تر، جبرلی، فضای برداری $\mathcal{G}$ با عملگر دوخطی

$$[\ ,\ ] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G},$$

است که کروشه لی نامیده می‌شود و در خواص کروشه‌لی صدق می‌کند.

گزاره ۴.۴.۱. *اگر G گروه لی همبند با جبر لی $\mathcal{G}$ باشد هر عنصر گروهی به صورت حاصلضربی از نگاشت‌های نمایی نوشته می‌شود.*

$$g = \exp(\mathbf{v}_1) \circ \exp(\mathbf{v}_2) \circ \cdots \circ \exp(\mathbf{v}_k) \qquad \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k \in \mathcal{G}$$

برهان. [۱۳] . □

۵.۱ شار

اگر $\mathbf{v}$ یک میدان برداری باشد ، خم انتگرال گذرنده از نقطه x در M را با $\Psi(\varepsilon,x)$ تعریف می‌کنیم و Ψ را شار [۱۲] تولید شده توسط $\mathbf{v}$ می‌نامیم. بنابراین برای هر $x\in M$ و هر ε در بازه I_x شامل صفر ، $\Psi(\varepsilon,x)$ نقطه‌ای از خم انتگرال گذرنده از x در M است. شار میدان برداری دارای خاصیت زیر است :

•
$$\Psi(\delta,\Psi(\varepsilon,x))=\Psi(\delta+\varepsilon,x),\qquad x\in M$$

•
$$\Psi(\circ,x)=x,$$

•
$$\frac{d}{d\varepsilon}\Psi(\varepsilon,x)=\mathbf{v}|_{\Psi(\varepsilon,x)}.$$

مثال ۱.۵.۱. • فرض کنید $M=\mathbb{R}$ با مختصات x و میدان برداری $\mathbf{v}=\partial_x$ باشد

$$\alpha=x(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x}+y(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$X_{\alpha(\varepsilon)}=\alpha'(\varepsilon)$$

بنابراین

$$\alpha'(\varepsilon)=x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}$$

پس

$$x'(t)=۱\qquad\qquad \frac{\partial x}{\partial\varepsilon}\equiv ۱\equiv x\equiv\varepsilon+k$$

برای بدست آوردن شار ، شرایط اولیه $\alpha(\circ)=x$ را در نظر می‌گیریم بنابراین داریم $x=k$ پس:

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x=\exp(\varepsilon\partial_x)\Longrightarrow\exp(\varepsilon\partial_x)x=x+\varepsilon$$

• اگر $\mathbf{v}=x^{۲}\partial_x+xy\partial_y$ با شرط اولیه $\alpha(\circ)=(x,y)$ باشد داریم:

$$X_{\alpha(\varepsilon)}=\alpha'(\varepsilon)$$

$$\alpha'(\varepsilon)=x'(\varepsilon)\partial_x+y'(\varepsilon)\partial_y$$

[۱۲] Flow

بنابراین:

$$\frac{dx}{d\varepsilon}=x^{۲}\Rightarrow\frac{dx}{x^{۲}}=d\varepsilon\Rightarrow\int\frac{dx}{x^{۲}}=\int d\varepsilon\Rightarrow-\frac{۱}{x}=\varepsilon+c\Rightarrow x=-\frac{۱}{\varepsilon+c}$$

$$\frac{dy}{d\varepsilon}=xy\Rightarrow\frac{dy}{d\varepsilon}=-\frac{۱}{\varepsilon+c}y\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon+c}\Rightarrow-\ln y=-\ln(\varepsilon+c)+\ln k\Rightarrow y=\frac{k}{\varepsilon+c}$$

با استفاده از شرط اولیه داریم:

$$x=-\frac{۱}{c}\Rightarrow c=-\frac{۱}{x}$$

$$\varepsilon=\circ\Rightarrow y=\frac{k}{c}\Rightarrow k=yc\Rightarrow k=-\frac{y}{x}$$

قضیه ۲.۵.۱. *فرض می‌کنیم $\mathbf{v}$ میدان برداری تعریف شده روی M باشد . اگر $x_\circ$ نقطه تکین $\mathbf{v}$ نباشد یعنی $\mathbf{v}|_{x_\circ}\neq\circ$ ، سپس مختصات موضعی اصلاحی $y=(y^{۱},\dots,y^m)$ در همسایگی $x_\circ$ وجود دارد به طوری که $\mathbf{v}=\partial/\partial y^{۱}$ شار انتقالی $\exp(t\mathbf{v})y=(y^{۱}+t,y^{۲},\dots,y^m)$ را تولید می‌کند.*

برهان. [۱۲] . □

۶.۱ عمل گروه بینهایت کوچک

گروه یک پارامتری از تبدیلات توسط شار میدان‌های برداری تولید می‌شود ، بنابراین گروه لی از تبدیلات G که روی منیفلد M عمل می‌کند مجموعه‌ای از میدان‌های برداری روی Mرا مشخص می‌کند که به عنوان مولدهای بینهایت کوچک عمل گروه معرفی می‌شوند . تناظری یک به یک بین گروه‌های موضعی از تبدیلات و مولدهای بینهایت کوچکشان وجود دارد . به ویژه اگر $\mathbf{v}\in\mathcal{G}$ گروه یک پارامتری از تبدیلات $\{\exp(t\mathbf{v})|t\in\mathbb{R}\}\subset G$ را تولید کند $\mathbf{v}$ با مولد بینهایت کوچک $\hat{\mathbf{v}}$ از گروه یک پارامتری از تبدیلات یا شار $x\to\exp t\mathbf{v}\cdot x$ مشخص می‌شود. بنایراین مولد بینهایت کوچک از عمل گروه با دیفرانسیل زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\mathbf{v}}|_x=\frac{d}{dx}\ \exp(t\mathbf{v})x\Big|_{t=\circ}\qquad x\in M\quad \mathbf{v}\in\mathcal{G}$$

در نتیجه:

$$\hat{\mathbf{v}}=d\Phi_x(\mathbf{v}|_e)$$

که $\Phi_x:G\to M$ به صورت $\Phi_x(g)=g\cdot x$تعریف می‌شود، چون $\Phi_x\circ R_h=\Phi_{h\cdot x}$.
اگر $\mathbf{v}\in\mathcal{G}=\mathcal{G}_R$ میدان برداری ناوردای راست روی G باشد ، بنابراین $d\Phi_x(\mathbf{v}_g)=\hat{\mathbf{v}}|_{g\cdot x}$ که $d\Phi_x$ حافظ کروشه لی بین میدان‌های برداری است.

قضیه ۱.۶.۱. *فرض کنید G یک گروه تبدیلات روی منیفلد M باشد . نگاشت خطی ρ هر عنصر $\mathbf{v} \in \mathcal{G} = \mathcal{G}_R$ را به میدان برداری متناظرش یعنی $\hat{\mathbf{v}} = \rho(\mathbf{v})$ روی منیفلد M می‌نگارد که جبر لی همومورفیسم $\rho([\mathbf{v}, \mathbf{w}]) = [\rho(\mathbf{v}), \rho(\mathbf{w})]$ را تعریف می‌کند . بنابراین تصویر $\hat{\mathcal{G}} = \rho(\mathcal{G})$ یک جبر لی با بعد متناهی از میدان‌های برداری روی M تشکیل می‌دهد که ایزومورفیسم با جبر لی موثر از گروه تقسیم $\frac{G}{G_M}$ است که G_M گروه ایزوتروپی سراسری است . مشخصاً G بطور موضعاً موثر روی M عمل می‌کند اگروفقط اگر یک به یک باشد یعنی: $ker\rho = ۰$.*

برهان. [۲۲] . $\square$

قضیه ۲.۶.۱. *فرض کنید $\mathcal{G}$ جبر لی با بعد متناهی از میدان‌های برداری روی منیفلد M باشدو G گروه لی با جبر لی $\mathcal{G}$ است . بنابراین عمل موضعی از G وجود دارد که مولدهای بینهایت کوچک با جبر لی داده شده منطبق هستند .*

برهان. [۱۷] . $\square$

مثال ۳.۶.۱. عمل گروه $\mathrm{SL}(n)$ که به صورت

$$p \to \frac{\alpha p + \beta}{\gamma p + \delta}$$

است ، روی $\mathbb{RP}^۱$ عمل می‌کند که

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(۲)$$

جبر لی $\mathrm{SL}(۲)$ شامل همه ماتریس‌های ۲×۲ با اثر صفر است و بنابراین با ماتریس‌های

$$\mathrm{J}^- = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \qquad \mathrm{J}^۰ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} \qquad \mathrm{J}^+ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

تولید می‌شود که کروشه لی آنها خاصیت جابجایی دارد:

$$[\mathrm{J}^-, \mathrm{J}^۰] = -۲\mathrm{J}^-, \qquad [\mathrm{J}^+, \mathrm{J}^۰] = ۲\mathrm{J}^+, \qquad [\mathrm{J}^-, \mathrm{J}^+] = \mathrm{J}^۰$$

تناظری یک به یک بین زیرگروه یک پارامتری و مولدهای بینهایت کوچک آنها وجود دارد:

انتقالات:	$p \mapsto p + t$	$\mathbf{v}_- = \partial_p$
تجانس:	$p \mapsto e^{۲t} p$	$\mathbf{v}_۰ = ۲p\partial_p$
معکوس‌ها:	$p \mapsto \dfrac{p}{tp + ۱}$	$\mathbf{v}_+ = -p^۲\partial_p$

میدان‌های برداری$\mathbf{v}_-, \mathbf{v}_\circ, \mathbf{v}_+$ از همان قواعد جابجایی بالا پیروی می‌کنند و تنها تفاوت در علامت‌هاست.

$$[\mathbf{v}_-, \mathbf{v}_\circ] = ۲\mathbf{v}_- \qquad [\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_\circ] = -۲\mathbf{v}_+ \qquad [\mathbf{v}_-, \mathbf{v}_+] = -\mathbf{v}_\circ$$

چون منیفلد یک بعدی است سه مولد بینهایت کوچک $\mathbf{v}_-, \mathbf{v}_\circ, \mathbf{v}_+$ نقطه‌ای وابسته خطی هستند و ثابت‌های غیر بدیهی وجود ندارد که $c_-\mathbf{v}_- + c_\circ\mathbf{v}_\circ + c_+\mathbf{v}_+ = \circ$ بنابراین طبق قضیه (۱.۶.۱) ، $\mathrm{SL}(۲)$ موضعاً موثر روی $\mathbb{RP}^۱$عمل می‌کند.

گزاره ۴.۶.۱. *فرض کنید Gیک گروه لی با جبر لی $\mathcal{G}$ باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند . بنابراین برای هر $x \in M$ فضای مماس به مدارات گذرنده x زیرفضای تولید شده توسط مولدهای بینهایت کوچک است: $\mathcal{G}|_x = \{\hat{\mathbf{v}}|_x \mid \mathbf{v} \in \mathcal{G}\} \subset T_xM$ به خصوص بعد مدارات برابر بعد $\mathcal{G}|_x$ است.*

برهان. [۳] . □

نتیجه ۵.۶.۱. *یک جبر لی روی منیفلد همبند M به صورت متعدی عمل می‌کند اگروفقط اگر*

$$\mathcal{G}|_x = T_xM \qquad x \in M$$

برهان. [۱۷] . □

لم ۶.۶.۱. *فضای با بعد متناهی $\mathcal{F}$ از توابع هموار یک متغیره x ناوردای انتقالی است اگروفقط اگر فضای جواب معادلات دیفرانسیل خطی معمولی با ضرایب ثابت و همگن باشد.*

برهان. [۱۷] . □

قضیه ۷.۶.۱. *فرض کنید گروه همبند G روی منیفلد M عمل کند . تابع$I : M \to \mathbb{R}$ تحت G ناورداست اگروفقط اگر $\mathbf{v}[I] = \circ$.*

برهان. $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ را ثابت در نظر بگیرید . از شرط ناوردایی $I[\exp(t\mathbf{v})] = I(x)$ نسبت به t دیفرانسیل می‌گیریم و $t = \circ$ قرار می‌دهیم و به نتیجه مورد نظر می‌رسیم . برعکس اگر $\mathbf{v}[I] = \circ$ برقرار باشد داریم $d(I[\exp(t\mathbf{v})x])/dt = \circ$ و بنابراین $I[\exp(t\mathbf{v})x]$ تحت زیرگروه یک پارامتری تولید شده توسط $\mathbf{v}$ ثابت است . پس I ناورداست. □

بنابراین طبق قضیه ناوردای $u = I(x)$ از گروه یک پارامتری تبدیلات با مولدهای بینهایت کوچک $\mathbf{v} = \sum_i \xi^i(x)\partial_{x^i}$ در دستگاه معادلات خطی مرتبه اول همگن زیر صدق می‌کند:

$$\sum_{i=۱}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} = \circ \tag{۶.۱}$$

جوابهای این دستگاه توسط روش مشخصه سازی بدست می‌آید . معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی را با سیستم مشخصه از معادلات دیفرانسیل جابه جا می‌کنیم:

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \cdots = \frac{dx^m}{\xi^m(x)} \tag{7.1}$$

جواب‌ها به صورت موضعی به فرم $I_1(x) = c_1, \cdots, I_{m-1}(x) = c_{m-1}$ نوشته می‌شوند که c_i ها ثابت‌های انتگرال هستند . اثبات اینکه توابع $I_1, \cdots, I_{m-1}$ مجموعه کاملی از ناورداهای مستقل از گروه یک پارامتری تولید شده توسط $\mathbf{v}$ است، سخت نیست.

مثال ۸.۶.۱. گروه یک پارامتری تولید شده توسط میدان برداری

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1+z^2)\frac{\partial}{\partial z}$$

را شرح می‌دهیم . گروه تبدیلات (شار) عبارتست از:

$$(x, y, z) \to \left(x\cos t - y\sin t,\ x\sin t + y\cos t,\ \frac{\sin t + z\cos t}{\cos t - z\sin t}\right) \tag{8.1}$$

توجه کنید که اگر (x, y, z) ثابت باشد بنابراین معادله(۸.۱) پارامتری شده خم انتگرال گذرنده از آن نقطه است. سیستم مشخصه‌سازی(۷.۱) برای این میدان برداری به صورت زیر است:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{1+z^2}$$

معادله اول $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ یک معادله دیفرانسیل جداشدنی است که جواب عمومی آن به صورت $x^2 + y^2 = c_1$ است که c_1 ثابت انتگرال است . بنابراین شعاع استوانه‌ای $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ناورداست . برای حل معادله دوم $\sqrt{r^2 - y^2}$ به جای x قرار می‌دهیم . جواب به صورت $\tan^{-1} z - \sin^{-1}(\frac{y}{r}) = \tan^{-1} z - \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = c_2$ است بنابراین $\tan^{-1} z - \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ ناوردای دوم است . نتیجه می‌گیریم که برای $yz + x \neq 0$ تابع $r = \sqrt{x^2+y^2},\ w = (xz - y)/(yz + x)$ مجموعه کاملی از ناورداهای مستقل تابعی را نشان می‌دهد.

مثال ۹.۶.۱. عمل گروه $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ روی $\mathbb{R}$ که با سه میدان برداری زیر تولید می‌شود را شرح می‌دهیم:

$$\mathbf{v}_- = 2y\partial_x + z\partial_y, \qquad \mathbf{v}_0 = -2x\partial_x + 2z\partial_z, \qquad \mathbf{v}_+ = x\partial_y + 2y\partial_z$$

خارج از مبدأ میدان‌های برداری بالا فضای دو بعدی را تولید می‌کنند و بنابراین مدارات ، همگی دو بعدی هستند(به غیر از مبدأ) . بنابراین انتظار بر این است که تنها یک ناوردا بیابیم . حل اولین معادله دستگاه مشخصه از $\mathbf{v}_0$ که به صورت $dx/2x = dy/0 = dz/(-2z)$ است ناورداهای $w = xz,\ y$ را می‌دهد بنابراین ناوردا باید به شکل $I = F(w, y) = F(xz, y)$ باشد . با به کار بردن $\mathbf{v}_+$ نسبت به I بدست می‌آوریم:

$$2xyF_w + xF_y = 0$$

بنابراین $I = y^{۲} - xz$ ناوردای مورد انتظار است.

قضیه ۱۰.۶.۱. *زیر منیفلد بسته $N \subset M$ یک G-ناورداست اگروفقط اگر فضای $\mathcal{G}$ از مولدهای بینهایت کوچک همه جا مماس بر N باشد و این یعنی $\mathcal{G}|_x \subset T_xN$.*

برهان. [۱۴] . □

قضیه ۱۱.۶.۱. *یک گروه لی همبند یک گروه تقارن از دستگاه معادلات منظم $F_۱(x) = \cdots = F_k(x) = ۰$ است اگرو فقط اگر برای هر مولد بینهایت کوچک $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ داشته باشیم*

$$\mathbf{v}[F_\nu(x)] = ۰ \qquad \nu = ۱, \cdots, k, \qquad F_۱(x) = \cdots F_k(x) = ۰ \tag{۹.۱}$$

برهان. [۱۷]. □

مثال ۱۲.۶.۱. معادله $x^{۲} + y^{۲} = ۱$ که معادله یک دایره است یک ناوردای دورانی است . برای بررسی شرط بینهایت کوچک از مولد $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$ برای تعریف تابع $F(x,y) = x^{۲} + y^{۲} - ۱$ استفاده می‌کنیم. چون F یک ناورداست بنابراین همه جا داریم $\mathbf{v}(F) = ۰$. چون dF یک دایره غیر صفر است معادله منظم است و مجموعه جواب ناوردای دورانی است.
مثال کامل‌تر $H(x,y) = x^{۴} + x^{۲}y^{۲} + y^{۲} - ۱$ است بنابراین $\mathbf{v}(H) = -۲xy(x^{۲}+۱)^{-۱}H$ که هرجا $H = ۰$ داریم $\mathbf{v}(HF) = ۰$ بنابراین مجموعه جواب $H(x,y) = ۰$ ناوردای دورانی است.

قضیه ۱۳.۶.۱. *فرض کنید G گروه تبدیلات همبندی است که روی منیفلد M عمل می‌کند . میدان برداری $\mathbf{w}$ روی M یک G-ناورداست اگروفقط اگر $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = ۰$ که $\mathbf{v}$ مولد بینهایت کوچکی در $\mathcal{G}$ است.*

برهان. $\mathbf{v}$ مولد بینهایت کوچکی از G است . ما باید ارزش و مقدار $\mathbf{w}$ در نقطه $\exp(t\mathbf{v})x$ را با مقدار آن در نقطه x مقایسه کنیم . چون این دو میدان برداری در فضاهای مماسی متفاوتی قرار می‌گیرند ، باید نگاشت $\mathbf{w}|_{\exp(tv)x}$ با استفاده از $d\exp(-t\mathbf{v})$ به x برگردانیم . با استفاده از فرمول زیر نتیجه بدست آمده را به توان t بسط می‌دهیم:

$$f(\exp(t\mathbf{v})x) = f(x) + t\mathbf{v}(f(x)) + \frac{۱}{۲}t^{۲}\mathbf{v}(\mathbf{v}(f(x))) + \cdots$$

و به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$d\exp(-t\mathbf{v})[\mathbf{w}|_{\exp(t\mathbf{v})x}] = \mathbf{w}|_x + t[\mathbf{v}, \mathbf{w}]|_x + \cdots .$$

در نتیجه کروشه لی $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ تغییر بینهایت کوچک از میدان برداری $\mathbf{w}$ تحت عمل گروه القایی شار میدان برداری $\mathbf{v}$ را نشان می‌دهد . به خصوص اگر $\mathbf{w}$ یک ناوردا ، تحت شار القایی از $\mathbf{v}$ باشد آنگاه کروشه لی صفر خواهد شد.

عکس قضیه از یکتایی قضیه برای معادلات دیفرانسیل معمولی بدست می‌آید . بنابراین اگر شرط ناوردایی بینهایت کوچک برای هر مولد بینهایت کوچک برقرار باشد میدان برداری $\mathbf{w}$ تحت زیرگروه یک پارامتری G ناورداست بنابراین قضیه از گزاره (۴.۴.۱) بدست می‌آید. □

گزاره ۱۴.۶.۱. *اگر $\mathbf{w}$ یک میدان برداری G-ناوردا و I تابعی ناوردا باشد، آنگاه $I\mathbf{w}$ نیز میدان برداری G-ناورداست. در حالت کلی اگر $\mathbf{w}_k$,$\mathbf{w}_1, \cdots$ میدان‌های برداری ناوردایی باشند که نقطه‌ای مستقل خطی هستند آنگاه $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k} I_k \mathbf{w}_k$ نیز G-ناوردا هستند اگروفقط اگر ضرایب I_k توابع G-ناوردا باشند.*

برهان. [۱۷] . □

۷.۱ مشتقات لی و فرم‌های دیفرانسیلی ناوردا

فرم دیفرانسیلی Ω در M ، G-ناوردا است اگر تحت پس کشنده عمل گروه تغییر ناپذیر باشد:

$$g^*(\Omega|_{g\cdot x}) = \Omega|_x \qquad g \in G, x \in M$$

صفر-فرم‌های ناوردا توابع ناوردای معمولی هستند . جمع و ضرب وج فرم‌های ناوردا نیز ناوردا هستند . همچنین ضرب یک k-فرم ناوردا در یک تابع ناوردا نیز یک k-فرم ناوردا تولید می‌کند . دیفرانسیل $d\omega$ از هر k-فرم یک $(k+1)$-فرم ناورداست.

گزاره ۱.۷.۱. *اگر I تابعی ناوردا باشد دیفرانسیل dI نیز ۱ -فرم ناورداست.*

برهان. [۱۷] . □

تعریف ۲.۷.۱. $\mathbf{v}$ یک میدان برداری روی منیفلد M با شار $\exp(t\mathbf{v})$ است . مشتق لی $\mathbf{v}(\Omega)$ از فرم دیفرانسیلی Ω نسبت به $\mathbf{v}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pounds_{\mathbf{v}}\,\Omega = \mathbf{v}(\Omega)|_x = \frac{d}{dx}\ \exp(t\mathbf{v})^*\ (\Omega|_{\exp(t\mathbf{v})x})\Big|_{t=0} \tag{۱۰.۱}$$

توجه کنید که پس کشنده نگاشت $\exp(t\mathbf{v})^*$ نقطه $\exp(t\mathbf{v})x$ را به x برمی‌گرداند.

$$\exp(t\mathbf{v})^*(\Omega|_{\exp(t\mathbf{v})x}) = \Omega|_x + t\mathbf{v}(\Omega)|_x + \cdots \tag{۱۱.۱}$$

گزاره ۳.۷.۱. *مشتق لی میدان برداری $\mathbf{w}$ نسبت به میدان برداری $\mathbf{v}$ با کروشه لی $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ برابر است.*

برهان. [۱۲] . □

گزاره ۴.۷.۱. *مشتق خارجی فرم‌های دیفرانسیلی در حالت مختصات موضعی* $(x^1, \cdots, x^m)$ *به صورت زیر نوشته می‌شود:*

$$d\Omega = \sum_{i=1}^{m} dx^i \wedge \frac{\partial \Omega}{\partial x^i}$$

برهان. [۱۲] . □

قضیه ۵.۷.۱. *فرم دیفرانسیلی* Ω *تحت گروه لی همبند از تبدیلات* G *ناورداست اگروفقط اگر مشتق لی نسبت به هر مولد بینهایت کوچک* $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ *صفر شود یعنی :* $\mathbf{v}(\Omega) = 0$

برهان. برهان کاملا مشابه برهان قضیه (۱۳.۶.۱) می‌باشد. □

مثال ۶.۷.۱. اگر $dx = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ فرم حجم روی $\mathbb{R}^m$ باشد مشتق لی از dx نسبت به میدان برداری $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x)\partial_{x^i}$ برابر $\mathbf{v}(dx) = (\text{div}\xi)dx$ است که $\text{div}\xi = \sum_i \partial\xi^i/\partial x^i$ دیورژانس ضرایب $\mathbf{v}$ است . بنابراین گروه تبدیلات روی $\mathbb{R}^m$ حافظ حجم است اگروفقط اگر $\text{div}\xi = 0$

قضیه ۷.۷.۱. G *گروه لی* r*- بعدی که روی منیفلد* m*- بعدی* M *به صورت موثر آزاد عمل می‌کند . به صورت موضعی* m *،* ۱*- فرم*G*- ناوردای* $\omega^1, \cdots, \omega^m$ *وجود دارد که نقطه‌ای مستقل خطی هستند.*

برهان. [۱۷] . □

فصل ۲

میدان‌های برداری و گروه‌های تقارن

۱.۲ امتداد

تعریف ۱.۱.۲. تابع حقیقی مقدار و هموار $f : X \simeq \mathbb{R}^p \longrightarrow U \simeq \mathbb{R}^q$ از p-متغیر مستقل و q-متغیر وابسته را در نظر می‌گیریم، تعداد$p_k \equiv \binom{p+k-1}{k}$ امکان مختلف برای مشتقات جزئی متمایز مرتبه k-ام از تابع f وجود دارد. قرار می‌دهیم $U_k \equiv \mathbb{R}^{qp_k}$ با مختصات $u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$ که $J = (j_1, \cdots, j_k)$ و $1 \leq j_k \leq p$ و $\alpha = 1, \ldots, q$ می‌باشد. همچنین قرار می‌دهیم $U^{(n)} = U \times U_1 \times \cdots \times U_n$ که شامل تمام مشتقات تابع از مرتبه صفر تا n و یک فضای اقلیدسی از بعد $q + qp_1 + \cdots + qp_n = q\binom{p+n}{n} = qp^{(n)}$ می‌باشد. حال هر عضو $U^{(n)}$ را با $u^{(n)} = pr^{(n)}f(x)$ نشان می‌دهیم و آن را امتداد مرتبه n-ام f می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۲. فضای $X \times U^{(n)}$ که شامل همه‌ی متغیرهای مستقل ، متغیرهای وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته تا مرتبه n-ام می‌باشد را فضای جت [1] مرتبه n-ام فضای کامل $X \times U$ می‌گوییم. اگر $u = f(x)$ یک تابع باشد که گراف آن در $M \subset X \times U$ قرار می‌گیرد آنگاه امتداد مرتبه‌ی n-ام آن، $pr^{(n)}f(x)$، یک تابع است که گراف آن در فضای جت مرتبه n-ام $M^{(n)} \equiv M \times U_1 \times \cdots \times U_n$ قرار می‌گیرد.

تعریف ۳.۱.۲. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با p متغیر مستقل $x = (x^1, \cdots, x^p)$ در مختصات موضعی روی فضای اقلیدسی $X \simeq \mathbb{R}^p$ نوشته می‌شود و q متغیر وابسته $u = (u^1, \cdots, u^q)$ در مختصات موضعی روی $U \simeq \mathbb{R}^q$ بیان می‌شود. فضای کامل $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^{p+q}$ شامل تمام متغیرهای مستقل و وابسته است. دیفیومورفیسمی بین فضای متغیرهای مستقل و وابسته برقرار است.

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g \cdot (x, u) + (\chi(x, u), \psi(x, u)) \tag{۱.۲}$$

وقتی گروه همبند است میدان برداری به صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi^\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{۲.۲}$$

که روی فضای متغیرهای مستقل و وابسته تعریف می‌شود.

میدان برداری ، گروه یک پارامتری از تبدیلات حافظ تار [2] تولید می‌کند اگروفقط اگر ضرایب $\xi^i = \xi^i(x)$ به متغیرهای وابسته، بستگی نداشته باشد .

میدان برداری افقی است اگر ضرایب عمودی صفر باشند یعنی $\varphi^\alpha = 0$ و میدان برداری عمودی است اگر ضرایب افقی صفر باشند یعنی $\xi^i = 0$

مثال ۴.۱.۲. گروه یک پارامتری تبدیلات

$$g_t \cdot (x, u) = (x \cos t - u \sin t, x \sin t + u \cos t)$$

[1] Jet Space
[2] Fiber

را داریم که روی فضای متغیرهای مستقل و وابسته $E = \mathbb{R}^۲$ عمل می‌کند. این تبدیل تابع $u = f(x)$ را به گرافش می‌نگارد بنابراین گراف $g_t \cdot \Gamma_f$ گراف تابعی خوش تعریف باقی خواهد ماند اگر زاویه چرخش t خیلی بزرگ نباشد . معادله تابع تبدیلات $\bar{f} = g_t \cdot f$ در فرم ضمنی به صورت زیر است:

$$\bar{x} = x\cos t - f(x)\sin t, \qquad \bar{u} = x\sin t + f(x)\cos t$$

که$\bar{u} = \bar{f}(\bar{x})$ ، x را از دو معادله حذف می‌کند . برای مثال اگر $u = ax + b$ آفین باشد ، تابع تبدیل نیز آفین است و در فرم ضمنی به صورت

$$\bar{u} = \frac{\sin t + a\cos t}{\cos t - a\sin t}\bar{x} + \frac{b}{\cos t - a\sin t} \tag{۳.۲}$$

است که وقتی $\cos\theta \neq ۰$ است تعریف می‌شود.

۲.۲ توابع ناوردا

تعریف ۱.۲.۲. تابع $u = f(x)$ تحت گروه تبدیلات G ، ناورداست اگر Γ_f (موضعاً) G-ناوردا باشد.

قضیه ۲.۲.۲. *فرض کنید G گروه تبدیلاتی باشد که به صورت منظم و متعدی روی $E \simeq X \times U$ با مدارات r بعدی عمل می‌کند. $I_۱(x,u), \cdots, I_{p-s}(x,u), J_۱(x,u), \cdots, J_q(x,u)$ مجموعه کاملی از ناورداهای مستقل تابعی G است. بنابراین هر تابع G-ناوردا $u = f(x)$ موضعاً در فرم موضعی به صورت زیر است:*

$$w = h(y), \qquad y = I(x,u), \qquad w = J(x,u)$$

برهان. [۱۷] . □

تعریف ۳.۲.۲. مشخصه میدان برداری(۲.۲) یک q-تایی از توابع $Q(x, u^{(۱)})$ است که به x و u و مشتقات مرتبه اول u وابسته است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q^\alpha(x, u^{(۱)}) = \varphi^\alpha(x,u) - \sum_{i=۱}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \qquad \alpha = ۱, \cdots, q \tag{۴.۲}$$

قضیه ۴.۲.۲. *تابع $u = f(x)$ تحت گروه همبند تبدیلات نقطه‌ای ناورداست اگروفقط اگر جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول زیر باشد:*

$$Q^\alpha(x, u^{(۱)}) = ۰, \qquad \alpha = ۱, \cdots, q \tag{۵.۲}$$

برهان. [۱۷] . □

مثال ۵.۲.۲. مشخصه میدان برداری دوران $-u\partial_x + x\partial_u$ به صورت $Q = x + uu_x$ است.هر تابع ناوردا باید در معادله $x + uu_x = ۰$ صدق کند. از این معادله به راحتی به $x^۲ + u^۲ = c$ می‌رسیم و بنابراین گراف تابع زاویه‌ای از دایره است.

۳.۲ فضای جت و امتداد

با توجه به تعریف(۱.۱.۲) هر نقطه در فضای جت $z \in J^n$ به صورت (x, u^n) نشان داده می‌شود و هر تابع $u = f(x)$ از X به U دارای n-امین امتداد $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$ است که از X به U^n است و شامل همه‌ی مشتقات جزئی f تا مرتبه n است . مختصات تابعی $f^{(n)}$ ، $u_j^\alpha = \partial_j f^\alpha(x)$ است و $f^{(\circ)} = f$ است توجه کنید گراف تابع امتداد $f^{(n)}$ به صورت $\Gamma_f^{(n)} = \{(x, f^{(n)}(x))\}$ است که زیرمنیفلد p-بعدی از J^n است . در نقطه $x \in X$ دو تابع دارای امتداد مرتبه n-ام برابرند و بنابراین مشخص کننده یک نقطه در J^n هستند اگروفقط اگر دارای برخورد مرتبه n برابر باشند به این معنی که خودشان و مشتقات مرتبه n-ام آنها برابر باشند یا به عبارت دیگر می‌توان گفت دارای بسط تیلور مرتبه n-ام برابر در نقطه x باشند.

مثال ۱.۳.۲. گروه یک پارامتری ذکر شده در مثال (۴.۱.۲) را در نظر بگیرید . امتداد مرتبه اول $g_t^{(1)}$ روی فضای نقاط (x, u, p) عمل می‌کند . نقطه $(x_\circ, u_\circ, p_\circ)$ را در نظر بگیرید . چند جمله‌ای خطی $u = f(x) = p_\circ(x - x_\circ) + u_\circ$ را داریم . توجه کنید که $f'(x_\circ) = p_\circ, f(x_\circ) = u_\circ$ تابع تبدیلات به صورت (۴.۱.۲) است بنابراین :

$$\bar{f}(\bar{x}) = \frac{\sin t + p_\circ \cos t}{\cos t - p_\circ \sin t}\bar{x} + \frac{u_\circ - p_\circ x_\circ}{\cos t - p_\circ \sin t}$$

بنابراین $\bar{x}_\circ = x_\circ \cos t - u_\circ \sin t$ و همچنین $\bar{f}(\bar{x}_\circ) = \bar{u}_\circ = x_\circ \sin t + u_\circ \cos t$
و $\bar{p}_\circ = \bar{f}'(\bar{x}_\circ) = (\sin t + p_\circ \cos t)/(\cos t - p_\circ \sin t)$ که وقتی $p_\circ \neq \cot t$ تعریف می‌شود. بنابراین امتداد مرتبه اول به صورت زیر است:

$$g_t^{(1)} \cdot (x, u, p) = \left(x \cos t - u \sin t,\ x \sin t + u \cos t, \frac{\sin t + p \cos t}{\cos t - p \sin t}\right) \qquad (۶.۲)$$

مثال ۲.۳.۲. مثال قبل حالت خاصی از تبدیلات نقطه‌ای عمومی

$$\bar{x} = \chi(x, u) \qquad \bar{u} = \psi(x, u) \qquad (۷.۲)$$

روی فضای $E \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است که یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته دارد. $p = u_x$ روی فضای جت J^1 تعریف می‌شود. بنابراین امتداد مرتبه اول (۷.۲) تبدیل خطی کسری زیر است:

$$\bar{p} = \frac{\alpha p + \beta}{\gamma p + \delta} \qquad (۸.۲)$$

که ضرایب ،برابر

$$\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial u}, \qquad \beta = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \gamma = \frac{\partial \chi}{\partial u}, \qquad \delta = \frac{\partial \chi}{\partial x} \qquad (۹.۲)$$

هستند و مشتقات χ و ψ هستند.

۴.۲ مشتقات کامل

تعریف ۱.۴.۲. تابع هموار حقیقی مقدار $F : J^n \to \mathbb{R}$ که روی زیر مجموعه باز از فضای جت مرتبه n-ام تعریف می‌شود، تابع دیفرانسیلی از مرتبه n نامیده می‌شود.

برای مثال معادله لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = ۰$ با تابع دیفرانسیلی مرتبه دوم $F(x, u^{(۲)}) = u_{xx} + u_{yy}$ روی فضای جت $J^۲E$ که $E = \mathbb{R}^۲ \times \mathbb{R}$ است و دارای مختصات (x, y, u) است ، تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۴.۲. $F(x, u^{(n)})$ را تابع دیفرانسیلی از مرتبه n در نظر بگیرید. مشتق کامل F نسبت به تابع x^i دیفرانسیلی مرتبه $(n+۱)$-ام D_iF است که برای هر تابع هموار $u = f(x)$ در شرط زیر صدق می‌کند.

$$D_iF(x, f^{(n+۱)}(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i} F(x, f^{(n)}(x))$$

به عنوان مثال در حالت یک متغیر مستقل x و یک متغیر وابسته u مشتق کامل تابع دیفرانسیلی $F(x, u^{(n)})$ نسبت به x دارای فرم کلی زیر است:

$$D_xF = \frac{\partial F}{\partial x} + u_x \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{xxx} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \cdots . \qquad (۱۰.۲)$$

مثلا $D_x(xuu_{xx}) = uu_{xx} + xuu_{xxx} + xu_xu_{xx}$ است. برای اولین کاربرد توجه کنید که فرمول امتداد کلی (۸.۲) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\bar{p} = \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} = \frac{D_x\psi}{D_x\chi}$$

امتداد مرتبه دوم با $q = u_{xx}$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{q} = \frac{d^۲\bar{u}}{d\bar{x}^۲} = \frac{۱}{D_x\chi} D_x(\frac{D_x\psi}{D_x\chi}) = \frac{D_x\chi \cdot D_x^۲\psi - D_x\psi \cdot D_x^۲\chi}{(D_x\chi)^۳} \qquad (۱۱.۲)$$

برای مثال در حالت گروه دورانی بحث شده در مثال (۴.۱.۲) به فرم موضعی زیر می‌رسیم:

$$\left(x\cos t - u\sin t,\ x\sin t + u\cos t,\ \frac{\sin t + p\cos t}{\cos t - p\sin t},\ \frac{q}{(\cos t - p\sin t)^۳}\right) \qquad (۱۲.۲)$$

در حالت کلی مشتق کامل نسبت به i-امین متغیر مستقل x^i، عملگر مرتبه اول دیفرانسیلی D_i است که:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=۱}^{q} \sum_J u^\alpha_{J,i} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} \qquad (۱۳.۲)$$

که $u^\alpha_{J,i} = D_i(u^\alpha_J) = u^\alpha_{j_۱ \cdots j_k^i}$ که سیگما در (۱۳.۲) روی تمام اندیس‌های متقارن j از هر مرتبه دلخواه است.

نتیجه ۳.۴.۲. *تابع دیفرانسیلی $F(x, u^{(n)})$ از تمام مشتقات کامل صفر خواهد شد $D_iF = ۰$ $i = ۱, \cdots, p$اگروفقط اگر F ثابت باشد.*

برهان. [۱۷] . □

۵.۲ امتداد میدان‌های برداری

میدان برداری $\mathbf{v}$ که گروه یک پارامتری از تبدیلات $\exp(t\mathbf{v})$ را تولید می‌کند در نظر بگیرید . امتداد مرتبه n-ام میدان برداری $\mathbf{v}^{(n)}$ ، میدان برداری روی فضای جت J^n است که مولد بینهایت کوچکی از امتداد گروه یک پارامتری $\exp(t\mathbf{v})^{(n)}$ است. بنابراین برای هر نقطه $(x,u^{(n)})\in J^n$ داریم:

$$\mathbf{v}^{(n)}\big|_{(x,u^{(n)})} = \frac{d}{dt}\exp(t\mathbf{v})^{(n)}\cdot(x,u^{(n)})\Big|_{t=0} \tag{۱۴.۲}$$

قضیه ۱.۵.۲. *$\mathbf{v}$ را میدان برداری (۲.۲) در نظر بگیرید و فرض کنید $Q=(Q^1,\cdots,Q^q)$ مشخصه آن باشد که در (۴.۲) آمده است . امتداد مرتبه n-ام $\mathbf{v}$ به صورت ضمنی به صورت زیر است:*

$$\mathbf{v}^{(n)} = \sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{\sharp J=j=0}\varphi_J^\alpha(x,u^{(j)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \tag{۱۵.۲}$$

که ضرایب عبارت هستند از :

$$\varphi_J^\alpha = D_J Q^\alpha + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{J,i}^\alpha \tag{۱۶.۲}$$

برهان. در ابتدا قضیه را برای مشتق مرتبه اول اثبات می‌کنیم ، بنابراین $n=1$. فرض کنید $g_\varepsilon=\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ گروه یک پارامتری متناظر با تبدیل داده شده باشد ، بنابراین داریم :

$$(\bar{x},\bar{u}) = g_\varepsilon\cdot(x,u) = (\Xi_\varepsilon(x,u),\Phi_\varepsilon(x,u)),$$

که تعریف شده است . توجه کنید :

$$\begin{aligned}\xi^i(x,u) &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Xi_\varepsilon^i(x,u), \qquad i=1,\cdots,p,\\ \varphi_\alpha(x,u) &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Phi_\varepsilon^\alpha(x,u), \qquad \alpha=1,\cdots,q,\end{aligned} \tag{۱۷.۲}$$

که Ξ_ε^i و Φ_ε^α مولفه‌های Ξ_ε و Φ_ε هستند. $(x,u^{(1)})\in M^{(1)}$ داده شده است ، فرض کنید $u=f(x)$ یک تابع باشد بنابراین $u^{(1)}=pr^{(1)}f(x)$ یا به صورت ضمنی

$$u^\alpha=f^\alpha(x), \qquad u_i^\alpha=\partial f^\alpha(x)/\partial x^i.$$

که برای ε به اندازه کافی کوچک ، تبدیل f با عنصر گروهی g_ε خوش تعریف است و داریم :

$$\bar{u}=\bar{f}_\varepsilon(\bar{x})=(g_\varepsilon\cdot f)(\bar{x})=[\Phi_\varepsilon\circ(1\times f)]\circ[\Xi_\varepsilon\circ(1\times f)]^{-1}(\bar{x}).$$

با استفاده از ماتریس ژاکوبین $\mathrm{J}\bar{f}_\varepsilon(x)=(\partial\bar{f}_\varepsilon^\alpha/\partial\bar{x}^i)$ داریم:

$$\mathrm{J}\bar{f}_\varepsilon(\bar{x}) = \mathrm{J}[\Phi_\varepsilon\circ(1\times f)](x)\cdot\{\mathrm{J}[\Xi_\varepsilon\circ(1\times f)](x)\}^{-1} \tag{۱۸.۲}$$

که

$$x=[\Xi_\varepsilon\circ(1\times f)]^{-1}(\bar{x}).$$

برای یافتن مولدهای بینهایت کوچک $pr^{(1)}\mathbf{v}$ از فرمول (۱۸.۲) نسبت به ε مشتق گرفته و $\varepsilon = 0$ قرار می‌دهیم . در نظر داشته باشید که اگر $M(\varepsilon)$ یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر از توابع باشد داریم :

$$\frac{d}{d\varepsilon}[M(\varepsilon)^{-1}] = -M(\varepsilon)^{-1}\frac{dM(\varepsilon)}{d\varepsilon}M(\varepsilon)^{-1}$$

همچنین توجه کنید که چون $\varepsilon = 0$ متناظر با تبدیل همانی داریم:

$$\Xi_0(x, f(x)) = x, \qquad \Phi_0(x, f(x)) = f(x), \tag{۱۹.۲}$$

بنابراین اگر I یک ماتریس همانی $p \times p$ باشد پس :

$$\mathrm{J}[\Xi_0 \circ (1 \times f)](x) = I, \qquad \mathrm{J}(\Phi_0 \circ (1 \times f))(x) = \mathrm{J}f(x).$$

اکنون از (۱۸.۲) دیفرانسیل گرفته و $\varepsilon = 0$ قرار داده و با استفاده از قاعده لایپ‌نیتز داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon}\mathrm{J}\bar{f}_\varepsilon(\bar{x}) &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathrm{J}[\Phi_\varepsilon \circ (1 \times f)](x) - \mathrm{J}f(x)\cdot\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathrm{J}[\Xi_\varepsilon \circ (1 \times f)](x)\\ &= \mathrm{J}[\Phi \circ (1 \times f)](x) - \mathrm{J}f(x)\cdot\mathrm{J}[\xi \circ (1 \times f)](x).\end{aligned}$$

که در نامساوی دوم $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^p)^T$ و $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_q)^T$ بردارهای ستونی هستند که در (۱۷.۲) آمده است . ورودی‌های ماتریس فرمول آخر ضرایب توابع ϕ_α^k از $\partial/\partial u_k^\alpha$ در $pr^{(1)}\mathbf{v}$ را می‌دهد ، به طور مثال (α, k)–ام ورودی به صورت زیر است:

$$\phi_\alpha^k(x, pr^{(1)}f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^k}[\phi_\alpha(x, f(x))] - \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k}[\xi^i(x, f(x))].$$

بنابراین با تعریف مشتقات کلی داریم:

$$\begin{aligned}\phi_\alpha^k(x, u^{(1)}) &= D_k[\phi_\alpha(x, u)] - \sum_{i=1}^{p} D_k[\xi^i(x, u)]u_i^\alpha \\ &= D_k\Big[\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha\Big] + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{ki}^\alpha,\end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

که $u_{ki}^\alpha = \partial^2 u^\alpha/\partial x^k \partial x^i$ و فرمول (۱۶.۲) در حالت $n = 1$ اثبات می‌شود. برای اثبات قضیه در حالت کلی از استقراء استفاده می‌کنیم. توجه به این نکته مهم که فضای جت $(n+1)$–ام $M^{(n+1)}$ زیر فضای ، فضای جت مرتبه اول $(M^{(n)})^{(1)}$ است ، اساسی است و این بدین علت است که هر مشتق مرتبه $(n+1)$ –ام u_J^αمی‌تواند به صورت مشتق مرتبه اول از مشتق مرتبه n–ام نوشته شود. برای توضیح بیشتر از یک مثال استفاده می‌کنیم. مثلا در حالت $p = 2$ و $q = 1$ فضای جت مرتبه اول $M^{(1)}$ دارای مختصات $(x, y; u; u_x, u_y)$ است . از $u_x = v$ و $u_y = \omega$ استفاده می‌کنیم بنابراین $M^{(1)}$ زیر مجموعه بازی از $X \times \bar{U}^{(1)}$ است که X دو بعدی است اما $\bar{U}$ دارای سه متغیر u و v و ω است ، بنابراین فضای جت مرتبه اول از $M^{(1)}$ یعنی

$(M^{(1)})^{(1)}$ زیر مجموعه بازی از $X \times \bar{U}^{(1)}$ با مختصات $(x, y; u; v, \omega; u_x, u_y, v_x, v_y, \omega_x, \omega_y)$ خواهد بود اما قرار داده بودیم $v = u_x$ و $\omega = u_y$ پس $M^{(2)} \in (M^{(1)})^{(1)}$ زیر فضای تعریف شده با روابط زیر در $X \times \bar{U}^{(1)}$ است:

$$v = u_x, \qquad \omega = u_y, \qquad v_y = \omega_x,$$

بنابراین روش استقرایی ما برای بدست آوردن $pr^{(n)}\mathbf{v}$ از $pr^{(n-1)}\mathbf{v}$ بدین صورت است :
$pr^{(n-1)}\mathbf{v}$ را به عنوان میدان برداری روی $M^{(n-1)}$ در نظر می‌گیریم و با استفاده از فرمول امتداد مرتبه چهار آن را به $(M^{(n-1)})^{(1)}$ امتداد می‌دهیم . در ادامه میدان برداری بدست آمده را به زیر فضای $M^{(n)}$ محدود می‌کنیم که امتداد مرتبه n-ام $pr^{(n)}\mathbf{v}$ را بدست می‌دهد . اکنون مختصات مرتبه n-ام جدید $(M^{(n-1)})^{(1)}$ با $u^{\alpha}_{j,k} = \partial u^{\alpha}_j / \partial x^k$ بدست می‌آید که $1 \leq k \leq p$, $J = (j_1, \cdots, j_{n-1})$ و $1 \leq \alpha \leq q$. طبق (۲۰.۲) ضرایب $\partial/\partial u^{\alpha}_{j,k}$ در امتداد مرتبه اول از $pr^{(n-1)}\mathbf{v}$ مطابق زیر است :

$$\phi^{J,k}_{\alpha} = D_k \phi^J_{\alpha} - \sum_{i=1}^{p} D_k \xi^i \cdot u^{\alpha}_{J,i}. \tag{۲۱.۲}$$

حال کافی است (۱۶.۲) را با رابطه بازگشتی (۲۱.۲) بررسی کنیم بنابراین با استقراء داریم:

$$\begin{aligned}
\phi^{J,k}_{\alpha} &= D_k \Big\{ D_J \Big(\phi_{\alpha} - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u^{\alpha}_i \Big) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u^{\alpha}_{J,i} \Big\} - \sum_{i=1}^{p} D_k \xi^i \cdot u^{\alpha}_{J,i} \\
&= D_k D_J \Big(\phi_{\alpha} - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u^{\alpha}_i \Big) + \sum_{i=1}^{p} (D_k \xi^i \cdot u^{\alpha}_{J,i} + \xi^i u^{\alpha}_{J,ik} - \sum_{i=1}^{p} D_k \xi^i \cdot u^{\alpha}_{J,i} \\
&= D_k D_J \Big(\phi_{\alpha} - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u^{\alpha}_i \Big) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u^{\alpha}_{J,ik},
\end{aligned}$$

که $u^{\alpha}_{J,ik} = \partial^2 u^{\alpha}_J / \partial x^i \partial x^k$. بنابراین $\phi^{\alpha}_{J,k}$ به فرم (۱۶.۲) است و اثبات کامل می‌شود. □

مثال ۲.۵.۲. یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته در نظر بگیرید . بنابراین میدان برداری به صورت $\mathbf{v} = \xi(x,u)\partial_x + \varphi(x,u)\partial_u$ است و مشخصه آن به صورت

$$Q(x, u, u_x) = \varphi(x, u) - \xi(x, u) u_x \tag{۲۲.۲}$$

است . امتداد مرتبه دوم میدان برداری $\mathbf{v}$ به صورت :

$$\mathbf{v}^{(2)} = \xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \varphi^x(x, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^{xx}(x, u^{(2)})\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \tag{۲۳.۲}$$

است که روی J^2 تعریف می‌شود. که ضرایب ϕ^x و ϕ^{xx} توسط (۱۶.۲) داده شده ، بنابراین

$$\varphi^x = D_x Q + \xi u_{xx} = \varphi_x + (\varphi_u - \xi_x) u_x - \xi_u u_x^2, \tag{۲۴.۲}$$

$$\varphi^{xx} = D_x^2 Q + \xi u_{xxx} = \varphi_{xx} + (2\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2\varepsilon - \xi_{uu}u_x^3 + (\varphi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 3\xi_u u_x u_{xx} \tag{۲۵.۲}$$

که در (۲۵.۲) ضرایب ξ و φ مشتقات جزئی هستند. برای مثال امتداد مرتبه دوم $\mathbf{v} = -u\partial_x + x\partial_u$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{v}^{(2)} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x} + 3u_x u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \tag{۲۶.۲}$$

که گروه تبدیلات (۱۲.۲) با انتگرال گیری از سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی به

$$\frac{dx}{dt} = -u, \qquad \frac{du}{dt} = x, \qquad \frac{dp}{dt} = 1 + p^2, \qquad \frac{dq}{dt} = 3pq,$$

خواهیم رسید که از p و q به جای u_x و u_{xx} استفاده کردیم که این کار برای پرهیز از استفاده پی در پی از مشتقات جزئی بکار برده شده است. توجه کنید که امتداد مرتبه اول $\mathbf{v}$ از حذف مشتقات جزئی مرتبه دوم در (۲۳.۲) بدست می‌آید.

مثال ۳.۵.۲. به عنوان دومین مثال فرض کنید دو متغیر مستقل x و t و یک متغیر وابسته u داریم . میدان برداری

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\partial_x + \tau(x,t,u)\partial_t + \varphi(x,t,u)\partial_u$$

دارای مشخصه $Q = \varphi - \xi u_x - \tau u_t$ است. امتداد مرتبه دوم $\mathbf{v}$ میدان برداری زیر است:

$$\mathbf{v}^{(2)} = \xi\partial_x + \tau\partial_t + \varphi\partial_u + \varphi^x\partial_{u_x} + \varphi^t\partial_{u_t} + \varphi^{xx}\partial_{u_{xx}} + \varphi^{xt}\partial_{u_{xt}} + \varphi^{tt}\partial_{u_{tt}} \tag{۲۷.۲}$$

که

$$\varphi^x = D_x Q + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} = \varphi_x + (\varphi_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t \tag{۲۸.۲}$$

$$\varphi^t = D_x Q + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} = \varphi_t - \xi_t u_t + (\varphi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 \tag{۲۹.۲}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{xx} &= D_x^2 Q + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} \\ &= \varphi_{xx} + (2\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 \\ &- 2\tau_{xu}u_x u_t - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\varphi_u - 2\xi_x)u_{xx} \\ &- 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}.\end{aligned} \tag{۳۰.۲}$$

نتیجه ۴.۵.۲. *ضرایب (۱۶.۲) از امتداد میدان برداری در شرط زیر صدق می‌کند:*

$$\varphi_{J,i}^\alpha = D_i\varphi_J^\alpha - \sum_{j=1}^{p} D_i\xi^i u_{J,j}^\alpha \tag{۳۱.۲}$$

و به خصوص ضرایب امتداد مرتبه اول $\mathbf{v}$ *به صورت*

$$\varphi_i^\alpha = D_i\varphi^\alpha - \sum_{j=1}^{p}(D_i\xi^i)u_j^\alpha. \tag{۳۲.۲}$$

است به جای فرمول‌های (۲۸.۲) ، (۲۹.۲) ، (۳۰.۲) می‌توان از فرم زیر استفاده کرد:

$$\varphi^x = D_x\varphi - (D_x\xi)u_x - (D_x\tau)u_t,$$

$$\varphi^t = D_t\varphi - (D_t\xi)u_x - (D_t\tau)u_t,$$

$$\varphi^{xx} = D_x\varphi^x - (D_x\xi)u_{xx} - (D_x\tau)u_{xt}.$$

برهان. [۱۷] . □

نزدیکترین جایگزین برای فرمول امتداد میدان برداری ، میدان برداری تکاملی

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q} Q^\alpha(x, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{۳۳.۲}$$

است که بر پایه مشخصه سازی میدان برداری $\mathbf{v}$ است و امتداد آن به صورت

$$\mathbf{v}_Q^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{\sharp J\geq 0} D_JQ^\alpha(x, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \tag{۳۴.۲}$$

است بنابراین امتداد مرتبه n-ام به صورت:

$$\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{v}_Q^{(n)} + \sum_{i=1}^{p}\xi^iD_i \tag{۳۵.۲}$$

است.

۶.۲ محاسبه گروه تقارن

در این بخش با استفاده از مثال‌ها نحوه بدست آوردن گروه‌های تقارن را شرح می‌دهیم.

مثال ۱.۶.۲. گروه‌های تقارن معادلات حرارت را شرح می‌دهیم. معادله حرارت به صورت زیر است:

$$u_t = u_{xx} \tag{۳۶.۲}$$

در این معادله ۲ متغیر مستقل x و t و یک متغیر وابسته u داریم ، بنابراین $p = 2$ و $q = 1$ و $E = X \times U^{(2)}$ با صفر قرار دادن معادله داریم : $u_t - u_{xx} = 0$. بنابراین میدان برداری به صورت

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{۳۷.۲}$$

است. باید تمام ضرایب ممکن توابع ξ و τ و φ را بیابیم. چون $n = 2$ میدان برداری را تا مرتبه دوم امتداد می‌دهیم.

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

ضرایب φ^x و φ^t و φ^{xx} و φ^{xt} و φ^{tt} در میدان برداری را با ضرایب (۲.۲۸) و (۲.۲۹) و (۲.۳۰) برابر قرار داده و بدست می‌آوریم:

$$\varphi^t = \varphi^{xx}$$

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم و به جای u_{xx} از u_t استفاده می‌کنیم به جدول زیر می‌رسیم:

Monomial	Coefficient	
$u_x u_{xt}$	$0 = -2\tau_u$	(a)
u_{xt}	$0 = -2\tau_x$	(b)
u_{xx}^2	$-\tau_u = -\tau_u$	(c)
$u_x^2 u_{xx}$	$0 = -\tau_{uu}$	(d)
$u_x u_{xx}$	$-\xi_u = -2\tau_{xu} - 3\xi_u$	(e)
u_{xx}	$-\varphi_u - \tau_t = -\tau_{xx} + \varphi_u - 2\xi_x$	(f)
u_x^3	$0 = -\xi_{uu}$	(g)
u_x^2	$0 = \varphi_{uu} - 2\xi_{xu}$	(h)
u_x	$-\xi_t = 2\varphi_{xu} - \xi_{xx}$	(j)
۱	$\varphi_t = \varphi_{xx}$	(k)

به تحلیل این معادلات می‌پردازیم. در ابتدا از معادله (a) و (b) در می‌یابیم که τ تابعی است فقط از t. سپس (e) نشان می‌دهد که ξ به u بستگی ندارد. از (f) نتیجه می‌گیریم که $\tau = 2\xi_x$، بنابراین $\xi(x,t) = \frac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t)$ که σ تابعی است فقط از t. از (h) نتیجه می‌شود φ در u خطی است. بنابراین

$$\varphi(x,t,u) = \beta(x,t)u + \alpha(x,t)$$

که α و β تابع هستند. با (j) داریم $\xi_t = -2\beta_x$ و β به صورت زیر است:

$$\beta = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t)$$

سرانجام معادله آخر یعنی (k) نتیجه می‌دهد که α و β جواب‌های معادله حرارت هستند.

$$\alpha_t = \alpha_{xx}, \qquad \beta_t = \beta_{xx}.$$

با استفاده از فرم قبلی β داریم:

$$\tau_{ttt} = 0, \qquad \sigma_{tt} = 0, \qquad \rho_t = -\frac{1}{4}\tau_{tt}.$$

بنارابن τ نمایی است از t و σ در t خطی است و می‌توان ξ و φ را مستقیماً از ρ و σ و τ بدست آورد. بنابراین داریم:

$$\xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt,$$
$$\tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2,$$
$$\varphi = (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + \alpha(x,t)$$

که $c_1, \cdots, c_6$ ضرایب دلخواه و $\alpha(x,t)$ جواب دلخواهی از معادله حرارت است. جبر لی تقارن‌های بینهایت کوچک از معادله حرارت با شش میدان برداری زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x,$$
$$\mathbf{v}_2 = \partial_t,$$
$$\mathbf{v}_3 = u\partial_u,$$
$$\mathbf{v}_4 = x\partial_x + 2t\partial_t,$$
$$\mathbf{v}_5 = 2t\partial_x - xu\partial_u,$$
$$\mathbf{v}_6 = 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u,$$

و جبر لی با بعد متناهی

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(x,t)\partial_u$$

رابطه بین این میدان‌های برداری در جدول زیر آمده است که ردیف i و ستون j نمایانگر $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ است. که

$[,]$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_\alpha$
$\mathbf{v}_1$	0	0	0	$\mathbf{v}_1$	$-\mathbf{v}_3$	$2\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_{\alpha_x}$
$\mathbf{v}_2$	0	0	0	$2\mathbf{v}_2$	$2\mathbf{v}_1$	$4\mathbf{v}_4 - 2\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_{\alpha_t}$
$\mathbf{v}_3$	0	0	0	0	0	0	$-\mathbf{v}_\alpha$
$\mathbf{v}_4$	$-\mathbf{v}_1$	$-2\mathbf{v}_2$	0	0	$\mathbf{v}_5$	$2\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_{\alpha'}$
$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_3$	$-2\mathbf{v}_1$	0	$-\mathbf{v}_5$	0	0	$\mathbf{v}_{\alpha''}$
$\mathbf{v}_6$	$-2\mathbf{v}_5$	$2\mathbf{v}_3 - 4\mathbf{v}_4$	0	$-2\mathbf{v}_6$	0	0	$\mathbf{v}_{\alpha''}$
$\mathbf{v}_\alpha$	$-\mathbf{v}_{\alpha_x}$	$-\mathbf{v}_{\alpha_t}$	$\mathbf{v}_\alpha$	$-\mathbf{v}_{\alpha'}$	$-\mathbf{v}_{\alpha''}$	$-\mathbf{v}_{\alpha'''}$	0

$$\alpha' = x\alpha_x + 2t\alpha_t\,, \qquad \alpha'' = 2t\alpha_x + x\alpha\,,$$

$$\alpha''' = ۴tx\alpha_x + ۴t^۲\alpha_t + (x^۲ + ۲t)\alpha.$$

پس اگر $\alpha(x,t)$ جوابی از معادله حرارت باشد α_x و α_t این گونه نیز هستند و α' و α'' و α''' نیز در بالا معرفی شده‌اند . گروه‌های یک پارامتری G_i که به وسیله $\mathbf{v}_i$ تولید می‌شوند در جدول ذیل آمده‌اند که از تبدیل نقطه‌ای $\exp(x,t,u) = (\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u})$ بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
G_۱ :&\quad (x+\varepsilon, t, u) \\
G_۲ :&\quad (x, t+\varepsilon, u) \\
G_۳ :&\quad (x, t, ue^{\varepsilon}) \\
G_۴ :&\quad (xe^{\varepsilon}, te^{۲\varepsilon}, u) \\
G_۵ :&\quad (x + ۲\varepsilon t, t, u \cdot exp(-\varepsilon x - \varepsilon^۲ t)) \\
G_۶ :&\quad \left(\frac{x}{۱-۴\varepsilon t}, \frac{t}{۱-۴\varepsilon t}, u\sqrt{۱-۴\varepsilon t}; \exp\frac{-\varepsilon x^۲}{۱-۴\varepsilon t}\right) \\
G_\alpha :&\quad (x, t, u+\varepsilon\alpha(x,t))
\end{aligned} \tag{۳۸.۲}$$

برای مثال چند نمونه را حل می‌کنیم، مثلا برای $\mathbf{v}_۱$ داریم:

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = ۱ \Rightarrow dx = d\varepsilon \Rightarrow \int dx = \int d\varepsilon \Rightarrow x = \varepsilon + k$$

$$\alpha(\varepsilon) = (\varepsilon + k, t, u)$$

با شرط اولیه داریم:

$$\alpha(\circ) = (k, t, u) = (x, t, u) \Rightarrow x = k$$

پس

$$G_۱ =: (x+\varepsilon, t, u)$$

یا برای $\mathbf{v}_۳$ داریم:

$$\frac{du}{d\varepsilon} = u \Rightarrow \frac{du}{u} = d\varepsilon \Rightarrow \ln|u| = \varepsilon + k \Rightarrow u = e^{\varepsilon + k}$$

با شرط اولیه داریم:

$$\alpha(\circ) = (x,t,u) \Rightarrow \alpha(\varepsilon) = (x,t,e^{\varepsilon+k})|_{\varepsilon=\circ} = (x,t,e^k)$$

$$e^k = u \Rightarrow k = \ln|u| \Rightarrow e^{\varepsilon} \cdot e^{\ln|u|} = ue^{\varepsilon}$$

پس

$$G_۳ : (x, t, ue^{\varepsilon})$$

که هر G_i یک گروه تقارن است ، بنابراین اگر $u=f(x,t)$ جوابی از معادله حرارت باشد :

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= f(x-\varepsilon,t)\\
u^{(2)} &= f(x,t-\varepsilon)\\
u^{(3)} &= e^{\varepsilon}f(x,t)\\
u^{(4)} &= f(e^{-\varepsilon}x,e^{-2\varepsilon}t)\\
u^{(5)} &= e^{-\varepsilon x+\varepsilon^2 t}f(x-2\varepsilon t,t)\\
u^{(6)} &= \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}\exp\Big\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\Big\}f\Big(\frac{x}{1+4\varepsilon t},\frac{t}{1+4\varepsilon t}\Big)\\
u^{(\alpha)} &= f(x,t)+\varepsilon\alpha(x,t)
\end{aligned}$$

به عنوان مثال $u^{(1)}$ بدین صورت بدست می‌آید:

$$\bar{x}=x+\varepsilon\Rightarrow x=\bar{x}-\varepsilon\Rightarrow u^{(1)}=f(x-\varepsilon,t)$$

که ε یک عدد حقیقی و $\alpha(x,t)$ جوابی از معادله حرارت است.

یا برای G_4 داریم:

$$(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u})=(e^{\varepsilon}x,e^{2\varepsilon}t,u)$$

$$\tilde{x}=e^{\varepsilon}x\Rightarrow x=e^{-\varepsilon}\tilde{x}\qquad,\quad \tilde{t}=e^{2\varepsilon}t\Rightarrow t=e^{-2\varepsilon}\tilde{t}\qquad,\quad \tilde{u}=u$$

$$u=f(x,t)\Rightarrow u=f(e^{-\varepsilon}\tilde{x},e^{-2\varepsilon}\tilde{t})=f(e^{-\varepsilon}x,e^{-2\varepsilon}t)$$

گروه تقارن G_3 و G_α خطی بودن معادله حرارت را نشان می‌دهند . می‌توان جواب‌های دیگری با ضرب کردن این جواب‌ها در ثابت‌های دلخواه بدست آورد. گروه‌های G_1 و G_2 تغییرناپذیری فضا-زمان معادله حرارت را نشان می‌دهد . G_4 نوعی از تقارن و تجانس را نشان می‌دهد . G_5 نوعی حرکت گالیله‌ای را نشان می‌دهد و در آخر G_6 گروه موضعی از تبدیلات است.

اگر فرض کنیم $u=c$ یک جواب ثابت باشد، نتیجه می‌گیریم که تابع

$$u=\frac{c}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}\exp\Big\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\Big\}$$

نیز یک جواب است و اگر c را برابر $\sqrt{\varepsilon/\pi}$ قرار دهیم به جواب اصلی معادله حرارت در نقطه $(x_0,t_0)=(0,-1/4\varepsilon)$ خواهیم رسید. برای بدست آوردن جواب اصلی

$$u=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\{\frac{-x^2}{4t}\}$$

نیاز به تبدیل این جواب در t با استفاده از G_2 است. گروه یک پارامتری عمومی از تقارن‌ها با ترکیب خطی $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_6\mathbf{v}_6+\mathbf{v}_\alpha$ از میدان‌های برداری بدست می‌آید . فرمول ضمنی گروه تبدیلات بسیار

پیچیده است. بنابراین جواب عمومی بدست آمده از جواب داده شده $u=f(x,t)$ به شکل زیر است:

$$u=\frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon_6 t}}\exp\left\{\varepsilon_3-\frac{\varepsilon_5 x+\varepsilon_6 x^2-\varepsilon_5^2 t}{1+4\varepsilon_6 t}\right\}\times f\Big(\frac{e^{-\varepsilon_4}(x-2\varepsilon_5 t)}{1+4\varepsilon_6 t}-\varepsilon_1,\frac{e^{-2\varepsilon_4}t}{1+4\varepsilon_6 t}-\varepsilon_2\Big)$$
$$+\alpha(x,t)$$

مثال ۲.۶.۲. در این مثال معادله برگر را که یک معادله غیر خطی است مورد بررسی قرار می‌دهیم. این معادله به صورت زیر است:

$$u_t=u_{xx}+u_x^2 \qquad (۳۹.۲)$$

در این مرحله نسبت به x دیفرانسیل گرفته و $v=u_x$ قرار می‌دهیم و به فرم زیر می‌رسیم:

$$v_t=v_{xx}+2vv_x \qquad (۴۰.۲)$$

که این معادله ساده‌ترین معادله موج غیرخطی پراکنده را نشان می‌دهد که در علم فیزیک کاربرد بسیاری دارد. گروه تقارن (۳۹.۲) توسط میدان برداری (۳۷.۲) تولید می‌شود. با نوشتن امتداد مرتبه دوم (۳۹.۲) و برابر قرار دادن ضرایب ، ξ و τ و φ را بدست می‌آوریم که در شرط زیر باید صدق کند:

$$\varphi^t=\varphi^{xx}+2u_x\varphi^x \qquad (۴۱.۲)$$

که ضرایب φ^t و φ^x و φ^{xx} از امتداد مرتبه دوم را قبلا بدست آورده بودیم . در ضمن باید از جایگزینی $u_{xx}+u_x^2$ به جای u_t استفاده شود. در نتیجه به $\tau_u=\tau_x=0$ می‌رسیم که بیان می‌کند τ تابعی است فقط از t و از ضرایب u_xu_{xx} نتیجه می‌شود که ξ به u بستگی ندارد و از u_{xx} نتیجه می‌گیریم که $\tau_t=2\xi_x$ بنابراین $\xi(x,t)=\frac{1}{2}\tau_1 x+\sigma(t)$. ضرایب u_x^2 عبارت است از

$$\varphi_u-\tau_t=\varphi_{uu}+2\varphi_u-2\xi_x,$$

بنابراین

$$\varphi=\alpha(x,t)e^{-u}+\beta(x,t).$$

از ضرایب u_x به

$$\xi_t=-2\varphi_{xu}-2\varphi_x=-2\beta_x,$$

می‌رسیم ، بنابراین

$$\beta=-\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2-\frac{1}{2}\sigma_t x+\rho(t)$$

و

$$\varphi_t=\varphi_{xx}.$$

که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}
\xi &= c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt,\\
\tau &= c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2\\
\varphi &= \alpha(x,t)e^{-u} + c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2
\end{aligned}$$

که $c_1, \cdots, c_6$ ضرایب دلخواه هستند و $\alpha(x,t)$ جواب دلخواهی از معادله حرارت است: $\alpha_t = \alpha_{xx}$. بنابراین گروه تقارن توسط بردارهای زیر تولید می‌شود:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \partial_x,\\
\mathbf{v}_2 &= \partial_t,\\
\mathbf{v}_3 &= \partial_u,\\
\mathbf{v}_4 &= x\partial_x + 2t\partial_t,\\
\mathbf{v}_5 &= 2t\partial_x - x\partial_u,\\
\mathbf{v}_6 &= 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)\partial_u,\\
\mathbf{v}_\alpha &= \alpha(x,t)e^{-u}\partial_u,
\end{aligned} \tag{۴۲.۲}$$

اگر به جای u قرار دهیم $\omega = e^u$ ، از میدان‌های برداری $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_\alpha$ به میدان‌های برداری معادله حرارت می‌رسیم و بنابراین تناظری بین این میدان‌های برداری برقرار می‌شود. به علاوه با این جایگذاری (یعنی $\omega = e^u$) در معادله حرارت ، بدست می‌آید:

$$w_t = u_t e^u, \qquad w_{xx} = (u_{xx} + u_x^2)e^u,$$

بنابراین w در معادله حرارت صدق می‌کند !

$$w_t = w_{xx}$$

فصل ۳

فرم‌های دیفرانسیلی و گروه‌های تقارن

در این فصل سعی بر این است که با استفاده از فرم‌های دیفرانسیلی و مشتقات لی تقارن‌های معادلات دیفرانسیل را بدست آوریم. در این روش ،کلید بدست آوردن تقارن‌ها ، استفاده از مشتقات لی است. برای توضیح و بررسی این روش به مثال‌ها می‌پردازیم و سعی می‌کنیم با کمک مثال به بررسی این روش بپردازیم .
در این روش ابتدا مجموعه‌ای از معادلات جزئی را روی منیفلد M با n متغیر مستقل و m متغیر وابسته در نظر می‌گیریم.(معادلات دیفرانسیل معمولی حالت خاصی است که در آینده بیان خواهیم کرد.) با تعریف مشتق جزئی از متغیرهای وابسته به عنوان متغیرهای جدید (امتداد) در تعداد کافی ، دستگاه را به دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل می‌کنیم . بنابراین منیفلد M به منیفلد M' بسط داده خواهد شد بنابراین می‌توان این دستگاه را بصورت فرم‌های دیفرانسیلی نوشت . در نظر داشته باشید که مجموعه این فرم‌ها ، معادلاتی را نشان می‌دهند که در ایده‌آل بسته I قرار دارند (بسته بودن نسبت به مشتقات لی است). به دستگاه معادله اصلی با دو عملگر می‌رسیم : با صرف نظر کردن از متغیرهای وابسته به عنوان تابعی از متغیرهای مستقل به زیر منیفلد مختص شده می‌رسیم (بخش بندی) و نگاشت پس کشنده فرم‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم (خنثی کردن) . نتیجه معادلات ، دستگاه اصلی از معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول است و زیر منیفلد جواب است.(تمام معادلات موضعی هستند و تمام منیفلد ها را هموار در نظر می‌گیریم)
مشتقات لی اشیای هندسی ، مثل تانسورها، به تقارن‌های این اشیا وابسته‌اند بنابراین اگر مشتق لی صفر شود بردار $\mathbf{v}$ که نشان دهنده‌ی جهت تبدیلات متقارن بینهایت کوچک در منیفلد است هم صفر می‌شود. از آن جایی که یک فرم دیفرانسیلی نوعی تانسور است دارای مشتق لی است و می‌توان مشتق لی این فرم‌ها را در ایده‌آل I ساخت که با $\pounds$ نمایش داده می‌شود. صفر قرار دادن مشتق لی فرم‌های دیفرانسیلی ، تقارن‌ها را نشان می‌دهد مگر این‌که تبدیلات بینهایت کوچک خارج از متغیرهای اصلی ساخته شده باشد که در این صورت باید فرم‌های جدید معادلات دیفرانسیل برابر صفر قرار داده شود . به عبارت دیگر ما مشتقات لی فرم‌ها در I را بصورت ترکیب خطی از خود فرم‌ها می‌نویسیم و برابر صفر قرار می‌دهیم ، پس مشتقات لی برابر صفر می‌شوند یعنی $\pounds_{\mathbf{v}} I = \circ \pmod I$ یا

$$\pounds_{\mathbf{v}} I \subset I \tag{۱.۳}$$

معادله (۱.۳) شامل تعدادی ضرایب لاگرانژ است که در فرم‌ها به صورت ترکیب خطی هستند و این ضرایب قابل حذف هستند . پس در نهایت دستگاه معادلات خطی همگن مرتبه اول از $\mathbf{v}$ در منیفلد M' باقی می‌ماند که مولدهای تقارنی هستند . این معادلات ، معادلات مشخصه برای تقارن‌های اصلی دستگاه معادلات دیفرانسیلی هستند که به عنوان تبدیلات نقطه‌ای در M' قرار می‌گیرند . در این دستگاه ، مشتقات $\mathbf{v}$ (مولدها) نسبت به دو متغیر وابسته و متغیرهای مستقل هستند و فرض می‌کنیم مولدهای متغیرهای مستقل (که با ξ و η نشان داده می‌شوند.) توابعی فقط از متغیرهای مستقل هستند.

۱.۳ مشتقات لی فرم‌های دیفرانسیلی

در ابتدا خواص ساده فرم‌های دیفرانسیلی را نشان می‌دهیم.

۱: مشتق گیری لی حافظ رتبه یک فرم است.

۲: مشتق لی در یک مختصات ، ساده‌ترین مولفه‌ی $\mathbf{v}$ در آن جهت است.

$$\pounds_{\mathbf{v}} x^i = v^i$$

۳: مشتق لی یک تابع در M' (صفر-فرم) ساده‌ترین مشتق جهتی آن است.

$$\pounds_{\mathbf{v}} f = \mathbf{v}(f) = v^i f_{,i}.$$

کاما نشان‌دهنده‌ی مشتقات جزئی است و زمانی که منظور ما واضح باشد آن را بکار نمی‌بریم.

۴: مشتق لی ضرب وج (گوه‌ای) دو فرم دلخواه از قاعده لایپ‌نیتز پیروی می‌کند(زیرنویس $\mathbf{v}$ هرجا ضروری نباشد نوشته نمی‌شود.)

$$\pounds(\alpha \wedge \beta) = (\pounds\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\pounds\beta)$$

۵: مشتق خارجی d و مشتق لی $\pounds$ جابجا می‌شوند . به ویژه

$$\pounds_{\mathbf{v}} dx^i = d(\pounds_{\mathbf{v}} x^i) = dv^i$$

۲.۳ معادله یک بعدی دما

معادله یک بعدی دما را به صورت

$$u_{xx} = u_t \tag{۲.۳}$$

است . در دستگاه معادلات مرتبه اول متغیر جدید ω را تعریف می‌کنیم:

$$u_x = \omega, \qquad \omega_x = u_t \tag{۳.۳}$$

متغیرها x و t و u و ω هستند. چون دو متغیر مستقل داریم از ۲-فرم‌ها استفاده می‌کنیم و آن‌ها را می‌سازیم:

$$\alpha = du \wedge dt - \omega dx \wedge dt \tag{۴.۳}$$

$$\beta = d\omega \wedge dt + du \wedge dx$$

اگر این فرم‌ها را بخش‌بندی کنیم (به زیر منیفلد $(u = u(x,t), \omega = \omega(x,t)$) بدست می‌آوریم:

$$\alpha = (u_x dx + u_t dt) \wedge dt - \omega dx \wedge dt = (u_x - \omega) dx \wedge dt$$

و

$$\beta = (\omega_x dx + \omega_t dt) \wedge dt + (u_x dx + u_t dt) \wedge dx = (\omega_x - u_t) dx \wedge dt.$$

که از خاصیت پادتقارنی ۱-فرم‌ها استفاده کردیم. اگر فرم‌ها را برابر صفر قرار دهیم معادلات (۳.۳) بدست می‌آیند که دستگاه معادلات مرتبه اول اصلی را تشکیل می‌دهند . فرم‌های α و β در معادلات (۴.۳) ایده‌آل I از فرم‌های معادله حرارت (۲.۳) را تشکیل می‌دهند. توجه کنید که I یکتا نیست ، می‌توان معادله حرارت را با تعریف $z = u_t$ و ساختن ایده‌آل I' با ۱-فرم

$$\gamma = -du + \omega dx + z dt,$$

نشان داد که مشتق خارجی‌اش به صورت زیر است :

$$d\gamma = d\omega \wedge dx + dz \wedge dt,$$

است و همچنین ۲-فرم زیر را داریم :

$$\delta = d\omega \wedge dt - z dx \wedge dt.$$

توجه کنید که:

$$\alpha = -\gamma \wedge dt, \qquad \beta = \delta - \gamma \wedge dx.$$

در ابتدا در ایده‌آل I کار می‌کنیم. مشتق لی α و β را به صورت ترکیب خطی از خودشان می‌نویسیم ، مشتقات لی را با استفاده از قواعد بالا بسط می‌دهیم و از نوشتن ضرب وج و زیرنویس $\mathbf{v}$ در $\pounds$ پرهیز می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\pounds\alpha &= \pounds(dudt - \omega dxdt) \\
&= (\pounds du)dt + du(\pounds dt) - (\pounds\omega)dxdt - \omega(\pounds dx)dt - \omega dx(\pounds dt) \\
&= dv^u dt + du dv^t - v^\omega dxdt - \omega dv^x dt - \omega dx dv^t \\
&= \lambda_۱(dudt - \omega dxdt) + \lambda_۲(d\omega dt + dudx)
\end{aligned}$$

λ_i ها صفر-فرم(توابع) هستند. dv^i را توسط قاعده‌ی زنجیره‌ای معمولی بسط می‌دهیم چون v^i ها توابع در M' هستند. از همه چهار متغیر استفاده می‌کنیم چون $dtdt = ۰$ داریم:

$$\begin{aligned}
&(v^u_{,u} du + v^u_{,x} dx + v^u_{,\omega} d\omega)dt + du(v^t_{,t} dt + v^t_{,x} dx + v^x_{,\omega} d\omega) \\
&- v^\omega dxdt - \omega(v^x_{,x} dx + v^x_{,u} du + v^x_{,\omega} d\omega)dt \\
&- \omega dx(v^t_{,t} dt + v^t_{,u} du + v^t_{,\omega} d\omega) \\
&= \lambda_۱(dudt - \omega dxdt) + \lambda_۲(d\omega dt + dudx).
\end{aligned}$$

$۶ = \frac{۴!}{۲!۲!}$ ، ۲-فرم پایه $(dxdt, dxdu, dxd\omega, dtdu, dtd\omega, dud\omega)$ وجود دارد . ضرایب این ۲-فرم‌ها را برابر هم قرار داده بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&\upsilon^u_{,x} - \upsilon^\omega - \omega(\upsilon^x_{,x} + \upsilon^t_{,t}) = -\omega\lambda_۱,\\
&-\upsilon^t_{,x} - \omega\upsilon^t_{,u} = -\lambda_۲,\\
&-\omega\upsilon^t_{,\omega} = ۰,\\
&-\upsilon^u_{,u} - \upsilon^t_{,t} + \omega\upsilon^x_{,u} = -\lambda_۱,\\
&-\upsilon^u_{,\omega} + \omega\upsilon^x_{,\omega} = -\lambda_۲\\
&\upsilon^t_{,\omega} = ۰
\end{aligned}$$

حذف ضرایب لاگرانژ λ_i نیمی از معادلات مشخصه را بدست می‌دهد:

$$\begin{aligned}
&\upsilon^t_{,\omega} = ۰,\\
&\upsilon^t_{,x} + \omega\upsilon^t_{,u} = \upsilon^u_{,\omega} - \omega\upsilon^x_{,\omega},\\
&\upsilon^u_{,x} - \upsilon^\omega - \omega\upsilon^x_{,x} = -\omega\upsilon^u_{,u} + \omega^۲\upsilon^x_{,u}
\end{aligned}$$

بسط $\pounds\beta$ نیمه دیگر معادلات را به ما می‌دهد . با نگاهی اجمالی در می‌یابیم که υ^t تابعی فقط از t است و υ^x تابعی است از x, t.

exp تبدیلات از قرار دادن $\upsilon \cdot \gamma = ۰$ بدست می‌آید . حالا در M' ، پنج متغیر x, t, u, ω, z وجود دارد. در I' فقط یک ۱-فرم γ وجود دارد و همچنین معادلات مشتقات لی به شکل ساده زیر است:

$$\pounds\gamma = \lambda\gamma \tag{۵.۳}$$

که λ ضریب است . مشتق لی را می‌توان با استفاده از فرم ω و عملگر انقباض بسط داد.

$$\pounds_{\mathbf{v}}\omega = d(\mathbf{v}\cdot\omega) + \mathbf{v}\cdot d\omega. \tag{۶.۳}$$

قرار دهید $F = \mathbf{v}\cdot\gamma$ که یک تابع است . معادله (۵.۳) را با استفاده از (۶.۳) بسط می‌دهیم که $(\omega = \gamma)$ و انقباض را مشخص می‌کنیم . $\mathbf{v}\cdot(dxdy) = \upsilon^x dy - \upsilon^y dx$ داریم:

$$F = -\upsilon^u + \omega\upsilon^x + z\upsilon^t \tag{۷.۳}$$

و

$$\begin{aligned}
\pounds_{\mathbf{v}}\gamma &= dF + \upsilon^\omega dx - \upsilon^x d\omega + \upsilon^z dt - \upsilon^t dz\\
&= \lambda\gamma = \lambda(-du + \omega dx + zdt).
\end{aligned}$$

dF را با استفاده از قاعده زنجیره‌ای بسط می‌دهیم، ضرایب را برابر هم قرار می‌دهیم ، λ را حذف کرده و با استفاده از (۷.۳) همه‌ی مولدهای $\mathbf{v}^i$ را در F و مشتقاتش بدست می‌آوریم (زیرنویس‌های F مشتقات هستند.)

$$\upsilon^x = F_\omega, \qquad \upsilon^t = F_z, \qquad \upsilon^u = -F + \omega F_\omega + zF_z,$$
$$\upsilon^\omega = -F_x - \omega F_u, \qquad \upsilon^z = -F_t - zF_u.$$

مشتق خارجی معادله (۵.۳) برابر است:

$$d(\pounds\gamma) = \pounds(d\gamma) = d\gamma \wedge \gamma + \gamma d\gamma$$

بنابراین مشتق $d\gamma$ در ایده‌آل قرار می‌گیرد. بنابراین یک معادله در طرف چپ قرار می‌گیرد:

$$\pounds\gamma = \lambda_1\gamma + \lambda_1 d\gamma + \tau \wedge \gamma$$

که λ_i ، صفر-فرم است و τ یک ۱-فرم دلخواه با پنج متغیر است ، du در τ می‌تواند با جایگزینی فرم γ حذف شود. این روش همچنین معادلات مشخصه استاندارد را بدست می‌دهد.

۳.۳ معادله خطی بولتزمن

معادله مورد نظر معادله $u_{xt} + u_x + u^2 = 0$ است. ایده‌آل ممکن I' با پنج متغیر $x, t, u, p = u_x$ $q = u_t$ است:

$$\alpha = du - pdx - qdt,$$
$$d\alpha = -dpdx - dqdt,$$
$$\beta = -dtdq + (p + u^2)dxdt$$

یا I با چهار متغیر x, t, u, p است:

$$\gamma = dudt - pdxdt,$$
$$\delta = dpdx + (p + u^2)dtdx.$$

محاسبات کاملا شبیه معادله حرارت است ، چهار مولد وجود دارد.

۴.۳ معادله خلأ ماکسول

معادله خلا ماکسول به شکل زیر است:

$$\nabla\cdot E=0,\qquad \nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}.$$
$$\nabla\cdot B=0,\qquad \nabla\times B=\frac{1}{C^2}\frac{\partial E}{\partial t}.$$

که در آن E میدان الکتریکی و B میدان مغناطیسی و t زمان و C سرعت نور است. ۳-فرم‌هایی که در معادلات خلا ماکسول وجود دارند در مختصات مستطیلی هستند و زیرنویس و اندیس مولفه‌ها را نشان می‌دهد.

$$\alpha=dE_xdxdt+dE_ydydt+dE_zdzdt+dB_xdydz+dB_ydzdx+dB_zdxdy,$$
$$\beta=dB_xdxdt+dB_ydydt+dB_zdzdt-dE_xdydz-dE_ydzdt-dE_zdxdy.$$

این فرم‌ها را با تعریف $\gamma=\alpha+i\beta$ و $(A,B,C)=(E_k+iB_k)=h$ ساده می‌کنیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\gamma=dh\cdot(drdt-(\frac{1}{2})idr\times dr)$$

یا

$$\gamma=dA(dxdt-idydz)+dB(dydt-idzdx)+dC(dzdt-idxdy) \qquad (۸.۳)$$

که * نشان‌دهنده‌ی ترکیب توام است. متغیرها $t,x,y,z,A,B,C,A^*,B^*,C^*$ هستند. مولدها در مختصات t,x,y,z حقیقی هستند و معادلات برای مشتقات جزئی بصورت زیر است :

$$\pounds\gamma=\lambda\gamma+\mu\gamma^*$$

در اینجا از معادله (۸.۳) برای γ بهره می‌گیریم و با ۳- فرم‌ها در ده متغیر کار می‌کنیم .
بنابراین $۱۲۰=\frac{10!}{7!3!}$ ، ۳-فرم پایه مختلف وجود دارد و چون دو معادله برای $\pounds\gamma$ و $\pounds\gamma^*$ وجود دارد بنابراین ۲۴۰ معادله خواهیم داشت که ۱۲۰ تای آنها بسادگی ترکیب توامند. پس کافی است معادلات $\pounds\gamma$ را بیابیم .

۵.۳ معادله غیر خطی پواسن

معادله پواسن به شکل زیر است:

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f(u),$$

که $f(u)$ تابعی نامشخص است . اندیس‌ها مشتقات را نشان می‌دهد . ما $r = u_x$ و $s = u_y$ و $t = u_z$ را تعریف می‌کنیم. بنابراین

$$r_x + s_y + t_z = f(u).$$

ایده‌آل I شامل این فرم‌هاست :

$$\alpha = -du + rdx + sdy + tdz,$$
$$d\alpha = drdx + dsdy + dtdz,$$
$$\beta = drdydz + dsdzdx + dtdxdy - f(u)dxdydz.$$

که هفت متغیر وجود دارد .

۶.۳ معادله دیفرانسیل معمولی

معادله $y'' = f(x, y, y')$ را داریم که $'$ نشان‌دهنده‌ی مشتق نسبت به x است. قرار می‌دهیم $z = y'$ و دو ۱-فرم زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\alpha = dy - zdx,$$
$$\beta = dz - f(x, y, z)dx$$

سه متغیر وجود دارد . معادله مشتق لی برای α به صورت زیر است:

$$\pounds\alpha = dv^y - v^z dx - zdv^x = \lambda_1(dy - zdx) + \lambda_2(dz - fdx)$$

سه معادله برای dx و dy و dz وجود دارد . حذف ضرایب ، تنها یک معادله می‌دهد که نمایی از v^z است. معادله مشتق لی برای β ، تنها یک معادله می‌دهد. فرض کنیم مولدهای v^x و v^y (که معمولاً با ξ و η نشان داده می‌شوند.) توابعی فقط از x و y هستند ، در این حالت v^z مولد توسعه یافته معمولی برای $z = y'$ است و معادله باقیمانده ، معادله مشخصه معمولی برای ξ و η است.

۷.۳ معادله کورتج-دورس

تقارن‌های معادلات دیفرانسیل یکی از مهمترین مفاهیم در نظریه معادلات دیفرانسیل و فیزیک است . یکی از مهمترین معادلات ، معادله KdV [۱] است که در مایعات با عمق کم کاربرد دارد.در این قسمت روش

[۱] Kortwege-deVries

خاصی برای یافتن تقارن‌های معادله KdV شرح می‌دهیم که روش هریسون[۲] نامیده می‌شود. مانند قبل ابزار کار ما مشتقات لی و فرم‌های دیفرانسیلی هستند.
روش‌های گوناگونی برای یافتن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل وجود دارد . یکی از مهمترین این روش‌ها روش مشتق لی است . در این روش به ابزارهای پایه مانند نظریه گروه‌های لی ، امتداد دادن و ... نیازمند هستیم که شالوده نظریه لی از گروه‌های تقارن معادلات دیفرانسیل است. روش هریسون روش دیگری است که به موارد گفته شده نیازی ندارد و وابسته نیست. ما قصد داریم این روش را روی معادله KdV شرح دهیم و نتیجه را با روش لی مقایسه نماییم.

۸.۳ روش هریسون

این روش بدین صورت است : در ابتدا یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی که روی منیفلد E با p متغیر مستقل و q متغیر وابسته تعریف شده است ، در نظر می‌گیریم. در اینجا فرض می‌کنیم $p = ۲$ و $q = ۱$ است . مشتقات جزیی متغیرهای وابسته را به عنوان متغیرهای جدید (امتداد دادن) در تعداد کافی تعریف می‌کنیم تا معادله تبدیل به معادله مرتبه دوم شود. سپس می‌توان یک دستگاه فرم‌های دیفرانسیلی ساخت. ما از دستگاه فرم‌ها صحبت می‌کنیم که نمایانگر معادلات به عنوان ایده‌آل بسته I است. در اینجا مشتق لی یک فرم نسبت به میدان برداری نقش مهمی بازی می‌کند .

۱.۸.۳ ساختن فرم‌های دیفرانسیلی

در ابتدا w را بجای u_x قرار می‌دهیم . بنابراین معادله KdV $(u_{xxx} + uu_x + u_t = ۰)$ به معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم زیر تبدیل می‌شود:

$$w_{xx} + uw + u_t = ۰ \tag{۹.۳}$$

فضای جت متناظر با معادله (۹.۳) منیفلد ۸-بعدی با مختصات $(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx})$ است . متناظر با این معادله ۱-فرم‌های برخوردی زیر را داریم:

$$\theta^{۱} = du - u_x dt - u_x dx,$$

$$\theta^{۲} = du_t - u_{tt} dt - u_{tx} dx,$$

$$\theta^{۳} = du_x - u_{tx} dt - u_{xx} dx.$$

[۲] B.Kent Harrison

در نتیجه فرم‌های باز سازی شده به صورت زیر هستند:

$$\alpha^1 = \theta^1 \wedge \theta^2 = (u_x u_{tt} - u_t u_{tx}) dx \wedge dt + u_{tx} dx \wedge du - u_x dx \wedge du_t$$
$$+ u_{tt} dt \wedge du - u_t dt \wedge du_t + du \wedge du_t,$$
$$\alpha^2 = \theta^1 \wedge \theta^3 = (u_x u_{tx} - u_t u_{xx}) dx \wedge dt + u_{xx} dx \wedge du - u_x dx \wedge du_x$$
$$+ u_{tx} dt \wedge du - u_t dt \wedge du_x + du \wedge du_x,$$

$$\alpha^3 = \theta^2 \wedge \theta^3 = (u_{tx}^2 - u_{tt} u_{xx}) dx \wedge dt + u_{xx} dx \wedge du_t - u_{tx} dx \wedge du_x$$
$$+ u_{tx} dt \wedge du_t - u_{tt} dt \wedge du_x + du_t \wedge du_x,$$
$$\alpha^4 = d\theta^1 = dx \wedge du_x + dt \wedge du_t,$$
$$\alpha^5 = d\theta^2 = dx \wedge du_{tx} + dt \wedge du_{tt},$$
$$\alpha^6 = d\theta^3 = dx \wedge du_{xx} + dt \wedge du_{tx},$$
$$\alpha^7 = u dt \wedge du - dt \wedge du_{xx} - dx \wedge du.$$

میدان برداری $\mathbf{v}$ را روی فضای جت فرض شده به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{v} = A_1 \frac{\partial}{\partial t} + A_2 \frac{\partial}{\partial x} + A_3 \frac{\partial}{\partial u} + A_4 \frac{\partial}{\partial u_t} + A_5 \frac{\partial}{\partial u_x} + A_6 \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + A_7 \frac{\partial}{\partial u_{tx}} + A_8 \frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

که A_i ها $i = 1, \cdots, 8$ توابع هموار از $(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx})$هستند.

مرحله بعدی حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی عظیم زیر است:

$$\pounds_{\mathbf{v}} \alpha^i = \lambda_i \alpha^i, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{۱۰.۳}$$

که λ_i ها توابع هموار هستند. سیستم (۱۰.۳) فرم زیر را داراست :

$$- \Big(\frac{\partial}{\partial u_{tt}} A_3\Big) + \cdots + \Big(\frac{\partial}{\partial u_{xx}} A_1\Big) u_{tx}^2 = 0$$
$$- u\Big(\frac{\partial}{\partial u_{xx}} A_2\Big) u_x u_{tx} + \cdots - \Big(\frac{\partial}{\partial u_x} A_5\Big) u_{tx} = 0,$$
$$\vdots$$
$$- \Big(\frac{\partial}{\partial t} A_2\Big) + \cdots - \Big(\frac{\partial}{\partial u_{xx}} A_7\Big) = 0,$$
$$- \Big(\frac{\partial}{\partial u_{xx}} A_4\Big) + \cdots + \Big(\frac{\partial}{\partial u_{tx}} A_2\Big) u_{tx} = 0.$$

بعد از حل این دستگاه نسبت به $A_1, \cdots, A_8$ داریم :

$$A_1 = c_1 t + c_2, \qquad A_2 = c_1 \frac{x}{3} + c_3 t + c_4, \qquad A_3 = -2 c_1 \frac{u}{3} + c_3,$$

$$A_4 = -c_3 u_x - 5c_1 \frac{u_t}{3}, \qquad A_5 = c_1 u_x, \qquad A_6 = -2c_3 u_{tx} - 8c_1 \frac{u_{tt}}{3},$$
$$A_7 = -c_3 u_{xx} - 2c_1 u_{tx}, \qquad A_8 = -4c_1 \frac{u_{xx}}{3},$$

که c_1 و c_2 و c_3 و c_4 ثابت‌های دلخواه هستند ، بنابراین

$$\mathbf{v} = (c_1 t + c_2)\frac{\partial}{\partial t} + (\frac{c_1}{3}x + c_3 t + c_4)\frac{\partial}{\partial x} + (c_3 - \frac{2c_1}{3}u)\frac{\partial}{\partial u} - (c_3 u_x + \frac{5c_1}{3}u_t)\frac{\partial}{\partial u_t}$$
$$- c_1 u_x \frac{\partial}{\partial u_x} - (2c_3 u_{tx} + \frac{8c_1}{3}u_{tt})\frac{\partial}{\partial u_{tt}} - (c_3 u_{xx} + 2c_1 u_{tx})\frac{\partial}{\partial u_{tx}} - \frac{4c_1}{3}u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

ما ادعا می‌کنیم چهار میدان برداری که از $\mathbf{v}$ ساخته خواهد شد ، گروه تقارن چهار بعدی برای معادله KdV را می‌سازد که می‌توان از روش لی نیز آن را بدست آورد.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x},\\
\mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial t},\\
\mathbf{v}_3 &= t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} - u_x\frac{\partial}{\partial u_t} - 2u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} - u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{tx}},\\
\mathbf{v}_4 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - 5u_t\frac{\partial}{\partial u_t} - 3u_x\frac{\partial}{\partial u_x}\\
&\quad - 8u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} - 6u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_{tx}} - 4u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.
\end{aligned}$$

ابتدا باید نشان دهیم که مجموعه چهار میدان برداری $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ ساختار جبر لی را دارد و برای این کار کافی است نشان دهیم که $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ در فضای برداری ساخته شده توسط $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ قرار می‌گیرد که $[\,,]$ کروشه لی میدان برداری است . بنابراین داریم:

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = 0, \quad [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3] = 0, \quad [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4] = \mathbf{v}_1,$$
$$[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \mathbf{v}_1, \quad [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4] = 3\mathbf{v}_2, \quad [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] = -2\mathbf{v}_3,$$

اگر نقاط را با میدان‌های برداری

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial t},$$
$$X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u},$$

برچسب گذاری کنیم به راحتی می‌بینیم که امتداد مرتبه سوم X_1 و X_2 و X_3 و X_4 معادله KdV را صفر خواهد کرد . ($X_i^{(3)}(u_{xxx} + uu_x + u_t = 0)$ که $i = 1, 2, 3, 4$ و $X_i^{(3)}$ امتداد مرتبه سوم X_i است بنابراین $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ یک دستگاه از گروه تقارن چهار بعدی معادله KdV را می‌سازد. لازم به ذکر است که چهار میدان برداری پیدا شده $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ و $\mathbf{v}_4$ امتداد مرتبه دوم از X_1 و X_2 و X_3 و X_4 است چرا که در ابتدای این بخش مرتبه معادله را به دو کاهش دادیم.

۹.۳ یادداشت

با توجه به مطالب ذکر شده در می‌یابیم که داشتن جواب‌ها در تحلیل مسایل بسیار پر اهمیت است اما بدست آوردن کلیه جواب‌ها راه‌های مختلفی دارد در روش میدان برداری گاهی تشکیل جدول و تحلیل آن و در نهایت رسیدن به گروه‌های تقارن بسیار پیچیده می‌شود ، البته در اینگونه موارد می‌توان از نرم‌افزارهای کمکی نظیر Maple بهره گرفت اما می‌توان از روش فرم‌های دیفرانسیلی استفاده کرد . برتری این روش استفاده نکردن از φ^x هاست که منجر به محاسبات بسیار طولانی و گیج کننده نمی‌شود ، اما در این روش هم گاهی بدست آوردن مشتقات لی بسیار پیچیده می‌شود که در این مورد نیز Maple کمک کننده است . روش هریسون نیز با استفاده از میدان‌های برداری و همچنین مشتقات لی روشی تلفیقی است که در موارد بسیار کاربرد دارد.

مراجع

[1] B.Kent Harrison, F.B.Estabrook,Geometric Approach to Invariance Groups and Solution of Partial Differential System,*J.Math.Phys.*, 1971,V.12,653-666.

[2] B.Kent Harrison,The Differential Form Method for Finding Symmetries,*SIGMA*,Vol.1(2005),Paper 001,12 pages

[3] Bluman, G.W., and Kumei, S., *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag, New York ,1989

[4] Bluman G.W., Cole j.D.,*The general similarity solution of the heat equation*, J.Math.Mech., 1969,V.18,1025-1042.

[5] G.W.Bluman, and S.Kumei,Symmetries and Differential equations,*Springer Verlage*, New York,1989.

[6] Harrison B.K. ,Estabrook F.B. ,*Geometric approach to invariance groups and solution of partial differential systems*, J.Math. Phys., 1971.

[7] I.M Anderson.N.Kamran,P.J.Olver,Internal,External and Generalized Symmetries A*dv. in Math.*,

[8] Kersten P.H.M. ,Gragert P.K.H. , *The Lie algebra of infinitesimal symmetries of nonlinear diffusion equation*, J.Phys.A: Math. Gen., 1983, V.16,L685-L688.

[9] Kersten P.H.M. , *Infinitesimal symmetries: a computational approach, Ph.D. Thesis,* Twente University of Technology, Enschede, The Netherlands,1985.

[10] Kersten P.H.M. , *Software to compute infinitesimal symmetries of exterior differential systems , with applications* , Acta Appl. Math. ,1989 , V.16, 207-229.

[11] Langton B.T.,*Lie symmetry techniques for exact interior solution of Einstein field equations for axially symmetric , stationary , rigidly rotating perfect fluids , Ph.D* . Thesis , University of Sydney,Australia,1997.

[12] Lee, John M., *Introduction to smooth manifolds*, Springer, Washington, 2002.

[13] Lee, John M., *Riemannian Manifolds*, in: an introduction to curvature, Graduate Texts in Mathematics, vol. 176, Springer-Verlag, New York, 1997.

[14] Miller, W., Jr., *Symmetry Groups and their Applications*, Academic Press, New York, 1972.

[15] Neilsen D.W.,*A search for an interior solution in general relativity using Lie-Backlund symmetries, M.S.*Thesis, Provo(Utah.USA), Brigham Young University, 1995

[16] N.H.Ibragimov,Group Analysis of Ordinary Differential Equations and the Invariance Principle in Mathematical Physics,*(for teh 150th anniversary of Sophus Lie) , Russian Math,Surveys* 47:4(1992).

[17] Olver, P.J., *Equivalence, Invariants, and Symmetry*, University of Minnesota, 1995.

[18] Ozer S., Suhubi E.S., *Equivalence transformations for first order balance equation*, Internat. J. Engrg.Sci.,2004,V.42,1305-1324.

[19] Pakdemirli M.,Suhubi E.S., *Similarity solutions of boundary-layer equations for second-order fluids*, Internat. J. Engrg.Sci., 1992,V.30,611-629.

[20] P.J.Olver,Applications of Lie Groups to Differential equations,Second Edition,*GTM*, Vol.107,Springer Verlage, New York,1993.

[21] P.J Olver, Equivalence,Invariant and Symmetry,*Cambridge University Press*, Cambridge 1995.

[22] Pontrijagin, L., *Topological Groups*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.,1946.

[23] Steeb W.H.,*Symmetries and vacuum Maxwell's equations*, J.Math.Phys.,1980,V.21,1656-1680.

[24] Stephani H., Differential equations. *Their solution using symmetries*, Cambridge,Cambridge University Press,1989,28.

[25] V.L.Arnold,Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential equations,*Springer Verlage*,New York,1983.

[26] Waller S.M.,*Invariant group similarity solution for a class of reaction-diffusion-equations*, Phys.Scripta,1990, V.42,385-388.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اتحاد ژاکوبی	Jacobi Identity
آزاد	Freely
اساسی	Fundamental
اطلس	Atlas
افقی	Horizontal
اکیدا	Strictly
امتداد دادن	Prolongation
انتقال	Translation
ایده‌آل	Ideal
یکریختی	Isomorphism
بردار مماس	Tangent Vector
برش	Section
برش موضعی	Local Section
برگر	Burger
بعد	Dimension
بولتزمن	Boltzmann
بیانچی	Bianchi

پاد متقارن .... Anti symmetry

پایدار ساز .... Isotropy

پایه .... Basis

پس کشنده .... Pull Back

پواسن .... Poisson

پیش برنده .... Push Forward

پیوسته .... Continuos

تبدیل .... Transformation

تجانس .... Scale

جبر لی .... Lie Algebra

چارت مختصاتی .... Coordinate Chart

حقیقی مقدار .... Real-Valued

خم .... Curve

خمیدگی .... Curvature

دو خطی .... Bilinearity

دوگان .... Dual

دیفرانسیل کامل .... Total Differential

دیفئومورفیسم .... Diffeomorphism

دیفئومورفیسم موضعی .... Locally Diffeomorphism

رتبه .... Rank

شمارای نوع دوم .... Second Countable

عملگر .... Operator

عملگر خطی .... Linear Operation

عمودی .... Vertical

فرم برخوردی .... Contact form

فرم دیفرانسیلی .... Differential Form

فشرده .... Compact

فضای برداری .... Vector Space

فضای توپولوژیک .... Topological space

فضای افشانه .... Jet Space

فضای مماس .... Tangent Space

فضای هم مماس .... Cotangent Space

شار .... Flow

کارتان .... Cartan

کاهش .... Reduction

کروشه‌ی لی .... Lie Bracket

کلاف .... Bundle

کلاف مماس .... Tangent Bundle

گروه تقارن .... Symmetry Group

گروه لی .... Lie Group

لی .... Lie

ماکسول .... Maxwell

متعدی .... Transitive

مدار .... Orbit

مستقل .... Independent

مشتق .... Derivative

مشتق کامل .... Total Derivative

مشتق لی .... Lie Derivative

مشخصه .... Characteristic

معادله دیفرانسیل .... Differential Equation

معکوس .... Inverse

منحنی انتگرال .... Integral Curve

منظم .... Regular

منیفلد توپولوژیکی .... Topological Manifold

موثر .... Effective

موضعی .... Local

موضعاً اقلیدسی .... Locally Euclidean

مولد بی‌نهایت کوچک .... Infinitesimal Generator

میدان برداری .... Vector Field

نگاشت پوشای هموار .... Smooth Covering Map

نگاشت گذر .... Transition Map

نیم-منظم .... Semi-Regular

ناوردای دیفرانسیلی .... Differential Invariant

نگاشت نمایی .... Exponential Map

وابسته .... Dependent

هاسدورف .... Hausdorff

همبند .... Connect

همسانریختی .... Homeomorphism

هموار .... Smooth

هموار سازگار .... Smoothly Compatible

یکنوایی .... Monotonic

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Anti symmetry	پاد متقارن
Atlas	اطلس
Basis	پایه
Bianchi	بیانچی
Bilinearity	دو خطی
Boltzmann	بولتزمن
Bundle	کلاف
Burger	برگر
Cartan	کارتان
Characteristic	مشخصه
Compact	فشرده
Contact Form	فرم برخوردی
Connect	همبند
Continuos	پیوسته
Coordinate Chart	چارت مختصاتی
Cotangent Space	فضای هم مماس
Curve	خم

خمیدگی .... Curvature

وابسته .... Dependent

مشتق .... Derivative

دیفئومورفیسم .... Diffeomorphism

معادله دیفرانسیل .... Differential Equation

فرم دیفرانسیلی .... Differential Form

ناوردای دیفرانسیلی .... Differential Invariant

بعد .... Dimension

دوگان .... Dual

موثر .... Effective

نگاشت نمایی .... Exponential Map

شار .... Flow

آزاد .... Freely

اساسی .... Fundamental

هاسدورف .... Hausdorff

همسانریختی .... Homeomorphism

افقی .... Horizontal

ایده‌آل .... Ideal

مستقل .... Independent

مولد بی‌نهایت کوچک .... Infinitesimal Generator

منحنی انتگرال .... Integral Curve

معکوس .... Inverse

یکریختی .... Isomorphism

Isotropy .... پایدارساز
Jacobi Identity .... اتحاد ژاکوبی
Jet Space .... فضای افشانه
Lie .... لی
Lie Algebra .... جبر لی
Lie Bracket .... کروشه‌ی لی
Lie Derivative .... مشتق لی
Lie Group .... گروه لی
Linear Operator .... عملگر دو خطی
Local .... موضعی
Locally Difeomorphism .... دیفئومورفیسم موضعی
Locally Euclidean .... موضعاً اقلیدسی
Local Section .... برش موضعی
Maxwell .... ماکسول
Monotonic .... یکنوایی
Operator .... عملگر
Orbit .... مدار
Poisson .... پواسن
Prolongation .... امتداد دادن
Pull-Back .... پس کشنده
Push Forward .... پیش برنده
Rank .... رتبه
Real-Valued .... حقیقی-مقدار

Reduction .... کاهش

Regular .... منظم

Scale .... تجانس

Section .... برش

Second Countable .... شمارای نوع دوم

Semi-Regular .... نیم-منظم

Smooth .... هموار

Smooth Covering Map .... نگاشت پوشای هموار

Smoothly Compatible .... هموار سازگار

Strictly .... اکیدا

Symmetry Group .... گروه تقارن

Tangent Bundle .... کلاف مماس

Tangent Vector .... بردار مماس

Tangent Space .... فضای مماس

Topological Manifold .... منیفلد توپولوژیکی

Topological Space .... فضای توپولوژیکی

Total Derivative .... مشتق کامل

Total Differential .... دیفرانسیل کامل

Transformation .... تبدیل

Translation .... انتقال

Transition Map .... نگاشت گذر

Transitive .... متعدی

Vector field .... میدان برداری

فضای برداری .... Vector Space

عمودی .... Vertical

Surname: Kooshki Name: Neda

Title: Compare of Two Methods for Finding Symmetries of Differential Equations

Supervisor: Dr.Reza Hejazi

Degree: Master of Science Subject: Differential Geometry
Field: Geometry

Technology University of Shahrood Faculty Of Mathematical Sciences
Date: 1392/6/25 Number of pages: 69

Keywords: Symmetries , Differential Equations , Differential Forms , Prolongation , KdV Equation

Abstract

To solve differential equations is of particular importance in all sciences because the analysis of the problems can be done by using responses. However , achieving all responses may not be always easy. Therefore ,we use supporting devices . Of these devices , one is symmetry group . Through having one response and putting it in symmetry groups we can achieves lots of responses . Yet there is a variety of ways to achieve symmetry groups .

In this thesis , two more practical ways are tried to be done . At first , for achieving symmetry groups , the vector fields method has been considered and the differential forms method is stated along side . Harrison method is also pointed.

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in Differential Geometry

Compare of Two Methods for Finding Symmetries of Differential Equations

Supervisor

Dr.Reza Hejazi

by

Neda Kooshki

1392/6/25