بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

بررسی ضرایب توابع ستاره‌گون از مرتبه عدد مختلط

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

استاد مشاور

سید رضا موسوی

پژوهشگر

مهتابه بابایی زرین‌کلایی

شهریور ۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای **مهتابه بابایی زرینکلایی** رشته **ریاضی** گرایش **آنالیز** تحت عنوان **بررسی ضرایب توابع ستاره‌گون از مرتبه‌ی عدد مختلط**
که در تاریخ ۹۲/۶/۲۵ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر احمد زیره	دانشیار	
۲ـ استاد مشاور	سیدرضا موسوی	مربی.	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر برات اله غزنوی	استادیار	غزنوی
۴ـ استاد ممتحن	دکتر مهدی ایرانمش	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر علیرضا خدامی	استادیار .	خدامی

رئیس دانشکده :

تقدیم به :

پدر و مادر مهربانم بخاطر فداکاری هایشان،

همسر عزیزم

و همه آنهایی که دوستشان دارم.

سپاس گزاری...

سپاس خداي را، به وسعت همه ي آن سپاسي كه ملائكه مقرب و خلايق مكرم و ستايندگان پسنديده او را شكر گفته اند. برترين شكر ، چون برتري پروردگارمان بر هر وجودي.

سپاس بي پايان از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقاي دكتراحمد زيره كه همواره خوشه چين دانش و خرد ايشان بوده ام و تداوم همكاري با ايشان نهايت آرزو و مايه ي افتخارم مي باشد.

مراتب قدرداني ام تقديم به جناب آقای موسوی كه مشاوره اين پايان نامه را به عهده داشته اند و مرا مديون بزرگي و محبت خويش ساختند.

در نهایت بوسه میزنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، وجود مقدسشان را که در سردترین روزگاران، بهترین پشتیبانم بودند، ستایش می کنم.

مهتابه بابایی زرینکلایی
شهریور ۹۲

تعهد نامه

اینجانب **مهتابه بابایی زرینکلایی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** دانشکده **ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **بررسی ضرایب توابع ستاره گون از مرتبه ی عدد مختلط** تحت راهنمائی **دکتر احمد زیره** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۹۲/۷/۲۰

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

*** متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .**

نام خانوادگی دانشجو: بابایی زرینکلایی نام: مهتابه

عنوان: بررسی ضرایب توابع ستاره‌گون از مرتبه عدد مختلط

استاد راهنما: دکتر احمد زیره

استاد مشاور: سید رضا موسوی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۹۲ تعداد صفحات: ۵۸

واژگان کلیدی: توابع تحلیلی، توابع ستاره گون از مرتبه عدد مختلط، توابع تک ارز

چکیده

در این پایان‌نامه به بیان تعاریف و قضایای مربوط به رده هایی از توابع ستاره گون می پردازیم و به دنبال یافتن کرانی برای ضرایب رده‌های مزبور می‌باشیم.

پیشگفتار

تابع تحلیلی که یک به یک می‌باشد را تک ارز می‌نامیم. بنابراین اگر f تابع تک ارز باشد $f(z_1) = f(z_2)$ نتیجه می دهد $z_2 = z_1$. از نظر تحلیلی تابع تک‌ارز مشتق مخالف صفر دارد و از نظر هندسی تابع تک‌ارز خم‌های ساده را بر خم‌های ساده می‌نگارد. مطالعات و تحقیقات فراوانی در جهت چگونگی ترکیب این خواص و خواص دیگر برای اثبات قضایایی که سرشت هندسی یا تحلیلی داشته باشند انجام گرفت. در ابتدا سیلورمن [۱۹۷۵] [1] رده‌ی توابعی که در دیسک یکه‌ی باز تحلیلی و تک‌ارز می‌باشند را S نامید و با شرح کاملی از زیر رده‌های این رده به بررسی قضایای مربوط پرداخت.

در این راستا، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصل بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم، به تعریف رده‌هایی از توابع ستاره‌گون می‌پردازیم و به دنبال یافتن کرانی برای ضرایب رده‌های مزبور می‌باشیم.

[1] H. Silverman

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

فرض کنید $\zeta \in \mathbb{C}$ و $r > 0$، در این‌صورت دیسک باز به مرکز ζ و شعاع r به‌صورت

$$U(\zeta, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - \zeta| < r\}$$

تعریف می‌شود همچنین $U = U(0, 1)$ به‌عنوان دیسک یکه‌ی باز درنظر گرفته می‌شود.

این بخش شامل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصل بعد می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱. هر مجموعه همبند و باز، میدان نامیده می‌شود. میدان را معمولا با D نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. تابع $f : D \to \mathbb{C}$ را در z_0 تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی z_0 مشتق‌پذیر باشد.

تعریف ۳.۱.۱. یک تابع $f : D \to \mathbb{C}$ را در یک میدان تحلیلی گوییم اگر در هر نقطه‌اش تحلیلی باشد.

تعریف ۴.۱.۱. نقطه z_0 را نقطه تکین تابع $f(z)$ گوییم اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد ولی در هر همسایگی z_0 نقطه‌ای موجود باشد که $f(z)$ در آن تحلیلی باشد.

تعریف ۵.۱.۱. نقطه تکین z_0 تنها نامیده می شود اگر $\delta > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که $f(z)$ در ناحیه $0 < |z - z_0| < \delta$ تحلیلی باشد.

قضیه ۶.۱.۱. [۲۲] (ریمان [۱]) *فرض کنید z_0 نقطه تکین تنهای $f(z)$ باشد و $f(z)$ در همسایگی محذوف z_0 کراندار باشد، آنگاه $f(z)$ را می توان در z_0 به گونه‌ای تعریف کرد که در این نقطه تحلیلی باشد.*

تعریف ۷.۱.۱. تابع دومتغیره حقیقی مقدار $u(x,y)$ را در D همساز گوییم اگر در سراسر D دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادله با مشتقات جزئی زیر صدق کند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

اثبات قضیه‌های (۸.۱.۱) و (۹.۱.۱) و نتیجه (۱۰.۱.۱) را می‌توان در [۲۲] مشاهده نمود.

قضیه ۸.۱.۱. *فرض کنید تابع $u(z)$ در دامنه‌ی همبند ساده‌ای شامل دیسک $U(z_0,r)$ همساز باشد، آنگاه*

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$

قضیه ۹.۱.۱. *(فرمول انتگرال* **پواسن** [۲]*) فرض کنید تابع $u(z)$ در دامنه‌ی همبند ساده‌ای شامل دیسک $U(0,R)$ همساز باشد، آنگاه برای $z=re^{i\theta}$ که $r<R$، داریم:*

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}u(Re^{i\varphi})d\varphi.$$

نتیجه ۱۰.۱.۱. *فرض کنید $f(z)=u(z)+iv(z)$ در دامنه‌ی همبند ساده‌ای شامل دیسک $U(0,R)$ تحلیلی باشد، آنگاه برای $z=re^{i\theta}$ که $r<R$، داریم:*

$$v(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2rR\sin(\theta-\varphi)}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}u(Re^{i\varphi})d\varphi+v(0).$$

تذکر: اگر تابع $f(z)=u+iv$ در دیسک $U(0,R)$ تحلیلی باشد از قضیه (۹.۱.۱) و نتیجه (۱۰.۱.۱) به‌دست می‌آید:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{i\varphi}+re^{i\theta}}{Re^{i\varphi}-re^{i\theta}}u(Re^{i\varphi})d\varphi+iv(0).$$

تعریف ۱۱.۱.۱. (ضرب‌هادامارد [۳]) فرض کنید $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$ و $g(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}b_kz^k$ در U تحلیلی باشند(a_k و b_k اعداد مختلط هستند). ضرب هادامارد f,g که به صورت $f*g$ نشان داده

[۱] Riemann
[۲] poisson
[۳] Hadamard

می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f * g)(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k b_k z^k, \qquad (z \in U)$$

تعریف ۱۲.۱.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ که در U تحلیلی هستند و $Re\{f(z)\} > 0$ را با P نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۳.۱.۱. فرض کنید $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ در P باشد، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|a_n| \leq 2$.

برهان. اگر $f(z) = u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta})$ و $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ باشد، آنگاه

$$u(re^{i\theta}) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos m\theta - \beta_m \sin m\theta) r^m.$$

چون برای هر $n \neq m$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta = 0$$

و برای هر $m, n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\theta \cos n\theta d\theta = 0$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_n r^n \cos^2 n\theta d\theta = \alpha_n r^n \qquad (1.1)$$

و

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\beta_n r^n \sin^2 n\theta d\theta = -\beta_n r^n \qquad (2.1)$$

حال با ضرب رابطه‌ی (۲.۱) در $-i$ و جمع آن با رابطه‌ی (۱.۱)، بدست می‌آید:

$$a_n r^n = (\alpha_n + i\beta_n) r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

در نتیجه

$$|a_n| r^n \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) |e^{-in\theta}| d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta. \qquad (3.1)$$

چون تابع $u(z)$ همساز است به موجب قضیه (۸.۱.۱):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta = 2u(0) = 2 \tag{۴.۱}$$

با جایگذاری (۴.۱) در (۳.۱) رابطه‌ی $|a_n| r^n \leq 2$ به‌دست می‌آید حال اگر $r \to 1$ رابطه $|a_n| \leq 2$ حاصل می‌شود و قضیه ثابت می‌گردد. □

قضیه ۱۴.۱.۱. *فرض کنید $f(z)$ در P باشد، آنگاه*

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \qquad (z \in u). \tag{۵.۱}$$

برهان. قرار دهید: $f(z) = u(z) + iv(z)$. بنا به تذکر در صفحه ۳:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}u(Re^{i\varphi})d\varphi + i\underbrace{v(0)}_{0} \qquad (|z| \leq R < 1)$$

در نتیجه

$$|f(z)| \leq \frac{R+|z|}{R-|z|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi})d\varphi. \tag{۶.۱}$$

به موجب قضیه (۸.۱.۱):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) = u(0) = 1 \tag{۷.۱}$$

با جایگذاری (۷.۱) در (۶.۱)، داریم:

$$|f(z)| \leq \frac{R+|z|}{R-|z|}$$

و با $R \longrightarrow 1$ در رابطه‌ی بالا طرف راست نامساوی (۵.۱) ثابت می‌شود. اثبات طرف چپ نامساوی (۵.۱):
چون برای هر $z \in u$، $f(z) \neq 0$، تابع $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ در U تحلیلی است و $Reg(z) > 0$. پس با به‌کاربردن طرف راست نامساوی (۵.۱) برای $g(z)$ داریم:

$$|g(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

در نتیجه

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \Longrightarrow |f(z)| \geq \frac{1-|z|}{1+|z|}.$$

و به‌این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

لم ۱.۱.۱۵. [۶](**شوارتز** [۴]) *فرض کنید $f(z)$ تابعی تحلیلی در دیسک $U(0,R)=\{z\in\mathbb{C}; |z|<R\}$ باشد و برای ثابت M، $|f(z)|<M$. اگر $f(z)$ در $z=0$ با تعداد دفعات m، صفر شود. در این‌صورت:*

$$|f(z)|\leq \frac{M}{R^m}|z|^m \qquad (z\in U(0,R))$$

همچنین در رابطه‌ی فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{M}{R^m}z^m$$

به‌طوری‌که θ ثابت است.

قرارداد: فرض کنید A رده‌ای از همه‌ی توابع $f(z)=z+a_2z^2+\dots$ باشد که در دیسک یکه‌ی باز $U=\{z\in\mathbb{C}; |z|<1\}$ تحلیلی می‌باشند.

۱.۲ رده‌ی S

تعریف ۱.۲.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $f(z)=z+a_2z^2+\dots$ که در U تحلیلی و تک‌ارز می‌باشند و با شرایط $f(0)=0$ ، $f'(0)=1$ نرمالیزه می‌گردند را با S نشان می‌دهیم.

لم ۱.۲.۲. *اگر $f(z)\in S$ آنگاه $g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}\in S$.*

تذکر: به جای $\sqrt{f(z^2)}$، می‌نویسیم $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$. زیرا $f(z^2)$ صفری در مبدا دارد که $\sqrt{f(z^2)}=e^{(\frac{1}{2})\log f(z^2)}$ را بی‌معنی می‌کند.

برهان. اگر $f(z)=z+a_2z^2+\dots$، آنگاه

$$g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}=z\sqrt{1+a_2z^2+a_3z^4+\cdots} \tag{1.8}$$

[۴] schwartz

(شاخه ی اصلی $\sqrt{}$ را در نظر می‌گیریم)، تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می‌باشد و $g(0)=0$ و $g'(0)=1$.

حال به اثبات تک ارزی می‌پردازیم: اگر $g(z_1)=g(z_2)$ آنگاه $z_2\sqrt{\frac{f(z_2^2)}{z_2^2}}=z_1\sqrt{\frac{f(z_1^2)}{z_1^2}}$. در این‌صورت $f(z_1^2)=f(z_2^2)$ و چون f یک به یک می‌باشد، داریم $z_2^2=z_1^2$ یعنی $z_1=z_2$ یا $z_1=-z_2$. و از (۸.۱) ملاحظه می‌شود که $g(z)$ تابع فرد است لذا $z_1=-z_2$ تساوی $g(z_1)=-g(z_2)$ را نتیجه می‌دهد که با فرض در تناقض است پس $z_1=z_2$ و تک‌ارزی $g(z)$ اثبات می‌شود. □

قضیه ۳.۲.۱. *اگر* $g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}\in S$ *باشد آنگاه* $|a_2|\le 2$. [۲۲]

مثال ۴.۲.۱. **(تابع کوئب)** در قضیه‌ی (۳.۲.۱)، اگر $a_2=2e^{i\alpha}$ و α حقیقی باشد آنگاه

$$g(z)=\frac{z}{1-e^{i\alpha}z^2}=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$$

لذا

$$f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}=z+2e^{i\alpha}z^2+3e^{2i\alpha}z^3+\cdots.$$

با قرار دادن $\alpha=0$ به تابع زیر می‌رسیم:

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-\frac{1}{4}$$

که به تابع کوئب معروف است. این تابع قرص $|z|<1$ را بر صفحه‌ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $\frac{-1}{4}$ تا ∞ بریده شده است می‌نگارد.

قضیه ۵.۲.۱. *(پوشش): اگر* $f(z)\in S$ *و برای* $|z|<1$، $f(z)\neq c$ *که* $c\in\mathbb{C}$، *آنگاه* $|c|\ge\frac{1}{4}$.

برهان. می‌دانیم $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ چون $f(z)\neq c$ پس تابع $g(z)=\frac{cf(z)}{c-f(z)}$ نیز متعلق به S می‌باشد

$$\frac{cf(z)}{c-f(z)}=z+(a_2+\frac{1}{c})z^2+\cdots$$

بنا به قضیه‌ی (۳.۲.۱) داریم $|a_2+\frac{1}{c}|\le 2$ از طرفی:

$$|\frac{1}{c}|-|a_2|\le|a_2+\frac{1}{c}|\le 2\Longrightarrow|\frac{1}{c}|\le 2+|a_2|$$

و چون $f(z)\in S$ پس $|a_۲|\leq ۲$ لذا داریم:

$$|\frac{۱}{c}|\leq ۴\Longrightarrow |c|\geq \frac{۱}{۴}.$$

□

لم ۱.۲.۶. *اگر* $f(z)\in S$ *و* $z=re^{i\theta}$ *آنگاه:*

$$Re\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}=r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|.$$

برهان. چون برای $|z|<۱$، $f'(z)\neq ۰$ پس می‌توان شاخه‌ای از $\log f'(z)$ را برای $|z|<۱$ در نظر گرفت.

حال برای $f(z)=f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z)=f'(re^{i\theta})$ لذا:

$$\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta})=\frac{e^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در r داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta})=\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}=\frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه‌ی قسمت‌های حقیقی داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})|=Re\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}.$$

□

قضیه ۱.۲.۷. *اگر* $f(z)\in S$ *آنگاه:*

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳}\leq|f'(z)|\leq\frac{۱+r}{(۱-r)^۳}\qquad(|z|=r<۱).$$

برهان. می‌دانیم تابع $w=\frac{z+z_۰}{۱+\overline{z_۰}z}(|z_۰|<۱)$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. لذا تابع $g(z)=f(\frac{z+z_۰}{۱+\overline{z_۰}z})=b_۰+b_۱z+b_۲z^۲$ نیز به ازای $(|z|<۱)$ تحلیلی و تک‌ارز است، داریم:

$$g(۰)=b_۰=f(z_۰)\qquad b_۱=g'(۰)=f'(z_۰)(۱-|z_۰|^۲)$$

$$b_۲=\frac{g''(۰)}{۲}=\frac{۱}{۲}(f''(z_۰)(۱-|z_۰|^۲)^۲-۲f'(z_۰)\overline{z_۰}(۱-|z_۰|^۲))$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد پس متعلق به S نمی‌باشد، با توجه به اینکه تابع $\frac{g(z)-g(0)}{g'(0)} = z + \frac{b_2}{b_1}z^2 + \ldots$ در S قرار می‌گیرد لذا بنابر قضیه(۳.۲.۱)، $|\frac{b_2}{b_1}| \leq 2$ یعنی:

$$\frac{1}{2}|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1-|z_0|^2) - 2\overline{z_0}| \leq 2$$

با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}$ داریم:

$$|\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2}| \leq \frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

حال چون z_0 دلخواه است قرار می‌دهیم:

$$|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

یعنی $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دایره ای به شعاع $\frac{4r}{1-r^2}$ و به مرکز $\frac{2r^2}{1-r^2}$ واقع است لذا:

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

بنا به لم (۶.۲.۱) می‌دانیم $Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$ یعنی:

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}$$

حال از طرفین نامساوی از ۰ تا r انتگرال می‌گیریم:

$$\log(1-r) - 3\log(1+r) \leq \log|f'(z)| \leq \log(1+r) - 3\log(1-r)$$

و

$$\log\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq \log|f'(z)| \leq \log\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

در نتیجه:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \qquad (|z| = r < 1).$$

□

مثال ۸.۲.۱. مشتق تابع کوئب $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\cdots$ برابر است با $k'(z)=\frac{1+z}{(1-z)^3}$، لذا کران بالای قضیه‌ی (۷.۲.۱) در مورد این تابع در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۹.۲.۱. *اگر $f(z)\in S$ آنگاه:*

$$\frac{r}{(1+r)^2}\leq|f(z)|\leq\frac{r}{(1-r)^2},\qquad(|z|=r<1).$$

برهان. بنا به قضیه‌ی (۷.۲.۱) برای $|z|=r<1$ داریم $|f'(z)|\leq\frac{1+r}{(1-r)^3}$، نقطه‌ی ۰ را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره‌خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)|\leq\int_0^r|f'(t)|dt\leq\int_0^r\frac{1+t}{(1-t)^3}dt=\frac{r}{(1-r)^2}$$

نامساوی $\frac{r}{(1+r)^2}\leq\frac{1}{4}$ همواره برقرار است، حال اگر $|f(z)|\geq\frac{1}{4}$ آنگاه $|f(z)|\geq\frac{r}{(1+r)^2}$ و اگر $|f(z)|<\frac{1}{4}$ بنا به قضیه‌ی (۵.۲.۱) مسیر c داخل دایره‌ی یکه از ۰ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم c_0 از ۰ تا $f(z)$ را می‌پوشاند در این‌صورت:

$$|f(z)|=\int_{c_0}|dw|=\int_c|f'(s)||ds|$$

از طرفی بنا به قضیه‌ی (۷.۲.۱):

$$|f(z)|=\int_c|f'(s)||ds|\geq\int_c|f'(s)|d|s|\geq\frac{1-t}{(1+t)^3}dt=\frac{r}{(1+r)^2}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{(1+r)^2}\leq|f(z)|\leq\frac{r}{(1-r)^2}.$$

□

مثال ۱۰.۲.۱. برای تابع کوئب $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\ldots$ کران بالای قضیه‌ی (۹.۲.۱) در مورد این تابع در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۱.۲.۱. *اگر $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در S باشد آنگاه برای هر n، $|a_n|\leq en$.* [۲۲]

قضیه ۱۲.۲.۱. *اگر تابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در رده‌ی S بوده و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر n، $|a_n| \leq n$.*

برهان. برای $r < 1$، $z = re^{i\theta}$ قرار می‌دهیم:

$$Imf(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال‌گیری از ۰ تا π داریم:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} a_n r^n \sin^2 n\theta d\theta = a_n r^n \tag{9.1}$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin\theta|$$

و به روش استقرایی می‌توان نشان داد که $|\sin n\theta| \leq n|\sin\theta|$ لذا از رابطه‌ی (۹.۱) نتیجه می‌شود که:

$$|a_n r^n| \leq \frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta \tag{10.1}$$

سپس نشان می‌دهیم $v(re^{i\theta}) \neq 0$، $(0 < r < 1, 0 < \theta < \pi)$:

$$0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = 2i\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = 2iv(re^{i\theta})$$

چون $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است می‌بایست در فاصله‌ی $0 < \theta < \pi$ علامت جبری ثابت داشته باشد لذا:

$$r = |a_1 r| = |\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin\theta d\theta| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta. \tag{11.1}$$

با جایگذاری (۱۱.۱) در (۱۰.۱) رابطه‌ی $|a_n r^n| \leq nr$ به‌دست می‌آید و با $r \to 1$ قضیه ثابت می‌گردد. □

۳.۱ رده‌ی S^*

تعریف ۱.۳.۱. میدان D را نسبت به z_0 ستاره‌گون گوییم هرگاه پاره‌خط مستقیمی که هر نقطه از D را به z_0 وصل می‌کند در D قرار بگیرد. تابع $f(z) \in S$ را نسبت به مبدا ستاره‌گون گوییم هرگاه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است، این زیررده‌ی S را با S^* نشان می‌دهند.

لم ۱.۳.۲. *فرض کنید $f(z) \in S$، در این‌صورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.*

برهان. ابتدا فرض کنید $f(z) \in S^*$ و D تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ در تابع $f(z)$ باشد اگر $w \in D$، آنگاه برای $0 < t < 1$، $tw \in D$. (چون D ستاره‌گون می‌باشد) لذا تابع $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و در آنجا در نامساوی $|g(z)| < 1$ صدق می‌کند چون $g(0) = f^{-1}(tf(0))$، با توجه به لم شوارتز $|g(z)| \leq |z|$، اکنون نقطه‌ی $w_1 \in D_r$ را انتخاب می‌کنیم در این‌صورت برای نقطه‌ی z_1ای با $|z_1| < 1$، برای t دلخواه، $0 < t < 1$ داریم:

$$|f^{-1}(tw_1)| = |f^{-1}(tf(z_1))| = |g(z_1)| \leq |z_1| < r$$

ولی این بدان معنی است که tw_1 در D_r قرار دارد. چون این مطلب برای همه‌ی w_1 ها در D_r و همه‌ی t ها، $0 < t < 1$ درست است میدان D_r نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است.

به عکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی S^* قرار نداشته باشد آنگاه نقطه $w_0 \in D$ موجود است به‌طوری‌که برای t_0 ای، $(0 < t_0 < 1)$ ، $t_0 w_0$ متعلق به D نمی‌باشد اینک قرص $|z| < r < 1$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که تصویرش D_r شامل نقطه‌ی w_0 باشد. چون $D_r \subset D$، نقطه‌ی $t_0 w_0$ متعلق به D_r نیست، پس $f(z)$، $|z| < 1$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد. □

قضیه ۱.۳.۳. *فرض کنید $f(z) \in S$ در این‌صورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر:*

$$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > 0.$$

برهان. با توجه به لم (۱.۳.۲)، $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < 1$ یک میدان ستاره‌گون باشد به بیان معادل برای هر $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ بردار شعاعی از $w = 0$ تا $w = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد ولی این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی نسبت به θ صعودی اکید است زیرا در غیر این‌صورت بردار شعاعی می‌بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند پس یک تابع در S^* با شرط $\frac{\partial}{\partial\theta} \arg f(re^{i\theta}) > 0$ مشخص گردد.

با استفاده از کران (۱۴.۱) می‌توان نامساوی مثلث را در (۱۵.۱) به‌کار برد لذا:

$$(k-۱)|a_k| \leq ۲(|a_{k-۱}| + |a_{k-۲}| + ... + |a_۲| + ۱)$$

از رابطه‌ی فوق در می‌یابیم $|a_۲| \leq ۲$، سپس فرض کنیم برای $k = ۲, ۳, ..., n-۱$ ، $|a_k| \leq k$ در این‌صورت:

$$(n-۱)|a_n| \leq ۲[(n-۱) + (n-۲) + ... + ۲ + ۱] = \frac{۲(n-۱)n}{۲}$$

و این به $|a_n| \leq n$ برمی‌گردد لذا به استقراء قضیه برای هر n درست است. □

تعریف ۶.۳.۱. تابع $f(z) \in S$ ستاره‌گون از مرتبه α $(۰ \leq \alpha < ۱)$ نامیده می‌شود هرگاه:

$$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > \alpha \qquad (|z| < ۱).$$

این زیررده‌ی S را به $S^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم. برای سادگی $S^*(۰)$ را با S^* نمایش می‌دهیم.

قضیه ۷.۳.۱. *فرض کنید* $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ ، $(۰ \leq \alpha < ۱)$ *اگر*

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq ۱-\alpha$$

آنگاه $f(z) \in S^*(\alpha)$.

برهان. بنا به تعریف (۶.۳.۱) کافیست نشان دهیم $z\frac{f'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $۱-\alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد داریم:

$$|z\frac{f'(z)}{f(z)} - ۱| = |\frac{zf'(z) - f(z)}{f(z)}| = |\frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|z^n}{z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n}| \leq \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n||z|^{n-۱}}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n||z|^{n-۱}} \leq \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|}$$

عبارت فوق دارای کران بالای $۱-\alpha$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n| \leq (۱-\alpha)(۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|)$$

که معادل است با $\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq ۱-\alpha$ بنا به فرض این رابطه برقرار است. بنابراین

$$|\frac{zf'(z)}{f(z)} - ۱| \leq ۱-\alpha$$

□

۴.۱ رده‌ی C

تعریف ۱.۴.۱. میدان D را محدب گوییم هرگاه پاره‌خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به‌هم وصل می‌کند، در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۴.۱. تابع $f(z) \in S$ را محدب گوییم هرگاه قرص $|z| < ۱$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود، این زیر رده‌ی S را با C نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۴.۱. *فرض کنید $f(z) \in S$، در این‌صورت $f(z) \in C$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان محدب تصویر کند.*

برهان. ابتدا فرض کنید $f(z) \in C$ و D تصویر $|z| < ۱$ و D_r تصویر $|z| < r < ۱$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط $w_۱$ ، $w_۲$ را در D_r انتخاب می‌کنیم، باید نشان دهیم که پاره‌خط $tw_۱ + (۱-t)w_۲, (۰ < t < ۱)$ هم در D_r قرار دارد، می‌بایست نقاط $z_۱$ و $z_۲$ در قرص $|z| < ۱$ موجود باشند که $w_۱ = f(z_۱)$ و $w_۲ = f(z_۲)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $|z_۱| \le |z_۲|$ آنگاه تصویر $|z| < ۱$ تحت تابع $g(z) = tf((\frac{z_۱}{z_۲})z) + (۱-t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-۱}(g(z))$ در $|z| < ۱$ تحلیلی است و چون $f(z) \in S$ لذا در شرایط $|h(z)| < ۱$ و $h(۰) = ۰$ صدق می‌کند، به موجب لم شوارتز $|h(z)| \le |z|$. بویژه:

$$|h(z_۲)| = |f^{-۱}(tw_۱ + (۱-t)w_۲)| \le |z_۲| < r \qquad (۱۶.۱)$$

چون $D_r \subset D$، نقطه‌ی $z_۰$ای در قرص $|z| < ۱$ موجود است که $tw_۱ + (۱-t)w_۲ = f(z_۰)$ ولی بنابر (۱۶.۱) نقطه‌ی $z_۰ = f^{-۱}(f(z_۰))$ نیز می‌بایست در قرص $|z| < ۱$ باشد پس هر نقطه بر پاره‌خط $tw_۱ + (۱-t)w_۲$ در D_r قرار دارد.

بالعکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی C نباشد آنگاه دو نقطه در D وجود دارد که پاره‌خط مار بر این دو نقطه در D قرار ندارد. اینک قرصی مانند $|z| < r < ۱$ انتخاب می‌کنیم که تصویرش D_r شامل این دو نقطه باشد. چون $D_r \subset D$ پاره‌خطی که این دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند نمی‌تواند در D_r قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ قرص $|z| < r$ را بر یک میدان محدب تصویر نمی‌کند. □

قضیه ۴.۴.۱. *فرض کنید $f(z)$ در $|z| < ۱$ تحلیلی باشد و $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$. در این‌صورت $f(z) \in C$ اگر و تنها اگر:*

$$Re\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > ۰ \qquad (|z| < ۱)$$

برهان. بنا به قضیه‌ی (۳.۴.۱)، $f(z) \in C$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < ۱$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنی است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره $|z| = r < ۱$ را بر یک مرز ساده بسته می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حرکت می‌گردد. می‌دانیم زاویه‌ای که خط مماس در صفحه‌ی w با محور حقیقی می‌سازد برابر است با:

$$\frac{\pi}{۲} + \theta + \arg f'(z)$$

لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص می‌گردد:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\pi}{۲} + \theta + \arg f'(re^{i\theta})) > ۰$$

داریم:

$$۱ + \frac{\partial}{\partial\theta}(Im \log f'(re^{i\theta})) = ۱ + Im\{ire^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\} = Re\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > ۰$$

□

قضیه ۵.۴.۱. (**الکساندر** [۵]) *فرض کنید f یک تابع تحلیلی در D باشد با $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$، در این‌صورت $f(z) \in C$ اگر و تنها اگر $zf' \in S^*$.*

برهان. اگر $g(z) = zf'(z)$، در این‌صورت:

$$\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\} = \{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > ۰$$

لذا تابع سمت چپ در D تحلیلی و مثبت است اگر و تنها اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. □

قضیه ۶.۴.۱. *فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در C باشد در این‌صورت برای هر n، $|a_n| \le ۱$.*

[۵] Alexander

برهان. با توجه به قضیه‌ی (۵.۴.۱) تابع $zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n$ در S^* قرار دارد، لذا بنا به قضیه‌ی (۵.۳.۱) برای هر n، $n|a_n| \le n$ و $|a_n| \le 1$. □

قضیه ۷.۴.۱. *اگر $f(z) \in C$ و $f(z) \neq c$ برای $|z| < 1$ در این‌صورت $|c| \ge \frac{1}{2}$.*

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z) = (c - f(z))^2$ در $|z| < 1$ تک‌ارز است، دو نقطه‌ی متمایز z_0 و z_1 در قرص واحد انتخاب می‌کنیم در این‌صورت:

$$g(z_0) - g(z_1) = (c - f(z_0))^2 - (c - f(z_1))^2 = (f(z_0) - f(z_1))(f(z_0) + f(z_1) - 2c)$$

اکنون $f(z_0) \neq f(z_1)$ زیرا $f(z)$ تک‌ارز می‌باشد همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطه‌ی $\frac{1}{2}[f(z_0) + f(z_1)]$ به تصویر $|z| < 1$ متعلق است لذا نمی‌تواند مساوی c باشد پس $f(z_0) + f(z_1) - 2c \neq 0$ و تک‌ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون $g(z) = c^2 - 2cz + z^2 + \ldots$ تابع نرمال زیر در S است.

$$h(z) = \frac{g(z) - c^2}{-2c} = z + (\frac{-z^2}{2c}) + \cdots$$

به‌علاوه در $|z| < 1$، $h(z) \neq \frac{c}{2}$ زیرا $g(z)$ هرگز در آنجا صفر نیست با به‌کار بردن قضیه‌ی پوششی درمی‌یابیم $\frac{1}{4} \le |\frac{c}{2}|$ و یا $|c| \ge \frac{1}{2}$. □

قضیه ۸.۴.۱. *اگر $f(z) \in C$ آنگاه برای $|z| = r < 1$:*

$$\frac{1}{(1+r)^2} \le |f'(z)| \le \frac{1}{(1-r)^2}.$$

برهان. می‌دانیم تابع $(|z_0| < 1)$ ،$w = \frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد پس تابع

$$g(z) = f(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$$

نیز به ازاء $|z| < 1$ تحلیلی و تک‌ارز است. داریم:

$$g(0) = b_0 = f(z_0) \qquad b_1 = g'(0) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2}(f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\overline{z_0}(1 - |z_0|^2))$$

چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد لذا $g(z)$ در رده‌ی S قرار ندارد. با توجه به اینکه تابع

$$\frac{g(z)-g(0)}{g'(0)} = z + \frac{b_2}{b_1}z^2 + \cdots$$

در S قرار می‌گیرد لذا در C نیز وجود دارد پس بنا به قضیه‌ی (۶.۴.۱):

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1-|z_0|^2) - 2\overline{z_0}\right| \leq$$

با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}$ داریم:

$$\left|\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2}\right| \leq \frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

حال چون z_0 دلخواه است داریم:

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{2r}{1-r^2}$$
$$\Rightarrow \frac{2r^2-2r}{1-r^2} \leq \frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2+2r}{1-r^2}$$
$$\Rightarrow \frac{2r-2}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{2r+2}{1-r^2}$$

حال از ۰ تا r انتگرال می‌گیریم:

$$-2\log(1+r) \leq \log|f'(z)| \leq -2\log(1-r)$$

لذا:

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}.$$

□

قضیه ۹.۴.۱. *اگر $f(z) \in C$ آنگاه برای $|z| = r < 1$:*

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}.$$

برهان. بنا به قضیه‌ی (۸.۴.۱) برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}$ نقطه‌ی ۰ را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره‌خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)| = \int_0^r |f'(t)|dt \leq \int_0^r \frac{1}{(1-t)^2}dt = \frac{r}{1-r}$$

نامساوی $\frac{1}{4} \leq \frac{r}{(1+r)}$ همواره برقرار است، حال اگر $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ لذا $|f(z)| \leq \frac{r}{(1+r)}$ و اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ طبق قضیه‌ی پوششی مسیر c داخل دایره‌ی یکه از ۰ تا z موجود است که تصویر آن پاره‌خط مستقیم c_0 از ۰ تا $f(z)$ را می‌پوشاند در این‌صورت:

$$|f(z)| = \int_{c_0} |dw| = \int_{c} |f'(s)||ds|$$

از طرفی بنا به قضیه‌ی (۸.۴.۱):

$$|f(z)| = \int_{c} |f'(s)||ds| \geq \int_{c} |f'(s)|d|s| \geq \frac{1}{(1+t)^2}dt = \frac{r}{(1+r)}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{(1+r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)}$$

□

۵.۱ رده‌یK

دراین بخش به معرفی رده توابع تقریبا محدب می‌پردازیم. دراین خصوص قضایا ومثال‌هایی از رده‌ی مزبور را بیان می‌کنیم. و در انتها ارتباط بین رده‌ی فوق با رده‌های قبلی را نیز مشخص می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۱. تابع $f(z) \in H$ تقریبا محدب نامیده می‌شود، اگرتابع $g(z) \in C$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $z \in U$ داشته باشیم:

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0$$

این زیررده‌یH را با K نمایش می‌دهند.

لم ۲.۵.۱. *فرض کنید تابع $\phi(z)$ در میدان محدب D تحلیلی باشد و در D ، $Re\phi'(z) > 0$ آنگاه $\phi(z)$ در D تک ارز است.*

برهان. نقاط متمایز z_0و z_1 را در D انتخاب می‌کنیم. چون میدان D محدب است دراین‌صورت پاره‌خط مستقیم $z = z_0 + t(z_1 - z_0)$ ،$0 \leq t \leq 1$ در D قراردارد با انتگرال‌گیری در امتداد این مسیر به‌دست می‌آید.

$$\phi(z_1) - \phi(z_0) = \int_{z_0}^{z_1} \phi'(z)dz$$
$$= \int_0^1 \phi'(z_0 + t(z_1 - z_0))(z_1 - z_0)dt$$

باتقسیم بر $z_1 - z_0$ و با محاسبه قسمت های حقیقی داریم:

$$Re\left\{\frac{\phi(z_1) - \phi(z_0)}{z_1 - z_0}\right\} = Re\left\{\int_0^1 \phi'(z_0 + t(z_1 - z_0))dt\right\} > 0$$

پس $\phi(z_1) \neq \phi(z_0)$ و درنتیجه $\phi(z)$ در D تک‌ارز است. □

قضیه ۱.۵.۳. [۲۲] *فرض کنید تابع $f(z)$ در D تحلیلی و تک ارز باشد و تابع $g(z)$ بر ناحیه تصویر D تحت تابع $f(z)$ تحلیلی و تک ارز باشد، آنگاه تابع $g(f(z))$ بر D تحلیلی و تک‌ارز است.*

قضیه ۱.۵.۴. *فرض کنید $f(z)$ تقریبا محدب باشد ، آنگاه $f(z)$ تک‌ارز است.*

برهان. چون $f(z)$ تقریبا محدب است. ازتعریف (۱.۵.۱) تابع $g(z) \in C$ موجود است به‌طوری‌که:

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0 \quad (z \in U)$$

حال فرض کنید D تصویر U تحت تابع $g(z)$ باشد، قرار دهید $\phi(z) = f(g^{-1}(z))$ دراین‌صورت $f(z) = \phi(g(z))$ و بنابراین $f'(z) = \phi'(g(z))g'(z)$ پس در میدان محدب D داریم:

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} = Re\{\phi'(g(z))\} > 0$$

بنابراین از لم (۱.۵.۲) نتیجه می‌شود تابع $\phi(z)$ در D تک‌ارز است و از آنجایی که تابع $g(z)$ بر U تحلیلی و تک‌ارز است با به‌کاربردن قضیه (۱.۵.۳) درمی‌یابیم که تابع $f(z)$ بر U تک‌ارز است. □

تذکر: از قضیه (۱.۵.۴) نتیجه می‌شود K زیررده‌ای از رده S است.

قضیه ۱.۵.۵. *فرض کنید* $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ *تقریبا محدب باشد، آنگاه برای هر* n ، $|a_n|\leq n$.

برهان. فرض کنید $g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n$ در C باشد به‌طوری‌که تابع

$$p(z)=\frac{f'(z)}{g'(z)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nz^n \qquad (17.1)$$

قسمت حقیقی مثبت داشته باشد. با ضرب طرفین رابطه (۱۷.۱) در $g'(z)$ و برابر گرفتن ضرایب به‌دست می‌آید

$$na_n=nb_n+(n-1)\alpha_1b_{n-1}+(n-2)\alpha_2b_{n-2}+\ldots+2\alpha_{n-2}b_2+\alpha_{n-1} \qquad (18.1)$$

به موجب قضیه (۱۴.۱.۱) ، برای $k=1,2,\ldots$ داریم:

$$|\alpha_k|\leq 2 \qquad (19.1)$$

چون $g(z)\in C$ از قضیه (۶.۴.۱) برای $k=2,3,\ldots$ داریم:

$$|b_k|\leq 1 \qquad (20.1)$$

با به‌کاربردن نامساوی مثلث در (۱۸.۱) و استفاده از (۱۹.۱) و (۲۰.۱) داریم:

$$n|a_n|\leq n|b_n|+(n-1)|\alpha_1||b_{n-1}|+\ldots+|\alpha_{n-1}|$$

$$\leq n+2[(n-1)+(n-2)|+\ldots+1]$$

$$=n+\frac{2(n-1)n}{2}=n^2$$

بنابراین $|a_n|\leq n$. □

تذکر: رده K شامل زیررده‌های زیر می‌باشد:

(۱):تابع محدب $f(z)$ تقریبامحدب است؛ قراردهید $g(z)=f(z)$ دراین‌صورت :

$$Re\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\}=1>0$$

که از تعریف (۱.۵.۱) نتیجه می‌شود تابع $f(z)$ تقریبا محدب است.

(۲):هرتابعی که مشتق آن دارای قسمت حقیقی مثبت باشد تقریبا محدب است قراردهید، $g(z)=z$ ، $g\in C$

زیرا :

$$Re\left\{1+z\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right\}=1>0$$

به‌علاوه:

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\}=Re\{f'(z)\}>0$$

که از تعریف (۱.۵.۱) نتیجه می‌شود $f(z)$ تقریبا محدب است.

(۳):تابع ستاره‌گون $f(z)$ تقریبا محدب است. قراردهیم $g(z)=\int_0^z(\frac{f(\zeta)}{\zeta})d\zeta$ تابع $g(z)$ محدب است زیرا:

$$Re\{1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\}=Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}>0$$

باجایگذاری $f'(z)$و$g'(z)$ درعبارت $\frac{f'(z)}{g'(z)}$ داریم :

$$Re\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\}=Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\}>0$$

که ازتعریف (۱.۵.۱) نتیجه می‌شود تابع $f(z)$ تقریبا محدب است.

مثال ۱.۵.۶. تابع $f(z)=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3$ تقریبا محدب است برای $f(z)$ تابع $g(z)=-\log(1-z)$ را متناظر می‌کنیم، تابع $f(z)$ در C قرار دارد زیرا:

$$Re\{1+z\frac{g''(z)}{g'(z)}\}=Re\{1+\frac{z}{1-z}\}>\frac{1}{2}$$

و

$$Re\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\}=Re\{(1+z+z^2)(1-z)\}=Re\{1-z^2\}>0$$

پس از تعریف (۱.۵.۱) نتیجه می‌شود تابع $f(z)$ تقریبا محدب است.

فصل ۲

شرایط کافی برای توابع ستاره‌گون از مرتبه α

۱.۲ رده‌ی $S^*(\beta)$

فرض کنید A_n رده‌ی همه توابع $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + \cdots$ باشد که در $\Delta = \{z; |z| < 1\}$ تحلیلی هستند دراین‌صورت $A_1 = A$ که در آن A همان مجموعه‌ای است که در قرارداد بخش (۱.۱) بیان شد.

قضیه ۱.۱.۲. *اگر $\alpha \geq 0$ و $f(z) \in A$ درشرط*

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right)\right\} > -\frac{\alpha}{2}, \qquad (z \in \Delta)$$

صدق کند، آنگاه $f(z) \in S^*$.

برهان. [۹] $\square$

قضیه ۲.۱.۲. *اگر $\rho = 2/2443697$ و $f(z) \in A$ در شرط*

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right| < \rho, \qquad (z \in \Delta)$$

صدق کند، آنگاه $f(z) \in S^*$.

برهان. [۹] $\square$

در این‌جا بعضی از شرایط کافی برای توابعی که ستاره‌گون از مرتبه β هستند را بیان می‌کنیم. برای اثبات قضایا، به لم زیر نیاز داریم:

لم ۳.۱.۲. *فرض کنید Ω یک مجموعه در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ و Φ یک نگاشت از $\mathbb{C}^{۲}\times\Delta$ به $\mathbb{C}$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $z\in\Delta$ و برای همه اعداد حقیقی x و y که در شرط $y\leq -n(۱+x^{۲})/۲$ صدق می‌کند داشته باشیم $\Phi(ix,y,z)\notin\Omega$. اگر تابع $p(z)=۱+c_nz^n+\cdots$ در Δ تحلیلی و $\Phi(p(z),zp'(z),z)\in\Omega$ برای همه $z\in\Delta$، آنگاه $Rep(z)>۰$.*

برهان. [۱۰] $\square$

قضیه ۴.۱.۲. *اگر $f(z)\in A_n$ در شرط زیر صدق کند*

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+۱\right)\right\}>\alpha\beta\left[\beta+\frac{n}{۲}-۱\right]+\left[\beta-\frac{\alpha n}{۲}\right],\qquad (z\in\Delta,۰\leq\alpha,\beta\leq ۱),$$

آنگاه $f(z)\in S^*(\beta)$.

برهان. $p(z)$ را به‌صورت $(۱-\beta)p(z)+\beta=\frac{zf'(z)}{f(z)}$ تعریف می کنیم.

آنگاه $p(z)=۱+c_nz^n+\cdots$ در Δ تحلیلی می‌باشد.

محاسبه نشان می‌دهد که

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{(۱-\beta)zp'(z)+[(۱-\beta)p(z)+\beta]^{۲}-[(۱-\beta)p(z)+\beta]}{(۱-\beta)p(z)+\beta}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+۱\right)&=\alpha(۱-\beta)zp'(z)+\alpha(۱-\beta)^{۲}p^{۲}(z)\\&+(۱-\beta)(۱+۲\alpha\beta-\alpha)p(z)+\beta\left[\alpha\beta+۱-\alpha\right]\\&=\Phi(p(z),zp'(z),z),\end{aligned}$$

درحالی‌که

$$\Phi(r,s,t)=\alpha(۱-\beta)s+\alpha(۱-\beta)^{۲}r^{۲}+(۱-\beta)(۱+۲\alpha\beta-\alpha)r+\beta\left[\alpha\beta+۱-\alpha\right].$$

برای همه اعداد حقیقی x و y که در شرط $y \leq \frac{-n(1+x^2)}{2}$ صدق می‌کنند داریم:

$$\begin{aligned}
Re\Phi(ix,y,z) &= \alpha(1-\beta)y - \alpha(1-\beta)^2x^2 + \beta\left[\alpha\beta+1-\alpha\right] \\
&\leq -\frac{\alpha}{2}(1-\beta)n - \left[\frac{n\alpha}{2}(1-\beta) + \alpha(1-\beta)^2\right]x^2 + \beta\left[\alpha\beta+1-\alpha\right] \\
&= -\frac{\alpha}{2}(1-\beta)n - \frac{\alpha(1-\beta)}{2}(n+2-2\beta)x^2 + \beta(\alpha\beta+1-\alpha) \\
&\leq \beta(\alpha\beta+1-\alpha) - \frac{\alpha}{2}(1-\beta)n \\
&= \alpha\beta\left(\beta+\frac{n}{2}-1\right) + \left(\beta-\frac{n\alpha}{2}\right).
\end{aligned}$$

فرض کنید $\Omega = \left\{w; Rew > \alpha\beta\left(\beta+\frac{n}{2}-1\right) + \left(\beta-\frac{n\alpha}{2}\right)\right\}$.

آنگاه $\Phi(p(z),zp'(z),z) \in \Omega$ و $z \in \Delta$. حال با استفاده از لم (۳.۱.۲) نتیجه حاصل می‌شود. □

با قرار دادن $\beta = 0$ و $n = 1$ در قضیه بالا، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۵.۱.۲. *اگر $\alpha \geq 0$ و $f(z) \in A$ در شرط*

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\right)\right\} > -\frac{\alpha}{2}, \qquad (z\in\Delta)$$

صدق کند، آنگاه $f(z) \in S^*$.

برهان. [۹] □

با قرار دادن $\beta = \frac{\alpha}{2}$ و $n = 1$، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۶.۱.۲. *اگر $0 < \alpha \leq 2$ و $f(z) \in A$ در شرط*

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\right)\right\} > -\frac{\alpha^2}{4}(1-\alpha), \qquad (z\in\Delta)$$

صدق کند، آنگاه $f(z) \in S^*(\frac{\alpha}{2})$.

برهان. [۹] □

تذکر: شایان ذکر است که در اثبات قضیه (۴.۱.۲) ثابت کردیم که:

اگر $p(z) = 1 + c_n z^n + \cdots$ در Δ تحلیلی باشد و در شرط زیر صدق کند

$$Re\left(\alpha(1-\beta)zp'(z) + \alpha(1-\beta)^2 p^2(z) + (1-\beta)(1+2\alpha\beta-\alpha)p(z) + \beta\left[\alpha\beta + 1 - \alpha\right]\right) > \alpha\beta\left[\beta + \frac{n}{2} - 1\right] + \left(\beta - \frac{\alpha n}{2}\right),$$

آنگاه $Rep(z) > 0$.

قضیه ۷.۱.۲. *[۱۷] فرض کنید $\alpha \geq 0$ و $0 \leq \beta < 1$. اگر $f(z) \in A_n$ در شرط زیر صدق کند*

$$Re\left\{\frac{f(z)}{z}\left(\alpha\frac{zf'(z)}{f(z)} + 1 - \alpha\right)\right\} > -\frac{n}{2}\alpha(1-\beta) + \beta, \qquad (z \in \Delta),$$

آنگاه

$$Re\frac{f(z)}{z} > \beta$$

در حالت خاص نتیجه زیر را داریم:

اگر $\alpha \geq 0$ و $f(z) \in A$ در شرط

$$Re\left\{f'(z) + \alpha z f''(z)\right\} > -\frac{\alpha}{2}, \qquad (z \in \Delta),$$

صدق کند، آنگاه $Ref'(z) > 0$.

قضیه ۸.۱.۲. *فرض کنید $0 \leq \beta < 1$ و $a = (\frac{n}{2} + 1 - \beta)^2$ و $b = (\frac{n}{2} + \beta)^2$ در شرط $(a+b)\beta^2 < b(1-2\beta)$ صدق کنند. فرض کنید t_0 ریشه حقیقی مثبت از معادله*

$$2a(1-\beta)^2 t^2 + \left[3a\beta^2 + b(1-\beta)^2\right]t + \left[(a+2b)\beta^2 - (1-\beta)^2 b\right] = 0$$

باشد و همچنین

$$\rho^2 = \frac{(1-\beta)^3(1+t_0)^2(at_0+b)}{\beta^2 + (1-\beta)^2 t_0}.$$

اگر $f(z) \in A_n$ در شرط زیر صدق کند

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right| \leq \rho, \qquad z \in \Delta,$$

آنگاه $f(z) \in S^*(\beta)$.

برهان. $p(z)$ را به‌صورت $(1-\beta)p(z)+\beta=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ تعریف می‌کنیم.

آنگاه $p(z)=1+c_nz^n+\cdots$ در Δ تحلیلی است. محاسبه نشان می‌دهد که

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{(1-\beta)zp'(z)+[(1-\beta)p(z)+\beta]^2-[(1-\beta)p(z)+\beta]}{(1-\beta)p(z)+\beta}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}&\frac{zf''(z)}{f'(z)}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)\\&=\frac{(1-\beta)(p(z)-1)}{(1-\beta)p(z)+\beta}\left[(1-\beta)zp'(z)+[(1-\beta)p(z)+\beta]^2-[(1-\beta)p(z)+\beta)]\right]\\&=\Phi(p(z),zp'(z),z).\end{aligned}$$

آنگاه برای همه اعداد حقیقی x و y که در شرط $y\le-\dfrac{n(1+x^2)}{2}$ صدق کند، داریم:

$$\begin{aligned}|\,\Phi(ix,y,z)\,|^2&=\frac{(1-\beta)^2(1+x^2)}{\beta^2+(1-\beta)^2x^2}\left\{\left[(1-\beta)y-\beta+\beta^2-(1-\beta)^2x^2\right]^2+[2\beta(1-\beta)-(1-\beta)]^2x^2\right\}\\&=\frac{(1-\beta)^2(1+t)}{\beta^2+(1-\beta)^2t}\left\{\left[(1-\beta)y-\beta+\beta^2-(1-\beta)^2t\right]^2+[2\beta(1-\beta)-(1-\beta)]^2t\right\}\\&=g(t,y),\end{aligned}$$

درحالی‌که $t=x^2>0$ و $y\le-\dfrac{n(1+t)}{2}$. چون

$$\frac{\partial g}{\partial y}=2\frac{(1-\beta)^3(1+t)}{\beta^2+(1-\beta)^2t}\left[(1-\beta)y-\beta+\beta^2-(1-\beta)^2t\right]<0,$$

داریم:

$$g(t,y)\ge g\left(t,-\frac{n}{2}(1+t)\right)=h(t).$$

توجه کنید که

$$h(t)=\frac{(1-\beta)^3(1+t)^2}{\beta^2+(1-\beta)^2t}\left[t\left(\frac{n}{2}+1-\beta\right)^2+\left(\frac{n}{2}+\beta\right)^2\right].$$

همچنین واضح است که $h'(-1)=0$ و دو ریشه دیگر $h'(t)=0$ از رابطهٔ زیر بدست می‌آید

$$2a(1-\beta)^2t^2+\left[3a\beta^2+b(1-\beta)^2\right]t+\left[(a+2b)\beta^2-(1-\beta)^2b\right]=0,$$

در حالی‌که $a=(\frac{n}{۲}+۱-\beta)^۲$ و $b=(\frac{n}{۲}+\beta)^۲$. چون $t_۰$ ریشه مثبت این معادله است داریم $h(t)\geq h(t_۰)$ و بنابراین

$$|\Phi(ix,y,z)|^۲\geq h(t_۰).$$

فرض کنید $\Omega=\{w, |w|<\rho\}$. آنگاه برای همه اعداد حقیقی x و $y\leq -\frac{n(۱+x^۲)}{۲}$ و $z\in\Delta$
$\Phi(p(z),zp'(z),z)\in\Omega$ و $\Phi(ix,y,z)\notin\Omega$. بنابراین با استفاده از لم (۳.۱.۲) نتیجه حاصل می‌شود.

$\square$

اگر قرار دهید $n=۱$ و $\beta=۰$، داریم $t_۰=\frac{\sqrt{۷۳}-۱}{۳۶}$ و بنابراین نتیجه زیر بدست می‌آید:

نتیجه ۹.۱.۲. *اگر* $\rho^۲=\frac{۸۲۷+۷۳\sqrt{۷۳}}{۲۸۸}$ *و* $f(z)\in A$ *در شرط*

$$|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-۱\right)|<\rho,\qquad (z\in\Delta),$$

صدق کند، آنگاه $f(z)\in S^*$.

برهان. [۹] $\square$

۲.۲ زیررده ی $S_i(\alpha,a)$

فرض کنید $S_۱(\alpha,a)$ و $S_۲(\alpha,a)$ و $S_۳(\alpha,a)$ زیرفضاهایی از Sشامل توابعی باشند که در شرط $|\frac{zf'(z)}{f(z)}-a|<a-\alpha$، $۰\leq\alpha<۱$ صدق می‌کنند. به‌طوری‌که به‌ترتیب روابط $۱\leq a\leq ۲$ و $a>۲$ و $\frac{۱+\alpha}{۲}<a<۱$ برقرار باشند.

واضح است که $S_i(\alpha,a)\subset S^*(\alpha)$ و $S_i(\alpha,a)\subseteq S_i(\alpha,b)(a\leq b)$ برای $i=۱,۲,۳$.

حال شرایط کافی را با استفاده از زیررده‌های $S_i(\alpha,a)$، $i=۱,۲,۳$ از $S^*(\alpha)$ بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۲. *فرض کنید* $f(z)\in S$ *و* $۰\leq\alpha<۱$ *و* $۰\leq a\leq ۲$. *اگر* $\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n|\leq ۱-\alpha$ *آنگاه* $f(z)\in S_۱(\alpha,a)$.

برهان. چون

$$\begin{aligned}
\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - a \right| &= \left| \frac{۱ - a + \sum_{n=۲}^{\infty}(n-a)a_n z^{n-۱}}{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱}} \right| \\
&= \left| \frac{a - ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}(n-a)a_n z^{n-۱}}{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱}} \right| \\
&\leq \frac{a - ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty}(n-a) \mid a_n \mid\mid z \mid^{n-۱}}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} \mid a_n \mid\mid z \mid^{n-۱}} \\
&\leq \frac{a - ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty}(n-a) \mid a_n \mid}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} \mid a_n \mid}
\end{aligned}$$

عبارت آخر ازبالاکراندار به $a - \alpha$ می‌باشد. اگر

$$a - ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty}(n-a) \mid a_n \mid \leq (a-\alpha)(۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} \mid a_n \mid) \qquad (۱.۲)$$

آنگاه چون فرض قضیه هم ارز با نامساوی (۱.۲) است، قضیه اثبات می‌شود. □

قضیه ۲.۲.۲. *فرض کنید* $f(z) \in S$ *و* $۰ \leq \alpha < ۱$ *و* $۲ < a$*. دراین‌صورت اگر*

$$\sum_{n=۲}^{j}(۲a - n - \alpha) \mid a_n \mid + \sum_{n=j+۱}^{\infty}(n-\alpha) \mid a_n \mid \leq ۱ - \alpha \qquad j < a \leq j+۱$$

آنگاه $f(z) \in S_۲(\alpha, a)$.

برهان. چون

$$\begin{aligned}
\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - a \right| &= \left| \frac{a - ۱ + \sum_{n=۲}^{j}(a-n)a_n z^{n-۱} - \sum_{n=j+۱}^{\infty}(n-a)a_n z^{n-۱}}{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱}} \right| \\
&\leq \frac{a - ۱ + \sum_{n=۲}^{j}(a-n) \mid a_n \mid\mid z \mid^{n-۱} + \sum_{n=j+۱}^{\infty}(n-a) \mid a_n \mid\mid z \mid^{n-۱}}{۱ - \sum_{n=۲}^{j} \mid a_n \mid\mid z \mid^{n-۱} - \sum_{n=j+۱}^{\infty} \mid a_n \mid\mid z \mid^{n-۱}} \\
&\leq \frac{a - ۱ + \sum_{n=۲}^{j}(a-n) \mid a_n \mid + \sum_{n=j+۱}^{\infty}(n-a) \mid a_n \mid}{۱ - \sum_{n=۲}^{j} \mid a_n \mid - \sum_{n=j+۱}^{\infty} \mid a_n \mid}
\end{aligned}$$

عبارت آخر ازبالاکراندار به $a - \alpha$ می‌باشد.اگر

$$a - ۱ + \sum_{n=۲}^{j}(a-\alpha) \mid a_n \mid + \sum_{n=j+۱}^{\infty}(n-\alpha) \mid a_n \mid \leq (a-\alpha)(۱ - \sum_{n=۲}^{j} \mid a_n \mid - \sum_{n=j+۱}^{\infty} \mid a_n \mid). \quad (۲.۲)$$

چون نامساوی (۲.۲) هم ارز با فرض قضیه است پس اثبات تمام است. □

قضیه ۲.۲.۳. *فرض کنید $f(z) \in S$ و $0 \leq \alpha < 1$ و $1 < a < \frac{1+\alpha}{2}$، دراین‌صورت اگر*

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha) \mid a_n \mid\leq 2a-1-\alpha$$

آنگاه $f(z) \in S_3(a,\alpha)$.

برهان. [۲۰] □

تعریف ۲.۲.۴. $\tilde{S_1}(\alpha,a)$ را زیررده‌ای از $S(\alpha,a)$، که $1 \leq a \leq 2$ و $0 \leq \alpha < 1$، شامل توابعی درنظر می‌گیریم به‌طوری‌که در شرط زیر صدق می‌کنند.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha) \mid a_n \mid\leq 1-\alpha \tag{۲.۳}$$

مثال ۲.۲.۵. برای تابع $f(z)=z+\frac{1-\alpha}{n-\alpha}z^n$، چون $f(z)$ متعلق به $S(\alpha,a)$ است و در نامساوی(۲.۳) صدق می‌کند پس این تابع متعلق به $\tilde{S_1}(\alpha,a)$ است. بنابراین $\tilde{S_1}(\alpha,a)$ ناتهی است.

قضیه ۲.۲.۶. *اگر $1 \leq a \leq 2$ و $0 \leq \alpha < 1$ و $f(z) \in \tilde{S_1}(\alpha,a)$، آنگاه*

$$\mid z \mid -\frac{1-\alpha}{2-\alpha} \mid z \mid^2\leq\mid f(z) \mid\leq\mid z \mid +\frac{1-\alpha}{2-\alpha} \mid z \mid^2$$

به‌ویژه تساوی برای تابع $f(z)=z+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}z^2$ برقرار است.

برهان. با استفاده از فرض داریم:

$$(2-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty} \mid a_n \mid\leq \sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha) \mid a_n \mid\leq 1-\alpha,$$

یعنی

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mid a_n \mid\leq \frac{1-\alpha}{2-\alpha}.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
| f(z) | &\leq | z | + \sum_{n=2}^{\infty} | a_n || z |^n \\
&\leq | z | + | z |^2 \sum_{n=2}^{\infty} | a_n | \\
&\leq | z | + | z |^2 \frac{1-\alpha}{2-\alpha},
\end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned}
| f(z) | &\geq | z | - \sum_{n=2}^{\infty} | a_n || z |^n \\
&\geq | z | - | z |^2 \sum_{n=2}^{\infty} | a_n | \\
&\geq | z | - | z |^2 \frac{1-\alpha}{2-\alpha}.
\end{aligned}$$

□

تعریف ۷.۲.۲. $\tilde{S_2}(\alpha, a)$ را زیررده‌ای از $S(\alpha, a)$، که در آن $a > 2$ و $0 \leq \alpha < 1$، شامل توابعی درنظر می‌گیریم که به ازای $j < a \leq j+1$ در شرط زیر صدق می‌کنند.

$$\sum_{n=2}^{j}(2a - n - \alpha) | a_n | + \sum_{n=j+1}^{\infty} (n - \alpha) | a_n | \leq 1 - \alpha.$$

مثال ۸.۲.۲. فرض کنید $2 \leq k \leq j$ و $j+1 \leq l < \infty$. دراین‌صورت تابع

$$f(z) = z + \frac{1-\alpha}{2(2a-k-\alpha)} z^k + \frac{1-\alpha}{2(l-\alpha)} z^l$$

به $\tilde{S_2}(\alpha, a)$ تعلق دارد. بویژه $\tilde{S_2}(\alpha, a)$ ناتهی است.

قضیه ۹.۲.۲. *اگر* $f(z) \in \tilde{S_2}(\alpha, a)(0 \leq \alpha < 1, a > 2)$، *آنگاه*

$$| z | - \frac{1-\alpha}{2a-j-\alpha} | z |^2 \leq | f(z) | \leq | z | + \frac{1-\alpha}{2a-j-\alpha} | z |^2, \tag{۴.۲}$$

برای $a - \frac{1}{2} \leq j < a$. و

$$| z | - \frac{1-\alpha}{j+1-\alpha} | z |^2 \leq | f(z) | \leq | z | + \frac{1-\alpha}{j+1-\alpha} | z |^2, \tag{۵.۲}$$

برای $a - ۱ \le j < a - \frac{۱}{۲}$.

برهان. چون $۲a - n - \alpha$ و $n - \alpha$ به‌ترتیب افزایشی و کاهشی هستند (برای n) با استفاده از فرض داریم:

$$(۲a - j - \alpha)\sum_{n=۲}^{j} | a_n | + (j + ۱ - \alpha) \sum_{n=j+۱}^{\infty} | a_n | \le ۱ - \alpha.$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} | a_n | \le \frac{۱ - \alpha}{۲a - j - \alpha} \qquad (a - \frac{۱}{۲} \le j < a) \tag{۶.۲}$$

و

$$\sum_{n=۲}^{\infty} | a_n | \le \frac{۱ - \alpha}{j + ۱ - \alpha} \qquad (a - ۱ \le j < a - \frac{۱}{۲}) \tag{۷.۲}$$

با استفاده از (۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned} | f(z) | &\le | z | + \sum_{n=۲}^{\infty} | a_n || z |^n \\ &\le | z | + | z |^۲ \sum_{n=۲}^{\infty} | a_n | \\ &\le | z | + | z |^۲ \frac{۱ - \alpha}{۲a - j - \alpha}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} | f(z) | &\ge | z | - \sum_{n=۲}^{\infty} | a_n || z |^n \\ &\ge | z | - | z |^۲ \sum_{n=۲}^{\infty} | a_n | \\ &\ge | z | - | z |^۲ \frac{۱ - \alpha}{۲a - j - \alpha}. \end{aligned}$$

رابطه (۵.۲) نیز به طریق مشابه اثبات می‌شود. □

تعریف ۱۰.۲.۲. $\tilde{S}_۳(\alpha, a)$ را زیررده‌ای از $S(\alpha, a)$، که در آن $۱ < a < \frac{۱ + \alpha}{۲}$ و $۰ \le \alpha < ۱$، شامل

توابعی درنظر می‌گیریم به‌طوری‌که در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha) \leq 2a-1-\alpha.$$

آنگاه زیررده $\tilde{S}_3(\alpha,a)$ ناتهی است چون تابع $f(z)=z+\frac{2a-1-\alpha}{n-\alpha}z^n$ در $\tilde{S}_3(\alpha,a)$ قرار دارد.

قضیه ۱۱.۲.۲. *اگر* $(1>a>\frac{1+\alpha}{2}, 1>\alpha\geq 0)$ $f(z)\in\tilde{S}_3(\alpha,a)$ *آنگاه*

$$|z|-\frac{2a-1-\alpha}{2-\alpha}|z|^2\leq|f(z)|\leq|z|+\frac{2a-1-\alpha}{2-\alpha}|z|^2.$$

تساوی برای تابع $f(z)=z+\frac{2a-1-\alpha}{2-\alpha}z^2$ *برقرار است.*

برهان. [۲۰] □

۳.۲ رده‌ی $SS^*(\alpha)$

تعریف ۱.۳.۲. اگر $0<\alpha\leq 1$، تابع $f(z)\in A$ ستاره‌گون قوی از مرتبه α در U نامیده می‌شود اگر و فقط اگر در شرط

$$|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}|<\frac{\pi}{2}\alpha \qquad (z\in U)$$

صدق کند.

$SS^*(\alpha)$ را زیررده‌ای از A شامل همه توابع ستاره‌گون قوی از مرتبه α در U در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۳.۲. اگر α یک عدد حقیقی باشد، $f(z)\in A$، α -محدب در U نامیده می‌شود اگر در شرط

$$Re\left\{(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})\right\}>0 \qquad (z\in U) \qquad (۸.۲)$$

صدق کند.

$M(\alpha)$ را زیررده‌ای از A شامل همه توابع α - محدب در U در نظر می‌گیریم.

قضیه ۳.۳.۲. [۱۱] *اگر* $f(z)\in M(\alpha)$، *آنگاه* $f(z)\in S^*$. *به‌علاوه اگر* $\alpha\geq 1$، *آنگاه* $f(z)\in C$.

قضیه ۴.۳.۲. [۱۱] اگر $f(z) \in M(\alpha)$ و $\alpha \geq 0$، آنگاه $f(z) \in S^*(\beta(\alpha))$ درحالی‌که

$$\beta(\alpha) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \alpha < 1 \\ \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha})}{\sqrt{\pi}\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})} & 1 \leq \alpha \end{cases}$$

قضیه ۵.۳.۲. [۱۲] اگر $f(z) \in A$ در شرط

$$\left| \arg \left\{ (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}) \right\} \right| < \frac{\pi}{2}\gamma \qquad (z \in U)$$

صدق کند درحالی‌که

$$\tan \frac{\pi}{2}\gamma = \tan \frac{\pi}{2}\beta + \frac{\alpha\beta}{(1-\beta)\cos \frac{\pi}{2}\beta} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1+\beta}{2}}$$

و $0 < \beta < 1$، آنگاه $f(z) \in SS^*(\beta)$.

حال شرایط را روی α و β و γ، بررسی می‌کنیم به‌طوری‌که

$$\left| (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) - \gamma \right| < \gamma \qquad (z \in U)$$

نتیجه دهد که $f(z) \in SS^*(\beta)$ برقرار است.

لم ۶.۳.۲. فرض کنید $p(z)$ تحلیلی $p(z) \neq 0$ در U و $p(0) = 1$. فرض کنید یک نقطه $z_0 \in U$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $|\arg p(z)| < \frac{\pi\alpha}{2}$ برای $|z| < |z_0|$ و $|\arg p(z_0)| = \frac{\pi\alpha}{2}$ درحالی‌که $\alpha > 0$. آنگاه داریم: $\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = ik\alpha$ که

$$\begin{cases} k \geq \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}) \geq 1 & \arg p(z_0) = \frac{\pi\alpha}{2} \\ k \leq -\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}) \leq -1 & \arg p(z_0) = -\frac{\pi\alpha}{2} \end{cases}$$

و $a > 0$ و $p(z_0)^{\frac{1}{\alpha}} = \pm ia$.

قضیه ۷.۳.۲. اگر $f(z) \in A$ در شرط

$$\left| (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}) - \gamma \right| < \gamma \qquad (z \in U) \qquad (۹.۲)$$

صدق کند، درحالی‌که

$$\gamma = \frac{\alpha\beta(1+\sin\frac{\pi}{2}\beta)}{\cos\frac{\pi}{2}\beta}$$

$0 < \beta < 1$ و $\alpha > 0$ آنگاه، $f(z) \in SS^*(\beta)$.

برهان. قرار می‌دهیم $p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$. از (۹.۲) داریم: $f(z) \in S^*$
بنابراین $p(z) \neq 0$ در U. با مشتق‌گیری لگاریتمی از (۱۰.۲) داریم:

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{zp'(z)}{p(z)}$$

یا

$$(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = p(z) + \alpha\frac{zp'(z)}{p(z)}.$$

اگر یک نقطه $z_o \in U$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$|\arg p(z)| < \frac{\pi}{2}\beta \qquad (|z| < |z_0|)$$

و

$$|\arg p(z_0)| = \frac{\pi}{2}\beta,$$

آنگاه از لم (۶.۳.۲) داریم:

$$\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = i\beta k$$

درحالی‌که

$$k \geq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 1$$

وقتی که $\arg p(z_0) = \frac{\pi\beta}{2}$

و

$$k \leq -\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \leq -1$$

وقتی که $\arg p(z_0) = -\frac{\pi\beta}{2}$

درحالی‌که $p(z_\circ)^{\frac{1}{\beta}} = \pm ia$ و $a > \circ$.

ابتدا فرض کنید $p(z_\circ)^{\frac{1}{\beta}} = ia$، آنگاه داریم:

$$p(z_\circ) + \alpha\frac{z_\circ p'(z_\circ)}{p(z_\circ)} = a^\beta e^{i\frac{\pi}{2}\beta} + i\alpha\beta k$$

درحالی‌که

$$k \geq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 1$$

و از این‌جا داریم:

$$\begin{aligned}
Re\left(p(z_\circ) + \alpha\frac{z_\circ p'(z_\circ)}{p(z_\circ)}\right)^{-1} &= \frac{a^\beta \cos\frac{\pi}{2}\beta}{a^{2\beta}\cos^2\frac{\pi}{2}\beta + (a^\beta \sin\frac{\pi}{2}\beta + \alpha\beta k)^2} \\
&\leq \frac{a^\beta \cos\frac{\pi}{2}\beta}{a^{2\beta}\cos^2\frac{\pi}{2}\beta + (a^\beta \sin\frac{\pi}{2}\beta + \alpha\beta)^2} \\
&= \frac{a^\beta \cos\frac{\pi}{2}\beta}{a^{2\beta} + 2a^\beta\alpha\beta\sin\frac{\pi}{2}\beta + \alpha^2\beta^2}
\end{aligned}$$

حال فرض کنید

$$g(t) = \frac{t\cos\frac{\pi}{2}\beta}{t^2 + 2t\alpha\beta\sin\frac{\pi}{2}\beta + \alpha^2\beta^2}$$

درحالی‌که $t > \circ$.

آنگاه با یک محاسبه ساده داریم:

$$g'(t) = \frac{(\alpha^2\beta^2 - t^2)\cos\frac{\pi}{2}\beta}{(t^2 + 2t\alpha\beta\sin\frac{\pi}{2}\beta + \alpha^2\beta^2)^2}$$

و می‌بینیم که $g(t)$ ماکزیمم مقدار خود را در $t = \alpha\beta$ انتخاب می‌کند. و از این‌جا داریم:

$$\begin{aligned}
Re\left(p(z_\circ) + \alpha\frac{z_\circ p'(z_\circ)}{p(z_\circ)}\right)^{-1} &\leq \frac{\alpha\beta\cos\frac{\pi}{2}\beta}{\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2\sin\frac{\pi}{2}\beta + \alpha^2\beta^2} \\
&= \frac{\cos\frac{\pi}{2}\beta}{2\alpha\beta(1 + \sin\frac{\pi}{2}\beta)}.
\end{aligned}$$

چون

$$|w-h|<h \Leftrightarrow Re(\frac{1}{w}) > \frac{1}{2h},$$

این با فرض قضیه در تناقض است.

برای حالت $p(z_0)^{\frac{1}{\beta}} = -ia$، همان روش بالا را انجام می‌دهیم. □

۴.۲ رده‌ی S_γ^* و C_γ

برای بعضی از عدد مختلط غیرصفر γ، زیررده‌های S_γ^* و C_γ را مانند زیر درنظر می‌گیریم:

$$S_\gamma^* = \{f(z) \in A : Re[1 + \frac{1}{\gamma}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)] > 0 \qquad (\gamma \neq 0; z \in U)\}$$

$$C_\gamma = \{f(z) \in A : Re[1 + \frac{1}{\gamma}(\frac{zf''(z)}{f'(z)})] > 0 \qquad (\gamma \neq 0; z \in u)\}.$$

اگر تابع $f(z)$ به رده‌ی S_γ^* یا C_γ تعلق داشته باشد، می‌گوییم $f(z)$ به‌ترتیب ستاره‌گون یا محدب از مرتبه‌ی عدد مختلط $\gamma(\gamma \neq 0)$ است. آنگاه می‌توانیم ببینیم که

$$S_{1-\alpha}^* = S^*(\alpha), \qquad C_{1-\alpha} = C(\alpha)$$

مثال ۱.۴.۲.

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2\gamma}} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\prod_{j=2}^{n}(j + 2(\gamma - 1))}{(n-1)!} z^n \in S_\gamma^* \qquad (\gamma \neq 0)$$

و

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1-(1-z)^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\prod_{j=2}^{n}(j+2(\gamma-1))}{n!} z^n \in C_\gamma & (\gamma \neq \frac{1}{2}) \\ \log(\dfrac{1}{1-z}) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n} z^n \in C_{\frac{1}{2}} = C(\frac{1}{2}). \end{cases}$$

لم ۲.۴.۲. *[۲۱] یک تابع $p(z) \in P$ در شرط $Rep(z) > 0 (z \in U)$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر*

$$p(z) \neq \frac{x-1}{x+1} \qquad (z \in U)$$

برای x هایی که $|x| = 1$.

لم ۳.۴.۲. یک تابع $f(z) \in A$ در $S^*(\alpha)$ است اگر و فقط اگر

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^{n-1} \neq 0 \qquad (z \in u; |x| = 1) \tag{۱۰.۲}$$

درحالی‌که

$$A_n = \frac{n+1-2\alpha+(n-1)x}{2-2\alpha} a_n.$$

تذکر رابطه (۸.۲) از لم بالا هم ارز است با:

$$\frac{1}{z}\left(f(z) * \frac{z + \dfrac{x+2\alpha-1}{2-2\alpha} z^2}{(1-z)^2}\right) \neq 0 \qquad (z \in U, |z| = 1)$$

درحالی‌که * ضرب هادامارد دو تابع است.

قضیه ۴.۴.۲. [۸] اگر $0 \leq \alpha < 1$ و $\beta \in \mathbb{R}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $f(z) \in A$ در شرط

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{k} (j+1-2\alpha)(-1)^{k-j} \binom{\beta}{k-j} a_j \right\} \binom{\lambda}{n-k} \right|$$
$$+ \left| \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{k} (j-1)(-1)^{k-j} \binom{\beta}{k-j} a_j \right\} \binom{\lambda}{n-k} \right| \leq 2(1-\alpha)$$

صدق کند، آنگاه $f(z) \in S^*(\alpha)$.

قضیه ۵.۴.۲. [۸] اگر $0 \leq \alpha < 1$ و $\beta \in \mathbb{R}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $f(z) \in A$ در شرط

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{k} j(j+1-2\alpha)(-1)^{k-j} \binom{\beta}{k-j} a_j \right\} \binom{\lambda}{n-k} \right|$$
$$+ \left| \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{k} j(j-1)(-1)^{k-j} \binom{\beta}{k-j} a_j \right\} \binom{\lambda}{n-k} \right| \leq 2(1-\alpha)$$

صدق کند، آنگاه $f(z) \in C(\alpha)$.

قضیه ۶.۴.۲. اگر $\beta \in \mathbb{R}$ و $\gamma \in \mathbb{C}(\gamma \neq 0)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $f(z) \in A$ در شرط

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{k} (j-1+2\gamma)(-1)^{k-j} \binom{\beta}{k-j} a_j \right\} \binom{\lambda}{n-k} \right|$$
$$+ \left| \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{k} (j-1)(-1)^{k-j} \binom{\beta}{k-j} a_j \right\} \binom{\lambda}{n-k} \right| \leq 2|\gamma|$$

صدق کند، آنگاه $f(z) \in S_\gamma^*$.

برهان. تابع $p(z)$ را به‌صورت $p(z) = 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)$ برای $f(z) \in A$ در نظر می‌گیریم.

با استفاده از لم (۲.۴.۲) داریم: $f(z) \in S_\gamma^*$ اگر و فقط اگر

$$p(z) = 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right) \neq \frac{x-1}{x+1} \qquad (z \neq U) \tag{۱۱.۲}$$

برای x هایی که $|x| = 1$. برای حالت $z = 0$، لم (۲.۴.۲) برقرار نیست زیرا آن نتیجه می‌دهد که

$$p(0) = 1 \neq \frac{x-1}{x+1} \qquad (|x| = 1).$$

بنابراین رابطه (۹.۲) هم ارز است با

$$2bz + \sum_{n=2}^{\infty} \{(n-1+2\gamma) + x(n-1)\} n^j a_n z^n \neq 0. \tag{۱۲.۲}$$

با تقسیم دو طرف رابطه (۱۰.۲) بر $2\gamma z (z \neq 0)$، به‌دست می‌آوریم:

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n z^{n-1} \neq 0$$

درحالی‌که

$$B_n = \frac{(n-1+2\gamma) + x(n-1)}{2\gamma} n^j a_n \qquad (n \geq 2).$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم که:

$$(1+\sum_{n=2}^{\infty} B_n z^{n-1})(1-z)^\beta (1+z)^\lambda = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k} B_J (-1)^{k-j}\binom{\lambda}{k-j}\right\}\binom{\sigma}{n-k}\right] z^{n-1} \neq 0$$

درحالی‌که $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$ و $B_1 = 1$. بنابراین اگر $f(z)$ در شرط زیر صدق کند

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j-1+2\gamma)(-1)^{k-j}\binom{\lambda}{k-j} a_j\right\}\binom{\sigma}{n-k} \right|$$
$$+ |x| \left| \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(j-1)(-1)^{k-j}\binom{\lambda}{k-j} a_j\right\}\binom{\sigma}{n-k} \right| \leq 2|\gamma|$$

آنگاه $f(z) \in S_\gamma^*$ و اثبات کامل شده است. □

قضیه ۷.۴.۲. اگر $\beta \in \mathbb{R}$ و $\gamma \in \mathbb{C}(\gamma \neq ۰)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $f(z) \in A$ در شرط

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \left| \sum_{k=۱}^{n} \left\{ \sum_{j=۱}^{k} j(j-۱+۲\gamma)(-۱)^{k-j} \binom{\beta}{k-j} a_j \right\} \binom{\lambda}{n-k} \right|$$
$$+ \left| \sum_{k=۱}^{n} \left\{ \sum_{j=۱}^{k} j(j-۱)(-۱)^{k-j} \binom{\beta}{k-j} a_j \right\} \binom{\lambda}{n-k} \right| \leq ۲ \mid \gamma \mid$$

صدق کند، آنگاه $f(z) \in C_\gamma$.

برهان. چون $zf'(z) \in S^*_\gamma$ اگر و فقط اگر $f(z) \in C_\gamma$ و چون $zf'(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} n a_n z^n$ و $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ با جایگزین کردن a_j بوسیله ja_j، قضیه اثبات می‌شود. □

با قراردادن $\beta = \lambda = ۰$ در قضیه (۶.۴.۲) و (۷.۴.۲) نتیجه زیر بدست می‌آید:

نتیجه ۸.۴.۲. اگر $\gamma \in \mathbb{C}(\gamma \neq ۰)$ و $f(z) \in A$ در نامساوی

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \{\mid n-۱+۲\gamma \mid + (n-۱)\} \mid a_n \mid \leq ۲ \mid \gamma \mid$$

صدق کند، آنگاه $f(z) \in S^*_\gamma$.

نتیجه ۹.۴.۲. اگر $\gamma \in \mathbb{C}(\gamma \neq ۰)$ و $f(z) \in A$ در نامساوی

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n \{\mid n-۱+۲\gamma \mid + (n-۱)\} \mid a_n \mid \leq ۲ \mid \gamma \mid$$

صدق کند، آنگاه $f(z) \in C_\gamma$.

۵.۲ رده‌ی $SC(\gamma, \lambda, \beta)$

فرض کنید $SC(\gamma, \lambda, \beta)$ زیررده‌ای از A باشد به‌طوری‌که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$Re\left[۱ + \frac{۱}{\gamma}\left(\frac{z\left[\lambda z f'(z) + (۱-\lambda) f(z)\right]'}{\lambda z f'(z) + (۱-\lambda) f(z)} - ۱\right)\right] > \beta \qquad (۱۳.۲)$$
$$(f(z) \in A; ۰ \leq \lambda \leq ۱; ۰ \leq \beta \leq ۱; \gamma \in \mathbb{C}(\gamma \neq ۰; z \in U)).$$

به‌وضوح روابط زیر برقرار است:

$$SC(\gamma, ۰, ۰) \equiv S^*(\gamma), \qquad SC(\gamma, ۱, ۰) \equiv C(\gamma).$$

قضیه ۱.۵.۲. فرض کنید تابع $f(z) \in A$ بهصورت $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ تعریف شود. اگر تابع $f(z)$ در ردهی $SC(\gamma,\lambda,\beta)$ قرار داشته باشد، آنگاه

$$| a_n | \leq \frac{\prod_{j=0}^{n-2} [j + 2 \mid \gamma \mid (1-\beta)]}{(n-1)! [1+\lambda(n-1)]} \qquad (n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{1\} = \{2,3,\cdots\}). \qquad (۱۴.۲)$$

برهان. فرض کنید $f(z) \in A$ بهصورت $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ داده شده باشد و $F(z)$ بهصورت زیر تعریف شود:

$$F(z) = \lambda z f'(z) + (1-\lambda) f(z) \qquad (f(z) \in A; 0 \leq \lambda \leq 1; z \in U).$$

آنگاه از (۱۱.۲) و تعریف تابع $F(z)$ در بالا داریم:

$$Re\left[1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zF'(z)}{F(z)} - 1\right)\right] > \beta$$

با

$$F(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^k \in A \qquad (A_k = [1+\lambda(k-1)]\, a_k; k \in \mathbb{N}^*).$$

بنابراین با قراردادن

$$\frac{1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zF'(z)}{F(z)} - 1\right) - \beta}{1-\beta} = h(z)$$

یا بهطور معادل

$$zF'(z) = [1 + \gamma(1-\beta)(h(z)-1)]\, F(z), \qquad (۱۵.۲)$$

بهدست میآوریم:

$$h(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \qquad (z \in U). \qquad (۱۶.۲)$$

چون

$$Re(h(z)) > 0 \qquad (0 \leq \beta < 1; \gamma \in \mathbb{C} - \{0\}),$$

نتیجه میگیریم که

$$| c_n | \leq 2 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

همچنین از رابطه (۱۳.۲) و (۱۴.۲) به‌دست می‌آوریم:

$$(n-1)A_n = 2\gamma(1-\beta)\left[1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{n-1}\right].$$

در حالت خاص برای $n = 2, 3, 4$ داریم:

$$A_2 = 2\gamma(1-\beta) \Rightarrow |A_2| \leq 2|\gamma|(1-\beta),$$

$$2A_3 = 1 + A_2 \Rightarrow |A_3| \leq \frac{2|\gamma|(1-\beta)\left[1 + 2|\gamma|(1-\beta)\right]}{2!}$$

و

$$3A_4 = 1 + A_2 + A_3 \Rightarrow |A_4| \leq \frac{2|\gamma|(1-\beta)\left[1 + 2|\gamma|(1-\beta)\right]\left[2 + 2|b|(1-\beta)\right]}{3!}.$$

با استفاده از اصل استقرای ریاضی به‌دست می‌آوریم:

$$|A_n| \leq \frac{\prod_{j=0}^{n-2}\left[j + 2|\gamma|(1-\beta)\right]}{(n-1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^*). \tag{۱۷.۲}$$

به‌علاوه با ارتباط برقرار کردن بین $f(z)$ و $F(z)$ به‌وضوح داریم:

$$A_n = \left[1 + \lambda(n-1)\right] a_n \qquad (n \in \mathbb{N}^*). \tag{۱۸.۲}$$

نامساوی (۱۲.۲) از رابطه (۱۵.۲) و (۱۶.۲) نتیجه می‌شود و اثبات کامل می‌شود. □

با انتخاب مقادیر مناسب برای پارامترهای λ ، β و γ در قضیه بالا نتیجه‌ی زیر بدست می‌آید:

نتیجه ۲.۵.۲. *اگر یک تابع $f(z) \in A$ در رده‌ی $SC(\gamma, \lambda, 0)$ قرار داشته باشد، آنگاه*

$$|a_n| \leq \frac{\prod_{j=0}^{n-2}(j + 2|\gamma|)}{(n-1)!\left[1 + \lambda(n-1)\right]} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

نتیجه ۳.۵.۲. [۱۵] *اگر یک تابع $f(z) \in A$ در رده‌ی $S^*(\gamma)$ قرار داشته باشد، آنگاه*

$$|a_n| \leq \frac{\prod_{j=0}^{n-2}(j + 2|\gamma|)}{(n-1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

نتیجه ۴.۵.۲. [۱۵] *اگر یک تابع $f(z) \in A$ در رده‌ی $C(\gamma)$ قرار داشته باشد، آنگاه*

$$|a_n| \leq \frac{\prod_{j=0}^{n-2}(j + 2|\gamma|)}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

نتیجه ۵.۵.۲. [۱۵] *اگر یک تابع $f(z) \in A$ در ردهی $SC(1-\alpha,\lambda,\beta)$ قرار داشته باشد، آنگاه*

$$| a_n | \leq \frac{\prod_{j=0}^{n-2} [j + 2(1-\alpha)(1-\beta)]}{(n-1)!\,[1+\lambda(n-1)]} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

نتیجه ۶.۵.۲. [۱۹] *اگر یک تابع $f(z) \in A$ در ردهی $S^*(1-\alpha)$ قرار داشته باشد، آنگاه*

$$| a_n | \leq \frac{\prod_{j=0}^{n-2} [j + 2(1-\alpha)]}{(n-1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

نتیجه ۷.۵.۲. [۱۹] *اگر یک تابع $f(z) \in A$ در ردهی $C(1-\alpha)$ قرار داشته باشد، آنگاه*

$$| a_n | \leq \frac{\prod_{j=0}^{n-2} [j + 2(1-\alpha)]}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

قضیه ۸.۵.۲. *فرض کنید تابع $f(z) \in A$ بهصورت $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ تعریف شود. اگر تابع $f(z)$ در ردهی $B(\gamma,\lambda,\beta;\mu)$ قرار داشته باشد، آنگاه*

$$| a_n | \leq \frac{(1+\mu)(2+\mu)\prod_{j=0}^{n-2} [j + 2\,|\gamma|\,(1-\beta)]}{(n-1)!(n+\mu)(n+1+\mu)\,[1+\lambda(n-1)]} \qquad (n \in \mathbb{N}^*). \tag{۱۹.۲}$$

برهان. فرض کنید $f(z) \in A$ بهصورت $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ داده شده باشد. همچنین فرض کنید

$$g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k \in SC(\gamma,\lambda,\beta), \tag{۲۰.۲}$$

بهطوریکه

$$a_n = \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{(n+\mu)(n+1+\mu)} b_n \qquad (n \in \mathbb{N}^*; \mu \in \mathbb{R} \setminus (-\infty,-1]). \tag{۲۱.۲}$$

بنابراین با استفاده از قضیه (۱.۵.۲) بهوضوح بدست میآوریم:

$$| a_n | \leq \frac{(1+\mu)(2+\mu)\prod_{j=0}^{n-2} [j + 2\,|\gamma|\,(1-\beta)]}{(n-1)!(n+\mu)(n+1+\mu)\,[1+\lambda(n-1)]} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

□

تعریف ۹.۵.۲. برای دو تابع $f(z)$ و $g(z)$ که در U تحلیلی هستند، میگوییم $f(z)$ وابسته به $g(z)$ در U است و بهصورت زیر مینویسیم:

$$f(z) \prec g(z) \qquad (z \in U), \tag{۲۲.۲}$$

هرگاه یک تابع شوارتز $\varpi(z)$ تحلیلی در U با

$$\varpi(0) = 0, \mid \varpi(z) \mid < 1 \qquad (z \in U),$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$f(z) = g(\varpi(z)) \qquad (z \in U).$$

در حالت خاص اگر تابع g در U تحلیلی باشد وابستگی بالا هم ارز است با

$$f(0) = g(0), \qquad f(U) \subset g(U).$$

تعریف ۱۰.۵.۲. رده‌ی $S(\lambda, \gamma, A, B)$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S(\lambda, \gamma, A, B) = \left\{ f : f \in A, 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1-\lambda)f(z)} - 1\right) \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz} \qquad (z \in U) \right\}$$

$$(0 \leq \lambda \leq 1; \gamma \in C^* = C \setminus \{0\}; -1 \leq B \leq A \leq 1). \tag{۲۳.۲}$$

تعریف ۱۱.۵.۲. می‌گوییم تابع $f(z) \in A$ به رده‌ی $K(\lambda, \gamma, A, B, m; \mu)$ تعلق دارد اگر در معادله دیفرانسیل از مرتبه‌ی m زیر صدق کند:

$$z^m \frac{d^m w}{dz^m} + \binom{m}{1}(\mu + m - 1) z^{m-1} \frac{d^{m-1} w}{dz^{m-1}} + \cdots + \binom{m}{m} w \prod_{j=0}^{m-1} (\mu + j) = g(z) \prod_{j=0}^{m-1} (\mu + j + 1)$$

$$(w = f(z) \in A; g(z) \in S(\lambda, \gamma, A, B); \mu \in \mathbb{R} \setminus (-\infty, -1]; m \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, \cdots\}). \tag{۲۴.۲}$$

قضیه ۱۲.۵.۲. *فرض کنیم تابع $f(z)$ به‌صورت*

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \tag{۲۵.۲}$$

داده شده باشد. اگر $f(z) \in S(\lambda, \gamma, A, B)$، آنگاه

$$\mid a_n \mid \leq \frac{\prod_{k=0}^{n-2} \left(k + \frac{2 \mid \gamma \mid (A - B)}{1 - B}\right)}{(n-1)! \, [1 + \lambda(n-1)]} \qquad (n \in \mathbb{N}^*) \tag{۲۶.۲}$$

برهان. فرض کنید تابع $F(z)$ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$F(z) = \lambda z f'(z) + (1 - \lambda) f(z) \qquad (z \in U). \tag{۲۷.۲}$$

آنگاه به‌وضوح $F(z)$ یک تابع تحلیلی در U با $F(0) = F'(0) - 1 = 0$ است.

با استفاده از رابطه (۲۳.۲) و (۲۵.۲) به‌دست می‌آوریم:

$$F(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^k \qquad (z \in U),$$

درحالی‌که

$$A_k = [1 + (k-1)\lambda]\, a_k \qquad (k \in \mathbb{N}^*).$$

از تعریف (۹.۵.۲) داریم:

$$1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zF'(z)}{F(z)} - 1\right) \subset g(U), \tag{۲۸.۲}$$

درحالی‌که با استفاده از خاصیت وابستگی که در معادله (۲۱.۲) از تعریف (۱۰.۵.۲) داریم به‌دست می‌آوریم:

$$g(z) = \frac{1 + Az}{1 + Bz} \qquad (z \in U; -1 \leq B < A \leq 1). \tag{۲۹.۲}$$

با قرار دادن

$$h(z) = 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zF'(z)}{F(z)} - 1\right),$$

همچنین نتیجه می‌گیریم که

$$h(0) = g(0) = 1, \qquad h(z) \subset g(U) \qquad (z \in U)$$

برای تابع $g(z)$ که در (۲۷.۲) داده شده است. بنابراین داریم:

$$h(z) = \frac{1 + A\varpi(z)}{1 + B\varpi(z)} \qquad (\varpi(0) = 0; |\, \varpi(z) \,| < 1)$$

و

$$|\, \varpi(z) \,| = \left| \frac{h(z) - 1}{A - Bh(z)} \right| < 1, \qquad h(z) = u + iv, \tag{۳۰.۲}$$

حال با استفاده از (۲۸.۲) داریم:

$$2u(1 - AB) > 1 - A^2 + (1 - B^2)(u^2 + v^2).$$

همچنین چون

$$|\, h(z)\,|^2 \geq [Re(h(z))]^2,$$

داریم:

$$(1-B^2)u^2 - 2(1-AB)u + 1 - A^2 < 0,$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{1-A}{1-B} < u = Re(h(z)) < \frac{1+A}{1+B}.$$

اگر

$$Re(h(z)) > \frac{1-A}{1-B},$$

آنگاه می‌بینیم که

$$|\, c_n \,| \leq 2\left(\frac{A-B}{1-B}\right). \tag{31.2}$$

با به‌کار بردن (۲۶.۲) یا به‌طور معادل داریم:

$$zF'(z) - F(z) = \gamma\,[h(z)-1]\,F(z)$$

و از (۲۹.۲) به‌دست می‌آوریم:

$$(n-1)A_n = \gamma(c_{n-1} + c_{n-2}A_2 + \cdots + c_1 A_{n-1}). \tag{32.2}$$

در حالت خاص وقتی $n = 2, 3, 4$ از (۳۰.۲) به‌دست می‌آید:

$$|\, A_2 \,| \leq 2\,|\,\gamma\,|\,\frac{A-B}{1-B},$$

$$|\, A_3 \,| \leq \frac{2\,|\,\gamma\,|\,\frac{A-B}{1-B}\left(1 + 2\,|\,\gamma\,|\,\frac{A-B}{1-B}\right)}{2!}$$

و

$$|\, A_3 \,| \leq \frac{2\,|\,\gamma\,|\,\frac{A-B}{1-B}\left(1 + 2\,|\,\gamma\,|\,\frac{A-B}{1-B}\right)\left(2 + 2\,|\,\gamma\,|\,\frac{A-B}{1-B}\right)}{3!}.$$

بنابراین با استفاده از اصل استقرای ریاضی داریم:

$$|A_n| \leq \frac{\prod_{k=0}^{n-2}\left(k+2\,|\,\gamma\,|\,\frac{A-B}{1-B}\right)}{(n-1)!}. \qquad (۳۳.۲)$$

به‌علاوه از روابط بین تابع $f(z)$ و تابع $F(z)$ در (۲۵.۲) به‌وضوح داریم:

$$A_n = [1+\lambda(n-1)]\,a_n \qquad (n \in \mathbb{N}^*). \qquad (۳۴.۲)$$

از (۳۱.۲) و (۳۲.۲) نامساوی (۲۴.۲) به‌دست می‌آید و اثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۱۳.۵.۲. *فرض کنید تابع $f(z)$ به‌صورت (۲۵.۲) داده شده باشد. اگر $f(z) \in K(\lambda,\gamma,A,B,m;\mu)$، آنگاه*

$$|a_n| \leq \frac{\prod_{k=0}^{n}\left(k+2\,|\,\gamma\,|\,\frac{A-B}{1-B}\right)\prod_{j=0}^{m-1}(\mu+j+1)}{(n-1)!\,[1+\lambda(n-1)]\prod_{j=0}^{m-1}(\mu+j+n)} \qquad (m,n \in \mathbb{N}^*) \qquad (۳۵.۲)$$

$$(0 \leq \lambda \leq 1; \gamma \in \mathbb{C}^*; -1 \leq B < A \leq 1; \mu \in \mathbb{R} \setminus (-\infty,-1]).$$

برهان. فرض کنید تابع $f(z) \in A$ به‌صورت رابطه (۲۵.۲) داده شده باشد. همچنین فرض کنید

$$g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k \in S(\lambda,\gamma,A,B).$$

از (۲۲.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$a_n = \left(\frac{\prod_{j=0}^{m-1}(\mu+j+1)}{\prod_{j=0}^{m-1}(\mu+j+n)}\right) b_n \qquad (n \in \mathbb{N}^*; \mu \in \mathbb{R} \setminus (-\infty,-1]). \qquad (۳۶.۲)$$

با استفاده از قضیه (۱۲.۵.۲) و رابطه (۳۴.۲)، رابطه (۳۳.۲) به‌دست می‌آید و اثبات کامل می‌شود. □

نتیجه ۱۴.۵.۲. [۴] *فرض کنید تابع $f(z) \in A$ به‌صورت (۲۵.۲) داده شده باشد. دراین‌صورت اگر $f(z) \in S(\lambda,\gamma,1-2\beta,-1) \equiv SC(\gamma,\lambda,\beta)$، آنگاه*

$$|a_n| \leq \frac{\prod_{k=0}^{n-2}(k+2\,|\,\gamma\,|\,(1-\beta))}{(n-1)!\,[1+\lambda(n-1)]} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

نتیجه ۱۵.۵.۲. [۵] *فرض کنید تابع $f(z) \in A$ به‌صورت (۲۵.۲) داده شده باشد. دراین‌صورت اگر $f(z) \in S(\lambda,\gamma,1-2\alpha,-1) \equiv B(0,\lambda,\alpha,b)$، آنگاه*

$$|a_j| \leq \frac{\prod_{k=0}^{j-2}(k+2\,|\,b\,|\,(1-\alpha))}{(j-1)!\,[1+\lambda(j-1)]} \qquad (j \in \mathbb{N}^*).$$

نتیجه ۲.۵.۱۶. [۲۳] *فرض کنید تابع $f(z)\in A$ به‌صورت (۲.۲۵) داده شده باشد. دراین‌صورت اگر*

$$S(\lambda,\gamma,1-2\alpha,-1)\equiv M_g(0,\lambda,b) \text{ و } g(z)=\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\text{، آنگاه}$$

$$|a_j|\leq \frac{\prod_{k=0}^{j-2}(k+2\mid b\mid(1-\alpha))}{(j-1)!\,[1+\lambda(j-1)]}\qquad (j\in\mathbb{N}^*).$$

نتیجه ۲.۵.۱۷. [۴] *فرض کنید تابع $f(z)\in A$ به‌صورت (۲.۲۵) داده شده باشد. دراین‌صورت اگر*

$$f(z)\in K(\lambda,\gamma,1-2\beta,-1,2;\mu)\equiv B(\gamma,\lambda,\beta;\mu)\text{، آنگاه}$$

$$|a_n|\leq \frac{(1+\mu)(2+\mu)\prod_{j=0}^{n-2}(j+2\mid\gamma\mid(1-\beta))}{(n-1)!(n+\mu)(n+\mu+1)\,[1+\lambda(n-1)]}\qquad (n\in\mathbb{N}^*).$$

نتیجه ۲.۵.۱۸. [۲۳] *فرض کنیم تابع $f(z)\in A$ به‌صورت (۲.۲۵) داده شده باشد. دراین‌صورت اگر*

$$f(z)\in K(\lambda,\gamma,1-2\alpha,-1,2;\mu)\equiv \tau(0,\lambda,\alpha,b;u)\text{، آنگاه}$$

$$|a_j|\leq \frac{(1+u)(2+u)\prod_{k=0}^{j-2}(k+2\mid b\mid(1-\alpha))}{(j-1)!(j+u)(j+u+1)\,[1+\lambda(j-1)]}\qquad (j\in\mathbb{N}^*).$$

مراجع

[1] O. Altintas, H.M. Srivastave, Some majorization problems associated with p-valently starlike and convex functions of complex order, East Asian Math. J. 17 (2001) 175-183.

[2] O. Altintas, H. Irmak, H.M. Srivastava, Fractional calculus and certain starlike functions with negative coefficients, Comput, Math. Appl. 30 (2) (1995) 9-15.

[3] O. Altintas, Certain applications of subordination associated with neighborhoods, Hacettepe J. Math. Statist. 39 (2010) 527-534.

[4] O. Altintas, Neighborhoods of certain p-valently analytic functions with negative coefficient, Appl. Math. Comput. 187 (2007) 47-53.

[5] Q. Deng, Certain subclass of analytic functions with complex order, Appl. Math. Comput. 208 (2009) 359 362.

[6] P. L. Duren, Univalent Functions, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1938.

[7] A. W. Goodman, "Univalent Functions," Vol. I, Mariner Publishing Company, Tampa, Florida, 1983.

[8] T. Hayami, S. Owa and H. M. Srivastava, Coefficient inequalities for certain classes of analytic and univalent functions, J. Ineq. Pure and Appl. Math., 8(4) Article 95 (2007), 1-10.

[9] J.-L. Li and S. Owa, Sufficient conditions for starlikeness, Indian J. Pure Appl. Math., 33 (2002), 313-318.

[10] S.S. Miller and P.T. Mocanu, Differtial subordinations and inequalities in the complex plane, J. Differ. Equations, 67 (1987), 199-211.

[11] S. S. Miller, P. T. Mocanu and M. O. Reade, all α -cnvex functions are univalent and starlike, Proc. Amer. Math. Soc., 37 (2) (1973), 553-554.

[12] P. T. Mocanu,Alpha-convex integral operator and strongly starlike functions, Studia Univ. Babes-Bolyai Mathematics, 34, 2, (1989), 18-24.

[13] G. Murugusundaramoorthy, H.M. Srivastava, Neighborhoods of certain classses of analytic functions of complex order, J. Inequal. Pure Appl. Math. 5(2) (2004) 1-8 Article 24 (electronic).

[14] M. A. Nasr and M. K. Aouf, Starlike functions of complex order, J. Natural Sci. Math., Vol.25,No 1 (1985), 1-12.

[15] M.A. Nasr, M.K. Aouf, Radius of convexity for the class of starlike functions of complex order, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ. Sect. A 12 (1983) 153-159.

[16] I. R. Nezhmetdinov and S. Ponnusamy, New coefficient conditions for the starlikeness of analytic function and their applications, Houston J. Math. 31, No. 2 (2005), 587-604.

[17] M. Nunokawa, On the order of strongly starlikeness of strongly convex functions, Proc. Japan. Acad., 69, Ser. A (1993), 234-237.

[18] C. Ramesha, S. Kumar and K.S. Padmanabhan, A sufficient condition for starlikeness, Chinese J. Math., 23 (1995), 167-171.

[19] M.S. Robertson, On the theory of univalent functions, Ann. Math. 37 (1936) 374-408.

[20] H. Silverman,Univalent functions with negative coefficients Proc. Amer. Math. Soc. 51(1975), 109-116.

[21] H. Silverman, E. M. Silvia, and D. Telage, Convolution conditions for convexity, starlikeness and spiral-likeness, Math. Z., 162 (1978), 125-130.

[22] H. Silverman, Complex variables with application. Houghton Mifflinco., Boston. (1975), 270-300

[23] H.M. Srivastava, Q.-H. Xu, G.-P. Wu, Coefficient estimates for certain subclasses of spiral-like functions of complex order, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 763-768.

[24] P. Wiatrowski, On the coefficients of some family of holomorphic functions, Zeszyty Nauk. Uniw. Lodz Nauk. Mat.-Pizyrod. Ser. 2 39 (1970) 75-85.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اثبات	Proof
تحلیلی	Analytic
تخمین	Estimate
تساوی	Equality
تعریف	Deffinition
تعمیم	Generalization
تک ارز	Univalent
چندجمله ای	Polynomial
حقیقی	Real
خاص	Special
دقیق	Sharp
رده	Class
زیررده	Subclass
ستاره‌گون	Starlike
شرط	Condition
صفر	Zero
ضریب	Coefficient

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Analytic .... تحلیلی

Class .... رده

Coefficient .... ضریب

Complex .... مختلط

Condition .... شرط

Convex .... محدب

Definition .... تعریف

Derivative .... مشتق

Equality .... تساوی

Equivalent .... معادل

Estimate .... تخمین

Generalization .... تعمیم

Inequality .... نامساوی

Lemma .... لم

Polynomial .... چندجمله ای

Positive .... مثبت

Proof .... اثبات

حقیقی	Real
نتیجه	Result
دقیق	Sharp
خاص	Special
ستاره گون	Starlike
زیررده	Subclass
تک ارز	Univalent
صفر	Zero

Surname: Babaei Zarrinkolaei Name: Mahtabeh

Title: Coefficient conditions for certain classes concerning starlike functions of complex order

Supervisor: Dr.Ahmad Zireh
Advisor: Reza Mosavi

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics
Field: Mathematical Analysis

Shahrood university of technology Faculty Of Mathematical Sciences
Date: 2013 Number of pages: 58

Keywords: Analytic Function, Starlike Function of Complex Order, Univalent Function

Abstract

In this thesis, deffinitions and theorems which are related to starlike classes are focused. In the following, finding a bound for above-mentianed classes coefficient.

Shahrood university of technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in

Pure Mathematics

Coefficient conditions for certain classes concerning starlike functions of complex order

Supervisor

Dr.Ahmad Zireh

Advisor

Reza Mosavi

by

Mahtabeh Babaei Zarrinkolaei

2013