



دانشگاه صنعتی شاهرود  
دانشکده علوم ریاضی  
گروه ریاضی کاربردی

عنوان

# مجموعه‌های احاطه‌گر مکانی و کدهای شناسایی

نگارش

سعیده سعیدی

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

تیر ۱۳۹۲

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## قدردانی

خدایا بر محمد و آل او درود فرست و سلامتی دل‌های ما را در یاد عظمت و آسایش تن ما را در شکر نعمت و روانی زبان ما را در وصف بخشش‌هایت قرارده.<sup>۱</sup>

بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادرم که امید و آرامش را به من هدیه کردند. خدایا پدر و مادرم را به بهترین چیزی که پدران و مادران بندگان با ایمانت را به آن اختصاص دادی مخصوص گردان.<sup>۲</sup>

از برادر مهربانم نیز که با حمایت‌های خویش مرا به پیشبرد این مجموعه امیدوار می‌کرد سپاسگذارم. بر خود لازم می‌دانم از زحمات استاد گرامی دکتر نادر جعفری راد کمال تقدیر و تشکر را نمایم، و در خاتمه تشکر خود را از اساتید محترم دکتر احمد زیره، دکتر میثم علیشاهی و دکتر بهزاد صالحیان اعلام می‌نمایم.

---

<sup>۱</sup> مناجاتی از صحیفه سجادیه

<sup>۲</sup> مناجاتی از صحیفه سجادیه

## پیشگفتار

مطالعه احاطه‌گری در گراف‌ها کاربردهای وسیعی در مسائل روزمره نظیر مسائل امنیتی و مخابراتی دارند. به طور مثال یک سیستم چند پردازنده که مدلی از گراف است در نظر می‌گیریم که پردازشگرها را رأس‌های گراف و خطوط بین آن‌ها را یال در نظر می‌گیریم. در این سیستم اگر یک پردازشگر معیوب باشد آن‌گاه برای تشخیص این پردازشگر می‌توان از احاطه‌گر مکانی استفاده کرد به طوری که رأس‌های مجاور با رأس معیوب با هشدار ما را از مکان رأس معیوب مطلع می‌کنند. در واقع اگر چند رأس هشدار دهند آن‌گاه رأسی که با همه‌ی آن‌ها مجاور است رأس معیوب است. امروزه کشف و تصحیح خطا در علوم ارتباطی نیازمند روش‌های نوین در نظریه کد گذاری است که با استفاده از ابزارهای جدید تعریف و بررسی می‌شوند. به راحتی می‌توان دید که یکی از پیشگامان شاخه‌های علوم، نظریه گراف می‌باشد که تا کنون با استفاده از آن پیشرفت‌های چشمگیری در علوم ارتباطی انجام شده است. در این پروژه احاطه‌گری مکانی و کدهای شناسایی را مورد بررسی و مطالعه قرار داده و نتایج و کران‌ها و دسته‌بندی‌هایی از گراف را ارائه می‌دهیم.

## چکیده

در این پایان نامه مفاهیم کد شناسایی و احاطه گرمکانی در گراف را ارائه می‌دهیم و به بررسی کوچکترین اندازه این مفاهیم در گراف‌های همبند و بدون جهت، و به طور خاص در درخت می‌پردازیم. نشان می‌دهیم کد شناسایی در درخت از مرتبه‌ی  $3$  شامل حداقل  $\frac{3(n+1)}{7}$  رأس و کد شناسایی در یک درخت از مرتبه‌ی  $4$ ،  $n \geq 4$ ، با  $l$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان شامل حداقل  $\frac{3(n+l-s+1)}{7}$  رأس می‌باشد. نشان می‌دهیم برای درخت  $T$  از مرتبه‌ی  $3$ ،  $n \geq 3$ ،

$$\frac{n+l-s+1}{3} \leq \gamma_L(T) \leq \frac{n+l-s}{2}.$$

همچنین درختانی را توصیف می‌کنیم که در شرط  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$  و  $M(T) = \gamma(T)$  صدق می‌کنند. علاوه بر این‌ها مفهوم درخت  $q$ -نمادی کامل را نیز معرفی می‌نماییم و می‌نیم اندازه  $1$ -کد شناسایی و  $r$ -احاطه گرمکانی در این نوع درخت را نیز به دست می‌آوریم.

**کلیدواژه :** احاطه گرمکانی، کد شناسایی

# فهرست مطالب

لیست تصاویر	
ج	
۱	۱ مفاهیم اولیه گراف
۱	۱.۱ مقدمه
۱۳	۲.۱ اعمال بر روی گرافها
۱۴	۳.۱ رنگ آمیزی گرافها
۱۴	۴.۱ احاطه‌گری
۱۸	۲ ۱-کد شناسایی روی درختها
۱۸	۱.۲ مقدمه
۲۱	۲.۲ کران‌ها روی درختها
۲۴	۳.۲ درخت $q$ -نمادی کامل
۳۶	۳ احاطه‌گر مکانی و کد شناسایی در درختها
۳۶	۱.۳ مقدمه
۳۷	۲.۳ احاطه‌گر مکانی در درختها
۳۸	۱.۲.۳ یک کران بالا روی $\gamma_L$ برای درختها
۴۷	۲.۲.۳ یک کران پایین روی $\gamma_L$ برای درختها
۴۸	۳.۲.۳ درختهای $T$ با $\gamma_L(T) = \gamma(T)$

۵۱	.....	کدشناسایی در درخت	۳.۳
۵۱	.....	یک کران پایین روی $M$ برای درختها	۱.۳.۳
۵۴	.....	درختهای $T$ با $M(T) = \gamma(T)$	۲.۳.۳
۵۷		حدود اندازه‌های کد شناسایی و احاطه‌گر مکانی در گرافها	۴
۵۷	.....	مقدمه	۱.۴
۵۷	.....	کران‌های بالا و پایین	۲.۴
۵۹	.....	چگونه کران پایین به دست آوریم	۳.۴
۶۱	.....	چگونه کران بالا به دست آوریم	۴.۴
۷۲	.....	گراف نامتناهی	۵.۴
۷۴	.....	احاطه‌گر مکانی	۶.۴
۷۶		مراجع	
۷۹		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	

## لیست تصاویر

۲	.....	گراف $G = (V, E)$	۱.۱
۴	.....	گراف‌های یکرخت $G$ و $G'$	۲.۱
۴	.....	$G[S]$ و $G$	۳.۱
۵	.....	گراف دو بخشی	۴.۱
۶	.....	گراف دو بخشی کامل $(K_{۳,۳})$	۵.۱
۶	.....	$\bar{G}$ و $G$	۶.۱
۸	.....	اویلری، نیمه اویلری و غیر اویلری	۷.۱
۸	.....	همیلتنی، نیمه همیلتنی و غیر همیلتنی	۸.۱
۱۰	.....	درخت ریشه‌دار	۹.۱
۱۱	.....	$G - v_1$ و $G - e_1$ و $G$	۱۰.۱
۱۲	.....	$G \cdot e_5$ و $G$	۱۱.۱
۱۲	.....	گراف ۱-همبند رأسی	۱۲.۱
۱۵	.....	گراف $G$ با $\gamma(G) = 1$	۱۳.۱
۱۶	.....	گراف $G$ با $i(G) = 2$	۱۴.۱
۱۶	.....	گراف $G$ با $\gamma_t(G) = 2$	۱۵.۱
۱۷	.....	گراف $G$ با $\gamma_L(G) = 2$	۱۶.۱
۲۱	.....	گراف $G$ بدون ۱-کد شناسایی	۱.۲



۲۳	درختی با ۱-کد شناسایی	۲.۲
۲۵	درخت ۴ نمادی با ارتفاع ۳	۳.۲
۲۸	۱-کد شناسایی در درخت $CT_5$	۴.۲
۳۰	همسایه های $z + 2^{5^i}$ (زوج)	۵.۲
۳۵	۱-احاطه گر مکانی در $CT_4^*$ و $CT_4$ و $CT_5$	۶.۲
۶۱	قسمتی از گراف تولید شده $G$ با $r = 2$ و $k = 6$	۱.۴
۶۲	$K_{1,2}$	۲.۴
۶۷	قسمتی از گراف $G_n$ که $n$ زوج	۳.۴
۷۰	چگونگی جابجایی یال ممنوعه	۴.۴
۷۳	قسمتی از گراف $G_{n+1}$ که $n + 1$ فرد	۵.۴

# فصل ۱

## مفاهیم اولیه گراف

### ۱.۱ مقدمه

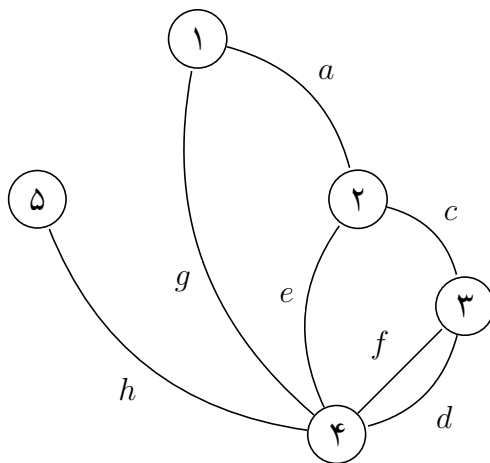
**تعریف ۱.۱.۱.** منظور از یک گراف یک سه تایی  $(V(G), E(G), \Psi(G))$  است که  $V(G)$  مجموعه نتهی از عناصر به نام رئوس و  $E(G)$  مجموعه‌ای از یال‌ها و  $\Psi(G)$  تابع وقوع است که به هر یال  $G$  یک جفت نامرتب و نه لزوماً متمایز از  $V(G)$  را متناظر می‌کند. از این پس گراف را به صورت  $G = (V, E)$  نشان می‌دهیم.

برای نمونه شکل (۱.۱) گراف  $G(V, E)$  با مجموعه رئوس  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و مجموعه یال‌های  $E = \{a, c, d, f, e, g, h\}$  است.

**تعریف ۱.۲.۱.** اگر یال  $e$  شامل رأس‌های  $v_1$  و  $v_2$  باشد، آن‌گاه گوییم  $v_1$  و  $v_2$  نقاط پایانی یال  $e$  هستند و همچنین گوییم یال  $e$  مجاور با رئوس  $v_1$  و  $v_2$  است.

**تعریف ۱.۳.۱.** دو رأس  $v_1$  و  $v_2$  را مجاور گوییم هرگاه بین آنها یک یال موجود باشد و دو یال  $e_1$  و  $e_2$  را مجاور گوییم هرگاه در یک رأس مشترک باشند.

**تعریف ۱.۴.۱.** یک رأس گراف را تنها گوییم هرگاه هیچ یالی متصل با آن نباشد.



شکل ۱.۱: گراف  $G = (V, E)$

تعریف ۱.۵.۱. گرافی که فقط از یک رأس تشکیل شده باشد را گراف بدیهی گوئیم.

تعریف ۱.۶.۱. گراف پوچ (تهی) گرافی است، شامل  $n \geq 1$  رأس، که مجموعه یال‌های آن تهی است. گراف تهی  $n$  رأسی را با  $N_n$  نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۷.۱. طوقه در یک گراف یالی است که دو رأس انتهایی‌اش بر هم منطبق باشند، و هرگاه در یک گراف بین دو رأس مفروض  $u$  و  $v$  دو یا بیش از دو یال وجود داشته باشند آن‌ها را یال‌های چندگانه می‌نامیم.

تذکر ۱.۱.۱. یک گراف ساده، گرافی است که در آن یال چندگانه و طوقه وجود نداشته باشد.

تعریف ۱.۸.۱. گراف جهت‌دار<sup>۲</sup> عبارتست از  $D = (V, A)$  که در آن  $V$  مجموعه متناهی و غیر تهی از عناصر به نام رئوس و  $A$  خانواده متناهی (نه لزوماً ناتهی) از زوج‌های مرتب و نه لزوماً متمایز از عناصر  $V$  به نام کمان است.

<sup>۲</sup>Digraph

مانند آنچه در گراف‌های ساده دیدیم در گراف‌های جهت‌دار نیز چنانچه کمانی یک رأس را با خودش مجاور سازد، آن را طوقه می‌نامیم و اگر بین دو رأس بیش از یک کمان هم جهت باشد آن را کمان‌های چندگانه می‌نامیم.

تذکر ۱.۲.۱. گراف‌های جهت‌دار ساده، گرافی است که در آن کمان چندگانه و طوقه وجود نداشته باشد.

قرارداد: از این به بعد به جای گراف  $G = (V, E)$  اغلب لفظ گراف  $G$  را به کار می‌بریم.

تعریف ۱.۹.۱. فرض کنیم  $G$  یک گراف و  $v$  رأسی از آن باشد. تعداد یال‌های مرتبط با رأس  $v$  را درجه‌ی رأس  $v$  گوئیم مشروط بر آن‌که اگر یال مذکور طوقه باشد در محاسبه‌ی درجه رأس دو بار محسوب گردد. درجه‌ی  $v$  را با  $\deg(v)$  نشان می‌دهیم. همچنین مجموعه درجه‌های همه رؤس گراف را درجه‌ی کل گراف گوئیم و آن را با  $T(G)$  نشان می‌دهیم.

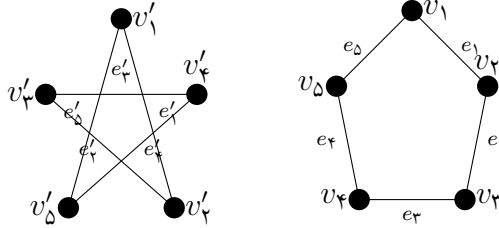
تعریف ۱.۱۰.۱.  $d(u, v)$  را فاصله دو رأس  $u$  و  $v$ ، در واقع کمترین تعداد یال بین  $u$  و  $v$  تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱۱.۱. ماکزیمم درجه رؤس یک گراف را با  $\Delta(G)$  یا  $\Delta$  و می‌نیمم درجه رؤس  $G$  را با  $\delta(G)$  یا  $\delta$  نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۲.۱. دو گراف  $G = (V, E)$  و  $G' = (V', E')$  را یکرخیخت گوئیم هرگاه تناظری یک به یک بین رؤس  $G$  و  $G'$  موجود باشد به گونه‌ای که تعداد یال‌هایی که هردو رأس از  $G$  را به هم وصل می‌کند برابر تعداد یال‌هایی باشد که رؤس نظیر در  $G'$  را به هم وصل می‌کند. به عبارت دیگر دو گراف  $G = (V, E)$  و  $G' = (V', E')$  یکرخیخت هستند اگر و تنها اگر توابع یک به یک و پوشای  $g: V(G) \rightarrow V(G')$  و  $h: E(G) \rightarrow E(G')$  موجود باشند که برای هر رأس  $v \in V(G)$  و  $e \in E(G)$  نقطه پایانی  $e$  باشد اگر و تنها اگر  $g(v)$  نقطه پایانی  $h(e)$  باشد. برای نمونه گراف‌های شکل (۲.۱) یکرخیخت هستند.

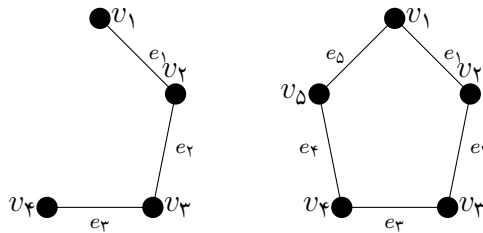
تعریف ۱.۱۳.۱. فرض کنیم  $G = (V, E)$  یک گراف باشد، گراف  $H = (V', E')$  را زیرگراف<sup>۲</sup>  $G$  گوئیم و می‌نویسیم  $H \leq G$  هرگاه  $V' \subseteq V$  و  $E' \subseteq E$  و هر یال  $H$  با همان نقاط پایانی در  $G$  باشد.

<sup>۲</sup>subgraph



شکل ۲.۱: گراف‌های یکرخت  $G$  و  $G'$

تعریف ۱.۱۴.۱. فرض کنیم  $G$  یک گراف با مجموعه‌ی رئوس  $V$  و  $S \subseteq V$  باشد. زیر گراف القایی  $G[S]$  را که با نماد  $G[S]$  نشان می‌دهیم، زیر گرافی از  $G$  است که مجموعه رئوس آن  $S$  است و یال‌هایی از  $G$  در آن هستند که هر دو نقطه پایانی آن‌ها متعلق به  $S$  است. برای نمونه در شکل (۳.۱) اگر گراف سمت راست  $G$  و  $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  باشد آن‌گاه گراف سمت چپ  $G[S]$  خواهد بود.



شکل ۳.۱:  $G$  و  $G[S]$

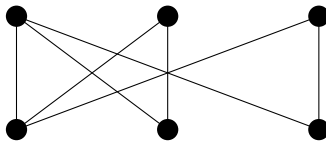
تعریف ۱.۱۵.۱. گراف ساده‌ی  $G$  با  $n$  رأس را کامل گوئیم هرگاه درجه‌ی تمام رئوس آن  $n - 1$  باشد. به عبارت دیگر گراف ساده‌ای است که همه رأس‌های آن با هم مجاور باشند. گراف کامل با  $n$  رأس را با  $K_n$  نشان می‌دهیم.

<sup>۴</sup>induced subgraph

**تعریف ۱.۱۶.۱.** عدد خوشه‌ای گراف  $G$  مرتبه بزرگترین زیر گراف کامل آن است که با  $w(G)$  نشان می‌دهیم.

**تعریف ۱.۱۷.۱.** گراف  $G$  را منتظم گوئیم هرگاه درجه‌ی تمام رئوس آن با هم برابر باشد. چنانچه درجه‌ی تمام رئوس  $r$  باشد گراف را  $r$ -منتظم گوئیم.

**تعریف ۱.۱۸.۱.** فرض کنیم  $G = (V, E)$  یک گراف باشد. اگر مجموعه‌ی  $V$  را بتوان به دو مجموعه  $V_1$  و  $V_2$  چنان افراز کرد که هر یال در  $E$ ، رأسی در  $V_1$  و رأسی در  $V_2$  داشته باشد، آنگاه گراف  $G$  را دو بخشی می‌نامیم و آن را با  $G = (V_1, V_2)$  نشان می‌دهیم. در نتیجه هیچ دو رأسی در  $V_1$  و هیچ دو رأسی در  $V_2$  مجاور نیستند. شکل (۴.۱) نمونه‌ای از یک گراف دو بخشی است.

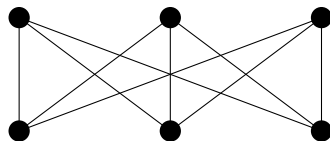


شکل ۴.۱: گراف دو بخشی

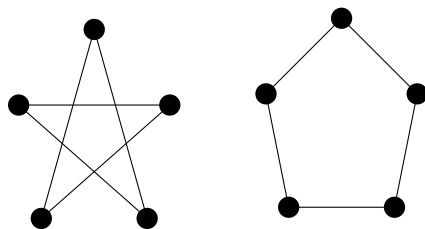
**تعریف ۱.۱۹.۱.** گراف دو بخشی  $G = (V_1, V_2)$  را دو بخشی کامل گوئیم هرگاه تمام رئوس مجموعه‌ی  $V_1$  با تمام رئوس مجموعه‌ی  $V_2$  مجاور باشند. در این صورت اگر  $|V_1| = r$  و  $|V_2| = s$  آنگاه  $G = (V_1, V_2)$  را با  $K_{r,s}$  نشان می‌دهیم. شکل (۵.۱) گراف  $K_{3,3}$  است.

**تعریف ۱.۲۰.۱.** اگر گراف  $G$  را چنان در یک فضای رسم کنیم که یال‌های آن در فضای مربوطه یکدیگر را قطع نکنند آنگاه این عمل را نشان دادن گراف در فضا گوئیم. گراف  $G$  را مسطح گوئیم هرگاه بتوان آن را در صفحه نشان داد.

**تعریف ۱.۲۱.۱.** مکمل گراف ساده  $G$  با مجموعه رئوس  $V$  را با  $\bar{G}$  نشان می‌دهیم.  $\bar{G}$  گرافی است ساده با مجموعه رئوس  $V$ ، که در آن رئوسی با هم مجاورند که در  $G$  مجاور نیستند. به عبارت دیگر اگر  $G$  گرافی ساده با  $n$  رأس باشد آنگاه  $\bar{G} = K_n - \{e_i \mid e_i \in E(G)\}$ . برای نمونه شکل (۶.۱) دو گراف مکمل را نشان می‌دهد.



شکل ۵.۱: گراف دو بخشی کامل  $(K_{3,3})$



شکل ۶.۱:  $G$  و  $\bar{G}$

**تعریف ۱.۲۲.۱.** یک گشت در یک گراف دنباله‌ای از رئوس به صورت  $v_0, v_1, \dots, v_n$  است که در آن هر دو رأس متوالی یا مجاورند یا یکسانند و آن را یک گشت از  $v_0$  به  $v_n$  می‌نامیم.

**تعریف ۱.۲۳.۱.** یک گذر در یک گراف گشتی است که در آن یالی تکرار نشده باشد. یک مسیر در یک گراف گذری است که در آن هیچ رأسی (در نتیجه هیچ یالی) به جز احتمالاً رأس آغازین و پایانی گذر تکرار نشده باشد.

**تعریف ۱.۲۴.۱.** یک گشت، گذر یا مسیر  $v_0, v_1, \dots, v_n$  را بسته گوئیم هرگاه  $v_0 = v_n$ .

**تعریف ۱.۲۵.۱.** یک مسیر بسته شامل حداقل یک یال را یک دور و گذر بسته شامل حداقل یک یال را یک مدار می‌نامیم.

**تعریف ۱.۲۶.۱.** تعداد یال‌های موجود در یک گشت، گذر، مسیر، دور یا مدار را طول آن می‌نامیم.

تعریف ۱.۲۷.۱. طول کوتاهترین دور در گراف  $G$  را کمر گراف  $G$  گوئیم و با  $\text{girth}(G)$  نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲۸.۱. دوری به طول  $n$  که  $n \geq 3$  را با  $C_n$  نشان داده و آن را گراف دوری گوئیم. اگر همه رئوس  $C_{n-1}$  را به یک رأس جدید متصل کنیم آن را چرخ<sup>۵</sup> نامیده و با  $W_n$  نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲۹.۱. گراف  $G = (V, E)$  را همبند می‌نامیم هرگاه به ازای هر  $u, v \in V$  مسیری از  $u$  به  $v$  موجود باشد. گرافی که همبند نباشد آن را ناهمبند نامیم و هریک از اجزای همبند آن را یک مؤلفه می‌نامیم. بنابراین گراف همبند گرافی است که فقط شامل یک مؤلفه باشد.

تذکر ۱.۳.۱. در گراف‌های ساده  $n$  رأسی کمترین تعداد یال‌ها مربوط به گراف تهی  $N(n)$  و بیشترین تعداد یال‌ها مربوط به گراف کامل  $K_n$  است. بنابراین تعداد یال‌های  $(m)$  یک گراف دلخواه از مرتبه  $n$  در نامساوی زیر صدق می‌کند

$$0 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

تعریف ۱.۳۰.۱. فرض کنیم  $G$  یک گراف و  $v$  یک رأس آن باشد. همسایگی  $v$  را که با  $N(v)$  نشان می‌دهیم مجموعه‌ی تمام رئوسی تعریف می‌کنیم که با  $v$  مجاور هستند. به عبارت دیگر

$$N(v) = \{u \mid u \in V(G), uv \in E(G)\}.$$

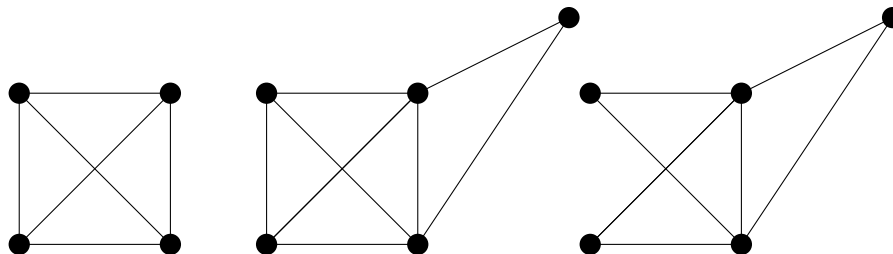
تعریف ۱.۳۱.۱. گراف همبند  $G$  را اویلری گوئیم هرگاه گذر بسته‌ای روی آن موجود باشد که شامل همه یال‌های  $G$  باشد. چنین گذری را گذر اویلری می‌نامیم. اگر شرط بسته بودن از گذر فوق حذف گردد و گذر بازی موجود باشد که شامل همه یال‌ها باشد آن‌گاه گراف را نیمه اویلری و چنین گذری را گذر نیمه اویلری می‌نامیم.

برای نمونه گراف‌های شکل (۷.۱) به ترتیب اویلری، نیمه اویلری و غیراویلری هستند.

تعریف ۱.۳۲.۱. گراف همبند  $G$  را همیلتنی گوئیم هرگاه مسیر بسته‌ای در آن موجود باشد که از همه‌ی رئوس بگذرد. بدیهی است که چنین گذری (به جز در حالت  $G = N_1$ ) یک دور است که آن را دور همیلتنی و  $G$  را گراف همیلتنی می‌نامیم. اگر در گراف همبند  $G$  مسیر بازی موجود باشد که از همه‌ی

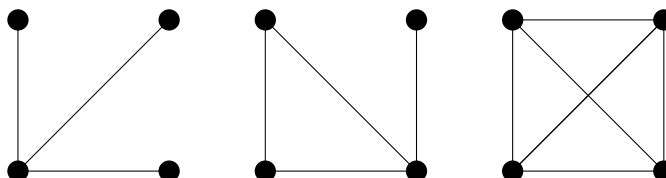
<sup>۵</sup>wheel





شکل ۷.۱: اویلری، نیمه اویلری و غیر اویلری

رئوس عبور کند آن گاه  $G$  را نیمه همیلتنی گوئیم و مسیر مذکور را مسیر همیلتنی می نامیم. برای نمونه گراف های شکل (۸.۱) به ترتیب همیلتنی، نیمه همیلتنی و غیر همیلتنی هستند.



شکل ۸.۱: همیلتنی، نیمه همیلتنی و غیر همیلتنی

تذکر ۱.۴.۱. در یک گراف همیلتنی  $G$  قواعد زیر برقرارند:

(۱) اگر  $v \in V(G)$  و  $\deg(v) = 2$  آن گاه هر دو یال مجاور در رأس  $v$  روی دور همیلتنی  $G$  واقعند.

(۲) در طول ساختن دور همیلتنی تا زمانی که همه رئوس به کار نرفته اند هیچ دوری تشکیل نمی گردد.

تعریف ۱.۳۳.۱. یک گراف فاقد دور را جنگل گوئیم.

**تعریف ۱.۳۴.۱.** یک جنگل همبند را یک درخت می‌نامیم. به عبارت دیگر گراف همبند فاقد دور را درخت گوییم. از آنجایی که طوقه و یال‌های چندگانه دور تشکیل می‌دهند لذا جنگل‌ها و درخت‌ها گراف‌هایی ساده هستند.

**تعریف ۱.۳۵.۱.** یک رأس از درجه‌ی یک در یک درخت را رأس آویخته یا برگ<sup>۶</sup> می‌نامیم. هر درخت با حداقل دو رأس یک برگ دارد.

**تعریف ۱.۳۶.۱.** همسایه‌ی هر برگ در درخت را رأس پشتیبان<sup>۷</sup> نامیده و اگر  $x \in V$  یک رأس پشتیبان درخت باشد آن‌گاه هر برگ مجاور با  $x$  را برگ  $x$  می‌نامیم.

**تعریف ۱.۳۷.۱.** اگر رأس  $v \in V$  یک رأس پشتیبان برای گراف  $G = (V, E)$  باشد که حداقل دو برگ داشته باشد، آن‌گاه  $V$  را رأس پشتیبان قوی<sup>۸</sup> می‌نامیم.

حتماً شما اصطلاح شجره‌نامه (درخت خانوادگی) را شنیده‌اید که درختی است که همه‌ی فرزندان و نوادگان ... یک شخص را مشخص می‌کند. برای نمونه فرض کنید که شخصی به نام  $a$  دارای سه فرزند  $a_1$  و  $a_2$  و  $a_3$  باشد که  $a_1$  دارای دو فرزند  $a_{11}$  و  $a_{12}$  و  $a_2$  دارای فرزندان  $a_{21}$  و  $a_{22}$  و  $a_{23}$  و بالاخره  $a_{31}$  تنها فرزند  $a_3$  باشد، این‌گونه درخت‌ها را در نظریه‌ی گراف درخت‌های ریشه‌دار می‌نامیم.

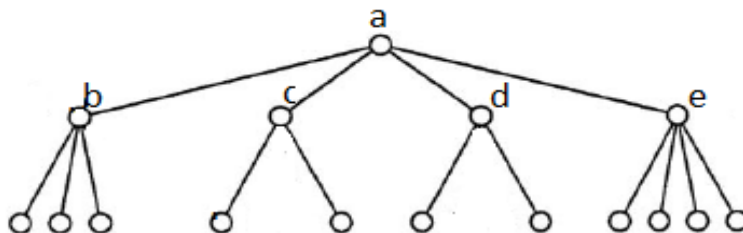
**تعریف ۱.۳۸.۱.** درخت ریشه‌دار یک درخت جهت‌دار است، که در آن تعداد یال‌هایی که به یک رأس  $v$  از درخت وارد می‌شوند را درجه‌ی درونی رأس  $v$  می‌نامیم و با  $\deg^-(v)$  نشان می‌دهیم، و تعداد یال‌هایی که از رأس  $v$  خارج می‌شوند را درجه‌ی بیرونی رأس  $v$  نامیده و با  $\deg^+(v)$  نشان می‌دهیم، و رأس یکتای  $r$  از درخت که  $\deg^-(r) = 0$  است را ریشه‌ی درخت نامند.

در درخت ریشه‌دار زیر رأس  $a$  رأس  $a$  ریشه است. همچنین رئوس  $e, d, c, b$  را زاده‌های (فرزندان) رأس  $a$  و رأس  $a$  را نیا (پدر) این رئوس می‌نامیم. دو رأس با یک پدر مشترک را هم‌نیا (برادر) می‌نامیم. یال‌ها در درخت‌های ریشه‌دار نظیر شکل (۹.۱) را با امتدادهای مشهودی که از بالاترین سطح به پایین‌ترین سطح می‌روند رسم می‌کنیم و لذا به رسم پیکان نیاز نیست.

<sup>۶</sup>leaf

<sup>۷</sup>support

<sup>۸</sup> strong support



شکل ۹.۱: درخت ریشه‌دار

**تعریف ۱.۳۹.۱.** فرض کنیم  $G$  گرافی همبند و  $v$  رأسی دلخواه از آن باشد خروج از مرکز  $v$  را با  $e(v)$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e(v) = \max_{x \in V(G)} \{d(v, x)\}.$$

**تعریف ۱.۴۰.۱.** در گراف همبند  $G$  کوچکترین خروج از مرکز به ازای همه‌ی رئوس  $G$  را شعاع  $G$  می‌نامیم و با  $\text{rad}(G)$  نشان می‌دهیم. همچنین بزرگترین خروج از مرکز به ازای همه‌ی رئوس را قطر  $G$  گوئیم و با  $\text{diam}(G)$  نشان می‌دهیم.

**تعریف ۱.۴۱.۱.** ماتریس مجاورت گراف  $G$  را که با  $A(G)$  یا مختصراً با  $A$  نشان می‌دهیم ماتریسی به صورت  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  است که در آن تعداد یال‌هایی است که بین دو رأس  $v_i$  و  $v_j$  وجود دارند.

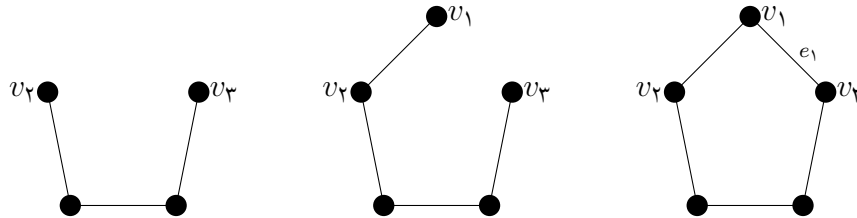
**تعریف ۱.۴۲.۱.** فرض کنیم  $G$  گرافی باشد با مجموعه رئوس  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  و مجموعه یال‌های  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . ماتریس وقوع گراف  $G$  را با  $M(G)$  یا  $M$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M = [m_{ij}]_{n \times m}$$

<sup>۹</sup>eccentricity

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر یال } e_j \text{ مجاور با رأس } v_i \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

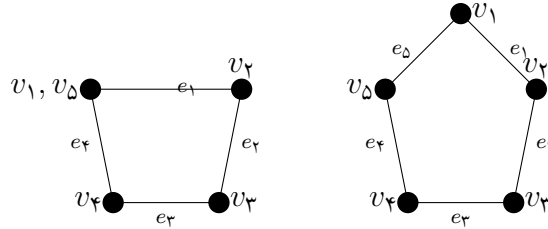
**تعریف ۱.۴۳.۱.** فرض کنیم  $G = (V, E)$  یک گراف و  $e \in E$  و  $v \in V$  باشد. حذف یال  $e$  از گراف  $G$  را با نماد  $G - e$  نشان می‌دهیم و عبارتست از برداشتن یال  $e$  بدون آن که در نقاط پایانی آن تغییر دیگری به وجود آید. حذف رأس  $v$  را که با نماد  $G - v$  نشان می‌دهیم عبارتست از حذف رأس  $v$  و یال‌های مرتبط با آن از گراف  $G$ . شکل (۱۰.۱) گراف‌های  $G - e_1$  و  $G - v_1$  را به ترتیب نمایش می‌دهد.



شکل ۱۰.۱:  $G - v_1$  و  $G - e_1$  و  $G$

**تعریف ۱.۴۴.۱.** فرض کنیم  $G$  یک گراف و  $e \in E$  و  $v_i, v_j \in V$  باشد که یال  $e$  مجاور با رئوس  $v_i$  و  $v_j$  است. انقباض یال  $e$  را که با نماد  $G \cdot e$  نشان می‌دهیم، عبارتست از حذف یال  $e$  از گراف  $G$  و منطبق کردن رئوس  $v_i$  و  $v_j$  به یکدیگر. شکل (۱۱.۱)

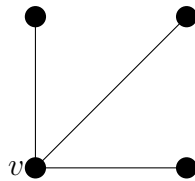
**تعریف ۱.۴۵.۱.** فرض کنیم  $G = (V, E)$  یک گراف و  $S \subseteq E$  به گونه‌ای باشد که با حذف یال‌های  $S$  از  $E$  حداقل یک مؤلفه به  $G$  افزوده شود، در این صورت  $S$  را مجموعه ناهمبندساز (یالی) گراف  $G$  گوئیم. اگر هیچ زیر مجموعه‌ی محض یک مجموعه ناهمبندساز خود مجموعه ناهمبندساز نباشد آن را مجموعه برش می‌نامیم. با حذف یال‌های مجموعه برش از گراف  $G$  دقیقاً یک مؤلفه به گراف افزوده



شکل ۱۱.۱:  $G \cdot e_5$  و  $G$

می‌شود. چنانچه اندازه کوچکترین مجموعه‌ی برش یک گراف برابر  $k$  باشد آن را گراف  $k$ -همبند یالی و اگر مجموعه برش شامل فقط یک یال باشد آن یال را پل می‌نامیم.

**تعریف ۱.۴۶.۱.** فرض کنیم  $G = (V, E)$  یک گراف و  $v \in V$  رأسی باشد که با حذف آن از  $G$  تعداد مؤلفه‌های  $G$  افزایش یابند در این صورت  $v$  را رأس برشی می‌نامیم. در حالت کلی، همبندی رأسی یک گراف، می‌نیم تعداد رئوسی است که با حذف آن‌ها گراف ناهمبند یا به  $N_1$  تبدیل می‌گردد. یک گراف را  $k$ -همبند رأسی گوئیم هرگاه همبندی رأسی آن برابر  $k$  باشد. گراف  $G$  در شکل (۱۲.۱) ۱-همبند رأسی است. تنها حذف رأس  $v$  گراف را ناهمبند می‌کند.



شکل ۱۲.۱: گراف ۱-همبند رأسی

**تعریف ۱.۴۷.۱.** زیر مجموعه  $M$  از یال‌های گراف  $G = (V, E)$  را یک تطابق گوئیم هرگاه هیچ دو یالی در  $M$  رأس مشترک نداشته باشند.

تطابق  $M$  را تطابق ماکزیمم نامیم هرگاه به ازای هر تطابق دیگر مانند  $M'$ ،  $|M| \geq |M'|$ .  
 تطابق  $M$  را تطابق ماکزیمال گوئیم هرگاه با اضافه کردن هر یال دیگر به مجموعه  $M$  مجموعه‌ی حاصل تطابق نباشد. همچنین تطابق  $M$  را کامل گوئیم هرگاه همه‌ی رئوس گراف  $G$  را اشباع کند. ماکزیمم اندازه یک تطابق را با  $\alpha'(G)$  نشان می‌دهیم.

## ۲.۱ اعمال بر روی گراف‌ها

به طرق مختلفی می‌توان دو یا چند گراف را با هم ترکیب نمود و گراف‌های جدیدی به دست آورد که در زیر به چند نمونه از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

**تعریف ۲.۱.۱.** فرض کنیم  $G_1 = (V_1, E_1)$  و  $G_2 = (V_2, E_2)$  دو گراف باشند، در این صورت  
 (۱) گراف  $G_1 \cup G_2$  با مجموعه رئوس  $V$  و خانواده یال‌های  $E$  است که در آن  $V = V_1 \cup V_2$  و  $E = E_1 \cup E_2$  و هر یال در آن با همان نقاط پایانی در  $G_1$  و  $G_2$  است.  
 در تعریف اجتماع دو گراف اگر  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  (در نتیجه  $E = E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ) آن‌گاه اجتماع  $G_1$  و  $G_2$  را اجتماع مجزای آن‌ها گوئیم و با  $G_1 + G_2$  نشان می‌دهیم.  
 (۲) گراف  $G_1 \cap G_2$  با مجموعه رئوس  $V$  و خانواده یال‌های  $E$  است که در آن  $V = V_1 \cap V_2$  و  $E = E_1 \cap E_2$  و هر یال در آن با همان نقاط پایانی در  $G_1$  و  $G_2$  است.  
 (۳)  $G_1 - G_2$  زیر گرافی از  $G_1$  است که با حذف یال‌های  $G_2$  از  $G_1$  به دست آمده است.  
 (۴)

$$G_1 \Delta G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$$

که  $G_1 \Delta G_2$  را تفاضل متقارن دو گراف  $G_1$  و  $G_2$  گوئیم.

### ۳.۱ رنگ آمیزی گرافها

**تعریف ۳.۱.۱.** گراف  $G$  را  $k$ -رنگ پذیر نامیم هرگاه بتوان رئوس آن را با  $k$  رنگ به گونه‌ای رنگ آمیزی کرد که هیچ دو رأس مجاور هم‌رنگ نباشند. اگر این عمل با کمتر از  $k$  رنگ مقدور نباشد گوئیم عدد رنگی  $G$  برابر  $k$  است و این عدد را با  $\chi(G)$  نشان می‌دهیم. همچنین در زیر تعریف دیگری از رنگ‌آمیزی گرافها را ارائه می‌دهیم:

تابع  $f: V(G) \rightarrow A$  که در آن  $A$  مجموعه رنگ‌هاست را یک رنگ آمیزی می‌نامیم. رنگ آمیزی  $f$  را معتبر گوئیم هرگاه

$$\forall (x, y) \in E(G) \implies f(x) \neq f(y).$$

**تعریف ۳.۲.۱.** گراف  $G$  را  $k$ -رنگ پذیر یالی گوئیم هرگاه بتوان یال‌های آن را با  $k$  رنگ به گونه‌ای رنگ آمیزی کرد که هیچ دو یال مجاور (یال‌هایی که رئوس مشترک دارند) هم‌رنگ نباشند. اگر این عمل با کمتر از  $k$  رنگ مقدور نباشد گوئیم عدد رنگی یالی گراف  $G$  برابر  $k$  است و این عدد را با  $\chi'(G)$  نشان می‌دهیم. بدیهی است که اگر  $\Delta(G) = \rho$  آن‌گاه  $\chi'(G) \geq \rho$ .

تذکر ۳.۱.۱ (۱)  $\chi(G) = 1$  اگر و تنها اگر  $G$  گراف تهی باشد یعنی  $\chi(N_n) = 1$ .

(۲) چون در  $K_n$  هر رأس با  $n - 1$  رأس دیگر مجاور است پس  $\chi(K_n) = n$ .

### ۴.۱ احاطه‌گری

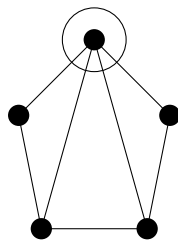
**تعریف ۴.۱.۱.** مجموعه‌ی  $S$  از رأس‌های یک گراف  $G$  را یک مجموعه مستقل رأسی می‌نامیم هرگاه هیچ دو رأسی از  $S$  مجاور نباشند. عدد استقلال گراف  $G$  را که با  $\alpha(G)$  نشان داده می‌شود ماکزیم اندازه یک مجموعه مستقل رأسی است.

**تعریف ۴.۲.۱.** زیر مجموعه‌ی  $S$  از رأس‌های گراف  $G$  را یک پوشش رأسی می‌نامیم هرگاه حداقل یکی از نقاط پایانی هر یال  $G$  در آن مجموعه باشد. عدد پوشش رأسی گراف  $G$  می‌نیمم اندازه یک پوشش رأسی است و با  $\beta(G)$  نشان داده می‌شود.

**تعریف ۴.۳.۱.** مجموعه‌ی  $S$  از یال‌ها را یک مجموعه مستقل یالی می‌نامیم هرگاه هیچ دو یالی از  $S$  رأس مشترک نداشته باشند. لذا یک مجموعه مستقل یالی همان تطابق است و عدد استقلال یالی  $G$  را با  $\alpha'(G)$  نشان می‌دهیم، و همان عدد مربوط به ماکزیمم تطابق است.

**تعریف ۴.۴.۱.** مجموعه‌ی  $S$  از یال‌ها را یک پوشش یالی می‌نامیم هرگاه هر رأس حداقل روی یکی از این یال‌ها باشد. عدد پوشش یالی  $G$  را با  $\beta'(G)$  نشان می‌دهیم و برابر می‌نیمم اندازه یک پوشش یالی است.

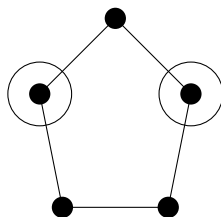
**تعریف ۴.۵.۱.** مجموعه‌ی  $S$  از رأس‌های گراف  $G = (V, E)$  را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه  $N[S] = V(G)$ . عدد احاطه‌گری گراف  $G$  را که با  $\gamma(G)$  نشان می‌دهیم می‌نیمم اندازه یک مجموعه احاطه‌گر است. شکل (۱۳.۱) نمونه‌ای از یک گراف است که می‌نیمم اندازه‌ی مجموعه احاطه‌گر  $(\gamma(G))$  در آن برابر یک است.



شکل ۱۳.۱: گراف  $G$  با  $\gamma(G) = 1$

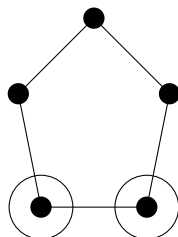


تعریف ۴.۶.۱. مجموعه‌ی احاطه‌گر  $S$  را مجموعه احاطه‌گر مستقل گوئیم هرگاه هیچ دو رأسی از  $S$  مجاور نباشند. عدد احاطه‌گری مستقل  $G$  کوچکترین اندازه چنین مجموعه‌ای است و با  $i(G)$  نشان داده می‌شود. شکل (۱۴.۱) نمونه‌ای از یک گراف با  $i(G) = ۲$  است.



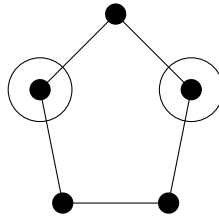
شکل ۱۴.۱: گراف  $G$  با  $i(G) = ۲$

تعریف ۴.۷.۱. مجموعه احاطه‌گر  $S$  را مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی می‌نامیم هرگاه  $G[S]$  رأسی تنها نداشته باشد عدد مربوط به این احاطه‌گری را با  $\gamma_t(G)$  نشان می‌دهیم. در شکل (۱۵.۱)  $\gamma_t(G) = ۲$  است.



شکل ۱۵.۱: گراف  $G$  با  $\gamma_t(G) = ۲$

تعریف ۴.۸.۱. مجموعه  $S$  از رأس‌های  $G$  را یک مجموعه احاطه‌گر مکانی نامیم هرگاه  $S$  یک مجموعه احاطه‌گر باشد و برای هر دو رأس متمایز  $x, y \in V(G) - S$  داشته باشیم  $N(x) \cap S \neq N(y) \cap S$ . کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر مکانی را عدد احاطه‌گری مکانی  $G$  نامیده و با  $\gamma_L(G)$  نشان می‌دهیم. برای نمونه در شکل (۱۶.۱)  $\gamma_L(G) = 2$  است.



شکل ۱۶.۱: گراف  $G$  با  $\gamma_L(G) = 2$

## فصل ۲

### ۱- کد شناسایی روی درختها

#### ۱.۲ مقدمه

مفهوم احاطه‌گری مکانی اولین بار توسط کولبورن،<sup>۱</sup> اسلیتر<sup>۲</sup> و استیوارت<sup>۳</sup> در سال ۱۹۸۷، و مفهوم کد شناسایی توسط کارپوسکی<sup>۴</sup>، چاکرابارتی<sup>۵</sup> و لویتین<sup>۶</sup> در سال ۱۹۹۸ معرفی شدند و در سال‌های اخیر در مقالات گوناگون به این موضوعات پرداخته شده است.

در این فصل ابتدا مفاهیمی به نام  $r$ -کد شناسایی و  $r$ -احاطه‌گر مکانی را معرفی نموده سپس به بررسی کوچکترین اندازه و چگالی کد شناسایی در درختها می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم که در یک درخت با  $n$  رأس هر  $1$ -کد شناسایی حداقل  $\frac{3(n+1)}{7}$  عضو دارد. همچنین یک نوع درخت خاص به نام درخت  $q$ -نمادی کامل را معرفی می‌کنیم و می‌نیم اندازه  $r$ -کد شناسایی و  $r$ -احاطه‌گر مکانی برای

---

<sup>۱</sup>Colbourn

<sup>۲</sup>Slater

<sup>۳</sup>Stewart

<sup>۴</sup>Karpovsky

<sup>۵</sup>Chakrabarty

<sup>۶</sup>Levitin

$r \geq 1$  در این درختان را به دست می آوریم. برای نمونه می نیم اندازه ۱-کد شناسایی درخت دودویی کامل با  $1 - 2^h$  رأس دقیقاً  $\lceil \frac{2^0(2^h - 1)}{31} \rceil$  می باشد. برای بررسی بیشتر نتایج به دست آمده در این فصل می توانید مرجع [۴] را مطالعه نمایید.

تعریف ۱.۱.۲. گراف همبند بدون جهت  $G = (V, E)$  و عدد صحیح  $r \geq 1$  را در نظر می گیریم، و  $B_r(v)$  را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$B_r(v) = \{x \in V : d(x, v) \leq r\}.$$

تعریف ۱.۲.۲. اگر برای  $x, v \in V$ ،  $d(x, v) \leq r$  باشد آن گاه  $x$  و  $v$  را  $r$ -پوشش  $Y$  یکدیگر می نامیم. مجموعه  $X \subseteq V$  را پوششی برای  $Y \subseteq V$  می نامیم هرگاه هر رأس  $y \in Y$  با حداقل یک رأس از مجموعه  $X$  پوشیده شود.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنیم  $C$  مجموعه ناتهی از رئوس باشد. به ازای هر  $v \in V$ ،  $K_{C,r}(v)$  را به شکل زیر تعریف می کنیم

$$K_{C,r}(v) = C \cap B_r(v).$$

تعریف ۱.۴.۲. اگر به ازای هر  $v_1, v_2 \in V$ ،  $v_1 \neq v_2$ ،  $K_{C,r}(v_1) \neq K_{C,r}(v_2)$  آن گاه رئوس  $v_1$  و  $v_2$  را  $r$ -جداشده<sup>۸</sup> توسط مجموعه  $C$  می نامیم.

تعریف ۱.۵.۲. مجموعه ناتهی  $C$  از رئوس گراف را  $r$ -کد شناسایی<sup>۹</sup> یا کد شناسایی می نامیم هرگاه به ازای هر  $v \in V$ ،  $K_{C,r}(v)$  ناتهی و متمایز باشند. اعضای کد شناسایی را کد واژه می نامیم. کوچکترین اندازه یک مجموعه کد شناسایی را با  $M(G)$  نشان می دهیم.

---

<sup>۷</sup>r-cover

<sup>۸</sup>r-separated

<sup>۹</sup>r-identifying code

تعریف ۱.۶.۲. گراف  $G = (V, E)$  را قابل  $r$ -شناسایی<sup>۱۰</sup> نامیم هرگاه حداقل یک مجموعه  $r$ -کد شناسایی داشته باشد.

لم ۱.۱.۲. فرض کنیم  $G = (V, E)$  یک گراف و  $r$  عدد صحیح باشد. یک مجموعه  $r$ -کد شناسایی  $C \subseteq V$  برای  $G$  وجود دارد اگر و تنها اگر به ازای هر  $v_1, v_2 \in V$

$$B_r(v_1) \neq B_r(v_2).$$

برهان. فرض کنیم مجموعه ناتهی  $C$  یک  $r$ -کد شناسایی برای گراف  $G$  باشد و  $v_1, v_2 \in V$  وجود داشته باشند که  $B_r(v_1) = B_r(v_2)$ . در نتیجه  $K_{C,r}(v_1) = K_{C,r}(v_2)$ ، که متناقض با وجود  $r$ -کد شناسایی است. بنابراین به ازای هر  $v_1, v_2 \in V$ ،  $B_r(v_1) \neq B_r(v_2)$ .

برعکس: فرض کنیم به ازای هر  $v_1, v_2 \in V$ ،  $B_r(v_1) \neq B_r(v_2)$  در این صورت می‌توان  $C = V$  را به عنوان یک  $r$ -کد شناسایی برای گراف  $G$  در نظر گرفت.  $\square$

تذکر ۱.۱.۲. در گراف کامل  $K_n$  به ازای هر  $v_1, v_2 \in V$ ،  $B_r(v_1) = B_r(v_2)$  است لذا  $K_n$   $r$ -کد شناسایی ندارد.

لم ۱.۲.۲. هر مجموعه کدشناسایی برای گراف  $G$  یک مجموعه‌ی احاطه‌گرمکانی است.

برهان. فرض کنیم  $C$  یک مجموعه کدشناسایی برای گراف  $G$  باشد در این صورت برای هر دو رأس  $x, y \in V$  همسایه‌ای ناتهی و متمایز در  $C$  وجود دارد. در نتیجه برای هر  $x, y \in V \setminus C$ ، نیز این شرایط برقرار است که همان تعریف احاطه‌گرمکانی است.  $\square$

لم ۱.۳.۲. هر مجموعه احاطه‌گرمکانی یک مجموعه احاطه‌گر است.

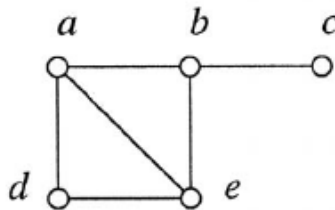
برهان. فرض کنیم مجموعه  $C$  یک مجموعه احاطه‌گرمکانی باشد در این صورت برای هر رأس  $v \in V \setminus C$  همسایه‌ای در  $C$  وجود دارد، و این همان تعریف مجموعه احاطه‌گر است.  $\square$

نتیجه ۱.۱.۲. هر گراف  $G$  که کدشناسایی داشته باشد در نامساوی  $\gamma(G) \leq \gamma_L(G) \leq M(G)$  صدق می‌کند.

<sup>۱۰</sup>r-identifiable

مثال ۱.۱.۲. گراف  $G$  در شکل (۱.۲) را در نظر بگیرید. همان‌طور که دیده می‌شود  $B_1(a) = B_1(e)$ . بنابراین ۱-کد شناسایی برای گراف  $G$  وجود ندارد. اما می‌توان  $C = \{a, b\}$  را ۱-احاطه‌گرمانی برای گراف  $G$  معرفی نمود زیرا

$$K_{C,1}(c) = \{b\} \quad K_{C,1}(e) = \{a, b\} \quad K_{C,1}(d) = \{a\}.$$



شکل ۱.۲: گراف  $G$  بدون ۱-کد شناسایی

تعریف ۱.۷.۲. چگالی یک مجموعه در گراف را نسبت تعداد اعضای آن مجموعه به کل رئوس گراف تعریف می‌کنیم.

## ۲.۲ کران‌ها روی درخت‌ها

در منبع [۱۸] نشان داده شده که یک درخت با  $n$  رأس دارای یک مجموعه ۱-احاطه‌گرمانی با حداقل  $\frac{n}{3}$  رأس می‌باشد. حال نتیجه‌ای شبیه به آن را برای ۱-کد شناسایی در درخت ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲.۱.۲. در یک درخت با  $n$  رأس که  $n \geq 3$  است هر مجموعه ۱-کدشناسایی با حداقل  $\frac{3(n+1)}{7}$  عضو، وجود دارد.

برهان. فرض کنیم که  $T = (V, E)$  یک درخت با  $n$  رأس باشد و مجموعه  $C \subseteq V$  یک ۱-کدشناسایی در  $T$  باشد. مجموعه  $E'$  را مجموعه یال‌های بین کدواژه‌ها تعریف کرده و فرض می‌کنیم  $|E'| = e'$ . برای هر  $v \in V$  تعریف می‌کنیم  $f(v) = |\{c \in C : d(v, c) = 1\}|$  و همچنین داریم

$$C^* = \{c \in C : f(c) = 0\}.$$

حال تعداد یال‌های بین کدواژه‌ها و غیرکدواژه‌ها برابر است با

$$\sum_{v \in V} f(v) = \sum_{v \notin C} f(v) + \sum_{v \in C} f(v) \leq |E - e'| + 2e' \leq n - 1 + e'. \quad (1.2)$$

همچنین بوضوح دیده می‌شود

$$\sum_{c \in C \setminus C^*} f(c) = 2e'. \quad (2.2)$$

حداکثر  $|C \setminus C^*|$  غیر کدواژه وجود دارد که  $f(v) = 1$ .

بنابراین

$$\sum_{v \in V} f(v) \geq 2|V \setminus C| - |C \setminus C^*| + \sum_{c \in C \setminus C^*} f(c). \quad (3.2)$$

با توجه به (۱.۲)، (۲.۲)، (۳.۲) داریم

$$\begin{aligned} n - 1 + e' &\geq \sum_{v \in V} f(v) \geq 2|V \setminus C| - |C \setminus C^*| + \sum_{c \in C \setminus C^*} f(c) \Rightarrow \\ n - 1 + e' &\geq 2n - 3|C| + |C^*| + 2e' \Rightarrow \\ n - 1 &\geq 2n - 3|C| + |C^*| + e'. \end{aligned}$$

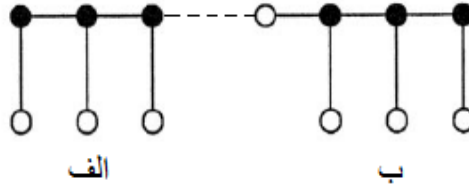
حال مجموع سمت راست را تخمین می‌زنیم. اگر  $F = (C \setminus C^*, E')$  آن‌گاه یک جزء همبند با  $i$  رأس در  $F$ ، در مجموع بالا به صورت  $2(i - 1)$  شرکت می‌کند. بنابراین میانگین  $f(c)$  در این ترکیب برابر  $\frac{2(i - 1)}{i}$  است. چون  $C$  یک ۱-کد شناسایی است و اندازه هر جزء همبند در  $F$  حداقل ۳ است، بنابراین میانگین  $f(c)$  روی  $C \setminus C^*$  حداقل  $\frac{4}{3}$  می‌باشد، و داریم

$$\begin{aligned} n - 1 &\geq 2n - 3|C| + |C^*| + \frac{4}{3}(|C| - |C^*|) \geq 2n - \frac{5}{3}|C| \Rightarrow \\ |C| &\geq \frac{3(n + 1)}{5}. \end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۲.۲. اگر  $n = 6 + 7(m - 1)$  و  $m \geq 2$  آن‌گاه یک درخت از مرتبه  $n$  که شامل مجموعه ۱-کد شناسایی با  $3m = \frac{3(n+1)}{7}$  عضو است، وجود دارد.

برهان. چنین درختی را می‌سازیم. ابتدا شکل (الف) در شکل (۲.۲) را در نظر می‌گیریم و سپس شکل (ب) را  $m - 1$  بار کنار آن رسم می‌کنیم و در همه  $m - 1$  بار چپ‌ترین رأس شکل (ب) را به رأس بالا و سمت راست شکل (الف) مرتبط می‌کنیم و همان‌طور که مشاهده می‌شود مجموعه رئوس سیاه، که  $3m$  عضو دارد یک ۱-کد شناسایی برای  $T$  است.



شکل ۲.۲: درختی با ۱-کد شناسایی

□

تذکر ۲.۱.۲. در بعضی درخت‌ها مانند ستاره با  $n$  رأس که از یک رأس پشتیبان و  $n - 1$  برگ تشکیل شده است  $n - 1$  رأس برای کد شناسایی آن لازم است.

قضیه ۲.۳.۲. اگر چگالی هر ۱-کد شناسایی در هر درخت متناهی حداقل  $c$  باشد آن‌گاه درخت متناهی که چگالی ۱-کد شناسایی آن دقیقاً  $c$  باشد وجود ندارد.

برهان. فرض کنیم درخت  $T_1 = (V_1, E_1)$  با رئوس  $x_1, \dots, x_p$  که دارای ۱-کد شناسایی  $C_1 = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{|C_1|}}\}$  با چگالی  $c$  است وجود داشته باشد.

درخت  $T'_1 = (V'_1, E'_1)$  را همانند  $T_1$  در نظر می‌گیریم. می‌توان درخت  $T_2 = (V_2, E_2)$  را به شکل زیر ساخت:

$$V_2 = V_1 \cup V'_1 \cup \{z\}$$

$$E = \{E_1 \cup E'_1 \cup \{\{x_{i_1}, z\}, \{x'_{i_1}, z\}\}\}.$$



رأس اضافه شده  $z$  را به  $V_1$  و  $V_2$  با کد واژه‌های  $x_{i_1}$  و  $x'_{i_1}$  متصل می‌کنیم تا  $C_2 = C_1 \cup C'_1$  یک ۱-کد شناسایی برای  $T_2$  باشد. اما

$$\frac{|C_2|}{2p+1} = \frac{2|C_1|}{2p+1} < \frac{C_1}{p} < c.$$

یعنی چگالی کد  $C_2$  از کد  $C_1$  کمتر می‌شود که متناقض با فرض قضیه است.

□

قضیه ۲.۴.۲. درختی از مرتبه نامتناهی وجود دارد که یک ۱-کد شناسایی با چگالی  $\frac{3}{7}$  داشته باشد.

برهان. مانند برهان قضیه (۲.۲.۲) عمل می‌کنیم و شکل‌های قضیه (۲.۲.۲) را در نظر گرفته و در این جا شکل (ب) را بی‌نهایت بار تکرار می‌کنیم. و به راحتی دیده می‌شود که هنوز رئوس سیاه یک ۱-کد شناسایی برای درخت هستند و چگالی مجموعه‌ی رئوس سیاه برابر  $\frac{3}{7}$  است. □

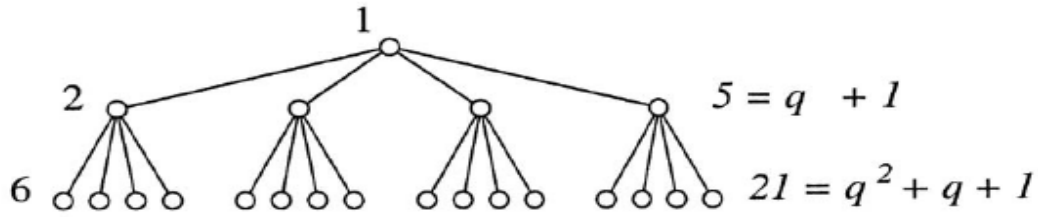
## ۳.۲ درخت $q$ -نمادی کامل

درخت  $q$ -نمادی کامل با ارتفاع  $h$  که  $q \geq 2$  است را به صورت  $CT_h^q$  نمایش می‌دهیم. منظور از ارتفاع درخت تعداد سطرهای موجود در درخت است که رئوس بر روی آن سطرها قرار گرفته‌اند. تعداد کل رئوس درخت برابر است با

$$X_h^q = \sum_{1 \leq i \leq h} q^{i-1} = \frac{q^h - 1}{q - 1}.$$

در هر سطر  $i$ ،  $(1 \leq i \leq h)$   $q^{i-1}$  رأس از شماره  $1 + \sum_{1 \leq j \leq i-1} q^{j-1}$  تا  $\sum_{1 \leq j \leq i} q^{j-1}$  وجود دارد. همچنین برای بررسی روی این درخت ابتدا رئوس آن را از چپ به راست و بعد از بالا به پایین، از ۱ تا  $X_h^q$  شماره‌گذاری می‌کنیم. (شکل ۳.۲)

کوچکترین اندازه برای ۱-کد شناسایی و  $r$ -احاطه‌گر مکانی برای درخت  $CT_h^q$  را به ترتیب با  $M_1^I(CT_h^q)$  و  $M_r^{LD}(CT_h^q)$  نمایش می‌دهیم.



شکل ۳.۲: درخت ۴ نمادی با ارتفاع ۳

لم ۳.۱.۲. در درخت  $CT_h^q$ ،  $r$ -کد شناسایی برای  $r > 1$  وجود ندارد.

برهان. فرض کنید مجموعه  $C$  یک  $r$ -کد شناسایی برای درخت  $CT_h^q$  باشد. با توجه به شکل درخت  $CT_h^q$  در خط  $h$  ام از درخت، دو برگ  $l_1$  و  $l_2$  از یک رأس پشتبان انتخاب می‌کنیم و برای هر  $r > 1$  داریم  $B_r(l_1) = B_r(l_2)$ . بنابراین با توجه به لم (۱.۱.۲)  $r$ -کد شناسایی در درخت  $CT_h^q$  وجود ندارد.  $\square$

از این پس به جای  $CT_h^2$  از  $CT_h$  و همچنین به جای  $X_h^2$  از  $X_h$  استفاده می‌نماییم.

ابتدا ۱-کد شناسایی در درخت دودویی کامل  $CT_h$  را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

چون برای  $h$  های بزرگ تعداد رئوس در درخت  $CT_h$  زیاد است ابتدا درخت را به قسمت‌های کوچکتر تقسیم می‌کنیم. به این صورت که قسمت اول از ۴ سطر یا کمتر و قسمت دوم از  $5k + 4$  سطر تشکیل شده است که قسمت دوم دارای  $k$  قسمت با ۵ سطر و یک قسمت با ۴ سطر است.

در این صورت در قسمت‌های کوچکتر به راحتی می‌توان ۱-کد شناسایی را به دست آورد و در نهایت

بهترین کد شناسایی با کمترین اندازه را می‌توان برای درخت به دست آورد.

حال درختان  $CT_4$  و  $CT_5$  را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نتایجی برای  $CT_{5k+4}$  به دست می‌آوریم.

لم ۳.۲.۲. ۱-کد شناسایی در درخت  $CT_4$  حداقل ۱۰ کد واژه دارد. همچنین کدی با دقیقاً ۱۰ کد واژه

نیز می‌توان برای آن به دست آورد.

برهان. تعداد رئوس در  $CT_4$  برابر  $X_4 = 15$  است. ابتدا رئوس  $CT_4$  را از چپ به راست و بعد از بالا به پایین، از ۱ تا ۱۵ شماره‌گذاری می‌کنیم.  $T_L$  را قسمت چپ  $CT_4$  شامل رئوس  $\{2, 4, 5, 8, 9, 10, 11\}$  و  $T_R$  را قسمت راست درخت  $CT_4$  شامل رئوس  $\{3, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}$  در نظر می‌گیریم. به آسانی دیده می‌شود که

$$C = \{1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14\} \quad (4.2)$$

یک ۱-کد شناسایی برای  $CT_4$  است. حال ثابت می‌کنیم که ۱-کد شناسایی با تعداد اعضای کمتر از  $C$  برای  $CT_4$  وجود ندارد. سعی می‌کنیم یک ۱-کد شناسایی  $C^*$  با حداکثر ۹ عضو برای  $CT_4$  به دست آوریم. بدون کاستن از کلیت فرض کنید  $|C^* \cap T_L| \geq 4$ .

چون ۸ و ۹ باید توسط کد  $C^*$  پوشیده و جدا شوند بنابراین از بین رئوس ۴ و ۸ و ۹ حداقل دو رأس کد واژه هستند، در نتیجه  $2 \notin C^*$ . فرض کنیم  $4 \in C^*$  حال برای جدا شدن ۸ و ۹ یکی از این دو نیز باید کدواژه باشند. فرض کنیم  $8 \in C^*$  که در این صورت ۴ و ۸ از یکدیگر جدا نمی‌شوند. بنابراین  $4 \notin C^*$ ، در نتیجه ۸ و ۹ را در  $C^*$  قرار می‌دهیم. برای رئوس ۵ و ۱۰ و ۱۱ و رئوس ۶ و ۱۲ و ۱۳، و در نهایت برای رئوس ۷ و ۱۴ و ۱۵ نیز به همین صورت عمل می‌کنیم.

چون  $2 \notin C^*$  لذا  $1 \in C^*$ . بنابراین  $|C^* \cap T_L| = |C^* \cap T_R| = 4$ . از طرفی  $3 \notin C^*$  و  $N(3) \cap C^* = N(2) \cap C^* = 1$  که با تعریف کد شناسایی بودن  $C^*$  در تناقض است. بنابراین کد شناسایی با تعداد کد واژه کمتر از  $C$  برای  $CT_4$  وجود ندارد.

□

لم ۳.۳.۲. فرض کنیم درخت  $CT_5$  یک قسمت ممکن از درخت دودویی کامل  $CT_h$  ( $h \geq 5$ ) باشد. در این صورت یک کد شناسایی  $C$  در  $CT_h$  که همه‌ی رئوس  $CT_5$  را بپوشاند و هر دو رأس را از یکدیگر جدا سازد، شامل حداقل ۱۰ عضو در  $CT_5$  است.

برهان. تعداد رئوس درخت  $CT_5$  برابر  $X_5 = 31$  است که آن‌ها را از چپ به راست و از بالا به پایین از ۱ تا ۳۱ شماره‌گذاری می‌کنیم. چون  $CT_5$  یک قسمت از درخت بزرگ  $CT_h$  است بنابراین می‌توان فرض کرد که رئوس ۱ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۰... و ۳۱ توسط رئوسی خارج از  $CT_5$  پوشیده شوند. رئوس سمت چپ برابر است با  $T_L = \{2, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 19, 20, \dots, 23\}$  و بقیه رئوس را رئوس سمت راست نامیده و با  $T_R$  نشان می‌دهیم.

کد شناسایی  $C$  را برای  $CT_h$  در نظر می‌گیریم و فرض کنید  $|C \cap CT_\delta| \leq 9$  باشد. بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد  $|C \cap T_L| \leq 4$ .

رئوس ۸ و ۹ باید توسط  $C$  پوشیده شوند. بنابراین حداقل دو کد واژه در بین رئوس  $T_{L_1} = \{4, 8, 9, 16, \dots, 19\}$  و  $T_{L_7} = \{5, 10, 11, 20, \dots, 23\}$  وجود دارد. چون  $|C \cap T_L| \leq 4$  بنابراین در بین  $T_{L_1}$  و  $T_{L_7}$  دقیقاً دو کد واژه وجود دارد.

فرض کنیم  $4 \in C$ . برای جدا کردن ۸ و ۹ فقط با یک کد واژه دو راه وجود دارد، یا یکی از آن‌ها کد واژه است برای مثال  $8 \in C$  که در این صورت ۴ و ۸ از یکدیگر جدا نمی‌شوند و یا این که هیچ کدام کد واژه نباشند که در این صورت کد واژه دیگر را می‌توان از بین رئوس ۱۸ و ۱۹ انتخاب کرد و در این حالت هم ۴ و ۸ از یکدیگر جدا نمی‌شوند. بنابراین  $4 \notin C$ ، و ۸ و ۹ را در کد شناسایی قرار می‌دهیم. برای  $T_{L_7}$  نیز به همین شکل عمل می‌کنیم که در نتیجه  $5 \notin C$ . از طرفی  $2 \notin C$ . بنابراین رأس ۱ را در کد شناسایی قرار می‌دهیم. به همین ترتیب کد واژه‌های  $T_R$  را پیدا می‌کنیم. دیده می‌شود که  $3 \notin C$  بنابراین  $1 = N(2) \cap C = N(3) \cap C$  که متناقض با کد شناسایی بودن  $C$  می‌باشد. در نتیجه در  $CT_\delta$  کد شناسایی با کمتر از ۱۰ عضو وجود ندارد.  $\square$

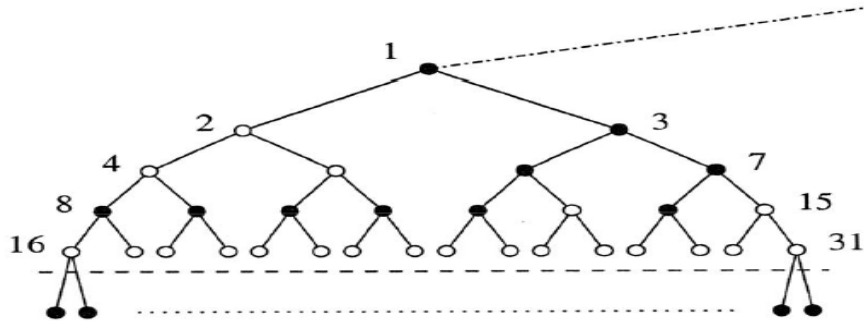
لم ۳.۴.۲. اگر درخت  $CT_\delta$  یک قسمت ممکن از درخت دودویی کامل  $CT_h$  ( $h \geq 5$ ) باشد آن‌گاه تحت شرایط خاص می‌توان یک کد شناسایی با دقیقاً ۱۰ کد واژه برای  $CT_\delta$  ساخت به طوری که همه‌ی رئوس  $CT_\delta$  را بپوشاند و هر دو رأس را از یکدیگر جدا سازد.

برهان. فرض کنیم  $CT_\delta$  قسمتی از درخت دودویی کامل  $CT_h$  ( $h \geq 5$ ) باشد، و  $C$  هم یک مجموعه ۱-کد شناسایی برای  $CT_\delta$  باشد و شامل همه‌ی ۳۲ فرزند رئوس ۱۶ و ۱۷ و... و ۳۱ باشد. اگر

$$C \cap CT_\delta = \{1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14\} \quad (5.2)$$

آن‌گاه به آسانی دیده می‌شود که همه رئوس  $CT_\delta$  توسط  $C$  پوشیده شده و هر دو رأس آن نیز از یکدیگر جدا می‌شوند. بنابراین می‌توان کدی با دقیقاً ۱۰ کد واژه برای  $CT_\delta$  ساخت. شکل (۴.۲)  $\square$

فرض کنیم  $CT_{\delta k+4}$  قسمتی از درخت بزرگتر  $CT_h$  باشد، که در آن  $5k+4 \leq h \leq 5k+8$  و فقط ریشه  $CT_{\delta k+4}$  به رأسی از  $CT_h \setminus CT_{\delta k+4}$  متصل شده باشد. در این شرایط لم‌های زیر را ثابت می‌کنیم.



شکل ۴.۲: ۱-کد شناسایی درخت  $CT_5$

لم ۳.۵.۲. اگر  $CT_{\delta k+4}$  قسمتی از درخت بزرگتر  $CT_h$  که  $\delta k + 4 \leq h \leq \delta k + 8$  باشد، و فقط ریشه‌ی  $CT_{\delta k+4}$  با یک رأس از  $CT_h \setminus CT_{\delta k+4}$  متصل باشد آن‌گاه یک ۱-کد شناسایی در  $CT_h$  وجود دارد که شامل حداقل  $\frac{1^{\circ}(2X_{\delta k+4} + 1)}{31}$  عضو در  $CT_{\delta k+4}$  است. تعداد رئوس  $CT_{\delta k+4}$  برابر  $X_{\delta k+4} = 2^{\delta k+4} - 1$  است.

برهان. با توجه به این که  $X_h = 2^h - 1$  داریم  $X_{\delta k+4} = 2^{\delta k+4} - 1$  و  $2X_{\delta k+4} + 1 = 2^{\delta k+5} - 1$  که  $2X_{\delta k+4} + 1$  بر  $31 = 2^5 - 1$  بخش پذیر است. بنابراین  $\frac{1^{\circ}(2X_{\delta k+4} + 1)}{31}$  یک عدد صحیح است. اگر  $k = 0$  آن‌گاه با توجه به لم (۳.۲.۲) حکم ثابت می‌شود.

فرض کنیم  $k > 0$  و  $C$  یک مجموعه ۱-کد شناسایی برای  $CT_h$  باشد. همانند قضایای قبل رئوس  $CT_{\delta k+4}$  را از ۱ تا  $X_{\delta k+4}$  شماره‌گذاری می‌کنیم. همان طور که می‌دانیم ریشه‌ی درختان  $CT_5$  در رئوسی با شماره  $j + 2^{\delta i}$  که  $0 \leq i \leq k - 1$  و  $0 \leq j \leq 2^{\delta i} - 1$ ، و همچنین ریشه‌ی درختان  $CT_4$  در رئوس  $j + 2^{\delta k}$  با  $0 \leq j \leq 2^{\delta k} - 1$  در درخت  $CT_{\delta k+4}$  قرار دارند.

بنا به لم (۳.۳.۲) هر یک از این درختان حداقل شامل  $1^{\circ}$  کد واژه هستند، بنابراین

$$|C \cap CT_{\delta k+4}| \geq 1^{\circ} \sum_{0 \leq i \leq k} 2^{\delta i} = \frac{1^{\circ}(2^{\delta(k+1)} - 1)}{31} = \frac{1^{\circ}(2X_{\delta k+4} + 1)}{31}.$$

□

لم ۳.۶.۲. در درخت  $CT_{\delta k+4}$  یک  $1$ -کد شناسایی دقیقاً از اندازه  $\frac{1 + (2X_{\delta k+4})}{31}$  وجود دارد. تعداد رئوس در این درخت  $1 - 2^{\delta k+4} = X_{\delta k+4}$  است.

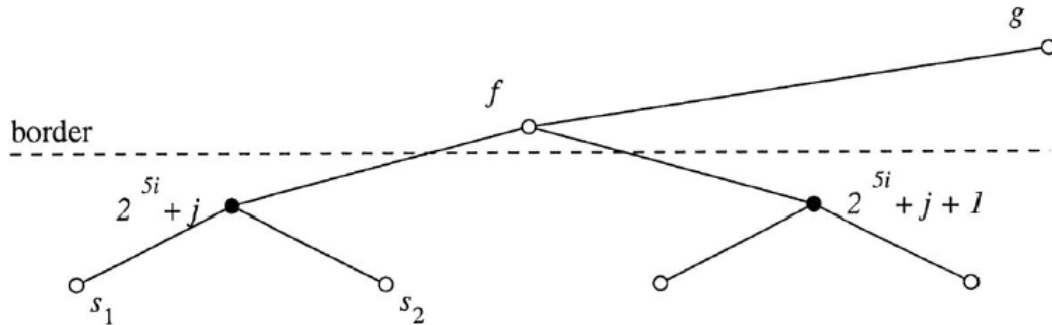
برهان. با توجه به برهان لم قبل فرض می‌کنیم  $0 < k$  باشد.  $10$  رأس متناظر با مجموعه  $C$  در (۵.۲) را کد واژه برای درختان  $CT_{\delta}$  با ریشه‌های  $z + 2^{\delta i}$  که  $0 \leq i \leq k - 1$  و  $0 \leq j \leq 2^{\delta i} - 1$ ، و  $10$  رأس متناظر با مجموعه  $C$  در (۴.۲) را کد واژه برای درختان  $CT_{\epsilon}$  با ریشه‌های  $z + 2^{\delta k}$  که  $0 \leq j \leq 2^{\delta k} - 1$  می‌باشد، در نظر می‌گیریم.

ادعا می‌کنیم  $C$  یک  $1$ -کد شناسایی برای  $CT_{\delta k+4}$  است. اگر در همه درخت‌ها ریشه را با عدد  $1$  نشان دهیم آن‌گاه با توجه به (۴.۲) و (۵.۲) دیده می‌شود که ریشه‌ی همه درختان کد واژه هستند. همچنین با توجه به لم (۳.۲.۲) و لم (۳.۴.۲) دیده می‌شود که کد واژه‌های (۴.۲) و (۵.۲) تمام رأس‌های درونی درخت‌های  $CT_{\delta}$  و  $CT_{\epsilon}$  را به ترتیب می‌پوشانند و هر دو رأس در این درختان را از یکدیگر جدا می‌سازند. نکته مبهم آن است که ممکن است در لبه‌های بین دو درخت مشکل ایجاد شود که به بررسی آن می‌پردازیم. (شکل ۵.۲)

با توجه به لم‌های (۳.۲.۲) و (۳.۴.۲) و شکل (۵.۲) ریشه درختان  $CT_{\delta}$  و  $CT_{\epsilon}$  کد واژه هستند. بنابراین دو ریشه‌ی برادر  $z + 2^{\delta i}$  (زوج) و  $z + 2^{\delta i} + 1$  که با هم مجاور نیستند از پدرشان جدا می‌شوند. فرض کنیم  $s_1$  و  $s_2$  فرزندان یکی از ریشه‌ها مانند  $z + 2^{\delta i}$  باشند، با توجه به کدهای ارائه شده در (۴.۲) و (۵.۲) فرزندان نیز از ریشه‌ها جدا می‌شوند. در نهایت می‌توان نتیجه گرفت  $C$  یک  $1$ -کد شناسایی برای  $CT_{\delta k+4}$  است.  $\square$

لم ۳.۷.۲. فرض کنید درخت  $CT_{\epsilon}$  یک قسمت از درخت دودویی کامل  $CT_h$  باشد. اگر ریشه‌ی  $CT_{\epsilon}$  ریشه‌ی  $CT_h$  باشد و کد شناسایی  $C$  در  $CT_h$  همه‌ی رئوس  $CT_{\epsilon}$  را بپوشاند و هر دو رأس در آن را از هم جدا سازد آن‌گاه  $C$  شامل حداقل  $5$  رأس در  $CT_{\epsilon}$  است.

برهان. فرض کنیم درخت  $CT_{\epsilon}$  قسمتی از درخت دودویی کامل  $CT_h$  باشد به طوری که ریشه‌ی هر دو درخت یک رأس باشد. همچنین فرض کنیم  $C$  یک کد شناسایی برای درخت  $CT_h$  باشد که رئوس  $8$  و  $9$  و... و  $15$  توسط کد واژه‌هایی از  $C$  که خارج  $CT_{\epsilon}$  قرار دارند پوشیده شوند. اکنون نشان می‌دهیم با این شرایط کد شناسایی در درخت  $CT_{\epsilon}$  حداقل  $5$  عضو دارد.



شکل ۵.۲: همسایه‌های  $2^{5i} + j$  (زوج)

فرض کنیم  $CT_4$  دارای حداکثر ۴ کد واژه در  $C$  باشد. چون ۴ و ۵ باید توسط کد واژه‌ها پوشیده و جدا شوند پس حداقل دو کد واژه در بین رئوس  $T_L = \{2, 4, 5, 8, 9, 10, 11\}$  وجود دارد. همچنین ۶ و ۷ نیز باید توسط کد واژه‌ها پوشیده و جدا شوند بنابراین حداقل دو کد واژه در بین رئوس  $T_R = \{3, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}$  وجود دارد. با توجه به این که می‌خواهیم کد واژه‌ای با حداکثر ۴ رأس برای  $CT_4$  بیابیم لذا  $|C \cap T_L| = |C \cap T_R| = 2$ . در نتیجه می‌توان فرض کرد  $1 \notin C$ .  
 رأس ۱ باید توسط کد واژه‌ها پوشیده شود. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم  $2 \in C$ . همان‌طور که قبلاً گفته شد ۴ و ۵ نیز باید پوشیده و جدا شوند. بنابراین یا باید یکی از آن‌ها کد واژه باشد که برای مثال ۴ را در  $C$  قرار می‌دهیم و در این حالت ۲ و ۴ از یکدیگر جدا نمی‌شوند، یا باید توسط یکی از فرزندان پوشیده و جدا شوند که برای مثال ۴ با ۸ یا ۹ پوشیده و جدا شود و در این صورت نیز ۲ و ۵ از یکدیگر جدا نمی‌شوند. بنابراین می‌توان گفت کد شناسایی با ۴ رأس برای  $CT_4$  با شرایط خواسته شده در لم وجود ندارد.  $\square$

لم ۳.۸.۲. اگر درخت  $CT_4$  قسمتی از یک درخت دودویی کامل  $CT_h$  باشد و ریشه‌ی  $CT_4$  همان ریشه‌ی  $CT_h$  باشد آن‌گاه تحت شرایط خاص یک کد با دقیقاً ۵ کد واژه می‌توان برای  $CT_4$  ساخت به طوری که همه‌ی رئوس  $CT_4$  را بپوشاند و هر دو رأس را از یکدیگر جدا سازد.

برهان. فرض کنید  $CT_4$  مشمول در یک درخت دودویی کامل  $CT_h$  باشد و کد شناسایی  $C$  برای  $CT_h$  شامل همه‌ی فرزندان رئوس ۸ و ۹ و... و ۱۵ باشد. اگر

$$C \cap CT_4 = \{1, 4, 5, 6, 7\} \quad (۶.۲)$$

آن‌گاه به آسانی دیده می‌شود که همه‌ی رئوس در  $CT_4$  پوشیده و هر دو رأس از یکدیگر جدا می‌شوند. بنابراین کدی با دقیقاً ۵ کد واژه برای  $CT_4$  وجود دارد.  $\square$

لم ۳.۹.۲. اگر درخت  $CT_i$  با  $i = 1, 2, 3$  از یک درخت دودویی کامل  $CT_h$  ( $h \geq i$ ) باشد و ریشه‌ی  $CT_i$  همان ریشه‌ی  $CT_h$  باشد آن‌گاه کدشناسایی  $C_i$  در  $CT_h$  که همه‌ی رئوس در  $CT_i$  را بپوشاند و هر دو رأس را از یکدیگر جدا سازد، حداقل شامل  $f(i)$  کد واژه در  $CT_i$  است، که

$$f(3) = 2, f(2) = 1, f(1) = 0.$$

برهان. فرض کنیم درخت  $CT_i$  قسمتی از درخت دودویی کامل  $CT_h$ ، و کد شناسایی  $C_i \subset CT_h$  شامل همه‌ی فرزندان رئوس  $2^{i-1} + 1, 2^{i-1} + 2, \dots, 2^i - 1$  باشد.

اگر  $CT_3 \cap C_3 = \{2, 3\}$  آن‌گاه به آسانی دیده می‌شود که همه‌ی رئوس  $CT_3$  پوشیده شده و هر دو رأس از یکدیگر جدا شده‌اند. همچنین برای  $CT_2$  داریم  $C_2 \cap CT_2 = \{1\}$  و  $C_1 \cap CT_1 = \emptyset$ . بنابراین  $C_i$  دقیقاً  $f(i)$  کدواژه در  $CT_i$  دارد که همه‌ی رئوس  $CT_i$  را می‌پوشاند و هر دو رأس را جدا می‌سازد.  $\square$

قضیه ۳.۱۰.۲. برای هر  $h \geq 1$ ،  $M_1^h(CT_h) = \lceil \frac{2^0 X_h}{31} \rceil$ ، که در آن تعداد رئوس  $CT_h$  برابر  $X_h = 2^h - 1$  است.

برهان. درخت  $CT_h$  با  $h = 5k + j$  و  $j = 0, 1, 2, 3, 4$  را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم  $k = 0$ . اگر  $j = 4$  آن‌گاه  $CT_4$  دارای ۱۵ رأس است و یک کد شناسایی با ۱۰ عضو دارد که

$$10 = \lceil \frac{2^0 \times 15}{31} \rceil.$$

اگر  $j = 3$  آن‌گاه  $CT_3$ ، ۷ رأس و یک کد شناسایی با ۵ عضو دارد. اگر  $j = 2$  آن‌گاه کد شناسایی  $CT_2$  دو عضو و کد شناسایی  $CT_1$  تنها یک عضو دارد که در همه‌ی موارد



$$M_1^I(CT_h) = \lceil \frac{2^0 X_h}{31} \rceil$$

است.

فرض کنیم  $1 \leq k$ . اگر  $z = 4$  آن‌گاه بنا به لم (۳.۶.۲) داریم

$$M_1^I(CT_{\delta k+4}) = \frac{1^0(2X_{\delta k+4} + 1)}{31} = \frac{1^0(2X_h + 1)}{31} = \lceil \frac{2^0 X_h}{31} \rceil.$$

اگر  $z = 3$  آن‌گاه درون درخت  $CT_{\delta k+3}$  یک  $CT_4$  و  $16$  درخت  $CT_{\delta k-1}$  وجود دارد. تعداد کد واژه‌های کد شناسایی  $CT_4$  برابر  $5$  است. همچنین داریم

$$X_{\delta k-1} = 2^{\delta k-1} - 1 = \frac{X_h - 15}{16}$$

$$5k - 1 = 5(k - 1) + 4$$

بنابراین تعداد کد واژه‌ها  $CT_{\delta k-1}$  برابر  $\frac{1^0(2X_{\delta k-1} + 1)}{31}$  است و در نتیجه

$$5 + 16 \left( \frac{1^0 \left( 2 \left( \frac{X_h - 15}{16} \right) + 1 \right)}{31} \right) = \frac{2^0 X_h + 15}{31} = \lceil \frac{2^0 X_h}{31} \rceil.$$

اگر  $z = 2$  آن‌گاه درخت  $CT_{\delta k+2}$  شامل یک  $CT_3$  و  $8$  درخت  $CT_{\delta k-1}$  است که با رئوس  $4$  و  $5$  و  $6$  و  $7$  در  $CT_{\delta k+2}$  مجاور هستند. بنا به لم (۳.۹.۲)،  $CT_3$  شامل یک  $1$ -کد شناسایی با  $2$  عضو است. بنابراین تعداد کد واژه‌های برابر است با

$$2 + 8 \left( \frac{1^0 \left( 2 \left( \frac{X_h - 7}{8} \right) + 1 \right)}{31} \right) = \frac{2^0 X_h + 2}{31} = \lceil \frac{2^0 X_h}{31} \rceil.$$

اگر  $z = 1$  آن‌گاه درون درخت  $CT_{\delta k+1}$  یک  $CT_2$  و  $4$  درخت  $CT_{\delta k-1}$  وجود دارد که تعداد کد واژه‌های آن برابر

$$1 + 4 \left( \frac{1^0 \left( 2 \left( \frac{X_h - 3}{4} \right) + 1 \right)}{31} \right) = \frac{2^0 X_h + 11}{31} = \lceil \frac{2^0 X_h}{31} \rceil$$

می‌شود. اگر  $z = 0$  آن‌گاه درون درخت  $CT_{\delta k}$  یک  $CT_1$  و  $2$  درخت  $CT_{\delta k-1}$  وجود دارد و تعداد کد واژه‌های آن برابر می‌شود با

$$1 + 2 \left( \frac{1 \circ \left( 2 \left( \frac{X_h - 1}{2} \right) + 1 \right)}{31} \right) = \frac{2 \circ X_h + 15}{31} = \left\lceil \frac{2 \circ X_h}{31} \right\rceil.$$

□

گزاره ۳.۱.۲. برای هر  $q \geq 2$  و هر  $h \geq 1$

$$M_{\vee}^{LD}(CT_h^q) = \left\lceil \frac{q^{\vee} X_h^q}{q^{\vee} + q + 1} \right\rceil$$

که تعداد رئوس  $CT_h^q$  برابر  $X_h^q$  است.

برهان. به کمک الگوریتم معرفی شده در [۱۸] که ورودی آن یک درخت و خروجی آن یک مجموعه احاطه‌گر مکانی با کوچکترین اندازه برای آن درخت است، این قضیه را ثابت می‌کنیم. الگوریتم مورد نظر را برای یک درخت کامل اجرا می‌کنیم. فرض کنیم  $h = 3s$ . آن‌گاه بنا به الگوریتم در سطرهای ۱ و ۴ و ۷ و ... و ۲ و  $h$  هیچ رأسی کد واژه نیستند و در سطرهای ۲ و ۵ و ۸ و ... و ۱ و  $h - 1$  همه رئوس کد واژه برای درخت مورد نظر هستند. نسبت  $\frac{q-1}{q}$  رأس از رئوس سطرهای ۳ و ۶ و ۹ و ... و  $h$  نیز کد واژه هستند. بنابراین

$$\begin{aligned} |C| &= q^1 + q^4 + \dots + q^{h-2} + \frac{q-1}{q}(q^2 + q^5 + \dots + q^{h-1}) \\ &= q^2(1 + q^3 + \dots + q^{h-3}) \\ &= q^2 \frac{q^h - 1}{q^3 - 1} \\ &= \frac{q^2}{q^2 + q + 1} \frac{q^h - 1}{q - 1} \\ &= \frac{q^{\vee} X_h^q}{q^{\vee} + q + 1}. \end{aligned}$$

اگر  $h = 3s + 1$  آن‌گاه همه رئوس در سطرهای ۱ و ۳ و ۶ و ۹ و ... و  $h - 1$  کد واژه هستند و هیچ‌یک از رئوس در سطرهای ۲ و ۵ و ... و ۲ و  $h$  کد واژه نیستند و نسبت  $\frac{q-1}{q}$  رأس از رئوس

سطرهای ۴ و ۷ و ۱۰ و... و  $h$  کد واژه می‌باشند. بنابراین

$$\begin{aligned} |C| &= q^0 + q^1 + \dots + q^{h-2} + \frac{q-1}{q}(q^3 + q^6 + \dots + q^{h-1}) \\ &= \frac{q^1 X_h^q + q}{q^1 + q + 1} \\ &= \left\lceil \frac{q^1 X_h^q}{q^1 + q + 1} \right\rceil. \end{aligned}$$

اگر  $h = 3s + 2$  آن‌گاه همه‌ی رئوس سطرهای ۱ و ۴ و... و  $h - 1$  کد واژه هستند و هیچ یک از رئوس سطرهای ۳ و ۶ و ۹ و... و  $h - 2$  کد واژه نیستند و نسبت  $\frac{q-1}{q}$  رأس از رئوس سطرهای ۲ و ۵ و... و  $h$  کد واژه هستند. بنابراین

$$\begin{aligned} |C| &= q^0 + q^3 + \dots + q^h + \frac{q-1}{q}(q^1 + q^4 + \dots + q^{h-1}) \\ &= \frac{q^1 X_h^q + q}{q^1 + q + 1} \\ &= \left\lceil \frac{q^1 X_h^q}{q^1 + q + 1} \right\rceil. \end{aligned}$$

□

برای نمونه این الگوریتم در شکل (۶.۲) برای درختان  $CT_3^4$  و  $CT_4^4$  و  $CT_5^4$  اجرا شده است.

نتیجه ۳.۱.۲. برای هر  $h \geq 1$ ،  $M_1^{LD}(CT_h) = \left\lceil \frac{4X_h}{5} \right\rceil$  که تعداد رئوس  $CT_h$  برابر  $X_h$  است.

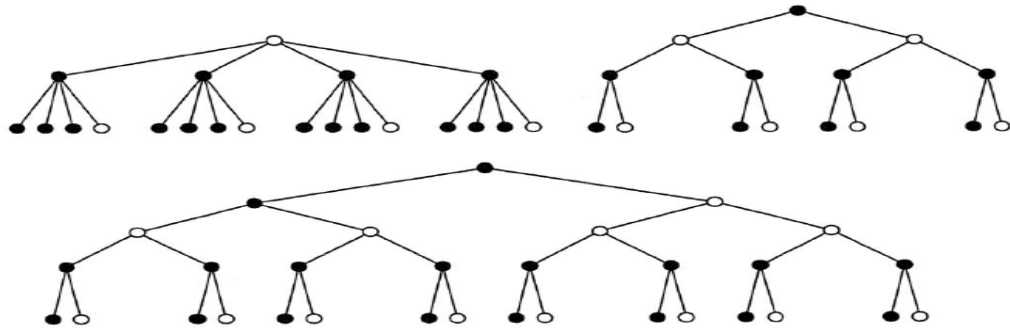
□

برهان. اگر در قضیه قبل قرار دهیم  $q = 2$  آن‌گاه حکم ثابت می‌شود.

$$M_1^I(CT_h^q) = \left\lceil \frac{q^1 X_h^q}{q^1 + q + 1} \right\rceil, \quad h \geq 1 \text{ و } q > 2$$

برهان. هر مجموعه کد شناسایی یک گراف، یک احاطه گرمکانی نیز برای آن گراف می‌باشد. بنابراین

$$M_1^I(CT_h^q) \geq M_1^{LD}(CT_h^q).$$



شکل ۶.۲: ۱- احاطه‌گر مکانی در  $CT_3^q$  و  $CT_4$  و  $CT_5$

از طرف دیگر با بررسی مجموعه احاطه‌گری که از طریق الگوریتم معرفی شده در [۱۸] برای گراف  $CT_h^q$  ( $q > 2$ ) به دست می‌آید، دیده می‌شود که یک ۱-کد شناسایی نیز برای آن است.

بنابراین  $M_1^I(CT_h^q) = M_1^{LD}(CT_h^q)$  در نتیجه

$$M_1^I(CT_h^q) = \lceil \frac{q^2 X_h^q}{q^2 + q + 1} \rceil.$$

□

## فصل ۳

# احاطه‌گر مکانی و کد شناسایی در درخت‌ها

### ۱.۳ مقدمه

در این فصل کران‌هایی برای احاطه‌گر مکانی  $(\gamma_L)$  و کد شناسایی  $(M(G))$  در درخت  $T$  به دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $\geq 4$  با  $n$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد آن‌گاه

$$M(G) \geq \frac{3(n+l-s+1)}{7}.$$

همچنین نشان می‌دهیم که اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $\geq 3$  باشد، آن‌گاه

$$\frac{n+l-s+1}{3} \leq \gamma_L(T) \leq \frac{n+l-s}{2}.$$

در نهایت درختانی را توصیف می‌کنیم که در شرایط زیر صدق می‌کنند.

$$\gamma_L(T) = \frac{n+l-s}{2} \text{ و } \gamma(T) = \gamma_L(T) \text{ و } M(T) = \gamma(T).$$

نتایج موجود در این فصل از مرجع [۵] گرفته شده است.

قرار داد: مجموعه برگ‌ها در درخت  $T$  را با  $L(G)$  و مجموعه رأس‌های پشتیبان را با  $S(G)$  نمایش می‌دهیم و قرار می‌دهیم  $|L(G)| = l(G)$  و  $|S(G)| = s(G)$ . برای راحتی کار می‌توان به جای  $l(G)$  و  $s(G)$  از  $l$  و  $s$  استفاده کنیم.

**تعریف ۱.۱.۳.** ستاره مضاعف درختی است که شامل دقیقاً دو رأس است که برگ نیستند. یکی از آن‌ها با  $p$  برگ و دیگری با  $q$  برگ مجاور هستند و این درخت را با  $S_{p,q}$  نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۱.۲.۳.** ستاره تقسیم شده را با  $SS_q$  نمایش داده و درختی است که از ستاره  $K_{1,q}$  با تقسیم هر یال آن به دو یال به دست می‌آید.

**تعریف ۱.۳.۳.** اگر به ازای هر رأس  $v$  از گراف  $G$  یک رأس جدید  $v'$  به گراف اضافه نموده و یال  $vv'$  را هم در  $E$  قرار دهیم آنگاه گراف حاصل را **کرونای گراف  $G$**  می‌نامیم. کرونای گراف  $G$  و  $H$  را با  $GOH$  نشان می‌دهیم.

## ۲.۳ احاطه گرمکانی در درخت‌ها

اکنون با توجه به تعریف احاطه گرمکانی در فصل‌های قبل لم زیر را ثابت می‌کنیم.

**لم ۲.۱.۳.** در هر درخت  $T$  از مرتبه‌ی ۳  $n \geq 3$  یک مجموعه احاطه گرمکانی  $X$  با خصوصیات زیر وجود دارد:

(الف) اگر  $x$  یک رأس پشتیبان و  $L_x$  تعداد برگ‌های رأس  $x$  باشد، آنگاه مجموعه  $X$  شامل  $x$  و دقیقاً  $1 - L_x$  برگ از  $x$  است.

(ب) اگر  $a - b - c - d$  یک مسیر باشد در حالی که  $a$  یک برگ و دو رأس  $b$  و  $c$  از درجه‌ی دو باشند و رأس  $d$  برگ نباشد، آنگاه مجموعه  $X$  شامل  $b$  و  $d$  هست و شامل  $a$  و  $c$  نیست.

**برهان.** (الف) فرض کنید مجموعه  $X$  یک  $\gamma_L(T)$ -مجموعه برای درخت  $T$  باشد که شامل کمترین تعداد برگ و بیشترین تعداد رأس پشتیبان ممکن است.  $x$  را یک رأس پشتیبان دلخواه که  $L_x$  تعداد برگ‌های آن است در نظر می‌گیریم، فرض کنیم  $x \notin X$ . در این صورت همه‌ی برگ‌های  $x$  در  $X$  هستند، زیرا در غیر این صورت اگر برگ  $y$  از  $x$  در  $X$  نباشد، آنگاه  $N(y) \cap X = \emptyset$  و این متناقض

با تعریف  $X$  است. بنابراین همه برگ‌های  $x$  باید در  $X$  باشند. در این حالت  $(X \setminus \{y\}) \cup \{x\}$  یک  $\gamma_L(T)$ -مجموعه شامل رأس‌های پشتیبان بیشتر و برگ‌های کمتر است که متناقض با فرض است. بنابراین  $x \in X$ . فرض کنیم  $z$  و  $y$  دو برگ از رأس  $x$  باشند که در  $X$  نیستند. در این صورت  $N(z) \cap X = N(y) \cap X$  که متناقض با  $\gamma_L(T)$  بودن  $X$  هست. بنابراین حداقل  $L_x - 1$  از برگ‌های  $x$  در  $X$  هستند.

فرض کنید همه برگ‌های  $x$  در  $X$  باشند و  $y$  یکی از برگ‌های  $x$  باشد که  $X \setminus y$  یک  $\gamma_L(T)$ -مجموعه برای  $T$  نباشد یعنی یک  $u \in T$  وجود داشته باشد که همسایه غیر برگ  $x$  باشد و  $N(u) \cap X = N(y) \cap X = x$  باشد در این صورت  $(X \setminus \{y\}) \cup \{u\}$  یک  $\gamma_L(T)$ -مجموعه برای  $T$  است با برگ‌های کمتر و رأس‌های پشتیبان بیشتر از  $X$ ، که متناقض با فرض است. بنابراین حداکثر  $L_x - 1$  از برگ‌های  $x$  در  $X$  قرار دارند.

ب) بنا به برهان قسمت الف،  $X$  شامل  $b$  که یک رأس پشتیبان است می‌باشد اما شامل برگ  $a$  نیست. اگر  $X$  شامل  $c$  باشد آن‌گاه  $(X \setminus \{c\}) \cup \{d\}$  با شرایط خواسته شده در لم، یک  $\gamma_L(T)$ -مجموعه است که تعداد رأس‌های پشتیبان و برگ‌های آن برابر با مجموعه  $X$  است. اگر  $X$  شامل  $c$  نباشد آن‌گاه شامل  $d$  است زیرا در غیر این صورت  $N(a) \cap X = N(c) \cap X = b$  که متناقض با فرض است. بنابراین  $X$  در شرایط خواسته شده صدق می‌کند.  $\square$

### ۱.۲.۳ یک کران بالا روی $\gamma_L$ برای درخت‌ها

قضیه ۲.۱.۳. اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $2 \leq n$  باشد آن‌گاه  $\gamma_L(T) \leq \frac{n+l-s}{4}$  است.

برهان. اگر بیشترین فاصله بین رئوس (قطر) در درخت  $T$  یک یا دو باشد مانند  $P_2$  یا  $P_3$  یا گراف ستاره، بوضوح حکم برقرار است، زیرا

$$\gamma_L(p_2) \leq \frac{2+1-1}{4} = 1 \text{ و } \gamma_L(p_3) \leq \frac{3+2-1}{4} = 1 \text{ و } \gamma_L(K_{1,n}) \leq \frac{n+(n-1)-1}{4} = \frac{2n-2}{4}.$$

بنابراین فرض می‌کنیم  $T$  دارای قطر حداقل ۳ باشد. برگ‌های درخت  $T$  را حذف کرده و درخت جدید را  $T^*$  می‌نامیم. بنابراین  $T^*$  از مرتبه حداقل ۲ است. زیرا کوچکترین درخت با قطر ۳،  $P_4$  است که با حذف برگ‌ها از مرتبه ۲ می‌شود. همچنین می‌توان رئوس  $T^*$  را در دو بخش ناتهی و منحصر به فرد  $A$  و  $B$  قرار داد به‌گونه‌ای که رئوس هر بخش از یکدیگر مستقل باشند. مجموعه  $C$  را نیز مجموعه‌ای

از برگ‌های  $T$  در نظر می‌گیریم که شامل همه برگ‌های رئوس پشتیبان قوی در  $T$  به جز یک برگ از هر رأس باشد. بنابراین  $|C| = l - s$ .

هر برگ  $T^*$  یک رأس پشتیبان در  $T$  است. رأس‌های با درجه یک در  $T^*$  همان رأس‌های مجموعه  $S(T)$  هستند، و هر رأس  $T^* \setminus S(T)$  دارای درجه حداقل ۲ در  $T^*$  هست.

بنابراین ادعا می‌کنیم  $C \cup S(T) \cup A$  یک  $\gamma_L(T)$ -مجموعه برای  $T$  است. زیرا با توجه به لم (۲.۱.۳) در مجموعه احاطه گرمکانی است. از طرفی رئوس  $A$  با رئوس  $B$  مجاورند و هر رأس از  $B \setminus S(T)$  با حداقل دو رأس از  $A$  مجاورند و به دلیل این که  $T$  درخت است هر دو رأس در  $B \setminus S(T)$  دو همسایه مشترک در  $A$  ندارند تا دور تشکیل نشود. می‌توان دید که علاوه بر  $C \cup S(T) \cup B$ ،  $C \cup S(T) \cup A$  نیز یک  $\gamma_L(T)$ -مجموعه برای  $T$  هست، و داریم

$$\begin{aligned} \gamma_L(T) &\leq \min\{|C \cup S(T) \cup B|, |C \cup S(T) \cup A|\} \\ &= |C| + |S(T)| + \min\{|A \setminus S(T)|, |B \setminus S(T)|\} \\ &\leq l - s + s + \frac{(n - l - s)}{2} \\ &= \frac{n + l - s}{2}. \end{aligned}$$

□

گروه خاصی از درختان به نام خانواده  $F$  را برای بدست آوردن کران  $\gamma_L(T)$  معرفی می‌کنیم. یک درخت  $T$  در  $F$  قرار دارد اگر از دنباله  $T_1, T_2, \dots, T_k$ ،  $K \geq 1$  به دست آید. به طوری که  $T_1$  مسیر  $P_3$  یا  $P_4$  و  $T = T_k$  باشد که در آن به ازای هر  $i$  و  $k$  که  $k \geq 2$  و  $i < k$ ،  $T_{i+1}$  با اعمال یکی از عملگرهای تعریف شده در زیر روی  $T_i$  به دست آید. اگر  $T_1 = P_3$  آن‌گاه  $D(T_1) = \{x, y\}$  و اگر  $T_1 = P_4$  آن‌گاه  $D(T_1) = S(T_1)$ .

**تعریف ۲.۱.۳.** عملگر  $F_1$ : این عملگر رأس  $w$  را به واسطه یک یال به یک رأس پشتیبان در  $T_i$  متصل می‌کند و  $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{w\}$ .



عملگر  $F_2$ : این عملگر یک مسیر  $P_2 = u - v$  را با یال  $uz$  به یک رأس پشتیبان  $z$  در  $T_i$  متصل می‌کند و  $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{u\}$ .

عملگر  $F_3$ : یک ستاره تقسیم شده  $H$  از مرتبه حداقل ۵ با رأس مرکزی  $a$  را با یال  $ab'$  به یک برگ  $b'$  از یک رأس پشتیبان قوی در  $T_i$  متصل می‌کند و  $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup S(H)$ .

عملگر  $F_4$ : یک رأس پشتیبان قوی از  $T_i$  انتخاب و به یک برگ از آن مانند  $f$  که در  $D(T_i)$  قرار دارد مسیر  $P_3 = b - c - d$  را با یال  $df$  وصل می‌کند و مسیرهای  $P_2 = u_j - v_j$  برای  $j = 1, \dots, p$  که  $p \geq 0$  را با یال  $u_j f$  به  $T_i$  وصل می‌کند و داریم  $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{c, u_1, \dots, u_p\}$ .

عملگر  $F_5$ : ابتدا یک رأس  $y \in T_i$  را به گونه‌ای انتخاب می‌کند که رأس پشتیبان نباشد و در شرط  $\gamma_L(T_i \setminus y) = \gamma_L(T_i)$  صدق کند، سپس مسیر  $P_4 = a - b - c - d$  را با یال  $dy$  به درخت وصل می‌کند، و مسیرهای  $P_2 = u_j - v_j$  برای  $j = 1, \dots, p$  که  $p \geq 0$  را با یال  $u_j d$  به درخت وصل می‌کند، و دیده می‌شود  $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{b, d, u_1, \dots, u_p\}$ .

این عملگر بر روی برگ رأس پشتیبان قوی اعمال نمی‌شود چون برای هر برگ  $y$  از پشتیبان قوی داریم  $\gamma_L(T_i \setminus y) < \gamma_L(T_i)$ .

$$\text{لم ۲.۲.۳.} \quad \text{اگر درخت } T \in F \text{ باشد آنگاه } \gamma_L(T) = \frac{n+l-s}{2}$$

برهان. فرض کنیم درخت  $T \in F$ ، و  $D(T)$  یک  $-\gamma_L(T)$  مجموعه برای  $T$  باشد. با استقرا روی همی عملگرهای اعمال شده روی  $T$  نشان می‌دهیم که  $D(T)$  یک  $-\gamma_L(T)$  مجموعه از اندازه  $\frac{n+l-s}{2}$  است.

برای  $P_3$  و  $P_4$  حکم برقرار است، زیرا  $\frac{3+2-1}{2} = 2 = \gamma_L(P_3)$  و  $\gamma_L(P_4) = 2$ . فرض می‌کنیم که این خاصیت برای همه درختان  $T'$  که در  $F$  قرار دارند و با  $k-1 \geq 0$  عملگر به وجود آمده‌اند برقرار باشد. بنابراین ثابت می‌کنیم حکم برای  $T$  که با اعمال یکی از پنج عملگر معرفی شده روی  $T'$  به دست می‌آید برقرار باشد. حال روی پنج عملگر بحث می‌کنیم. فرض کنید  $X$  یک  $-\gamma_L(T)$  مجموعه باشد که شامل خاصیت‌های شرح داده شده در لم (۲.۱.۳) باشد.

حالت ۱: عملگر  $F_1$  را روی  $T'$  اعمال کرده و  $T$  به دست می‌آید. بنابراین به یک رأس پشتیبان  $q$  در  $T'$  یک رأس  $w$  را متصل کرده‌ایم که  $q$  در  $T$  یک رأس پشتیبان قوی می‌شود. با توجه به لم (۲.۱.۳)

مجموعه  $X$  شامل  $q$  و همه برگ‌های آن جز یکی است که ما فرض می‌کنیم  $w \in X$  باشد. در این صورت  $X \setminus \{w\}$  یک مجموعه احاطه گرمکانی برای درخت  $T'$  است، بنابراین  $\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - 1$ .  
 $D(T') \cup \{w\}$  یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T$  است که  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 1$  و در نتیجه داریم  $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 1$ . از طرفی  $n = n' + 1$  و  $l = l' + 1$  و  $s = s'$  بنا به فرض

$$\gamma_L(T') = \frac{n' + l' - s'}{2}, \text{ بنابراین}$$

$$\begin{aligned} \gamma_L(T) &= \frac{n' + l' - s'}{2} + 1 \\ &= \frac{n' + 1 + l' + 1 - s'}{2} \\ &= \frac{n + l - s}{2}. \end{aligned}$$

حالت ۲: با اعمال عملگر  $F_2$  روی  $T'$  درخت  $T$  به دست می‌آید و در واقع یک مسیر  $u - v$  را به رأس پشتیبان  $z$  در  $T'$  با یال  $uz$  متصل می‌کنیم و بنا به لم (۲.۱.۳)،  $u, z \in X$  و  $v \notin X$ . بنابراین  $X \setminus \{u\}$  یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T'$  است و داریم  $\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - 1$  و از طرف دیگر  $D(T') \cup \{u\}$  یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T$  است و  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 1$ ، در نتیجه  $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') - 1$ . از طرفی  $n = n' + 2$  و  $l = l' + 1$  و  $s = s' + 1$  بنا به فرض

$$\gamma_L(T') = \frac{n' + l' - s'}{2}, \text{ در این صورت } \gamma_L(T) = \frac{n + l - s}{2}$$

حالت ۳: فرض کنیم عملگر  $F_3$  روی  $T'$  اعمال شده و  $T$  به دست آمده باشد یعنی یک ستاره تقسیم شده  $H$  با مرتبه حداقل ۵ را با رأس مرکزی  $a$  به یک برگ  $b'$  از رأس پشتیبان قوی در  $T_i$  با یال  $ab'$  متصل می‌کنیم. به وضوح دیده می‌شود که  $D(T') \cup S(H)$  یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T$  است و بنابراین  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + S(H)$ . همچنین با توجه به لم (۲.۱.۳) و این که  $S(H) \subset X$  و  $a \notin X$ ،  $X \setminus S(H)$  یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T'$  است که رابطه  $\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - S(H)$  را نتیجه می‌دهد. بنابراین  $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + S(H)$ . از طرفی  $n = n' + 2|S(H)| + 1$  و

$$\gamma_L(T) = \frac{n + l - s}{2}, \text{ در نتیجه } s = s' + |S(H)| \text{ و } l = l' + |S(H)| - 1$$

حالت ۴: فرض کنیم عملگر  $F_4$  روی  $T'$  اعمال شود و  $T$  ایجاد شود. در این صورت داریم  $D(T') \cup \{c, u_1, \dots, u_p\}$  از طرفی دیده می‌شود که  $l = l' + p$  و  $s = s' + 1 + p$  و  $n = n' + 3 + 2p$

یک مجموعه احاطه‌گر برای  $T$  است، بنابراین  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 1 + p$ . تساوی از این حقیقت ناشی می‌شود که با توجه به لم (۲.۱.۳) می‌توان یک  $-\gamma_L(T')$  مجموعه که شامل برگ  $f$  هست را با اضافه کردن  $\{c, u_1, \dots, u_p\}$  به یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای  $T$  گسترش داد. بنابراین

$$\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 1 + p \text{ و در نتیجه}$$

$$\gamma_L(T) = \frac{n' + 3 + 2 + l' + p - s' - 1 - p}{2} = \frac{n + l - s}{2}.$$

حالت ۵: عملگر  $F_5$  را روی  $T'$  اعمال می‌کنیم و  $T$  به دست می‌آید. با توجه به توضیحات مذکور در معرفی این عملگر اگر رأس انتخابی  $y$  در  $T'$  برگ نباشد آن‌گاه  $n = n' + 4 + 2p$  و  $s = s' + 1 + p$  و  $l = l' + 1 + p$  و اگر  $y$  برگ باشد آن‌گاه  $s = s' + p$  و  $l = l' + p$ . چون  $D(T') \cup \{b, d, u_1, \dots, u_p\}$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای درخت  $T$  است، بنابراین  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 2 + p$ . از طرف دیگر با توجه به لم (۲.۱.۳) یک  $-\gamma_L(T)$  مجموعه به نام  $X$  وجود دارد که شامل  $\{b, d, u_1, \dots, u_p\}$  هست. اگر  $y \in X$  آن‌گاه  $X \cap T'$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای  $T'$  است، بنابراین

$$\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - 2 - p \text{ اگر } y \notin X \text{ آن‌گاه } X \cap T' \text{ یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای } T' \setminus y$$

است. بنابراین  $\gamma_L(T') = \gamma_L(T' \setminus y) \leq \gamma_L(T) - 2 - p$ . در نتیجه  $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 2 + p$  و در نهایت  $\gamma_L(T) = \frac{n + l - s}{2}$  می‌شود.

□

**قضیه ۲.۲.۳.** اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $2 \leq n$  باشد آن‌گاه  $\gamma_L(T) = \frac{n + l - s}{2}$  اگر و تنها اگر  $T \in F$ .

**برهان.** اگر  $T \in F$  آن‌گاه با توجه به لم (۲.۲.۳)،  $D(T)$  یک  $-\gamma_L(T)$  مجموعه از اندازه  $\frac{n + l - s}{2}$  است. برعکس را با استقرا روی مرتبه  $T$  ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم  $T$  یک درخت از مرتبه  $n$  با  $\gamma_L(T) = \frac{n + l - s}{2}$  باشد و اگر هر درخت  $T'$  از مرتبه

$n' < n$  با  $\gamma_L(T') = \frac{n' + l' - s'}{2}$  در خانواده  $F$  قرار گیرد، آن‌گاه ثابت می‌کنیم درخت  $T$  که با

اعمال پنج عملگر معرفی شده روی  $T'$  به دست می‌آید در  $F$  قرار می‌گیرد.

اگر  $T$  دارای قطر یک باشد آن‌گاه  $T = P_2$  و  $\gamma_L(T) = 1 < \frac{n + l - s}{2}$  بنابراین  $T \notin F$ .

اگر  $T$  دارای قطر ۲ باشد آن‌گاه  $T = K_{1,t}$  که  $t \geq 2$  و  $\gamma_L(T) = \frac{n + l - s}{2} = l$  و چون  $T$  از

آن‌گاه  $T$  یک ستاره مضاعف  $S_{p,q}$  است، و  $\gamma_L(T) = \frac{n+l-s}{2} = p+q$  و چون  $T = P_4 = P_3$  با اعمال  $T_1 = P_3$  با اعمال  $t-2$  بار از عملگر  $F_1$  به دست آمده بنابراین  $T \in F$ . اگر  $T$  دارای قطر ۳ باشد با اعمال صفر بار استفاده یا بیشتر، از عملگر  $F_1$  به دست آمده، بنابراین  $T \in F$ . حال فرض کنیم  $T$  دارای قطر حداقل ۴ باشد. مجموعه  $X$  را یک  $-\gamma_L(T)$  مجموعه که در شرایط لم (۲.۱.۳) صدق می‌کند در نظر می‌گیریم.

ابتدا فرض می‌کنیم  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی  $x$  باشد در این صورت  $X$  شامل  $x$  و همه برگ‌های آن جز یکی هست که آن را  $x''$  می‌نامیم. همچنین فرض کنیم  $x'$  برگ دیگری از  $x$  باشد که در  $X$  قرار دارد. قرار می‌دهیم  $T' = T \setminus x'$ . چون  $N(x'') \cap X = \{x\}$  بنابراین هر رأس مجاور  $x$  به غیر از برگ‌های آن همسایه دیگری در  $X$  جز  $x$  دارد. بنابراین  $X \setminus \{x'\}$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای  $T'$  است که در نتیجه  $1 \leq \gamma_L(T') \leq \gamma_L(T)$ . از طرف دیگر با اضافه کردن رأس  $x'$  به  $\gamma_L(T')$  می‌توان آن را به یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای  $T$  گسترش داد. بنابراین  $1 \leq \gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 1$  و در نتیجه  $1 \leq \gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 1$ .

از طرفی  $1 \leq n = n' + 1$  و  $l = l' + 1$  و  $s' = s$  و بنابراین  $\gamma_L(T') = \frac{n'+l'-s'}{2}$ . با توجه به فرض استقرا  $T' \in F$  و چون  $T$  از  $T'$  با اعمال عملگر  $F_1$  به دست آمده سپس  $T \in F$ . از این پس فرض می‌کنیم رأس پشتیبان قوی در  $T$  وجود نداشته باشد.

درخت  $T^* = T \setminus L$  و مجموعه‌های  $A$  و  $B$  و  $C$  معرفی شده در قضیه (۲.۱.۳) را یادآور می‌شویم و از آن‌ها استفاده می‌کنیم. چون در  $T$  رأس پشتیبان قوی وجود ندارد پس  $C = \emptyset$  و با توجه به برهان قضیه (۲.۱.۳) می‌دانیم که  $S(T) \cup B$  و  $S(T) \cup A$  دو مجموعه احاطه‌گر مکانی برای  $T$  هستند. در حالی که  $\min\{|A \setminus S(T)|, |B \setminus S(T)|\} \leq \frac{n-l-s}{2}$  و چون  $\gamma_L(T) = \frac{n+l-s}{2}$  لذا هر یک از  $S(T) \cup A$  و  $S(T) \cup B$  یک  $-\gamma_L(T)$  مجموعه برای  $T$  می‌باشند.

فرض کنید  $r$  و  $u'$  دو رأس از  $T$ ، با ماکزیمم فاصله موجود در درخت  $T$  باشند، و  $T$  را در  $r$  ریشه‌دار می‌کنیم، و فرض می‌کنیم  $u$  و  $v$  و  $z$  و  $y$  به ترتیب پدران  $u'$  و  $u$  و  $v$  و  $z$  باشند. اکنون حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱:  $v$  یک رأس پشتیبان باشد. قرار می‌دهیم  $T' = T \setminus \{u, u'\}$ . با توجه به لم (۲.۱.۳)،  $X$  شامل  $u$  و  $v$  است، اما  $u' \notin X$ . بنابراین  $X \setminus \{u\}$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای  $T'$  است و داریم  $1 \leq \gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - 1$ . علاوه بر این با اضافه کردن  $u$  به یک  $-\gamma_L(T')$  مجموعه می‌توان آن

را به یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T$  گسترش داد، بنابراین  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 1$  و در نتیجه  $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') - 1$  از طرفی  $\gamma_L(T) = \frac{n+l-s}{2}$  و  $n = n' + 2$  و  $s = s' + 1$  و  $l = l' + 1$ ، بنابراین  $\gamma_L(T') = \frac{n'+l'-s'}{2}$  پس بنا به فرض استقرا  $T' \in F$  و چون  $T$  از  $T'$  با اعمال عملگر  $F_2$  به دست آمده لذا  $T \in F$  قرار می‌گیرد.

حالت ۲:  $v$  رأس پشتیبان نباشد و حداقل دو فرزند داشته باشد. بنابراین  $T_v$  یک ستاره تقسیم شده از مرتبه حداقل ۵ است. فرض کنیم  $z \in A$  و  $v \in B$ . می‌دانیم که  $S(T) \cup B$  یک  $\gamma_L(T)$ -مجموعه برای  $T$  است. بنابراین مجموعه  $Y = S(T) \cup B \setminus \{v\}$  یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T$  نیست. اگرچه  $v \notin Y$  اما چون  $v$  پشتیبان نیست و حداقل دو فرزند دارد لذا فرزندان  $v$  رأس پشتیبان هستند و رؤس پشتیبان در  $Y$  قرار دارند و  $v$  توسط فرزندان پوشیده می‌شود. بنابراین  $z \notin Y$ ، که دو حالت پیش می‌آید، یا  $N(z) \cap Y = \emptyset$  یا یک  $z' \in T$  وجود دارد که  $z' \neq z$  و  $z' \notin Y$  و  $N(z') \cap Y = N(z) \cap Y$ .

چون  $z \notin Y$  لذا رأس پشتیبان نیست و  $y$  که از همسایگان  $z$  است برگ نیست. بنابراین  $y \in B \subseteq Y$  و  $N(z) \cap Y \neq \emptyset$ ، بنابراین حالت اول برقرار نیست. در نتیجه یک  $z'$  وجود دارد که  $z \neq z'$  و  $N(z') \cap Y = N(z) \cap Y = \{y\}$ . اگر  $z$  فرزند دیگری مانند  $v'$  که  $v \neq v'$  داشته باشد آن‌گاه با توجه به استدلال قبلی  $v' \in B \subseteq Y$  و  $N(z) \cap Y = \{y, v'\}$  و این تناقض است. لذا تنها فرزند  $z$ ،  $v$  است.

اگر  $z'$  یک برگ در  $T$  نباشد، یا  $z' \in S(T) \subseteq Y$ ، آن‌گاه با توجه به  $\gamma_L(T)$ -مجموعه نبودن  $Y$  یک تناقض ایجاد می‌شود. یا  $z' \in A \setminus S(T)$  که حداقل دو همسایه در  $B$  (یا  $B \setminus v$ ) دارد که باز هم تناقض با این است که تنها همسایه  $z'$ ،  $y$  است و  $Y$  یک  $\gamma_L(T)$ -مجموعه برای  $T$  می‌شود. بنابراین  $z'$  یک برگ است و چون  $N(z') \cap Y = \{y\}$  لذا  $y$  یک رأس پشتیبان در  $T$  است.

فرض می‌کنیم  $T' = T \setminus T_v$ . در این صورت  $z$  و  $z'$  برگ‌های  $y$  در  $T'$  هستند. (یعنی  $y$  یک رأس پشتیبان قوی در  $T'$  است.) می‌توان دید که  $\gamma_L(T') = \gamma_L(T) - (\deg_T(v) - 1)$  و چون  $n = n' + 2(\deg_T(v) - 1)$  و  $s = s' + \deg_T(v) - 1$  و  $l = l' + \deg_T(v) - 2$  در این صورت  $\gamma_L(T') = \frac{n'+l'-s'}{2}$  و بنا به فرض استقرا  $T' \in F$ . در نتیجه چون  $T$  از  $T'$  با اعمال عملگر  $F_3$  به دست می‌آید بنابراین  $T$  در  $F$  قرار می‌گیرد.

حالت ۳:  $v$  رأس پشتیبان نباشد و تنها یک فرزند داشته باشد. فرض می‌کنیم که هر یک از فرزندان  $z$  درجه‌ی یک یا دو داشته باشند. بنا به قسمت دوم لم (۲.۱.۳)،  $X$  شامل  $z$  و  $u$  است اما شامل  $v$  و  $u'$  نیست. قرار می‌دهیم  $T'' = T \setminus \{u', u, v\}$  و فرض می‌کنیم که یا  $z$  یک رأس پشتیبان باشد یا یک مسیر  $a - b - c - z$  در  $T_z$  وجود داشته باشد. در هر دو مورد با توجه به لم (۲.۱.۳)، یک  $-\gamma_L(T'')$  مجموعه شامل  $z$  وجود دارد که می‌توان آن را با اضافه کردن  $u$  به یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T$  گسترش داد و بنابراین  $1 + \gamma_L(T) \leq \gamma_L(T'') + 1$  از طرفی  $n = n'' + 3$  و  $s = s'' + 1$  و  $l = l'' + 1$  بنابراین

$$\frac{n + l - s}{2} = \gamma_L(T) \leq \frac{n'' + l'' - s''}{2} + 1 = \frac{n - 1 + l - s}{2}$$

که متناقض با فرض قضیه است. بنابراین هر فرزند  $z$  جز  $v$  یک رأس پشتیبان است. (البته اگر فرزندی داشته باشد.) رأس‌های پشتیبان مجاور با  $z$  در  $T_z$  را در مجموعه  $Z$  قرار می‌دهیم همچنین  $|Z| = p$  قرار می‌دهیم، و حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت ۳.۱:  $y$  یک رأس پشتیبان در  $T$  باشد و قرار می‌دهیم  $T' = (T \setminus T_z) \cup \{z\}$ . بنابراین  $y$  یک رأس پشتیبان قوی در  $T'$  است، همچنین  $n' \geq 3$  است. چون  $z \in X \setminus (\{u\} \cup Z)$  پس  $X \setminus (\{u\} \cup Z)$  یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T'$  است که در نتیجه  $\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - 1 - p$  می‌شود. با توجه به لم (۲.۱.۳)، یک  $-\gamma_L(T')$  مجموعه شامل  $z$  وجود دارد، بنابراین می‌توان با اضافه کردن  $Z \cup \{u\}$  آن را به یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T$  گسترش داد و داریم  $1 + p + \gamma_L(T) \leq \gamma_L(T')$  در نتیجه  $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') - 1 - p$  و به وضوح  $n' = n - 3 - 2p$  و  $s' = s - 1 - p$  و  $l' = l - p$  و در نهایت  $\gamma_L(T') = \frac{n + l - s}{2} - 1 - p = \frac{n' + l' - s'}{2}$  پس بنا به فرض استقرا  $T' \in F$  در نتیجه چون  $T$  از  $T'$  با اعمال عملگر  $F_4$  به دست آمده در  $F$  قرار می‌گیرد.

حالت ۳.۲:  $y$  یک رأس پشتیبان در  $T$  نباشد. فرض کنیم درجه‌ی  $y$ ،  $2$  باشد و پدر آن یک رأس پشتیبان باشد و همچنین قرار می‌دهیم  $T' = T \setminus T_y$  به طوری که  $n' \geq 2$ . حال اگر  $n' = 2$  چون  $s = l = p + 2$  و  $n$  فرد می‌شود پس  $\gamma_L(T) \neq \frac{n + l - s}{2}$  و این متناقض با فرض قضیه است بنابراین  $n' \geq 3$ .

فرض کنیم  $\gamma_L(T')$  کوچکترین مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T'$  باشد که با اضافه کردن  $Z \cup \{u, z\}$  به مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T$  گسترش می‌یابد بنابراین  $2 + p + \gamma_L(T) \leq \gamma_L(T')$  از طرفی

در نتیجه  $l' = l - 1 - p$  و  $s' = s - 1 - p$  و  $n' = n - 5 - 2p$

$$\frac{n+l-s}{2} = \gamma_L(T) \leq \frac{n'+l'-s'}{2} + 2 + p = \frac{n-1+l-s}{2}$$

که متناقض با فرض قضیه است بنابراین یا  $\deg(y) \geq 3$  یا  $\deg_T(y) = 2$  و پدر  $y$  یک رأس پشتیبان نیست.

قرار می‌دهیم  $T' = T \setminus T_z$  و واضح است که  $n' = n - 4 - 2p \geq 3$  اگر درجه‌ی  $y$  حداقل ۳ باشد آن‌گاه  $s' = s - 1 - p$  و  $l' = l - 1 - p$  اگر درجه‌ی  $y$ ، ۲ باشد آن‌گاه  $l' = l - p$  و  $s' = s - p$ . چون هر  $-\gamma_L(T')$  مجموعه را می‌توان با افزایش  $\{u, z\} \cup Z$  به مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T$  گسترش داد داریم

$$\frac{n+l-s}{2} = \gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 2 + p \leq \frac{n'+l'-s'}{2} + 2 + p = \frac{n+l-s}{2} \quad (۱.۳)$$

و در نتیجه  $\gamma_L(T') = \frac{n'+l'-s'}{2}$  که بنا به فرض  $T' \in F$  قرار می‌گیرد. حال ثابت می‌کنیم  $\gamma_L(T' \setminus y) = \gamma_L(T')$ .

چون  $\gamma_L(T') = \frac{n'+l'-s'}{2}$  سپس با توجه به قضیه (۲.۱.۳)،  $T'$  دارای دو  $-\gamma_L(T')$  مجموعه به نام‌های  $Q_1 = C(T') \cup S(T') \cup A'$  و  $Q_2 = C(T') \cup S(T') \cup B'$  است. اگر  $y$  در  $T'$  برگ باشد و  $y \notin C(T')$  بنابراین پدر آن یک رأس پشتیبان قوی در  $Q_1$  نیست و  $Q_1$  نیز یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T' \setminus y$  است. حال اگر  $\deg_T(y) \geq 3$  بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم  $y \in B'(T')$  و همچنین  $Q_1$  یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T' \setminus y$  باشد که در هر دو مورد داریم  $\gamma_L(T' \setminus y) \leq |Q_1| = \gamma_L(T')$ .

فرض کنیم  $\gamma_L(T' \setminus y) < \gamma_L(T')$  باشد در این صورت هر  $\gamma_L(T' \setminus y)$  را می‌توان با افزایش  $\{u, z\} \cup Z$  به یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T$  گسترش داد در حالی که  $y$  توسط  $z$  پوشیده می‌شود بنابراین

$$\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T' \setminus y) + 2 + p < \gamma_L(T') + 2 + p$$

که متناقض با (۱.۳) است. بنابراین  $\gamma_L(T' \setminus y) = \gamma_L(T')$  و از  $T$  با اعمال عملگر  $F_5$  به دست آمده است، در  $F$  قرار می‌گیرد.  $\square$

### ۲.۲.۳ یک کران پایین روی $\gamma_L$ برای درخت‌ها

قضیه ۲.۳.۳. برای هر درخت  $T$ ،  $\gamma_L(T) > ۳$  است.

برهان. برای بررسی به منبع [۱۸] مراجعه شود.  $\square$

قضیه ۲.۴.۳. اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq ۳$  باشد آنگاه  $\gamma_L(T) \geq \frac{n+l-s+1}{۳}$ ، و درختی با این کران نیز وجود دارد.

برهان. اگر رأس پشتیبان قوی در درخت  $T$  وجود نداشته باشد آنگاه  $l = s$  و طبق قضیه (۲.۳.۳) حکم برقرار است. بنابراین فرض کنیم که درخت  $T$  شامل حداقل یک رأس پشتیبان قوی باشد. اگر این درخت ستاره باشد آنگاه

$$\gamma_L(T) = n - 1 \geq \frac{n + (n - 1)}{۳} = \frac{۲n - 1}{۳}$$

و حکم برقرار می‌شود.

فرض کنیم  $T$  کوچکترین درختی باشد که در شرط قضیه صدق نمی‌کند و  $\gamma_L(T) < \frac{n+l-s+1}{۳}$  و  $S$  یک  $-\gamma_L(T)$  مجموعه برای درخت  $T$  و  $u$  یک رأس پشتیبان قوی باشد. قرار می‌دهیم  $T' = T \setminus u'$  که  $u'$  یک برگ از رأس  $u$  است. بدون کاستن از کلیت فرض کنیم  $S$  شامل  $u$  و همه برگ‌های آن جز  $u' \neq u''$  باشد. بنابراین  $S \setminus \{u'\}$  یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T'$  خواهد بود و  $\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - 1$ . چون مرتبه  $T'$  از مرتبه  $T$  کمتر است پس  $\gamma_L(T') \geq \frac{n'+l'-s'+1}{۳}$ . از طرفی  $n' = n - 1$  و  $l' = l - 1$  و  $s' = s$  بنابراین

$$\gamma_L(T) \geq \gamma_L(T') + 1 \geq \frac{n' + l' - s' + 1}{۳} + 1 \geq \frac{n + l - s + ۲}{۳}$$

که متناقض با فرض است لذا حکم برقرار می‌شود.

با توجه به درخت ارائه شده در زیر این کران قابل دستیابی است. درخت هزارپا<sup>۱</sup> (درختی که با حذف برگ‌ها از آن یک مسیر تولید می‌شود) که در آن  $n = ۲k + k - 1$  و  $l = s = k \geq ۲$  و فاصله بین دو رأس پشتیبان متوالی ۲ است. (که  $P_5$  کوچکترین درخت با این شرایط می‌باشد). در این صورت مرتبه  $T$  برابر است با  $n = ۲k + k - 1$  و  $\gamma_L(T) = \frac{n+l-s+1}{۳}$   $\square$

<sup>۱</sup>caterpillar



### ۳.۲.۳ درخت‌های $T$ با $\gamma_L(T) = \gamma(T)$

برای توصیف درخت‌هایی مانند  $T$  که  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$  است، خانواده  $\tau$  را معرفی می‌کنیم. گوییم  $T \in \tau$  هرگاه  $T$  از دنباله  $T_1, T_2, \dots, T_k$  به دست آمده باشد به طوری که  $T_1 = P_2 = xy$  و  $T = T_k$  است. همچنین اگر  $k \geq 2$ ، آن‌گاه می‌توان  $T_{i+1}$  را با اعمال یکی از عملگرهای  $\tau_1$  و  $\tau_2$  و  $\tau_3$  که در زیر تعریف می‌کنیم به دست آورد.

**تعریف ۳.۲.۳.** عملگر  $\tau_1$ : رأس پشتیبان  $z$  در  $T_i$  را انتخاب و یک مسیر  $u - v$  را با یال  $uz$  به آن وصل می‌کند.

عملگر  $\tau_2$ : یک ستاره تقسیم شده  $H = SS_p$ ، که  $p \geq 2$  و رأس مرکزی آن  $a$  است را به رأس دلخواه  $b$  در  $T_i$  با یال  $ab$  وصل می‌کند.

عملگر  $\tau_3$ : یک رأس  $c$  از  $T_i$  که در  $\gamma_L(T_i)$  قرار دارد انتخاب و یک مسیر  $u - v - w$  را با یال  $uc$  به درخت وصل می‌کند.

**لم ۳.۳.۳.** اگر  $T$  یک درخت با  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$  باشد آن‌گاه رأس پشتیبان قوی ندارد.

**برهان.** فرض کنیم  $T$  یک درخت با شرط  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$  باشد. مجموعه  $X$  را یک  $-\gamma_L(T)$  مجموعه برای  $T$  در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم  $x$  یک رأس پشتیبان قوی در  $T$  باشد و  $y$  و  $z$  دو برگ مجاور با  $x$  باشند. باتوجه به لم (۲.۱.۳)،  $X$  شامل  $x$  و  $y$  است. اما  $X \setminus \{y\}$  یک مجموعه احاطه‌گر کوچکتر از  $X$  خواهد بود. در نتیجه  $T$  یک مجموعه احاطه‌گر از اندازه  $\gamma(T) - 1$  دارد که متناقض با فرض است بنابراین رأس پشتیبان قوی ندارد.  $\square$

**قضیه ۳.۵.۳.** فرض کنیم  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  باشد. در این صورت  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$  اگر و تنها اگر  $T \in \tau$ .

**برهان.** فرض کنیم درخت  $T \in \tau$ . لذا  $T$  از دنباله  $T_1, T_2, \dots, T_k$  به دست آمده است. با استقرا روی تعداد عملگرهای انجام شده برای ساختن  $T$ ، ثابت می‌کنیم  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$ . به وضوح این خاصیت برای  $T_1 = P_2$  برقرار است. فرض کنیم حکم برای درخت  $T'$  که با  $k - 1 \geq 0$  عملگر ساخته شده برقرار باشد، برای  $T$  که با  $k$  عملگر ایجاد می‌شود ثابت می‌کنیم. (درخت  $T$  با اعمال یکی از عملگرهای

$\tau_1$  و  $\tau_2$  و  $\tau_3$  روی درخت  $T'$  به دست می‌آید. فرض کنیم  $X$  یک  $\gamma_L(T)$ -مجموعه برای  $T$  باشد، با توجه به لم (۲.۱.۳) فرض کنیم  $X$  شامل همه رأس‌های پشتیبان باشد.

اگر  $T$  با اعمال عملگر  $\tau_1$  روی  $T'$  به دست آید در واقع یک مسیر  $u - v$  به یک رأس پشتیبان  $z$  در  $T'$  وصل کنیم بنابراین  $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$ . و همچنین  $\gamma_L(T')$  را می‌توان با افزایش  $u$  به یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T$  گسترش داد، که داریم  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 1$ . با توجه به لم (۲.۱.۳)،  $u, z \in X$  و هر همسایه  $z$  به جز برگ‌های آن یا در  $X$  هستند یا همسایه ای در  $X$  جز  $z$  دارند. بنابراین  $X \setminus \{u\}$  یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T'$  است که  $\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - 1$  و در نهایت  $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 1$ . بنا به فرض استقراء  $\gamma_L(T') = \gamma(T')$  در نتیجه  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$ . فرض کنیم  $T$  از  $T'$  با استفاده از عملگر  $\tau_2$  به دست آید یعنی ستاره تقسیم شده  $SS_p$ ،  $p \geq 2$  را به رأس دلخواه  $b$  در  $T'$  وصل می‌کنیم در این صورت  $\gamma(T) = \gamma(T') + p$  و  $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + p$ . با توجه به فرض استقراء  $\gamma_L(T') = \gamma(T')$  در نتیجه  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$ .

در آخر فرض کنیم  $T$  با اعمال عملگر  $\tau_3$  بر روی  $T'$  به دست آید یعنی یک مسیر  $u - v - w$  را به رأس  $z \in \gamma_L(T')$  وصل می‌کنیم. در این صورت  $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$  و چون می‌توان با اضافه کردن  $v$  به مجموعه  $\gamma_L(T')$  که شامل  $z$  است، آن را به مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T$  گسترش داد بنابراین  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 1$ . از طرفی بنا به لم (۲.۱.۳)،  $\gamma_L(T')$  شامل  $v$  است و شامل  $u$  نیست بنابراین  $\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - 1$ . در نتیجه  $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 1$  و بنا به فرض استقراء  $\gamma_L(T') = \gamma(T')$  و آن‌گاه  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$ .

حال عکس قضیه را با استقراء روی مرتبه  $T$  ثابت می‌کنیم.

فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n$  با شرط  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$  باشد، و اگر برای هر درخت  $T'$  از مرتبه  $n' < n$  و با شرط  $\gamma_L(T') = \gamma(T')$  حکم برقرار باشد و  $T' \in \tau$  قرار گیرد آن‌گاه نشان می‌دهیم  $T$  که از  $T'$  با اعمال یکی از عملگرها به دست آمده است در  $\tau$  قرار می‌گیرد.  $D$  را یک  $\gamma_L(T)$ -مجموعه در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که شامل همه رأس‌های پشتیبان باشد و شامل برگ نباشد.

اگر  $T$  دارای قطر ۱ باشد آن‌گاه  $T = P_2$  و  $T \in \tau$ . اما  $T$  نمی‌تواند قطر ۲ داشته باشد چون با توجه به لم (۲.۳.۳) اگر  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$  آن‌گاه  $T$  رأس پشتیبان قوی ندارد. اگر  $T$  قطر ۳ داشته باشد آن‌گاه  $T = P_4$  و  $T \in \tau$ . (که از  $T_1$  با اعمال عملگر  $\tau_1$  به دست آمده است.) فرض کنیم  $T$  دارای قطر حداقل ۴ باشد و  $r, u'$  دو رأس از  $T$  با ماکزیم فاصله موجود در درخت  $T$  باشند.  $T$  را در

$\tau$  ریشه‌دار می‌کنیم و فرض کنیم  $u$  و  $v$  و  $z$  به ترتیب پدران  $u'$  و  $u$  و  $v$  باشند. اکنون حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت ۱:  $v$  یک رأس پشتیبان باشد. همچنین قرار می‌دهیم  $T' = T \setminus \{u, u'\}$  که در این صورت داریم  $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$  و  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 1$ . چون  $u, v$  هر دو رأس پشتیبان هستند بنابراین  $u, v \in D$ . فرض کنیم هر رأس مجاور با  $v$  به غیر از برگ‌های آن یا در  $D$  باشند یا همسایه دیگری جز  $v$  در  $D$  داشته باشند در این صورت  $D \setminus \{u\}$  یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T'$  می‌شود که  $\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - 1$ . در نتیجه  $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 1$  و بنا به فرض  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$  لذا  $\gamma_L(T') = \gamma(T')$ . و بنا به فرض استقرا  $T' \in \tau$  قرار می‌گیرد و چون  $T$  هم از  $T'$  با کمک عملگر  $\tau_1$  به دست آمده پس  $T \in \tau$  قرار می‌گیرد.

حالت ۲:  $v$  یک رأس پشتیبان نباشد و حداقل دو فرزند داشته باشد. فرض کنید  $T_v$  یک زیر درخت  $T$  با ریشه‌ی  $v$  باشد و چون  $v$  پشتیبان قوی نیست پس هر فرزند  $v$  یک رأس پشتیبان است و بنابراین  $T_v$  یک ستاره تقسیم شده است. قرار می‌دهیم  $T' = T \setminus T_v$ .

$\gamma(T) = \gamma(T') + \deg_T(v) - 1$  و  $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + \deg_T(v) - 1$ . با توجه به این‌که  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$  بنابراین  $\gamma_L(T') = \gamma(T')$ . بنا به فرض استقرا  $T' \in \tau$  و چون  $T$  از  $T'$  با استفاده از عملگر  $\tau_2$  به دست آمده بنابراین  $T \in \tau$  قرار می‌گیرد.

مورد ۳:  $v$  رأس پشتیبان نباشد و فقط یک فرزند داشته باشد. به وضوح  $\deg_T(v) = 2$  چون از یک طرف با فرزندش و از طرف دیگر با  $z$  مجاور است. قرار می‌دهیم  $T' = T \setminus \{u', u, v\}$  در این صورت  $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$ . با توجه به این‌که  $u \in D$  و  $v \notin D$  و  $z \in D$ ، داریم  $\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - 1$ .

حال فرض کنیم  $\gamma_L(T') < \gamma_L(T) - 1$  در این صورت  $\gamma_L(T') < (\gamma(T') + 1) - 1$  و  $\gamma_L(T') < \gamma(T')$  که تناقض ایجاد می‌شود. بنابراین  $\gamma_L(T') = \gamma_L(T) - 1$  و  $D \setminus \{u\}$  یک مجموعه احاطه گرمکانی برای  $T'$  می‌باشد که شامل  $z$  است. بنا به فرض استقرا  $T' \in \tau$  و  $T$  هم از  $T'$  با عملگر  $\tau_3$  به دست آمده پس  $T \in \tau$ .  $\square$

### ۳.۳ کدشناسایی در درخت

#### ۱.۳.۳ یک کران پایین روی $M$ برای درخت‌ها

قضیه ۳.۱.۳. اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 4$  باشد آن‌گاه  $M(T) \geq \frac{3(n+l-s+1)}{7}$  و این کران قابل دستیابی است.

برهان. با استقرا روی  $n$  حکم را ثابت می‌کنیم. به وضوح حکم برای  $n = 4$  برقرار است. فرض کنیم  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 5$  باشد. اگر  $l = 2$  آن‌گاه  $T = P_n$  که در آن  $n \geq 4$  و  $s = 2$  و بنا به قضیه (۲.۱.۲) نتیجه برقرار است. فرض می‌کنیم  $l \geq 3$  و  $D$  را یک  $M(T)$ -مجموعه در نظر می‌گیریم که شامل کمترین تعداد برگ ممکن باشد.

برای هر رأس پشتیبان  $x$ ،  $L_x$  را مجموعه‌ای در نظر می‌گیریم که شامل  $x$  و همه برگ‌های آن باشد. در این صورت حداکثر یک عضو از  $L_x$  در  $D$  قرار ندارد، زیرا در غیر این صورت اگر  $x$  و یکی از برگ‌های آن مانند  $y$  در  $D$  نباشد آن‌گاه  $N[y] \cap D = \emptyset$  و اگر دو برگ  $y, z$  در  $D$  نباشند آن‌گاه  $N[y] \cap D = N[z] \cap D$ ، که هر دو مورد با کدشناسایی بودن  $D$  در تناقض هستند. همچنین  $L_x$ ‌ها نیز برای هر رأس پشتیبان  $x \in T$  مجزا هستند. بنابراین  $D$  شامل حداقل  $l$  رأس از  $L(T) \cup S(T)$  است.

قرار می‌دهیم  $W = V \setminus (D \cup L(T) \cup S(T))$ . اگر  $W = \emptyset$  آن‌گاه  $W \setminus S(T) \cup L(T) \subset D$  که بنابر مشاهدات قبل داریم  $|D| \geq n - (l + s) + l = n - s$  و در نتیجه

$$|D| \geq n - s \geq \frac{3(n+l-s+1)}{7}.$$

فرض کنیم  $W \neq \emptyset$  و  $w \in W$  را انتخاب می‌کنیم. برای هر همسایه  $z$  از  $w$ ،  $T_z$  را مؤلفه‌ای از  $T \setminus zw$  و شامل  $z$  قرار می‌دهیم.  $n_z$  و  $l_z$  و  $s_z$  را به ترتیب مرتبه و تعداد برگ‌ها و تعداد رأس‌های پشتیبان درخت  $T_z$  در نظر می‌گیریم. اگر  $n_z = 1$  آن‌گاه  $w$  یک رأس پشتیبان در  $T$  است که متناقض با فرض است. اگر  $n_z = 2$  آن‌گاه چون  $w \notin D$ ، رأس‌های  $z, z' \in D$  وجود دارند که  $N[z] \cap D = N[z'] \cap D$  و این هم متناقض با فرض است. بنابراین  $n \geq 3$ .

فرض کنیم  $n_z = 3$  در این صورت  $T_z$  یک مسیر با مجموعه رئوس  $\{z, z', z''\}$  است. اگر

$\{z, z', z''\} \subset D$  آن‌گاه یکی از  $z'$  یا  $z''$  برگ است که در این صورت  $\{w\} \cup (D \setminus \{z'\})$  یک  $M(T)$ -مجموعه با تعداد برگ‌های کمتر از  $D$  است که متناقض با فرض است. بنابراین  $D$  شامل حداکثر دو رأس از مجموعه  $\{z, z', z''\}$  است در واقع  $D$  شامل دقیقاً دو رأس غیر مجاور از  $\{z, z', z''\}$  هست زیرا در غیر این صورت یا برای هر  $x \in T_z$ ،  $N[x] \cap D = \emptyset$  و یا برای هر دو رأس مجاور  $x, y \in T_z$ ،  $N[x] \cap D = N[y] \cap D$  که متناقض با  $\gamma_L$ -مجموعه بودن  $D$  است. بنابراین اگر  $n_z = 3$  آن‌گاه یا  $T$  یک مسیر  $z - z' - z''$  با  $z, z'' \in D$  و  $z' \notin D$  است یا یک مسیر  $z' - z - z''$  است با  $z, z'' \in D$  و  $z' \notin D$ .

فرض کنیم همسایه  $v$  از  $w$  در  $V \setminus D$  باشد.  $T_w$  را مؤلفه‌ای از  $T \setminus vw$  که شامل  $w$  است در نظر می‌گیریم. همچنین  $n_w$  و  $l_w$  و  $s_w$  به ترتیب مرتبه و تعداد برگ‌ها و تعداد رئوس پشتیبان  $T_w$  در نظر می‌گیریم. اگر  $n_w < 3$  آن‌گاه  $w$  یا برگ یا رأس پشتیبان است که متناقض با فرض است. اگر  $n_w = 3$ ، آن‌گاه دو حالت پیش می‌آید، یا  $w$  یک رأس پشتیبان است که تناقض ایجاد می‌شود. یا  $T_w$  یک مسیر  $w'' - w' - w$  است که  $N[w''] \cap D = N[w'] \cap D$  و این هم با  $\gamma_L$ -مجموعه بودن  $D$  در تناقض است. بنابراین  $n_w \geq 4$ . حال چون  $v \notin D$ ،  $D_w = D \cap T_w$  یک  $M(T)$ -مجموعه برای  $T_w$  است و بنا به فرض استقرا  $|D_w| \geq n - s \geq \frac{3(n_w + l_w - s_w + 1)}{4}$ . همچنین داریم  $n_v \geq 3$  که چون  $w \notin D$ ،  $D_v = D \cap T_v$  یک  $M(T)$ -مجموعه برای  $T_v$  می‌باشد. اگر  $n_v = 3$  آن‌گاه مانند قسمت قبل  $T_v$  مسیر  $v' - v - v''$  است که  $v', v'' \in D$  و بنابراین  $|D_v| = 2$ . علاوه بر این  $n_w = n - 3$  و  $l_w \geq l - 2$  و  $s_w = s - 1$  که در نتیجه

$$\begin{aligned} |D| &= |D_w| + 2 \geq \frac{3(n_w + l_w - s_w + 1)}{4} + 2 \\ &\geq \frac{3(n - 3 + l - 2 - s + 1 + 1)}{4} + 2 \\ &= \frac{3(n + l - s + 1)}{4} - \frac{12}{4} + 2 \\ &\geq \frac{3(n + l - s + 1)}{4}. \end{aligned}$$

اگر  $n_v \geq 4$  بنا به فرض استقرا  $|D_v| \geq \frac{3(n_v + l_v - s_v + 1)}{4}$  که بنابراین

$$|D| = |D_w| + |D_v| \geq \frac{3(n_w + l_w - s_w + 1)}{4} + \frac{3(n_v + l_v - s_v + 1)}{4}.$$

فرض کنید  $q = s_w + s_v - s$  و  $0 \leq q \leq 2$  و  $l_w + l_v \geq L + q$  که در ادامه خواهیم داشت

$$|D| \geq \frac{3(n+l-s+2)}{7}.$$

فرض کنید که همه همسایه‌های  $w$  در  $D$  قرار دارند. اگر برای هر همسایه  $z$  از  $w$ ،  $n_z = 3$  آن‌گاه  $T$  از ستاره  $k_{1,k}$  با مرکزیت  $w$  به دست آمده که هر یال ستاره به دو یال تقسیم شده است. بنابراین  $n = 3k + 1$  و  $l = s = k$  که  $k \geq 3$  و  $|D| = 2k > \frac{3(n+l-s+1)}{7}$ . فرض کنیم برای هر همسایه  $y$  از  $w$ ،  $n_y \geq 4$  و  $\deg(w) \geq 3$  باشد. چون رأس پشتیان نیست جزء  $T_1$  از  $T \setminus yw$  که شامل  $w$  است، دارای  $n_1 \geq 5$  رأس است، و چون  $\deg_T(w) \geq 3$  یک  $D \cap T_1 - M(T)$  مجموعه برای  $T_1$  و همچنین چون  $w \notin D$  یک  $D \cap T_y - M(T)$  مجموعه برای  $T_y$  است. بنابراین داریم

$$|D_y| \geq \frac{3(n_y + l_y - s_y + 1)}{7},$$

$$|D_1| \geq \frac{3(n_1 + l_1 - s_1 + 1)}{7}$$

در نتیجه

$$|D| = |D_y| + |D_1| \geq \frac{3(n_y + l_y - s_y + 1)}{7} + \frac{3(n_1 + l_1 - s_1 + 1)}{7}.$$

فرض کنید  $q = s_y + s_1 - s$  و  $0 \leq q \leq 2$  و  $l_y + l_1 \geq L + q$  که در ادامه خواهیم داشت

$$|D| \geq \frac{3(n+l-s+2)}{7}.$$

سرانجام فرض کنیم  $\deg_T(w) = 2$  و  $x$  و  $y$  را دو همسایه از  $w$  در نظر می‌گیریم که  $n_y \geq 3$ . اگر  $n_x = 3$  آن‌گاه  $T_x$  یک مسیر  $x - x' - x''$  با  $x, x'' \in D$  و  $x' \notin D$  است. فرض کنید  $T' = T \setminus \{x', x''\}$  در این صورت  $D \cap T'$  یک کدشناسایی برای  $T'$  است و بنا به فرض استقرا چون  $n' = n - 2$  و  $l' = l$  و  $s' = s$  در نتیجه

$$|D| = |D \cap T'| + 1 \geq \frac{3(n' + l' - s' + 1)}{7} + 1.$$

فرض کنیم  $n_x \geq 4$  آن‌گاه  $D_x = D \cap T_x$  و  $D_y = D \cap T_y$  به ترتیب  $M(T)$ -مجموعه برای  $T_x$  و  $T_y$  هستند. اگر  $q = s_x + s_y - s$  آن‌گاه  $0 \leq q \leq 2$  و  $n_x + n_y = n - 1$  و  $l_x + l_y \geq l + q$  بنا بر این بنا به فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned} |D| = |D_x| + |D_y| &\geq \frac{\mathfrak{F}(n_x + l_x - s_x + 1)}{\gamma} + \frac{\mathfrak{F}(n_y + l_y - s_y + 1)}{\gamma} \\ &\geq \frac{\mathfrak{F}(n + l - s + 1)}{\gamma}. \end{aligned}$$

□

### ۲.۳.۳ درخت‌های $T$ با $M(T) = \gamma(T)$

تعریف ۳.۱.۳. مجموعه  $A \subseteq V(G)$  را یک مجموعه بسته‌بندی<sup>۲</sup> گوئیم هرگاه برای هر دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  از آن  $N[x] \cap N[y] = \emptyset$ . در هر گراف  $G$  و برای هر مجموعه بسته‌بندی  $A$  در  $G$  داریم  $|A| \leq \gamma(G)$ . برای مطالعه به مرجع [۱۵] مراجعه شود.

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید گراف  $G = (V, E)$  یک جنگل باشد. در این صورت  $M(G) = \gamma(G)$  اگر و تنها اگر بتوان  $V(G)$  را به دو مجموعه  $C$  و  $F$  چنان تقسیم‌بندی کرد که هر جزء  $C$  یک کرنا از اندازه حداقل ۶ باشد، و زیر مجموعه  $I \subseteq F$  به گونه‌ای وجود داشته باشد که همسایه‌های بسته رئوس  $I$  دو به دو مجزا باشند، بین رئوس مجموعه  $I$  و رئوس مجموعه  $C$  یالی وجود نداشته باشد، هر رأس از  $N(I)$  همسایه‌ای در  $S(C)$  داشته باشد ولی بین برگ‌های  $C$  همسایه‌ای نداشته باشد و هر رأس  $(F \setminus (I \cup N(I)))$  حداقل دو همسایه در  $S(C)$  و حداکثر یک همسایه بین برگ‌های  $C$  داشته باشد. اگر  $G$  چنین ساختاری داشته باشد آن‌گاه  $I \cup S(C)$  یک کدشناسایی با کوچکترین اندازه برای  $G$  است.

برهان. فرض کنید  $G = (V, E)$  یک جنگل باشد به طوری که  $M(G) = \gamma(G)$  و مجموعه  $D$  به عنوان یک کدشناسایی از اندازه  $M(G)$  و همچنین یک مجموعه احاطه‌گر با کوچکترین اندازه باشد.

<sup>۲</sup>packing set

برای هر رأس  $v \in V$ ، قرار می‌دهیم  $D(v) = N(v) \cap D$ . و چون مجموعه  $D$  یک کدشناسایی است پس برای هر  $u, v \in V(G)$ ، داریم  $D(u) \neq D(v)$ . رئوس مجزا در زیر گراف تولید شده توسط مجموعه  $D$  را در مجموعه  $I$  قرار می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که جزئی از اندازه ۲ در زیر گراف تولید شده وجود ندارد چون در غیر این صورت اگر مؤلفه‌ای با اندازه ۲ در زیر گراف تولید شده وجود داشته باشد و شامل رئوس  $u$  و  $v$  باشد آن‌گاه  $D(u) = D(v) = \{u, v\}$  که متناقض با تعریف  $D$  است. لذا اجزای تشکیل دهنده‌ی زیر گراف  $D$  یا تک عضوی‌اند که در مجموعه  $I$  قرار می‌گیرند یا از اندازه حداقل ۳ هستند. یکی از اجزای  $D \setminus I$  را  $X$  نامیده و رأس دلخواه  $x \in X$  را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که  $x$  تنها یک همسایه مختص به خود در  $V \setminus D$  دارد، زیرا در غیر این صورت چون خود  $x$  هم همسایه‌ای در  $X$  دارد پس لزومی ندارد  $x \in X$  باشد. لذا  $D \setminus \{x\}$  یک مجموعه احاطه‌گر از اندازه کمتر از  $D$  خواهد بود که متناقض با فرض است. علاوه بر این اگر دو رأس  $x'$  و  $x''$  فقط با  $x$  در  $D$  مجاور باشند آن‌گاه  $D(x') = D(x'') = \{x\}$ ، که با کدشناسایی بودن  $D$  در تناقض است. حال تنها رأس همسایه  $x$  در  $V \setminus D$  را  $x'$  می‌نامیم.

فرض کنید اجزای با حداقل اندازه ۳ در  $D$  را  $C_1, C_2, \dots, C_k$  نام‌گذاری کنیم و  $C'_1, C'_2, \dots, C'_k$  مجموعه رئوس اختصاصی متناظر با  $C_i$  باشند. در این صورت برای هر  $i = 1, \dots, k$ ،  $|C_i| = |C'_i|$ . مجموعه  $C'_i$  مستقل است، زیرا در غیر این صورت در  $C_i \cup C'_i$  دور ایجاد می‌شود و همچنین  $C'_1 \cup C'_2 \cup \dots \cup C'_k$  نیز مستقل هستند، زیرا در غیر این صورت اگر  $x \in C_1$  و  $y \in C_2$  و  $x'$  را تنها رأس مجاور با  $x$  و  $y'$  را تنها رأس مجاور با  $y$  در نظر بگیریم و  $x'y'$  هم در  $E$  باشد آن‌گاه می‌توان  $D \setminus \{x, y\} \cup \{x'\}$  را به عنوان مجموعه احاطه‌گر برای  $G$  در نظر گرفت که از  $D$  کوچکتر است و متناقض با  $\gamma(T)$ -مجموعه بودن  $D$  است. بنابراین  $C_1 \cup C'_1, C_2 \cup C'_2, \dots, C_k \cup C'_k$  شامل کروناهایی از اندازه حداقل ۶ است.

فرض کنیم  $R = (V \setminus D) \setminus (C'_1 \cup C'_2 \cup \dots \cup C'_k)$  و  $r \in R$ . ادعا می‌کنیم که  $r$  حداقل دو همسایه در  $D$  دارد در غیر این صورت اگر  $r$  یک همسایه  $v$  در  $D$  داشته باشد و  $v \in D \setminus I$  آن‌گاه  $D(r) = D(v)$  و اگر  $v \in I$  آن‌گاه  $D(r) = D(v)$ . که در هر دو مورد متناقض با فرض است. هیچ رأسی در  $I$  همسایه مختص خود در  $R$  ندارد زیرا اگر  $v \in I$  و  $r \in R$ ، آن‌گاه  $D(r) = D(v)$ . پس هر رأس در  $I$  حداقل دو همسایه در  $R$  دارد. اما  $r \in R$  نمی‌تواند دو همسایه  $x, y \in I$  داشته باشد زیرا  $\{r\} \cup (D \setminus \{x, y\})$  یک مجموعه احاطه‌گر کوچکتر از  $D$  می‌شود که متناقض ایجاد می‌شود.



بنابراین اگر  $x \in I$ ،  $N[x]$  شامل ستاره‌های مجزا از اندازه حداقل ۳ است و هر همسایه  $x$ ، همسایه‌ای در  $C_1, C_2, \dots, C_k$  دارد که با کدشناسایی بودن  $D$  متناقض نباشد.

اگر رأسی مانند  $u$  در  $R$  موجود باشد که حداقل دو همسایه  $x', y'$  در  $C'$  داشته باشد آن‌گاه  $\{u\} \cup (D \setminus \{x, y\})$  یک مجموعه احاطه‌گر کوچکتر از  $D$  خواهد بود. اگر رأسی مانند  $u'$  در  $N(I)$  موجود باشد که یک همسایه به نام  $x'$  در  $C'$  داشته باشد و  $z$  همسایه  $u'$  در  $I$  باشد آن‌گاه  $\{u'\} \cup (D \setminus \{x, z\})$  یک مجموعه احاطه‌گر کوچکتر از  $D$  می‌شود که هر دو مورد متناقض با فرض است. بنابراین مجموعه‌های  $C$  و  $F(V \setminus C)$  و  $I$  شرایط خواسته شده در قضیه را دارند و  $I \cup S(C)$  یک مجموعه کدشناسایی برای  $G$  خواهد بود.

حال عکس قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم  $G$  ساختار شرح داده شده در قضیه را دارا باشد. به آسانی دیده می‌شود که  $I \cup S(C)$  یک کدشناسایی برای  $G$  خواهد بود.

از طرف دیگر  $|I \cup S(C)| \leq M(G) \leq \gamma(G)$ . مجموعه  $(C \setminus S(C)) \cup I$  نیز یک مجموعه بسته بندی در  $G$  است. بنابراین  $\gamma(G) \geq |(C \setminus S(C)) \cup I|$  و چون  $|S(C)| = |C \setminus S(C)|$  لذا  $\gamma(G) = M(G)$ .  $\square$

## فصل ۴

# حدود اندازه‌های کد شناسایی و احاطه‌گر مکانی در گراف‌ها

### ۱.۴ مقدمه

در این فصل کران‌هایی برای اندازه مجموعه می‌نیم  $r$ -کد شناسایی و  $r$ -احاطه‌گر مکانی برای گراف همبند بدون جهت که دارای  $n$  رأس است را ارائه خواهیم کرد. برای بررسی نتایج به دست آمده در این فصل می‌توانید به مرجع [۶] مراجعه نمایید.

### ۲.۴ کران‌های بالا و پایین

در این بخش کران‌های بالا و پایینی برای مجموعه می‌نیم  $r$ -کد شناسایی در گراف‌ها به دست می‌آوریم. قضیه ۲.۱.۴. فرض کنید  $r \geq 1$  و  $n \geq 1$  دو عدد صحیح باشند و  $G = (V, E)$  یک گراف همبند بدون جهت با  $n$  رأس و قابل  $r$ -شناسایی باشد. اگر مجموعه  $C \subseteq V$  یک  $r$ -کد شناسایی باشد آنگاه  $|C| \geq \lceil \log_r(n+1) \rceil$ .

برهان. فرض کنیم  $G = (V, E)$  یک گراف همبند بدون جهت و  $C \subseteq V$  یک مجموعه  $r$ -کد شناسایی برای  $G$  باشد. در این صورت برای هر رأس  $v \in V$ ، مجموعه  $K_{C,r}(v) = C \cap B_r(v)$  ناتهی و متمایز است. از طرفی تعداد زیر مجموعه‌های ناتهی مجموعه  $C$  از تعداد رئوس بیشتر یا مساوی می‌شود تا هر رأس زیر مجموعه‌ای مخصوص به خود در  $C$  داشته باشد. بنابراین

$$2^{|C|} - 1 \geq n \implies |C| \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil.$$

□

لم ۲.۱.۴. فرض کنید  $n \geq 3$  یک عدد صحیح و  $G = (V, E)$  یک گراف همبند بدون جهت و قابل ۱-شناسایی و دارای  $n$  رأس باشد. اگر زیر مجموعه  $C \subseteq V$ ، یک مجموعه می‌نیم ۱-کدشناسایی برای  $G$  باشد آن‌گاه  $|C| \leq n - 1$ .

برهان. برای اثبات می‌توان به مراجع [۱] و [۱۴] مراجعه نمایید.

تعریف ۲.۱.۴. فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف همبند باشد و  $r \geq 2$  یک عدد صحیح باشد.  $r$ -بستار انتقالی  $G^1$  را با  $G^r$  نشان می‌دهیم و گرافی است که رئوس آن مجموعه  $V$  و یال‌های آن مجموعه  $\{\{i, j\} : i, j \in V, 0 \leq d(i, j) \leq r\}$  است.

لم ۲.۲.۴. فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف همبند و  $r \geq 2$  یک عدد صحیح باشد. مجموعه  $C \subseteq V$  یک مجموعه  $r$ -کد شناسایی در  $G$  است اگر و تنها اگر یک ۱-کد شناسایی در  $r$ -بستار انتقالی  $G$  باشد.

برهان. فرض کنید  $G$  یک گراف همبند و  $C \subseteq V$  یک مجموعه  $r$ -کد شناسایی برای  $G$  باشد در این صورت اگر  $G^r$  را برای گراف مورد نظر به دست آوریم آن‌گاه دیده می‌شود که رأس‌های با فاصله کمتر یا مساوی  $r$  در  $G$ ، در  $G^r$  با فاصله کمتر یا مساوی ۱ از یکدیگر قرار دارند. بنابراین  $r$ -کد شناسایی  $C$ ، در  $G$  را می‌توان به عنوان یک ۱-کد شناسایی برای  $G^r$  در نظر گرفت. در واقع همسایه‌های با فاصله  $r$  در  $G$  با فاصله یک از یکدیگر در  $G^r$  قرار دارند.

□

قضیه ۲.۲.۴. فرض کنید  $r \geq 1$  و  $n \geq 3$  دو عدد صحیح باشند، و همچنین  $G = (V, E)$  یک گراف همبند و بدون جهت با  $n$  رأس و قابل  $r$ -شناسایی باشد. اگر زیر مجموعه  $C \subseteq V$  یک مجموعه می‌نیم  $r$ -کد شناسایی برای  $G$  باشد آنگاه  $|C| \leq n - 1$ .

برهان. فرض کنید  $G = (V, E)$  گراف همبند و بدون جهت و  $C \subseteq V$  یک مجموعه می‌نیم  $r$ -کد شناسایی برای  $G$  باشد آنگاه با توجه به لم (۲.۲.۴) می‌دانیم که  $r$ -کد شناسایی برای  $G$  یک  $1$ -کد شناسایی برای  $G^r$  است و بنابراین لم (۲.۱.۴) اندازه  $1$ -کد شناسایی برای هر گراف همبند و بدون جهت کمتر یا مساوی  $n - 1$  است بنابراین  $|C| \leq n - 1$ .  $\square$

### ۳.۴ چگونه کران پایین به دست آوریم

قضیه ۳.۱.۴. فرض کنید  $r$  و  $n$  دو عدد صحیح باشند به طوری که  $r \geq 1$  و  $n \geq 2^{2r+1}$ . در این صورت گرافی همبند با  $n$  رأس وجود دارد که  $r$ -کد شناسایی به اندازه  $\lceil \log_2(n+1) \rceil$  داشته باشد.

برهان. فرض کنید  $n$  و  $r$  دو عدد صحیح باشند و  $k = \lceil \log_2(n+1) \rceil \geq 2r + 2 \geq 4$  (به طوری که  $2^{2r+1} \geq n \geq 2^{k-1} \geq 2^{2r+1}$ ) گراف  $G$  را با  $n$  رأس که  $r$ -کد شناسایی از اندازه  $k$  می‌پذیرد را می‌یابیم.

فرض کنید  $G_k = (V_k, E_k)$  که در آن

$$V_k = \{v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{k,1}\},$$

$$E_k = \{\{v_{1,1}, v_{2,1}\}, \{v_{2,1}, v_{3,1}\}, \dots, \{v_{k-1,1}, v_{k,1}\}, \{v_{k,1}, v_{1,1}\}\}.$$

چون  $k \geq 2r + 2$  می‌توان  $C = V_k$  را به عنوان مجموعه  $r$ -کد شناسایی برای گراف  $G_k$  در نظر گرفت. حال برای  $i = 1, 2, \dots, k$  گراف  $G'_i = (V'_i, E'_i)$  که یک زنجیر با  $r - 1$  رأس و  $r - 2$  یال است را به شکل زیر می‌سازیم:

$$V'_i = \{v_{i,2}, \dots, v_{i,r}\},$$

$$E'_i = \{\{v_{i,2}, v_{i,3}\}, \dots, \{v_{i,r-1}, v_{i,r}\}\}.$$

زنجر  $G'_i$  را به رأس  $v_{i,1}$  مجاور می‌کنیم به طوری که گراف  $G_k^* = (V_k^*, E_k^*)$  به شکل زیر ایجاد می‌شود:

$$V_k^* = V_k \cup (\cup_{i=1}^k V'_i)$$

$$E_k^* = E_k \cup (\cup_{i=1}^k E'_i) \cup (\cup_{i=1}^k \{v_{i,1}, v_{i,2}\}).$$

در این صورت  $k$  رأس  $G_k$  با  $r-1$  رأس خارج از  $G_k$  مجاور هستند بنابراین  $k(r-1) + k = kr$  رأس در  $G_k^*$  وجود دارند.

به آسانی دیده می‌شود که  $C = V_k$  هنوز یک  $r$ -کد شناسایی برای گراف  $G_k^*$  است. چون (۱) همه‌ی رئوس در  $V'_i$  توسط مجموعه  $C$ ،  $r$ -پوشیده می‌شوند.

(۲) برای دو رأس متمایز  $v_{i,j}$  و  $v_{m,l}$  در  $V_k^*$ :

(الف) اگر  $j < l$  آن‌گاه  $v_{i,j}$  توسط کدواژه‌های بیشتری نسبت به  $v_{m,l}$  پوشیده می‌شود.

(ب) اگر  $j = l$  آن‌گاه این رئوس روی دو زنجر متفاوت قرار گرفته‌اند بنابراین همسایه‌های متفاوتی از کد واژه‌ها خواهند داشت.

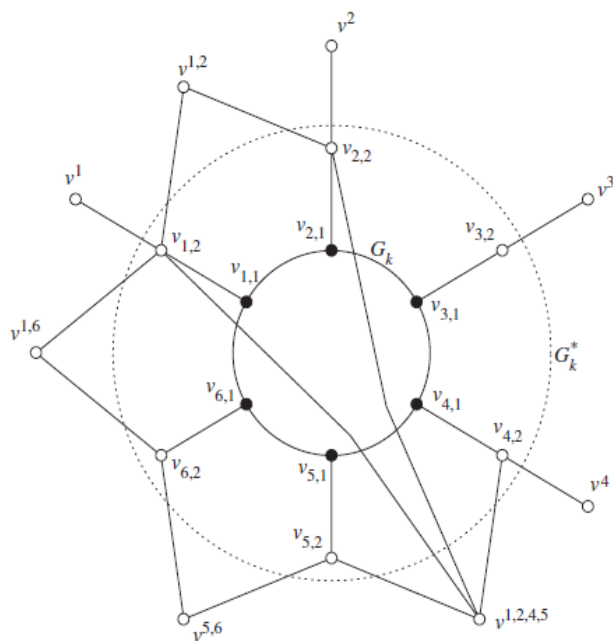
ملاحظه می‌کنیم که  $n \leq 2^{k-1} < \frac{2^k - 2}{r} \leq kr = |V_k^*|$ . یعنی تعداد رئوس  $G_k^*$  کمتر از  $n$  است. برای رفع این مشکل زیر مجموعه  $p$  عضوی از  $V_k$  را به صورت

$$\{v_{i,j,1} : 1 \leq i_j \leq k, 1 \leq j \leq p\}$$

در نظر می‌گیریم، که هم ناتهی است و هم با هیچ‌کدام از زیر مجموعه‌های  $V_k$  که  $r$ -پوشش رئوس  $V_k^*$  هستند برابر نیست. به هر یک از این زیر مجموعه‌ها یک رأس خاص به صورت  $v^{i_1, \dots, i_p}$  نسبت می‌دهیم. این رئوس جدید را با رئوس  $v_{i_1, r}, \dots, v_{i_p, r}$  در  $G_k^*$  مجاور می‌کنیم.

در این صورت  $2^k - 1 - |V_k^*| = 2^k - 1 - kr$  از آن جایی که  $n \geq 2^k - 1$  بنابراین  $n - kr$  رأس جدید به گراف  $G_k^*$  اضافه کرده‌ایم.

از طرفی رئوس  $v^{i_1, \dots, i_p}$  را با  $v_{i_1, r}, \dots, v_{i_p, r}$  مجاور کرده‌ایم بنابراین این رئوس جدید هم توسط مجموعه  $C = V_k$  پوشیده می‌شوند و با توجه به شکل تولید این رئوس جدید، هیچ دو رأسی در  $G_k^*$  همسایه یکسان در  $C$  ندارند. بنابراین گراف  $G$  با  $n$  رأس تولید می‌شود که یک  $r$ -کد شناسایی از اندازه  $k = \lceil \log_r(n+1) \rceil$  دارد. برای نمونه شکل زیر قسمتی از گراف تولید شده برای  $r = 2$  و  $k = 6$  است.  $\square$



شکل ۱۰۴: قسمتی از گراف تولید شده  $G$  با  $r = 2$  و  $k = 6$

## ۴.۴ چگونه کران بالا به دست آوریم

در این بخش گراف‌هایی با  $n$  رأس ارائه می‌دهیم که مجموعه‌های می‌نیم  $r$ -کد شناسایی در آن‌ها  $n - 1$  عضو دارند.

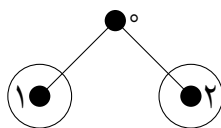
**قضیه ۴.۱.۴.** برای هر  $n \geq 3$  یک گراف همبند با  $n$  رأس وجود دارد که هر مجموعه می‌نیم  $1$ -کد شناسایی در آن شامل  $n - 1$  رأس خواهد بود.

برهان. برای اثبات ۳ نوع گراف ارائه می‌دهیم که در شرایط قضیه صدق کند:

گراف اول ستاره، که درختی با  $n$  رأس  $0$  و  $1$  و  $2$  و  $\dots$  و  $n - 1$  و  $n - 1$  یال از مجموعه

$$E = \{\{0, i\} : 1 \leq i \leq n - 1\}$$

است. به وضوح دیده می‌شود که هر  $n - 1$  رأس از گراف فوق برای ۱-کد شناسایی لازم و کافی است. در واقع اگر کمتر از  $n - 1$  رأس در مجموعه ۱-کد شناسایی قرار دهیم آن‌گاه با توجه به شکل گراف، یک رأس همسایه‌ای در مجموعه مورد نظر نخواهد داشت، بنابراین باید  $n - 1$  رأس در مجموعه ۱-کد شناسایی گراف انتخاب نمود. اما در  $n = 3$  (شکل ۲.۴) تنها مجموعه  $C = \{1, 2\}$  را می‌توان به عنوان ۱-کد شناسایی گراف در نظر گرفت چون در غیر این صورت دو رأس همسایه‌ی یکسان در  $C$  خواهند داشت.



شکل ۲.۴:  $K_{1,2}$

گراف دوم را گرافی در نظر می‌گیریم که تعداد رئوس آن زوج باشد. فرض کنید برای  $p \geq 2$ ، گراف  $G_n = (V_n, E_n)$  به صورت زیر باشد،

$$V_n = \{0, 1, \dots, n - 1 = 2p - 1\}$$

$$E_n = \{\{i, j\} : i, j \in V_n \ i \neq j, i \neq j + p \text{ mod } n\}.$$

دیده می‌شود که گراف  $G_n$  یک گراف کامل با  $2p$  رأس، منهای یک تطابق کامل<sup>۲</sup> است. با توجه به گراف ارائه شده هیچ دو رأسی همسایه یکسان ندارند بنابراین می‌توان  $C = V_n$  را به عنوان ۱-کد شناسایی برای گراف در نظر گرفت. اما گراف مورد نظر همبند است و  $n - 1$  رأس برای ۱-کد شناسایی گراف کافی است و این مجموعه را  $C$  می‌نامیم. نشان می‌دهیم به دست آوردن ۱-کد شناسایی برای این گراف با تعداد رئوس کمتر غیر ممکن است.

<sup>۲</sup>perfect matching

برای هر رأس  $i \in V_n$  داریم:

$$B_1(i) = V_n \setminus \{i + p \bmod n\},$$

و برای هر دو رأس  $i, j \in V_n$ ،  $i \neq j$  داریم:

$$B_1(i) \Delta B_1(j) = \{i + p \bmod n, j + p \bmod n\}.$$

$\Delta$  نماد تفاضل متقارن است. حال باید حداقل یکی از اعضای  $B_1(i) \Delta B_1(j)$  در مجموعه  $C$  باشد تا دو رأس  $i$  و  $j$  توسط  $C$  از یکدیگر جدا شوند، چون از ابتدا فرض کردیم  $C$  دارای  $n - 1$  رأس است بنابراین بدون کاستن از کلیت فرض کنیم  $0 \notin C$ .  
برای هر  $j \neq p$  داریم:

$$B_1(p) \Delta B_1(j) = \{0, j + p \bmod n\}.$$

علاوه بر این که  $B_1(p) \Delta B_1(j) \cap C$  ناتهی است، برای  $j = 1, 2, \dots, n - 1$  داریم

$$B_1(p) \Delta B_1(j) \cap C \subseteq \{j + p \bmod n\}.$$

بنابراین به ازای همه  $j$ ها جز  $j = p$ ،  $n - 1$  رأس متمایز  $j + p \bmod n$  برای مجموعه  $C$  لازم هستند.

گراف سوم گرافی است که تعداد رئوس آن فرد می‌باشد.  $G_n = (V_n, E_n)$  را به شکل زیر داریم:

$$V_n = \{0, 1, \dots, n - 1 = 2p\},$$

$$E_n = \{\{i, j\} : i, j \in V_n \setminus \{n - 1\}, i \neq j, i \neq j + p \bmod n - 1\}$$

$$\cup \{\{n - 1, j\}, j \in V_n \setminus \{n - 1\}\}.$$

در مقایسه این گراف با گراف قبلی مشاهده می‌شود که این گراف تنها یک رأس اضافی دارد که با رئوس دیگر گراف مجاور است. در واقع رأس  $(n - 1)$  -ام با فاصله یک از بقیه رئوس قرار دارد.  
هر رأس  $i \in V_n$ ، با همه رئوس گراف جز  $i + p \bmod n$  مجاور است بنابراین برای هر رأس  $i \in V_n$

$$B_1(i) \Delta B_1(n - 1) = \{i + p \bmod n\}.$$



بنابراین  $n - 1$  رأس اول در مجموعه  $r$ -کد شناسایی گراف معرفی شده قرار دارند. در غیر این صورت اگر کمتر از  $n - 1$  رأس در کد شناسایی قرار دهیم آن‌گاه با توجه به گراف قبلی تناقض ایجاد می‌شود. یا اگر یکی از رؤس  $0 \leq i \leq n - 2$  مانند  $0$  در کد شناسایی نباشد و رأس  $(n - 1)$ -ام را در آن قرار دهیم آن‌گاه  $B_1(p) \Delta B_1(n - 1) = \{0\}$ . یعنی دو رأس متمایز  $p$  و  $n - 1$  در کد همسایه‌های یکسان دارند که متناقض با تعریف کد شناسایی است.

□

**قضیه ۴.۲.۴.** فرض کنید  $r \geq 2$  عدد صحیح و ثابت باشد. برای هر  $n$  زوج که  $n \geq 3r^2$ ، یک گراف همبند  $G_n$  با  $n$  رأس موجود است که هر مجموعه‌ی  $r$ -کد شناسایی در آن شامل  $n - 1$  رأس است.

**برهان.** فرض کنید  $n = 2p$  و  $n = kr - \alpha$  که  $1 \leq \alpha \leq r$ .  
گراف  $G_n = (V_n, E_n)$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$$

$$E_n = \{\{i, i + j \pmod n\} : i \in V_n, j \in J = \{1, 2, \dots, k - \alpha - 1, k\}\}.$$

ملاحظه می‌کنیم

$$3r\alpha + 2r - 2\alpha = \alpha(3r - 2) + 2r \leq r(3r - 2) + 2r = 3r^2 \implies$$

$$3r\alpha + 2r - 2\alpha \leq n \quad (1.4)$$

که از این نامساوی در ادامه‌ی قضیه استفاده می‌کنیم.

همچنین داریم

$$n = 2kr - 2\alpha \geq 3r^2 \implies 2k \geq 3r + 2\frac{\alpha}{r}$$

اگر  $\alpha = r$  آن‌گاه  $2k \geq 3\alpha + 2$ . اگر  $\alpha \leq r - 1$  آن‌گاه  $2k \geq 3\alpha + 3$ . بنابراین در هر دو

صورت

$$2k \geq 3\alpha + 2. \quad (2.4)$$

بنابراین  $\frac{\alpha}{p} \geq k - \alpha - 1$ ، اما اعضای  $J$  اعداد صحیح هستند که در نتیجه  $1 \geq k - \alpha - 1$  و  $J$  حداقل دو عضو مثبت خواهد داشت. اگر  $1 = k - \alpha - 1$  آن‌گاه با توجه به فرمول (۲.۴)  $\alpha \leq 2$ ، که حالت‌های زیر پیش می‌آید: اگر  $\alpha = 1$  و  $k = 3$ ، آن‌گاه  $3r^2 < n = 6r - 2$  و چون  $r \geq 2$ ، لذا تناقض ایجاد می‌شود. اما اگر  $\alpha = 2$  و  $k = 4$  آن‌گاه  $n = 8r - 4$  و  $n \geq 3r^2$ .

در ادامه ی برهان با توجه به لم (۲.۲.۴) و قضیه (۴.۱.۴) کافیت نشان دهیم که  $r$ -بستار انتقالی گراف  $G_n$  برابر است با گراف دوم که در قضیه (۴.۱.۴) شرح داده شد. یعنی  $r$ -کد شناسایی برای  $G_n$  با  $1$ -کد شناسایی آن گراف برابر خواهد بود.

هدف ما این است که نشان دهیم برای هر رأس  $i \in V_n$

$$B_r(i) = V_n \setminus \{i + p \pmod n\}.$$

برای یک رأس خاص مانند  $\circ$  نشان می‌دهیم که تمامی رئوس با فاصله  $r$  از آن قرار دارند جز رأس  $p \pmod n$ . با توجه به تقارن گراف  $G_n$  تنها کافیت رئوس  $1$  تا  $p$  را بررسی کنیم.

حال رأس  $v$  از  $G_n$  که با فاصله  $r$  از  $\circ$  قرار دارد را به شکل زیر بیان می‌کنیم:

$$v = \sum_{j=1}^{k-\alpha-1} j(q_j - q'_j) + k(q_k - q'_k). \quad (3.4)$$

$q_l$  (یا  $q'_l$ ) تعداد حرکت به طول  $l$  (یا  $-l$ ) است که در گراف صورت می‌گیرد. در این جا حرکت به طول  $l$  یعنی از رأس  $u$  به رأس  $u + l \pmod n$  رفتن با استفاده از یال  $\{u, u + l \pmod n\} \in E_n$ . فرمول (۳.۴) دارای شرایط زیر است:

$$q_j \geq 0, \quad q'_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq k - \alpha - 1), \quad q_k \geq 0, \quad q'_k \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{k-\alpha-1} (q_j + q'_j) + q_k + q'_k \leq r.$$

$$\sum_{j=1}^{k-\alpha-1} j(q_j - q'_j) + k(q_k - q'_k) \leq kr < n$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود  $n$  می‌شود  $kr < n$  می‌توان به دست

آورد؟

اگر در طول حرکت دقیقاً  $c$  حرکت با طول  $k$  باشند و همچنین چون  $J$  شامل همه اعداد صحیح بین

$1$  تا  $k - \alpha - 1$  است آن‌گاه تمام اعداد صحیح با فاصله  $r$ ، به شکل زیر به دست می‌آید،

$$I_c = \{ck - (r - c)(k - \alpha - 1), ck - (r - c)(k - \alpha - 1) + 1, \dots, ck, ck + 1, \dots, ck + (r - c)(k - \alpha - 1) - 1, ck + (r - c)(k - \alpha - 1)\}.$$

فرض کنید برای  $0 \leq c \leq r - 2$ ,

$$\max(I_c) = ck + (r - c)(k - \alpha - 1) \quad \text{و} \quad \min(I_c) = ck - (r - c)(k - \alpha - 1).$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \max(I_c) - \min(I_{c+1}) &= ck + (r - c)(k - \alpha - 1) - ((c + 1)k - (r - (c + 1))(k - \alpha - 1)) \\ &= rk - r\alpha - r - k + \alpha + 1 + r(k - \alpha - 1) - 2c(k - \alpha - 1) \\ &= (2r - 2c - 1)(k - \alpha - 1) - k. \end{aligned}$$

حال با استفاده از فرمول (۱.۴) و برای  $c \leq r - 2$  داریم

$$\begin{aligned} \max(I_c) - \min(I_{c+1}) &\geq 3(k - \alpha - 1) - k \\ &= \frac{2kr - 3r\alpha - 3r}{r} \\ &= \frac{n + 2\alpha - 3r\alpha - 3r}{r} \\ &\geq \frac{(3r\alpha + 2r - 2\alpha) + 2\alpha - 3r\alpha - 3r}{r} \\ &= -1. \end{aligned}$$

و این یعنی

$$\max(I_c) + 1 \geq \min(I_{c+1}).$$

از این رو برای  $0 \leq c \leq r - 2$

$$\max(I_{r-1}) = rk - \alpha - 1 = p - 1 \geq \max(I_c)$$

$$\min(I_0) \leq 1.$$

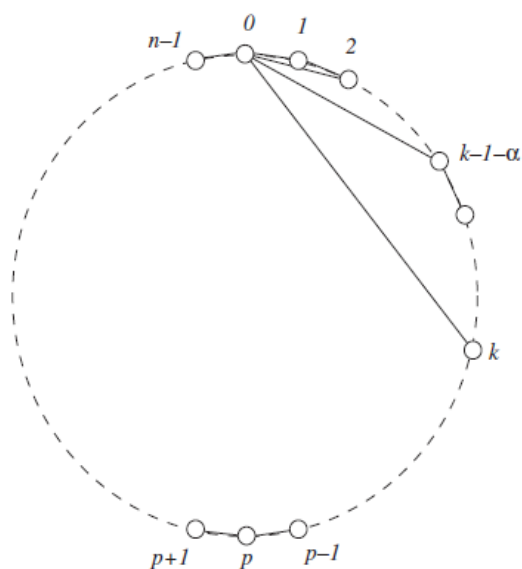
همچنین دیده می‌شود که

$$\{1, 2, 3, \dots, p-2, p-1, p\} \cap \bigcup_{c=0}^{r-1} I_c = \{1, 2, \dots, p-2, p-1\}.$$

بنابراین با حداکثر  $r$  حرکت شامل حداکثر  $r-1$  به طول  $k$  می‌توانیم همه‌ی رئوس بین  $1$  تا  $p-1$  را دست آورد اما  $p$  به دست نمی‌آید. حتی با  $r$  حرکت با طول  $k$  هم  $p$  به دست نمی‌آید چون

$$\max(I_r) = \min(I_r) = kr = p + \alpha \neq p.$$

□



شکل ۳.۴: قسمتی از گراف  $G_n$  که  $n$  زوج

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنید  $r \geq 2$ ، عدد صحیح و ثابت باشد. برای هر  $n$  زوج که  $n \geq 3r^2$ ، گراف همبند  $G_{n+1}$  با  $n+1$  رأس موجود است که هر مجموعه‌ی می‌نیم  $r$ -کد شناسایی در  $G_{n+1}$  شامل  $n$  رأس است.

برهان. فرض کنید  $n = 2p$  و  $p = kr - \alpha$  که  $1 \leq \alpha \leq r$ .  
گراف  $G_{n+1} = (V_{n+1}, E_{n+1})$  را به شکل زیر می‌سازیم:

$$V_{n+1} = \{0, 1, \dots, n-1\} \cup \{Z\}$$

$$E_{n+1} = (A_{n+1} \setminus B_{n+1}) \cup C_{n+1}.$$

که در آن

$$A_{n+1} = \{\{i, i+j \bmod n\} : i \in V_{n+1} \setminus \{Z\}, j \in J = \{1, 2, \dots, k-\alpha-1, k\}\}$$

$$B_{n+1} = \{\{1+ik, 1+ik+(k-\alpha-2)\}, \{n-1-ik-(k-\alpha-2), n-1-ik\} : 0 \leq i \leq r-2\}$$

$$C_{n+1} = \{\{Z, i\} : i \in \{0\} \cup \{1, \dots, k-\alpha-2, k-\alpha, k+1\}\}$$

$$\cup \{n-1, n-2, \dots, n-(k-\alpha-2), n-(k-\alpha), n-(k+1)\}.$$

ملاحظه می‌کنیم  $k-\alpha-2 \geq 0$ . اگر  $k-\alpha-2 = 0$  آن‌گاه  $r = 2$  و  $n+1 = 13$  و مطالعه  $G_{13}$  به آسانی صورت می‌گیرد.

در گراف تعریف شده مجموعه  $A_{n+1}$  همان مجموعه  $E_n$  در  $G_n$  در قضیه (۴.۲.۴) است. بنابراین برای ساختن  $G_{n+1}$  می‌توان از  $G_n$  استفاده کرد به طوری که یال‌های متعلق به  $B_{n+1}$  را از  $E_n$  حذف کنیم و رأس  $Z$  را به عنوان رأس مرکزی که همه یال‌ها در  $C_{n+1}$  با آن شروع می‌شود در نظر گرفت. قبل از ادامه‌ی برهان به نکته‌ی زیر توجه می‌کنیم.

$$\text{فرض کنید } B_{n+1} = B_{n+1}^1 \cup B_{n+1}^2 \text{ که}$$

$$B_{n+1}^1 = \{\{1+ik, 1+ik+(k-\alpha-2)\} : 0 \leq i \leq r-2\}$$

$$B_{n+1}^2 = \{\{n-1-ik-(k-\alpha-2), n-1-ik\} : 0 \leq i \leq r-2\}.$$

کوچکترین رأس در  $B_{n+1}^1$ ، رأس ۱ و بزرگترین رأس  $1+(r-2)k = p+\alpha+1-2k$  که از  $p$  کمتر است. در  $B_{n+1}^2$  کوچکترین رأس  $n-1-(r-2)k-(k-\alpha-2)$  و  $p+k+1 = n-1-(r-2)k-(k-\alpha-2)$  بزرگترین رأس  $n+1-(k-\alpha) = n-1-(k-\alpha-2)$  است. بنابراین اختلاف بین رئوس  $B_{n+1}^1$  و  $B_{n+1}^2$  به پیمانه‌ی  $n$  بزرگتر از  $k$  است. همچنین رأس‌های ابتدایی یال‌های متوالی در  $B_{n+1}^1$  و  $B_{n+1}^2$  به فاصله  $k$  از یکدیگر قرار دارند. اکنون ادامه‌ی برهان را با اثبات سه گام پی می‌گیریم.

در گام اول نشان می‌دهیم که با حداکثر  $r$  حرکت از هر رأس  $0 \leq x \leq n-1$  می‌توان همه‌ی رئوس دیگر در همین بازه را به دست آورد جز  $x+p \pmod n$ .

در گام دوم نشان می‌دهیم که با حداکثر  $r$  حرکت از رأس  $0 \leq x \leq n-1$  رأس  $x+p \pmod n$  به دست نمی‌آید.

در گام سوم ثابت می‌کنیم که از رأس  $Z$  با حداکثر  $r$  حرکت می‌توان هر رأس دیگر در  $V_{n+1}$  را به دست آورد. با اثبات این سه گام نتیجه می‌گیریم که  $r$ -بستار انتقالی  $G_{n+1}$  با گراف شرح داده شده در قسمت سوم قضیه (۴.۱.۴) برابر است.

گام اول: اگر  $E_{n+1} = A_{n+1} \cup C_{n+1}$ ، با کمک قضیه (۴.۱.۴) و قضیه (۴.۲.۴) حکم ثابت می‌شود. اما حذف یال‌هایی از  $B_{n+1}$  در اینجا مشکلاتی ایجاد می‌کند.

دو رأس  $x, y \in V_{n+1}$  را در نظر می‌گیریم، بدون کاستن از کلیت فرض کنیم که  $y$  بین  $x+1$  و  $x+p-1 \pmod n$  قرار دارد. اگر از یال‌های  $B_{n+1}$  استفاده کنیم با حداکثر  $r$  می‌توان از  $x$  به  $y$  رفت. حال این مسیر را با اجتناب از یال‌های ممنوعه تغییر می‌دهیم.

در مسیر اصلی از  $x$  به  $y$  دنباله‌ای از طول‌های حرکت به شکل زیر را در نظر می‌گیریم،

$$k, k, \dots, k, \varepsilon(k-\alpha-1), \dots, \varepsilon(k-\alpha-1), \varepsilon\beta \quad (۴.۴)$$

که  $\varepsilon = \pm 1$  و  $0 \leq \beta \leq k-\alpha-2$ .

در این مسیر به دست آمده با حداکثر  $r-1$  حرکت با طول  $k$  تا نزدیکی  $y$  می‌رویم و طول باقی‌مانده را بر  $k-\alpha-1$  تقسیم می‌کنیم و در نهایت باقی‌مانده را  $\beta$  می‌نامیم. اگر  $\beta \neq k-\alpha-2$  آن‌گاه حکم ثابت می‌شود. چون همه‌ی یال‌های نمایش داده شده در  $B_{n+1}$  از طول  $\pm(k-\alpha-2)$  هستند و در حرکت از  $x$  به  $y$  از یال‌های  $B_{n+1}$  عبور نکردیم.

از این به بعد فرض می‌کنیم  $\beta = k-\alpha-2$ . همچنین فرض کنید  $\beta = y - \varepsilon\beta \pmod n$ . اگر یال  $\{z, y\}$  در  $B_{n+1}$  نباشد حکم ثابت می‌شود و باز هم از یال‌های ممنوعه عبور نکرده‌ایم. بنابراین فرض کنیم  $\{z, y\} \in B_{n+1}$ ، که دو حالت اتفاق می‌افتد:

(۱) در دنباله‌ی حرکت بین  $x$  و  $y$  (۴.۴) حداقل یک حرکت به طول  $\varepsilon(k-\alpha-1)$  وجود دارد.

(۲) در این مسیر حرکتی به طول  $\varepsilon(k-\alpha-1)$  وجود ندارد.

فرض کنیم حالت اول برقرار باشد یعنی یک حرکت به طول  $\varepsilon(k-\alpha-1)$  وجود داشته باشد و

$z = y - \varepsilon\beta - \varepsilon(k - \alpha - 1)$  چون  $\{z, y\} \in B_{n+1}$  و  $|z - z'| = k - \alpha - 1$  و این تفاضل از  $k$  کمتر است و برابر  $k - \alpha$  نیست همچنین با توجه به نکته‌ی گفته شده  $\{z, z'\} \notin B_{n+1}$  بنابراین  $\{z', z' + \varepsilon\beta\} \in E_{n+1}$ . اکنون دنباله  $\{z', z, y\}$  را با  $\{z', z - y, y\}$  جابجا می‌کنیم به گونه‌ای که مسیر به وجود آمده بین  $x$  و  $y$  از یال‌های ممنوعه عبور نکند.



شکل ۴.۴: چگونگی جابجایی یال ممنوعه

حال فرض کنیم حالت دوم برقرار باشد. اگر حداکثر  $r - 1$  حرکت بین  $x$  و  $y$  وجود داشته باشد آن‌گاه می‌توان حرکت آخر،  $\varepsilon\beta$ ، را با دو حرکت  $\varepsilon(k - \alpha - 1)$  و  $-\varepsilon$  جابجا کرد. اگر دقیقاً  $r$  حرکت بین  $x$  و  $y$  وجود داشته باشد آن‌گاه دنباله‌ی  $k, k, \dots, k, \varepsilon\beta$  به دست می‌آید. در میان  $r$  رأس  $x + ki$   $\{t, t + \varepsilon(k - \alpha - 2)\}$  متعلق به مسیر  $x$  و  $y$  حداقل یک،  $t$ ، وجود دارد که یال  $B_{n+1}$  نیست. (با توجه به نکته‌ی ذکر شده  $|B_{n+1}^1| = |B_{n+1}^2| = r - 1$ ) بنابراین آرایش دنباله را تغییر می‌دهیم. حرکت اول می‌تواند به طول  $-(k - \alpha - 2)$  باشد و در ادامه حرکت‌هایی به طول  $k$  باشند.

گام دوم: در مقایسه با گراف برهان قضیه قبل در این گراف یال‌های کمتری بین رئوس  $V_{n+1} \setminus \{Z\}$  وجود دارد. بنابراین اگر مسیری با حداکثر  $r$  حرکت بین  $x$  و  $x + p \pmod{n}$  وجود داشته باشد لازم است این مسیر از  $Z$  بگذرد. اکنون نشان می‌دهیم که در حرکت از  $y$  به  $z$  به  $Z$  احتیاجی نیست. بنابراین با توجه به قضیه (۴.۲.۴) به  $x + p$  نمی‌رسیم.

دنباله‌ی  $\{y, Z, z\}$  از رئوس را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که

$$y, z \in \{0\} \cup \{1, 2, \dots, k - \alpha - 1, k - \alpha, k + 1\} \\ \cup \{n - 1, n - 2, \dots, n - (k - \alpha - 2), n(k - \alpha), n - (k + 1)\}.$$

اگر هیچ‌کدام از  $y$  و  $z$  متعلق به  $\{k + 1, n - (k + 1)\}$  نباشند دیده می‌شود که می‌توان از  $y$  به  $z$  رسید بدون عبور از رأس  $Z$ :

(a) اگر  $y = n - (k - \alpha)$  و  $z = k - \alpha$  آن‌گاه با دو حرکت، یکی به طول  $k$  و دیگری به طول  $k - 2\alpha$  می‌توان از  $y$  به  $z$  رسید، که اولاً با توجه به  $2k \geq 3\alpha + 2$  و  $\alpha \geq 1$  داریم

$$k - \alpha - 1 \geq k - \alpha - 2 \geq -k + \alpha + 2 \implies k - 2\alpha \in J$$

ثانیاً حرکت از  $\alpha$  به  $k - \alpha$  امکان‌پذیر است زیرا  $k - \alpha$  انتهای یال در  $B_{n+1}$  نیست و گرنه باید  $k - \alpha = 1$ ، که غیر ممکن است.

(b) اگر  $y \neq n - (k - \alpha)$  و  $z \neq k - \alpha$  آن‌گاه  $|y - z| \leq 2k - 2\alpha - 2$ . و به وضوح دیده می‌شود که با دو حرکت که طول‌های آن‌ها متعلق به  $J$  است می‌توان از  $y$  به  $z$  رسید و از یال‌های ممنوعه عبور نکرد. بنابراین استفاده از  $Z$ ، کمکی برای رسیدن از  $y$  به  $z$  نمی‌کند و دست‌یابی به  $x + p \pmod{n}$  غیر ممکن است.

حال اگر یکی از  $y$  یا  $z$  متعلق به  $\{k + 1, n - (k + 1)\}$  باشند آن‌گاه دورترین رأسی که از یک رأس  $x$  به دست می‌آید را  $x'$  نامیده و برابر است با  $x' = x + (r - 2)k + (k + 1) + (k - \alpha) \pmod{n}$  که از  $r - 2$  بار از طولانی‌ترین طول ممکن برای حرکت و دنباله  $(t, Z, z)$  که طولانی‌ترین دنباله ممکن است استفاده شده است، اما  $x' = x + rk - \alpha + 1 = x + p + 1 \pmod{n}$  بنابراین به  $x + p \pmod{n}$  نمی‌رسیم. از این به بعد بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم  $y = n - (k + 1)$  و  $z = k + 1$ . اگر از  $r - 2$  حرکت به طول  $k$  استفاده شود به

$$x + (r - 2)k + 2(k + 1) = x + rk + 2 \neq x + p \pmod{n}$$

می‌رسیم. اگر از حداکثر  $r - 4$  حرکت با طول  $k$  استفاده شود آن‌گاه دورترین نقطه‌ی به دست آمده برابر

$$x + (r - 4)k + 2(k - \alpha - 1) + 2(k + 1) = x + p - \alpha \pmod{n}$$

است و باز هم به  $x + p$  نمی‌رسیم. اگر از  $r - 3$  حرکت به طول  $k$  استفاده کنیم آن‌گاه باید یک حرکت به طول  $k - \alpha - 2$  داشته باشیم از این رو  $p = (r - 3)k + 2(k + 1) + (k - \alpha - 2)$ ، که طول دقیق یال‌های ممنوعه در  $B_{n+1}$  است و علاوه بر این چون  $y = n - (k + 1)$  و  $z = k + 1$  متعلق به مسیر و در تعریف  $B_{n+1}$  ظاهر شده‌اند و  $|B_{n+1}^1| = |B_{n+1}^2| = r - 1$ ، دیده می‌شود که استفاده از یال با طول خواسته شده غیر ممکن است.



گام سوم: نشان می‌دهیم که با حداکثر  $r$  حرکت از  $Z$  می‌توان هر رأس بین  $0$  تا  $p$  را به دست آورد. فرض کنیم  $k - \alpha \geq 3$ . (اگر  $k - \alpha = 2$  سپس  $13 = n + 1$  و مطالعه  $G_{13}$  به آسانی صورت می‌گیرد.)

رأس ۱ جز رأس  $Z$  با رئوس

$n+1-k, n+1-(k-\alpha-1), n+1-(k-\alpha-2), \dots, n-1, 0, 2, \dots, k-\alpha-2, k-\alpha, k+1$  مجاور است. ( $\{1, k-\alpha-1\} \in B_{n+1}$ ) رئوس  $1, k-\alpha-2, k-\alpha, k+1, \dots, 2, 3, \dots, k-\alpha-2, k-\alpha, k+1$  نیز مانند  $(n+1-(k-\alpha-2))$  با  $Z$  مجاورند. با توجه به گام ۱ می‌دانیم که از رأس ۱ با حداکثر  $r$  حرکت می‌توان هر رأس بین ۲ تا  $p$  را در حرکت با طول  $(k-\alpha-2)$  به دست آورد. در همه‌ی موارد، رأس به دست آمده از ۱ در اولین حرکت، از  $Z$  هم در یک حرکت به دست می‌آید. بنابراین از  $Z$  با حداکثر  $r$  حرکت می‌توان هر رأس بین ۲ تا  $p$  را به دست آورد. با توجه به تقارن این مطلب برای  $2-n$  تا  $p$  هم برقرار است. سرانجام رئوس  $0$  و  $1$  و  $n-1$  در دقیقاً ۲ حرکت از  $Z$  به دست می‌آیند. شکل (۵.۴)

□

## ۵.۴ گراف نامتناهی

قضیه ۵.۱.۴. یک گراف نامتناهی موجود است که تنها مجموعه ۱-کد شناسایی در آن مجموعه‌ی همه‌ی رئوس گراف است.

برهان. گراف  $G = (V, E)$  را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$V = V_1 \cup V_2$$

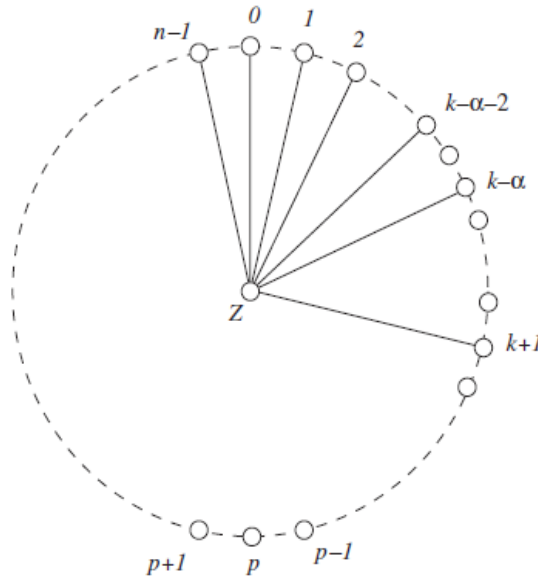
$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3.$$

که در آن

$$V_1 = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$$

$$V_2 = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\},$$

$$E_1 = \{\{i, j\} : i \in V_1, j \in V_1, i \neq j\},$$



شکل ۵.۴: قسمتی از گراف  $G_{n+1}$  که  $n + 1$  فرد

$$E_{\uparrow} = \{\{i, j\} : i \in V_{\uparrow}, j \in V_{\uparrow}, i \neq j\},$$

$$E_{\downarrow} = \{\{i, j\} : i \in V_{\downarrow}, j \in V_{\uparrow}, i > j\}.$$

فرض کنیم مجموعه  $C \subseteq V$  یک  $\alpha$ -کد شناسایی برای گراف  $G$  باشد نشان می‌دهیم  $C = V$  برای هر  $i \in \mathbb{Z}$

$$B_1(2i + 1) \Delta B_1(2i + 3) = \{2i + 2\}, \quad B_1(2i) \Delta B_1(2i + 2) = \{2i + 1\}.$$

$\Delta$  نماد تفاضل متقارن است. حداقل یک عضو از مجموعه حاصل از تفاضل متقارن هر دو رأس متمایز در مجموعه  $\alpha$ -کد شناسایی می‌باشد، تا آن دو رأس توسط کد شناسایی از یکدیگر جدا شوند. حال با توجه به گراف معرفی شده همسایه متمایز هر دو رأس زوج متوالی رأس فرد بین آن‌ها و همسایه هر دو رأس فرد متوالی رأس زوج بین آن‌ها است. بنابراین به ازای هر  $i \in \mathbb{Z}$  حاصل این تفاضل متقارن کل مجموعه  $\mathbb{Z}$  می‌شود، در نتیجه  $C = V$ .  $\square$

## ۶.۴ احاطه‌گرمانی

در بخش ۲ کران‌های بالا و پایینی برای اندازه  $r$ -کدشناسایی ارائه کردیم. در این بخش کران‌هایی برای  $r$ -احاطه‌گرمانی در یک گراف ارائه می‌کنیم.

لم ۶.۱.۴. فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف قابل  $r$ -شناسایی با رئوس  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  باشد. مجموعه‌های  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\} \subseteq V$  و  $C^* = \{c_1^*, c_2^*, \dots, c_m^*\} \not\subseteq V$  را در نظر می‌گیریم. گراف  $G^* = (V^*, E^*)$  را به این شکل داریم که  $C^* \cup V = V^*$ . در این صورت  $C$  یک  $r$ -کد شناسایی برای  $G$  است اگر و تنها اگر  $C^*$  یک  $r$ -احاطه‌گرمانی برای  $G^*$  باشد.

برهان. فرض کنیم گراف‌های  $G = (V, E)$  و  $G^* = (V^*, E^*)$  را به گونه‌ای که در صورت قضیه گفته شد داشته باشیم و مجموعه  $C$  یک  $r$ -کد شناسایی برای  $G$  باشد. در این صورت اگر داشته باشیم

$$E^* = E \cup \{\{c_i^*, v_j\} : \{c_i, v_j\} \in E\} \cup \{\{c_i, c_i^*\} : 1 \leq i \leq m\}.$$

آن‌گاه چون  $C$  یک  $r$ -کد شناسایی است و همه‌ی رئوس توسط مجموعه  $C$  پوشیده و از یکدیگر جدا می‌شوند و  $C_i^*$ ها هم با همسایه‌های  $C_i$ ها مجاورند بنابراین  $C^*$  یک  $r$ -احاطه‌گرمانی برای  $G^*$  است. برعکس: فرض کنیم  $C^*$  یک  $r$ -احاطه‌گرمانی برای  $G^*$  باشد آن‌گاه  $C \subseteq V^* \setminus C^*$  را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که  $r$ -کد شناسایی برای  $G$  باشد. در واقع  $c_i$ هایی را انتخاب می‌کنیم که با  $c_i^*$  مجاورند و همچنین برای  $0 \leq i \leq m$  همسایه‌های  $c_i^*$  و  $c_i$  با هم یکسان باشند. در این صورت  $C$  برای گراف  $G$  که از حذف رئوس و یال‌های مرتبط با  $C_i^*$  از  $G^*$  به دست می‌آید، (البته این گراف به راحتی به دست نمی‌آید و باید همسایه‌های رئوس مجاور با  $c_i^*$  بررسی شوند.) یک  $r$ -کد شناسایی است.  $\square$

قضیه ۶.۱.۴. فرض کنید  $r$  و  $n$  دو عدد صحیح باشند به طوری که  $r \geq 1$  و  $n \geq 2$ . همچنین فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف همبند بدون جهت با  $n$  رأس باشد. اگر  $C \subseteq V$  یک مجموعه  $r$ -احاطه‌گرمانی باشد آن‌گاه  $|C| + 2^{|C|} \geq n + 1$ .

برهان. فرض کنیم شرایط قضیه برقرار باشد و  $G = (V, E)$  یک گراف همبند و بدون جهت و دارای  $n$  رأس باشد و  $C \subseteq V$  یک  $r$ -احاطه‌گرمانی باشد. از آنجایی که برای همه‌ی رئوس  $v \in V \setminus C$

$K_{c,r}(v) = C \cap B_r(v)$  ناتهی و متمایز است، تعداد زیر مجموعه‌های  $C$  بیشتر یا مساوی  $n - c$  است تا هر رأس  $v \in V \setminus C$  زیر مجموعه‌ای مخصوص به خود در  $C$  داشته باشد بنابراین

$$2^{|C|} - 1 \geq n - |C|.$$

□

لم ۶.۲.۴. اگر  $C$  مجموعه می‌نیم  $r$ -احاطه‌گرمانی برای گراف همبند بدون جهت  $G$  با  $n$  رأس باشد آن‌گاه  $|C| \leq n - 1$ .

□ برهان. چون  $G$  همبند است لازم نیست همی رئوس در مجموعه می‌نیم  $r$ -احاطه‌گرمانی باشند.

مثال ۶.۱.۴. گراف کامل گرانی است که اندازه مجموعه  $r$ -احاطه‌گرمانی در آن  $n - 1$  است.

## مراجع

- [1] N. Bertrand, Codes identifiants et codes localisateurs sur certains graphs, memoire de stage de maitrise, ENST, Paris,France,june 2001.
- [2] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Identifying and locating-dominating codes on chains and cycles, *European J. Combin.* 25/7 (2004), 969-987.
- [3] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Identifying or locating-dominating codes for some families of graphs, *Rapport Interne Telecom Paris-2003 C001*, Paris, France, 48 PP, Feb. 2003.
- [4] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, 1-identifying codes on trees, *Australas. J. Combinatorics* 31 (2005), 21-35.
- [5] M. Blidia, M. Chellali, Locating-dominating and identifying code in trees, 39 (2007) 219-232.
- [6] I. Charon, O. Hudry ,A. Lobstein, Extremal cardinalities for identifying and locating-dominating code in graphs, *Discrete Mathematics* 307 (2007) 356-366.

- 
- [7] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Possible cardinalities for locating-dominating codes in graphs, *Australas. J. Combin.* 34 (2006) 23-32.
- [8] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Possible cardinalities for identifying codes in graphs, *Australas. J. Combin.* 32 (2005) 177-195.
- [9] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Minimizing the size of an identifying or locating-dominating code in a graph is NP-hard, *Theoret. Comput. Sci.* 290(3) (2003), 2109-2120.
- [10] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Identifying codes with small radius in some infinite regular graphs, *Electron. J. Combin.* 9(1) (2002), R11.
- [11] M. Chellali, On locating and differentiating-total domination in trees, (submitted).
- [12] C.J. Colbourn, P.J. Slater and L.K. Stewart, Locating dominating sets in series parallel networks, *Congr. Numer.* 56 (1987), 135-162.
- [13] M. Daniel, Codes identifiants, Memoire de DEA, Universite Joseph Fourier, Grenoble, France, June 2003.
- [14] S. Gravier, J. Moncel, On graphs having a  $V \setminus x$  set as an identifying codes, *Discrete Math.*, this issue, doi: 10.1016/j.disc.2005.09.035.
- [15] T.W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P.J Slater, *fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.

- 
- [16] T.W. Haynes, M.A. Henning and J. Howard, Locating and total dominating sets in trees, *Discrete Appl. Math.* 154 (2006), 1293-1300.
- [17] M.G. Karpovsky, K. Chakrabarty and L.B. Levitin, On a new class of codes for identifying vertices in graphs, *IEEE Trans. Inform. Theory* 44(2) (1998), 599-611.
- [18] P.J. Slater, Domination and location in acyclic graphs, *networks* 17 (1987), 55-64.
- [19] P.J. Slater, Domination and reference sets in graphs, *J. Math. Phys. Sci* 22 (1988), 445-455.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

r-locating-dominating	.....	r-احاطه‌گر مکانی
r-transitive closure	.....	r-بستار انتقالی
r-cover	.....	r-پوشش
r-separted	.....	r-جدا شده
r-identifying	.....	r-کد شناسایی
r-identifiable	.....	r-قابل شناسایی
complete q-ary tree	.....	درخت $q$ -نمادی کامل
undirected	.....	بدون جهت
perfect matching	.....	تطابق کامل
forest	.....	جنگل
subdivided star	.....	ستاره تقسیم شده
double star	.....	ستاره مضاعف
operation	.....	عملگر
noncodewords	.....	غیر کد واژه
codewords	.....	کد واژه
connected	.....	همبند



## Abstract

In this thesis we present identifying codes and locating-dominating codes in graphs. We study the smallest cardinalities of these codes in any connected undirected graph and in particular in trees. We prove that in a tree with  $n$  vertices, any identifying code contains at least  $\frac{3(n+1)}{7}$  vertices, and, in a tree of order  $n \geq 4$ , with  $l$  leaves and  $s$  support vertices contains at least  $\frac{3(n+l-s+1)}{7}$  vertices. We show that for a tree  $T$  with  $n \geq 3$  vertices

$$\frac{n+l-s+1}{3} \leq \gamma_L(T) \leq \frac{n+l-s}{2}.$$

We also characterize the trees satisfying  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$  and  $M(T) = \gamma(T)$ .

Moreover we investigate the complete  $q$ -ary trees, and obtain the minimum cardinalities of a identifying code and  $r$ -locating-dominating code in these trees.

**Keywords:** locating-dominating code; identifying code



**Shahrood University of Technology**  
**Faculty Of Mathematical Sciences**

**Dissertation Submitted in Partial**  
**Fulfillment of The Requirements For**  
**The Degree of Master of Science in**  
**Applied Mathematics**

M.S Thesis

# Locating-Dominating sets and Identifying Codes

by

Saeedeh Saeedy

Supervisor

Dr. Jafari Rad

July 2013