بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش هندسه دیفرانسیل

عنوان

طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی در حد تبدیلات برخوردی

استاد راهنما

دکتر سید رضا حجازی

پژوهشگر

مرضیه تقی‌زاده

۹۲/۰۶/۲۵

بسمه تعالی

شماره :
تاریخ :
ویرایش :

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **مرضیه تقی زاده** رشته ریاضی گرایش ....**هندسه دیفرانسیل**... تحت عنوان« ..... **طبقه بندی معادلات دیفرانسیل معمولی در حد تبدیلات برخوردی**....» که در تاریخ ...**۱۳۹۲/۶/۲۵**.... با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸/۵) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) **۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)**

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) **۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)**

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنما	دکتر سید رضا حجازی	استادیار	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر میرحیدر جعفری	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر الهام دسترنج	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر هادی پسندیده	استادیار	

دکتر احمد نیره- رئیس دانشکده ریاضی

نام خانوادگی دانشجو: تقی‌زاده نام: مرضیه

عنوان: طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی در حد تبدیلات برخوردی

استاد راهنما: دکتر سید رضا حجازی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه دیفرانسیل

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۹۲/۰۶/۲۵ تعداد صفحات: ۹۰

واژگان کلیدی: امتداد، فضای جت، معادلات دیفرانسیل معمولی خطی، تبدیل نقطه‌ای، تبدیل برخوردی،تبدیل تصویری، تبدیل لاگرفورسیت، ناوردای دیفرانسیل اسکالر، مساله هم‌ارزی، تقارن کلاسیک، تقارن نقطه‌ای

چکیده

این رساله به طبقه‌بندی معادله دیفرانسیل معمولی خطی $y^{(n)} = \sum_{i=۲}^{n} a_{n-i}(x)y^{(n-i)}$، و $n \geq ۳$ در یک همسایگی از نقطه منظم در حد یک تبدیل برخوردی اختصاص داده شده است.

هرمعادله دیفرانسیل معمولی خطی از مرتبه $n \geq ۳$، توسط یک تبدیل نقطه‌ای به فرم

$$y^{(n)} = a_{n-۳}(x)y^{(n-۳)} + a_{n-۴}(x)y^{(n-۴)} + \cdots + a_{۰}(x)y$$

تبدیل می‌شود. به کمک تبدیلات برخوردی فرم‌های این معادله را به فرم‌های ساده‌تری بیان می‌کنیم.

در فصل سوم از این پایان‌نامه ناورداهایی از تبدیلات معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت و جبرهای $(n+۲)$-بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای را پیدا می‌کنیم، این ناورداها مساله هم‌ارزی برای این معادلات را حل می‌کند. در نهایت به طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی با جبرهای $(n+۱)$-بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای در یک همسایگی از نقاط منظم در حد هم‌ارزی می‌پردازیم.

تقدیم به مادر مهربانم

و پدر عزیزم

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

تعهد نامه

اینجانب مرضیه تقی زاده دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی در حد تبدیلات برخوری** تحت راهنمائی **دکتر سید رضا حجازی** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر سید رضا حجازی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر هادی پسندیده و خانم دکتر الهام دسترنج که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

مرضیه تقی‌زاده

۹۲/۰۶/۲۵

فهرست مطالب

مقدمه

مطالعه‌ی گروه‌های تقارنی و مسائل هم‌ارزی مستلزم ابزار و تکنیک‌هایی است که در هندسه منشا دارند، این گروه‌ها که اغلب در هندسه و معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شوند، گروه‌های لی از عمل تبدیلات روی منیفلد متناهی بعد است.

گروه تقارن یک سیستم از معادلات دیفرانسیل یک گروه موضعی از عمل تبدیلات روی متغیرهای مستقل و وابسته است با این ویژگی که جواب‌هایی از یک سیستم از معادلات را به جواب‌های دیگر از این سیستم تبدیل می‌کند. برای بررسی تقارن‌های معادلات دیفرانسیل به بررسی گروه تبدیلات روی متغیرهای مستقل، وابسته و همچنین روی مشتقاتی از متغیرهای وابسته می‌پردازیم.

در سال ۱۸۹۶ [۱۲]، شرح کاملی از ناورداهای دیفرانسیل برای عمل شبه گروه از تبدیلات نقطه‌ای روی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه n داده شده است. هر معادله دیفرانسیل معمولی خطی توسط تبدیل نقطه‌ای به فرم $y^{(n)} = 0$ تبدیل می‌شود. این مساله ابتدا در قرن ۱۵ توسط لاگر[۲] [۱۶] مطرح شد.

در این رساله ابتدا مفاهیمی اساسی از هندسه را بیان می‌کنیم، در ادامه گروه‌های لی و نحوه‌ی عمل آنها را همراه با مثال توضیح می‌دهیم. در فصل دوم، فضای جت و امتداد را آورده و ناورداهای دیفرانسیلی را در ادامه تعریف می‌کنیم، چگونگی محاسبه‌ی ناورداها در موردی از گروه‌های ۱-پارامتری و بالاتر را در ادامه توضیح داده و مطالبی برای تشخیص تعداد ناورداها در حالت‌های مختلف را بیان کرده و در انتهای فصل معادلات دیفرانسیل را تعریف کرده و روش محاسبه‌ی گروه تقارن، فرم‌های برخوردی وتبدیلات برخوردی مطالبی را آورده‌ایم. در فصل سوم به طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی در حد تبدیل برخوردی می‌پردازیم.در این فصل ابتدا فرم عمومی از معادلات دیفرانسیل معمولی را به یک فرم لاگرفورسیت [۳] تبدیل می‌کنیم. آنگاه توسط تغییر مناسب از متغیرها در حد یک تبدیل برخوردی به طبقه‌بندی برش‌های

[۲] Laguerre
[۳] Laguerre-Forsyth

کلاف π می‌پردازیم، در نهایت به‌وسیله‌ی ریشه‌های منظم این طبقه‌بندی، به طبقه‌بندی ریشه‌های منظم توسط زیر مجموعه‌های ناوردا از کلاف π کاهش می‌یابد.

فصل ۱
مقدمات و پیشنیازها

۱.۱ مفاهیم بنیادی هندسه

در این فصل مفاهیم ابتدایی مورد نیاز در فصل‌های بعدی از جمله عمل‌گروه‌ها و نحوه‌ی عمل آنها توضیح داده شده است.

تعریف ۱.۱.۱. فرض می‌کنیم M یک فضای توپولوژیک باشد آنرا یک **منیفلد توپولوژیکی** n**-بعدی** گوئیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

- M هاسدورف باشد، یعنی به ازای هر دو نقطه‌ی $p, q \in M$ به‌ترتیب مشمول در زیرمجموعه‌های باز $U, V \subset M$ داشته باشیم $U \cap V = \emptyset$.
- M شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه‌ی شمارا داشته باشد.
- M موضعا اقلیدسی از بعد n باشد، یعنی هر نقطه آن مشمول در یک همسایگی هومیومورف با یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد.

تعریف ۲.۱.۱. نگاشت $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ هموار یا C^∞ است هرگاه مشتقات جزیی مقادیر F در هر مرتبه موجود و پیوسته باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض می‌کنیم $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ گردایه‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های منیفلد M و V_α زیرمجموعه‌های باز همبند از $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ و $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ هومیومورفیسم باشد آنگاه $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ را **چارت مختصاتی** روی منیفلد M می‌نامیم.

فرض می‌کنیم (U, φ) و (V, ψ) دو چارت روی منیفلد M باشند نگاشت

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V).$$

را **نگاشت گذر** از φ به ψ می‌نامیم. دو چارت فوق را به‌طور **هموار سازگار** می‌نامیم هرگاه $\psi \circ \varphi^{-1}$ دیفیومورفیسم باشد یعنی:

$$(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V).$$

مجموعه $A=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_\alpha$ را یک **اطلس** روی M می‌نامیم هرگاه اعضای A دو به دو به‌طور هموار سازگار باشند و مجموعه M را بپوشانند. اطلس A **ماکسیمال** است هرگاه مشمول در هیچ اطلس دیگری نباشد.

یک **ساختار هموار** روی منیفلد توپولوژیکی M، یک اطلس ماکسیمال هموار است. هر منیفلد توپولوژیکی مجهز به یک ساختار هموار A را یک **منیفلد هموار** نامیده و آنرا با (M,A) نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. اگر M و N منیفلدهایی هموار باشند، نگاشت $F:M\to N$ را **نگاشتی هموار** گوئیم هرگاه برای هر چارت مختصاتی $\varphi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha\subset\mathbb{R}^m$ روی M و هر چارت $\psi_\beta:\tilde U_\beta\to\tilde V_\beta\subset\mathbb{R}^n$ روی N، نگاشت مرکب $\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار باشد.

تعریف ۵.۱.۱. منیفلد هموار M را در نظر می‌گیریم عملگر خطی $X:C^\infty(M)\to\mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه $x\in M$ می‌نامیم اگر $X(fg)(x)=f(x)X(g)+g(x)X(f)$. قرار می‌دهیم:

$$T_xM=\{X : \text{است } x\in M \text{ یک عملگر مشتق در نقطه } X\},$$

و آن‌را **فضای مماسی** منیفلد M در نقطه $x\in M$ می‌نامیم. هم چنین $TM=\bigsqcup_{x\in M}T_xM$ را **کلاف مماسی** منیفلد M می‌گوئیم.

هر کلاف مماسی ساختار منیفلدی هموار می‌پذیرد و $2m$-بعدی است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض می‌کنیم M و N دو منیفلد هموار باشند، نگاشت هموار $F:M\to N$ مفروض است، به ازای هر $x\in M$ نگاشت $F_{*x}:T_xM\to T_{F(x)}N$ نگاشت **پیش‌برنده** که به ازای هر تابع $f\in C^\infty(N)$ با ضابطه‌ی $(F_{*x}X)f=X(f\circ F)$ تعریف می‌کنیم نگاشت مشتق F در نقطه‌ی x می‌نامیم.

می‌توان به راحتی نشان داد که نگاشت پیش‌برنده دارای سه خاصیت زیر است:

- خطی بودن

$$F_{*x}(\alpha X+\beta Y)f=\alpha(F_{*x}X)f+\beta(F_{*x}Y)f$$

- مشتق

$$(F_{*x}X)(fg) = (g \circ F)(x)(F_*X)f + (f \circ F)(x)(F_*X)g$$

- ترکیب

$$[(G \circ F)_{*x}X]\, f = (G_{*x} \circ F_{*x})Xf$$

تعریف ۷.۱.۱. **میدان برداری** $\mathbf{v}$ روی منیفلد M بردار مماس $\mathbf{v}|_x \in T_xM$ در هر نقطه‌ی $x \in M$ می‌باشد. مختصات موضعی $(x^1, \ldots, x^m)$، میدان برداری برای هر تابع هموار $\xi^i(x)$ از x دارای فرم

$$\mathbf{v}|_x = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

می‌باشد.

تعریف ۸.۱.۱. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دو میدان برداری روی M باشند، **کروشه‌ی لی** آنها، $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$، نیز یک میدان برداری است که برای همه توابع هموار $f : M \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f) = \mathbf{v}(\mathbf{w}(f)) - \mathbf{w}(\mathbf{v}(f)). \tag{۱.۱}$$

هم‌چنین در مختصات موضعی، اگر داشته باشیم:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

داریم:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{v}(\eta^i) - \mathbf{w}(\xi^i)) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۲.۱}$$

مثال ۹.۱.۱. فرض کنید $\mathbf{v} = y\partial/\partial x$ و $\mathbf{w} = x^2\partial/\partial x + xy\partial/\partial y$ آنگاه:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v}(x^2)\partial/\partial x + \mathbf{v}(xy)\partial/\partial y - \mathbf{w}(y)\partial/\partial x = xy\partial/\partial x + y^2\partial/\partial y.$$

گزاره ۱۰.۱.۱. *فرض کنید $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ و $\mathbf{u}$ میدان‌های برداری روی منیفلد M باشند، ثابت‌های c و c' را در نظر می‌گیریم، کروشه‌ی لی در خواص زیر صدق می‌کند:*

- دوخطی

$$[c\mathbf{v}+c'\mathbf{v}',\mathbf{w}]=c[\mathbf{v},\mathbf{w}]+c'[\mathbf{v}',\mathbf{w}],$$

$$[\mathbf{v},c\mathbf{w}+c'\mathbf{w}']=c[\mathbf{v},\mathbf{w}]+c'[\mathbf{v},\mathbf{w}'].$$

- پادمتقارن

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}]=-[\mathbf{w},\mathbf{v}].$$

- اتحاد ژاکوبی

$$[\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]]+[\mathbf{w},[\mathbf{u},\mathbf{v}]]+[\mathbf{v},[\mathbf{w},\mathbf{u}]]=\circ.$$

برهان. با استفاده از (۱.۱) و (۲.۱) به آسانی اثبات می‌شود. □

تعریف ۱.۱.۱۱. نقطه‌ی $x\in M$ را در نظر می‌گیریم، تابع خطی و حقیقی مقدار $\omega: T_xM\to\mathbb{R}$ روی فضای مماسی، **۱-فرمی دیفرانسیلی** در x تعریف می‌کند. فضای ۱-فرم‌ها دوگان فضای برداری مماسی T_xM می‌باشد و فضای هم‌مماسی نامیده شده و به صورت T_x^*M نوشته می‌شود. فضاهای هم‌مماسی با هم تشکیل کلاف هم‌مماسی $T^*M=\sqcup_{x\in M}T_x^*M$ را می‌دهند که مشابه کلاف مماسی، تشکیل کلاف برداری $۲m$-بعدی روی منیفلد m-بعدی M می‌دهد. تابع حقیقی مقدار و هموار $f: M\to\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم، دیفرانسیل آن، $df=\sum_{i=۱}^m\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$، ۱-فرم است. در مختصات موضعی $x=(x^۱,\ldots,x^m)$ دیفرانسیل‌های dx^i از توابع مختصاتی، که دوگان پایه‌های مختصاتی ∂_{x^i} از فضای مماسی‌اند، پایه‌ای برای فضاهای هم‌مماسی در هر نقطه از چارت مختصاتی فراهم می‌کنند. بر حسب این پایه هر ۱-فرم در حالت عمومی فرم مختصات موضعی زیر را دارد:

$$\omega=\sum_{i=۱}^m h_i(x)dx^i.$$

فرم‌های دیفرانسیلی از مراتب بالاتر به عنوان نگاشت چندخطی متناوب روی فضای مماسی تعریف

می‌شوند. بنابراین k-**فرم دیفرانسیلی** Ω در نقطه‌ی $x \in M$ نگاشت k-خطی زیر است:

$$\Omega : \underbrace{T_xM \times \cdots \times T_xM}_{k\text{بار}} \to \mathbb{R},$$

فضای همه‌ی k-فرم‌ها در x بوسیله‌ی $\Lambda^k T_x^* M$ نمایش داده می‌شود و فضایی برداری از بعد $\binom{m}{k}$ می‌باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید $F : M \to N$ یک نگاشت هموار باشد دوگان نگاشت خطی $F_{*x} : T_xM \to T_{F(x)}N$، یک نگاشت خطی به شکل $F^* = (F_*)^* : T^*_{F(x)}N \to T^*_xM$ است که **پس‌کشنده** نگاشت F گفته می‌شود.

$$F^*(\omega)X = \omega(F_*X) \qquad X \in T_xM,$$

که دارای دو ویژگی زیر است:

- $F^*(df) = d(foF)$
- $F^*(f\omega) = (f \circ F)F^*\omega$

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض می‌کنیم $\mathbf{v}$ میدان برداری روی M و σ میدان برداری یا فرم دیفرانسیلی تعریف شده روی M باشد. مشتق لی σ نسبت به $\mathbf{v}$ و مقدار آن در $x \in M$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{v}(\sigma)|_x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi^*_\varepsilon(\sigma|_{\exp(\varepsilon \mathbf{v})x}) - \sigma|_x}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \phi^*_\varepsilon(\sigma|_{\exp(\varepsilon \mathbf{v})x}). \tag{۳.۱}$$

توجه کنید که $\mathbf{v}(\sigma)$ شیئی از نوع یکسان با خود σ می‌باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید M یک زیرمنیفلد k-بعدی از $\mathbb{R}^n$ با دستگاه مختصات $x = (x^1, \cdots, x^n)$ باشد، در این‌صورت یک چارت برای M می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\left\{(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) : x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\right\},$$

اگر $U \subset \mathbb{R}^n$ باز باشد یک k-برش U در M زیرمموعه‌ای مانند S است به‌طوری‌که:

$$\left\{(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) : x^{k+1} = C^{k+1} \cdots = x^n = C^n\right\},$$

بنابراین S هومیومورف با یک زیرمموعه‌ی باز $\mathbb{R}^k$ است.

تعریف ۱.۱.۱۵. نقطه‌ی p را یک **نقطه‌ی منظم** برای تابع هموار $F : M \to N$ می‌نامیم هرگاه F_{*p} پوشا باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶. یک **گروه لی** r-پارامتری، یک گروه G با ساختار منیفلدی هموار r-بعدی است به‌طوری‌که

- عمل گروهی

$$m : G \times G \to G, \qquad m(g,h) = g \cdot h, \qquad g,h \in G,$$

- وارون

$$i : G \to G, \qquad i(g) = g^{-1}, \qquad g \in G,$$

نگاشت‌هایی هموار بین منیفلدها باشند.

مثال ۱.۱.۱۷. در زیر دو مثال از گروه‌های لی بیان می‌کنیم:

- یک مثال ساده از گروه لی $r-$ پارامتری، فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^r$ است. در اینجا عمل گروه را جمع برداری در نظر می‌گیریم.

- اگر G و H گروههای لی $r-$ و$s-$ پارامتری باشند، آنگاه حاصل‌ضرب دکارتی $G \times H$، گروه لی $r+s$ پارامتری با عمل گروه

$$(g,h).(\widetilde{g},\widetilde{h}) = (g.\widetilde{g}, h.\widetilde{h}), \quad g,\widetilde{g} \in G, \quad h,\widetilde{h} \in H,$$

است.

تعریف ۱.۱.۱۸. گوییم H یک **زیرگروه** لی از گروه لی G است هرگاه گروه لی $\widetilde{H}$ و هومیومورفیسم گروههای لی $\varphi : \widetilde{H} \to G$ موجود باشد به‌طوری‌که $H = \varphi(\widetilde{H})$.

تعریف ۱.۱.۱۹. یک **گروه لی موضعی** $r-$ پارامتری زیرمجموعه‌ی باز همبند $\mathbf{V}_\circ \subset \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^r$ شامل مبدا و نگاشت هموار $m : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}^r$ که عمل گروهی تعریف می‌شود و $i_\circ : \mathbf{V}_\circ \to \mathbf{V}$ که نگاشت وارون فرض می‌شود و دارای ویژگی‌های زیر است:

- شرکت پذیری

$$m(m(x,y),z) = m(x,m(y,z)) \quad \text{آنگاه} \quad m(x,y),m(y,z)\in \mathbf{V} \quad , \quad x,y,z\in\mathbf{V} \quad \text{اگر}$$

- عنصر همانی

$$\forall x\in\mathbf{V} \quad , \quad m(\circ,x)=x=m(x,\circ),$$

- عنصر وارون

$$\forall x\in\mathbf{V}_\circ \quad , \quad m(x,i(x))=\circ=m(i(x),x).$$

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه لی باشد. برای هر عنصر گروهی $g\in G$، ضرب از راست $R_g: G\to G$ که به‌وسیله‌ی $R_g(h)=h\cdot g$ با معکوس $R_{g^{-1}}=(R_g)^{-1}$ تعریف می‌شود، دیفیومورفیسم است. یک میدان برداری $\mathbf{v}$ روی G **ناوردای راست** نامیده می‌شود اگر برای هر g و h در G داشته باشیم:

$$dR_g(\mathbf{v}|_h)=\mathbf{v}|_{R_g(h)}=\mathbf{v}|_{hg},$$

این میدان برداری **ناوردای چپ** نامیده می‌شود هرگاه:

$$dL_g(\mathbf{v}|_h)=\mathbf{v}|_{L_g(h)}=\mathbf{v}|_{gh}.$$

تعریف ۲۱.۱.۱. **جبرلی راست** $\mathcal{G}$ از گروه لی G یک فضای برداری از همه‌ی میدان‌های برداری ناوردای راست روی G می‌باشد.

به طور عمومی‌تر، جبرلی، فضای برداری $\mathcal{G}$ با عملگر دوخطی

$$[\ ,\ ]:\mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathcal{G},$$

است که کروشه لی نامیده می‌شود و در خواص کروشه لی صدق می‌کند.

قضیه ۲۲.۱.۱. *اگر $\mathcal{G}$ جبر لی گروه و e عنصر همانی آن باشد آنگاه $\mathcal{G}\simeq T_eG$.*

برهان. [۵]. □

مثال ۲۳.۱.۱. یکی از مهمترین گروه‌های لی گروه خطی ویژه $\mathrm{SL(n)} = \{A \in \mathrm{GL(n)} | \det A = ۱\}$ است که شامل همه‌ی تبدیلات خطی حافظ حجم می‌باشد. به عبارت دیگر $\mathrm{SL(n)}$، گروهی از تقارن‌های خطی فرم حجم $dx = dx^1 \wedge \cdots \wedge x^n$ است و $(n^2 - ۱)$–بعدی است.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض می‌کنیم M یک منیفلد هموار باشد. به‌وسیله‌ی گروه لی G، یک **گروه موضعی از تبدیلات** که روی M عمل می‌کنند، زیرمجموعه باز $\mathcal{U}$ که حوزه تعریف عمل‌گروه است به‌طوری‌که $\{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M$، و نگاشت هموار $\Psi : \mathcal{U} \to M$ داده می‌شود و دارای خاصیت‌های زیر است:

- اگر $(h, x) \in \mathcal{U}$، $(g, \Psi(h, x)) \in \mathcal{U}$ و هم‌چنین $(g \cdot h, x) \in \mathcal{U}$ سپس $\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(g \cdot h, x)$.
- برای هر $x \in M$، $\Psi(e, x) = x$.
- اگر $(g, x) \in \mathcal{U}$ سپس $(g^{-1}, \Psi(g, x)) \in \mathcal{U}$ و $\Psi(g^{-1}, \Psi(g, x)) = x$.

توجه کنید برای $x \in M$، عناصر گروه g بطوریکه $g.x$ تعریف شده است یک گروه لی موضعی به شکل زیر است:

$$G_x \equiv \{g \in G : (g, x) \in \mathcal{U}\}$$

تعریف ۲۵.۱.۱. یک گروه از تبدیلات G که روی منیفلد M عمل می‌کند همبند نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشد:

- Gیک گروه لی همبند و M یک منیفلد همبند است.
- $\mathcal{U} \subset G \times M$ یک زیر مجموعه‌ی باز همبند است.
- برای هر $x \in M$، گروه موضعی G_x همبند است.

مثال ۲۶.۱.۱. کلیه تبدیلات به شکل $(Ax + b)$، گروه تبدیلات آفین نام دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G = \{x \to Ax + b : A \in \mathrm{GL}(n) \quad , \quad b \in \mathbb{R}^n\}$$

و نمایش ماتریس آن بصورت $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ است. گروه تبدیلات آفین از مرتبه n یک گروه لی از بعد (n^2+n)-است.

تعریف ۱.۱.۲۷. یک **مدار** از گروه تبدیلات موضعی، زیرمجموعه ناوردای ناتهی از منیفلد M است، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

- اگر $x \in \mathcal{O}$، و $g \in G$ تعریف شده باشد آنگاه $g.x \in G$،
- اگر $\widetilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ و در شرایط بالا صدق کند آنگاه $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ یا $\widetilde{\mathcal{O}}$ تهی است.

تعریف ۱.۱.۲۸. فرض می‌کنیم G یک گروه موضعی از عمل تبدیلات روی M باشد:

- گروه G به‌طور **نیم-منظم** عمل می‌کند هرگاه همه‌ی مدارهای G به عنوان زیر منیفلدهایی از M دارای بعد یکسانی باشند،
- گوییم G به‌طور **منظم** عمل می‌کند هرگاه این عمل نیم‌منظم باشد و برای هر نقطه $x \in M$ همسایگی کوچک و دلخواهی مانند U از x با این ویژگی که هر مدار G، U را به دو زیرمجموعه‌ی همبند تقسیم کند وجود داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۲۹. عمل گروه G روی منیفلد M را **متعدی** گوییم هرگاه این عمل تنها یک مدار داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۳۰. گروه تبدیلات G به‌طور **موثر** عمل می‌کند اگر عناصر گروهی متفاوت عمل‌های متفاوت داشته باشند، به‌طوری‌که برای هر $x \in M$ داشته باشیم $g \cdot x = h \cdot x$ اگر و تنها اگر $g = h$.

زیرگروه ایزوتروپی سراسری $G_M = \{g \mid g.x = x, \ \ \forall x \in M\}$، موثر بودن عمل G را اندازه می‌گیرد به این معنی که G به‌طور موثر عمل می‌کند اگر وتنها اگر $G_M = \{e\}$. اگر G به‌طور موثر عمل نکند آن‌را با گروه خارج‌قسمتی $\dfrac{G}{G_M}$ که به‌طور موثر روی M همانند خود G عمل می‌کند جایگزین می‌کنیم. بنابراین در حالت کلی می‌توانیم تصور کنیم که همه‌ی عمل گروهها به‌طور (موضعا) موثر عمل می‌کنند. می‌گوییم گروه لی G به‌طور موضعا موثر عمل می‌کند اگر زیرگروه ایزوتروپی سراسری G_M زیرگروهی گسسته از G باشد.

تعریف ۳۱.۱.۱. منحنی انتگرال از یک میدان برداری $\mathbf{v}$ منحنی پارامتری هموار $x = \phi(\varepsilon)$ می‌باشد به‌طوری‌که بردار مماس بر هر نقطه منحنی با مقدار $\mathbf{v}$ در آن نقطه برابر باشد، یعنی: V

$$\dot{\phi}(\varepsilon) = \mathbf{v}|_{\phi(\varepsilon)}, \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

در مختصات موضعی، بایستی $x = \phi(\varepsilon) = (\phi^{1}(\varepsilon), \ldots, \phi^{m}(\varepsilon))$ جوابی از سیستم معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{۴.۱}$$

باشد که $\xi^i(x)$ ها ضرایب $\mathbf{v}$ در x می‌باشند.

تعریف ۳۲.۱.۱. اگر $\mathbf{v}$ میدانی برداری باشد، منحنی انتگرال ماکسیمال پارامتری که از نقطه x در M می‌گذرد را با $\Psi(\varepsilon, x)$ نشان می‌دهیم و Ψ را **شار** تولید شده به‌وسیله‌ی $\mathbf{v}$ می‌نامیم.

بنابراین برای هر $x \in M$ و هر ε در بازه‌ی I_x شامل 0، $\Psi(\varepsilon, x)$ نقطه‌ای روی منحنی انتگرال گذرنده از x در M خواهد بود. شار میدان برداری برای هر $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ دارای خاصیت‌های زیر است:

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), \qquad x \in M, \tag{۵.۱}$$

،

$$\Psi(0, x) = x, \tag{۶.۱}$$

و

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Psi(\varepsilon, x) = \mathbf{v}|_{\Psi(\varepsilon, x)}. \tag{۷.۱}$$

گروه ۱-پارامتری از تبدیلات و میدان برداری $\mathbf{v}$، **مولد بینهایت کوچک** عمل نامیده می‌شود از این‌رو به‌وسیله‌ی قضیه‌ی تیلور در مختصات موضعی داریم:

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon\xi(x) + O(\varepsilon^{2}),$$

که $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$ ضرایب $\mathbf{v}$ هستند. اگر $\Psi(\varepsilon, x)$ گروه ۱-پارامتری از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کنند سپس مولد بینهایت کوچک آن به‌وسیله‌ی (۷.۱) با قرار دادن $\varepsilon = 0$ بدست می‌آید.

$$\mathbf{v}|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \Psi(\varepsilon, x). \tag{۸.۱}$$

اغلب محاسبه‌ی شار یا گروه ۱-پارامتری تولید شده به‌وسیله‌ی میدان برداری $\mathbf{v}$ به‌عنوان نگاشت نمایی آنها در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نمادگذاری

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x \equiv \Psi(\varepsilon, x),$$

را برای زیرگروه ۱-پارامتری یا شار تولید شده به‌وسیله میدان برداری $\mathbf{v}$ در نظر می‌گیریم.

مثال ۳۳.۱.۱. مثال‌هایی از میدان‌های برداری و شارها.

- $M = \mathbb{R}$ را با مختصات x و میدان برداری $\mathbf{v} = \partial/\partial x \equiv \partial_x$ در نظر می‌گیریم. چون بایستی شار (عمل گروه ۱-پارامتری) تولید شده به‌وسیله‌ی $\mathbf{v}$ جوابی از $\dot{x} = 1$ با مقدار اولیه x در $\varepsilon = 0$ باشد، لذا :

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x = \exp(\varepsilon\partial_x)x = x + \varepsilon.$$

که عمل گروه انتقالات نامیده می‌شود.

همچنین شار تولید شده به‌وسیله‌ی میدان برداری $\mathbf{v} = x\partial_x$ بایستی جوابی از معادله دیفرانسیل معمولی $\dot{x} = x$ با مقدار اولیه x در $\varepsilon = 0$ باشد، بنابراین:

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x = \exp(\varepsilon x\partial_x)x = e^{\varepsilon}x.$$

که گروه تبدیلات مقیاسی نام دارد.

- گروه دوران‌ها را در صفحه در نظر می‌گیریم،

$$\Psi(\varepsilon, (x, y)) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon).$$

مولد بینهایت کوچک آن میدان برداری $\mathbf{v}=\xi(x,y)\partial_x+\eta(x,y)\partial_y$ می‌باشد که طبق (۸.۱) داریم:

$$\begin{aligned}\xi(x,y) &= \left.\frac{dx}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}(x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon)=-y,\\ \eta(x,y) &= \left.\frac{dx}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}(x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon)=x.\end{aligned}$$

بنابراین مولد بینهایت کوچک آن، $\mathbf{v}=-y\partial_x+x\partial_y$ است. گروه تبدیلات بالا با جواب‌های سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی

$$dx/d\varepsilon=-y,\qquad dy/d\varepsilon=x,$$

مطابقت دارد.

تعریف ۳۴.۱.۱. نگاشت نمایی $\exp:\mathcal{G}\to G$ با قرار دادن $\varepsilon=1$ در زیرگروه ۱-پارامتری تولید شده به‌وسیله $\mathbf{v}$ بدست می‌آید:

$$\exp(\mathbf{v})\equiv\exp(\mathbf{v})e.$$

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض می‌کنیم G گروهی موضعی از تبدیلات باشد که با $g\cdot x=\Psi(g,x)$ برای هر $(g,x)\in\mathcal{U}\subset G\times M$ روی منیفلد M عمل می‌کند. عملی بینهایت کوچک متناظر با جبرلی $\mathcal{G}$ از G روی M وجود دارد. به این معنی که اگر $\mathbf{v}\in\mathcal{G}$ باشد $\psi(\mathbf{v})$ یک میدان برداری روی M است و شار آن با عمل زیرگروه ۱-پارامتری $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ از G روی M منطبق است. برای هر $x\in M$ و با فرض $\Psi_x(g)=\Psi(g,x)$ داریم:

$$\psi(\mathbf{v})|_x=\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\Psi(\exp(\varepsilon\mathbf{v}),x)=d\Psi_x(\mathbf{v}|_e).$$

به‌علاوه برای $g\in G_x$ که $G_x=\{g\in G\,|(g,x)\in\mathcal{U}\}$ چون $\Psi_x\circ R_g(h)=\Psi_{g\cdot x}(h)$ داریم:

$$d\Psi_x(\mathbf{v}|_g)=d\Psi_{g\cdot x}(\mathbf{v}|_e)=\psi(\mathbf{v})|_{g\cdot x}.$$

میدان برداری $\mathbf{v}\in\mathcal{G}$ مولد بینهایت کوچک از عمل گروه G نامیده می‌شود و داریم:

$$\mathbf{v}|_x=\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\exp(\varepsilon\mathbf{v})x,\qquad \mathbf{v}\in g.$$

مثال ۳۶.۱.۱. فرض کنیم $M = \mathbb{R}$ در این‌صورت داریم:

- جبر تولید شده به‌وسیله ∂_x، عملی از $\mathbb{R}$ روی M به‌عنوان گروه ۱-پارامتری از انتقالات $x \mapsto x + \varepsilon$ را تولید می‌کند.

- جبر لی ۲-بعدی تولید شده به‌وسیله‌ی ∂_x و $x\partial_x$، میدان برداری دوم گروه تجانس $x \mapsto \lambda x$ را تولید می‌کند. توجه کنید که

$$[\partial_x, x\partial_x] = \partial_x.$$

این جبر لی با جبر لی ماتریسی ۲ × ۲ تولید شده به‌وسیله‌ی

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{۹.۱}$$

یکریخت است. این میدان‌های برداری، یک گروه لی از تمام ماتریس‌های بالامثلثی از فرم

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha > 0,$$

تولید می‌کنند. عمل متناظر روی $\mathbb{R}$، $x \mapsto \alpha x + \beta$ می‌باشد.

- جبر ۳-بعدی تولیدشده به‌وسیله‌ی

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = x\partial_x, \quad \mathbf{v}_3 = x^2\partial_x,$$

که میدان برداری سوم گروه موضعی وارونه‌سازی

$$x \mapsto \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \qquad |\varepsilon| < \frac{1}{x}.$$

را تولید می‌کند. که کروشه‌ی لی هر دو میدان برداری دوباره مضربی از همین میدان‌های برداری است. اگر $\mathbf{v}_3$ را با $-\mathbf{v}_3 = -x^2\partial_x$ جایگزین کنیم، سپس جبرلی $SL(2)$ را با پایه‌های

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

می‌یابیم. بنابراین عملی موضعی از گروه خطی ویژه‌ی $\mathrm{SL}(۲)$ روی خط حقیقی با مولدهای بینهایت کوچک ∂_x، $x\partial_x$ و $-x^۲\partial_x$ وجود دارد. این عمل گروه، گروه تصویری

$$x \mapsto \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(۲),$$

می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۳۷. فرض می‌کنیم $\zeta^۱(x),\ldots,\zeta^k(x)$ توابع حقیقی مقدار و هموار روی منیفلد M باشند:

- $\zeta^۱,\ldots,\zeta^K$ **وابسته‌ی تابعی** نامیده می‌شوند اگر برای هر $x\in M$ همسایگی U از x و یک تابع حقیقی مقدار و هموار $F(z^۱,\ldots,z^k)$ که روی هر زیر مجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^k$ مخالف صفر است وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\forall x\in U \qquad F(\zeta^۱(x),\ldots,\zeta^k(x))=\circ.$$

- $\zeta^۱,\ldots,\zeta^K$ **مستقل تابعی** نامیده می‌شوند اگر به هر زیرمجموعه‌ی باز $U\subset M$ تحدید شوند وابسته تابعی نباشند. به عبارت دیگر اگر برای هر $x\in U\subset M$ داشته باشیم:

$$F(\zeta^۱(x),\ldots,\zeta^k(x))=\circ,$$

سپس برای هر z در زیرمجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^k$ (که حاوی تصویر U است) $F(z^۱,\ldots,z^k)\equiv\circ$ باشد.

فصل ۲

تبدیلات برخوردی

۱.۲ کلاف برداری

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم M یک فضای توپولوژیکی باشد، یک **کلاف برداری** از رتبه k روی M، یک فضای توپولوژیکی مانند E، همراه با نگاشت پیوسته و پوشای $\pi : E \to M$ است به‌طوری‌که:

- به ازای هر $p \in M$، $E_p = \pi^{-1}(p)$ یک زیرفضای برداری k-بعدی باشد.
- برای هر $q \in M$، یک همسایگی مانند U موجود باشد به‌طوری‌که $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ هومیورفیسم است.
- برای هر $q \in U$، $E_q \simeq \{q\} \times \mathbb{R}^k$.

اگر M و E دو منیفلد هموار و Φ دیفیومورفیسم باشد، آنگاه E یک کلاف برداری روی منیفلد M است. کلاف برداری را معمولا با (E, M, π) نشان می‌دهند.

۲.۲ امتداد

فرض کنید $f(x) = f(x^1, \cdots, x^p)$ یک تابع هموار حقیقی مقدار با p متغیر مستقل است. و
$$p_k = \binom{p+k-1}{k}$$
تعداد، مشتقات جزئی مرتبه k-ام از f است. برای این مشتق‌ها نمادگذاری
$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \cdots \partial x^{j_k}}$$
را داریم که یک k-تایی از اعداد صحیح است و $1 \leq j_k \leq p$. مرتبه هر اندیس را که با $K \equiv J$ = مشخص می‌کنیم نشان می‌دهد که چندین بار مشتق گرفته شده است. در حالت کلی‌تر اگر $f : X \to U$ یک تابع هموار از $X \simeq \mathbb{R}^p$ به $U \simeq \mathbb{R}^q$ باشد لذا $u = f(x) = (f^1(x), \cdots, f^q(x))$، تعداد $q.p_k$، $u^\alpha_J \partial_J f^\alpha(x)$ مورد نیاز است. فرض می‌کنیم $U_k \equiv \mathbb{R}^{q.p_k}$ فضای اقلیدسی باشد، مختصات متناظر با u^α_J، $\alpha = 1, \cdots, q$ و همه اندیس‌های $J = (j_1, \cdots, j_k)$ از مرتبه k، است. بنابراین $U^n = U \times U_1 \times \cdots \times U_n$ یک فضای

حاصل‌ضرب دکارتی است. که مختصاتش مشتقات توابع $u = f(x)$ از همه مراتب۰ تا n را نمایش می‌دهد. توجه کنید که U^n یک فضای اقلیدسی از بعد

$$q + qp_1 + \cdots + qp_n = q\binom{p+n}{n} \equiv qp^n$$

است.

تعریف ۱.۲.۲. تابع $f : X \to U$ مفروض است. یک تابع القایی $u^n = pr^{(n)}f(x)$ وجود دارد، که **امتداد** n-ام f نامیده می‌شود. و با معادلات

$$u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$$

تعیین می‌شود. لذا $pr^{(n)}$ یک تابع از X به فضای U^n است. و برای $\forall x \in X$، $pr^{(n)}f(x)$ یک بردار است که $q.p^n$ مقادیر و همه مشتقات آن از مرتبه n در x را بیان می‌کند.

مثال ۲.۲.۲. فرض کنید $p = 2$ و $q = 1$، در این‌صورت امتداد دوم $u^2 = pr^2 f(x,y)$ به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$(u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = \left(f; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

تعریف ۳.۲.۲. فضای $X \times U^{(n)}$ که شامل همه‌ی متغیرهای مستقل ، متغیرهای وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته تا مرتبه n-ام می‌باشد را **فضای جت مرتبه n-ام** فضای کامل $X \times U$ می‌گوییم.

اگر $u = f(x)$ یک تابع باشد که گراف آن در $M \subset X \times U$ قرار می‌گیرد آنگاه امتداد مرتبه‌ی n-ام آن، $pr^{(n)}f(x)$، یک تابع است که گراف آن در فضای جت مرتبه n-ام $M^{(n)} \equiv M \times U_1 \times \cdots \times U_n$ قرار می‌گیرد.

۱.۲.۲ مشتقات کامل

تعریف ۴.۲.۲. تابع هموار حقیقی مقدار $F : J^n \to R$ روی زیرمجموعه باز از فضای جت مرتبه n-ام یک **تابع دیفرانسیل‌پذیر** نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۲. فرض کنید $F(x,u^{(n)})$ یک تابع دیفرانسیل‌پذیر از n است. مشتق کامل F، تابع دیفرانسیل‌پذیر D_iF از مرتبه $n+۱$ است، به‌طوری‌که:

$$D_iF(x,f^{(n+1)}(x))=\frac{\partial}{\partial x^i}F(x,f^{(n)}(x)),$$

برای هر تابع هموار $u=f(x)$.

به‌طور مثال فرض کنید x یک متغیر مستقل، و u یک متغیر وابسته باشد، مشتق کامل از تابع دیفرانسیل‌پذیر $F(x,u^{(n)})$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D_xF=\frac{\partial F}{\partial x}+u_x\frac{\partial F}{\partial u}+u_{xx}\frac{\partial F}{\partial u_x}+u_{xxx}\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}+\cdots.$$

۲.۲.۲ امتداد میدان‌های برداری

در اینجا فرمول صریحی برای محاسبه‌ی امتداد میدان‌های برداری ارایه می‌شود، که به راحتی قابل استفاده است.

قضیه ۶.۲.۲. *فرض می‌کنیم*

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\phi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{۱.۲}$$

میدانی برداری روی زیر مجموعه باز $M\subset X\times U$ باشد. امتداد مرتبه n-ام $\mathbf{v}$ میدان برداری

$$pr^{(n)}\mathbf{v}=\mathbf{v}+\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J}\phi_\alpha^J(x,u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{۲.۲}$$

روی فضای جت متناظر $M^{(n)}\subset X\times U^{(n)}$ می‌باشد. که در آن $J=(j_1,\ldots,j_k)$، $1\le j_k\le p$ و $0\le k\le n$ می‌باشد. هم‌چنین داریم:

$$\phi_\alpha^J(x,u^{(n)})=D_J\Big(\phi_\alpha-\sum_{i=1}^{p}\xi^iu_i^\alpha\Big)+\sum_{i=1}^{p}\xi^iu_{J,i}^\alpha, \tag{۳.۲}$$

که در آن

$$u_i^\alpha=\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i},\qquad u_{J,i}^\alpha=\frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i},$$

$$D_J = D_{j_1} D_{j_2} \cdots D_{j_k},$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} u^{\alpha}_{J,i} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_J}.$$

به‌علاوه D_i مشتق کامل نسبت به مولفه‌ی i-ام می‌باشد.

برهان. ابتدا فرمول را برای مشتقات مرتبه‌ی اول محاسبه می‌کنیم از این‌رو قرار می‌دهیم $n = 1$. فرض می‌کنیم $g_\varepsilon = \exp(\varepsilon \mathrm{v})$ گروه ۱-پارامتری متناظر و فرمول تبدیلات آن به صورت زیر باشد:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g_\varepsilon \cdot (x, u) = (\Xi_\varepsilon(x, u), \Phi_\varepsilon(x, u)).$$

توجه کنید

$$\xi^i(x, u) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \Xi^i_\varepsilon(x, u), \qquad i = 1, \cdots, p, \tag{۴.۲}$$

$$\phi_\alpha(x, u) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \Phi^\alpha_\varepsilon(x, u), \qquad \alpha = 1, \cdots, q, \tag{۵.۲}$$

که Ξ^i_ε و Φ^α_ε مولفه‌های Ξ_ε و Φ_ε می‌باشند. فرض می‌کنیم $(x, u^{(1)}) \in \mathrm{M}^{(1)}$ و $u = f(x)$ یک تابع باشد به‌طوری‌که $u^{(1)} = pr^{(1)} f(x)$ یا به‌طور صریح داشته باشیم:

$$u^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(x), \qquad u^{(\alpha)}_i = \partial f^{(\alpha)}(x)/\partial x^i.$$

برای ε های به اندازه‌ی کافی کوچک، تبدیل f بوسیله‌ی عنصر گروهی g_ε خوش‌تعریف است (حداقل اگر حوزه‌ی تعریف f همسایگی مناسب کوچکی از x باشد) و به‌وسیله‌ی

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = (g_\varepsilon \cdot f)(\tilde{x}) = [\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)] \circ [\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-1}(\tilde{x}),$$

داده می‌شود. با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای، ماتریس ژاکوبین، $\mathcal{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = (\partial \tilde{f}^\alpha_\varepsilon / \partial \tilde{x}^i)$ می‌باشد سپس

$$\mathcal{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = \mathcal{J}[\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)](x) \cdot \{\mathcal{J}[\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)](x)\}^{-1}, \tag{۶.۲}$$

(درصورتیکه معکوس آن تعریف شده باشد) چون

$$x = [\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-1}(\tilde{x}),$$

ورودی‌های ماتریس $\mathcal{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x})$ می‌باشد، بنابراین فرمول واضحی برای امتداد اول $pr^{(1)}g_\varepsilon$ فراهم می‌شود.

برای پیدا کردن مولد بینهایت کوچک $pr^{(1)}\mathbf{v}$ بایستی از (۶.۲) نسبت به ε با در نظر گرفتن $\varepsilon = 0$ مشتق بگیریم. ابتدا به یاد بیاورید که اگر $\mathbf{M}(\varepsilon)$ ماتریس مربعی وارون‌پذیر از توابع ε باشد سپس

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\mathbf{M}(\varepsilon)^{-1}] = -\mathbf{M}(\varepsilon)^{-1}\frac{d\mathbf{M}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\mathbf{M}(\varepsilon)^{-1}.$$

هم‌چنین توجه کنید که چون $\varepsilon = 0$ متناظر با تبدیلات همانی است،

$$\Xi_0(x, f(x)) = x, \qquad \Phi_0(x, f(x)) = f(x), \tag{۷.۲}$$

به‌طوری‌که اگر I ماتریس همانی $p \times p$ باشد

$$\mathcal{J}[\Xi_0 \circ (\mathbb{I} \times f)](x) = I, \qquad \mathcal{J}(\Phi_0 \circ (\mathbb{I} \times f)](x) = \mathcal{J}f(x).$$

حال، از (۶.۲) مشتق می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\varepsilon = 0$، با استفاده از قاعده‌ی لیب‌نیز[1] داریم

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\mathcal{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\mathcal{J}[\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)](x) - \mathcal{J}f(x) \cdot \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\mathcal{J}[\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{I} \times f)](x)\\ &= \mathcal{J}[\phi \circ (\mathbb{I} \times f)](x) - \mathcal{J}f(x) \cdot [\xi \circ (\mathbb{I} \times f)](x).\end{aligned}$$

در تساوی دوم $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^p)^T$ و $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_q)^T$ بردارهای ستونی‌اند و از (۴.۲) استفاده کرده‌ایم. ورودیهای ماتریس فرمول آخر مضرب‌های تابعی ϕ_α^k از $\partial/\partial u_k^\alpha$ در $pr^{(1)}\mathbf{v}$ را می‌دهد. یعنی ورودی (α, k)-ام،

$$\phi_\alpha^k(x, pr^{(1)}f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^k}[\phi_\alpha(x, f(x))] - \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}[\xi^i(x, f(x))],$$

می‌باشد. بنابراین به‌وسیله‌ی تعریف مشتق کامل

$$\begin{aligned}\phi_\alpha^k(x, u^{(1)}) &= D_k[\phi_\alpha(x, u)] - \sum_{i=1}^{p} D_k[\xi^i(x, u)]u_i^\alpha\\ &= D_k\left[\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha\right] + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{ki}^\alpha,\end{aligned} \tag{۸.۲}$$

---
[1] Leibnize

می‌باشد که $u^\alpha_{ki} = \partial^2 u^\alpha / \partial x^k \partial x^i$. این حالت (۳.۲) را در $n = 1$ اثبات می‌کند.

برای این‌که قضیه را در حالت کلی اثبات کنیم از استقرا استفاده می‌کنیم. موضوع مورد توجه این است که فضای جت $(n+1)$-ام $\mathrm{M}^{(n+1)}$ می‌تواند به‌عنوان زیرفضای فضای جت اول $(\mathrm{M}^{(n)})^{(1)}$ از فضای جت (n)-ام مشاهده شود. به این دلیل که مشتقات مرتبه‌ی $(n+1)$-ام u^α_J می‌تواند به‌عنوان مشتقات مرتبه‌ی اول از مشتقات مرتبه‌ی n-ام در نظر گرفته شود.(به چندین روش می‌تواند اثبات شود) مثالی را در این مورد بررسی می‌کنیم. برای $p = 2$ و $q = 1$ فضای جت اول $\mathrm{M}^{(1)}$ مختصات $(x, y; u; u_x, u_y)$ را دارد. (u_x, u_y) را به‌عنوان متغیرهای وابسته‌ی جدید در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $v = u_x$ و $w = u_y$، سپس $\mathrm{M}^{(1)}$ تنها زیرمجموعه‌ی بازی از $X \times \tilde{U}$ می‌باشد، هنوز ۲ X-بعدی است اما $\tilde{U}$ سه متغیر وابسته‌ی u، v و w را دارد. بنابراین فضای جت اول $\mathrm{M}^{(1)}$، یعنی $(\mathrm{M}^{(1)})^{(1)}$، زیرمجموعه‌ی بازی از $X \times \tilde{U}^{(1)}$ با مختصات $(x, y; u; v, w; u_x, u_y, v_x, v_y, w_x, w_y)$ می‌باشد. حال چون قرار دادیم $v = u_x$ و $w = u_y$، بنابراین $(\mathrm{M}^{(1)})^{(1)} \supset \mathrm{M}^{(2)}$ زیرفضایی است که به‌وسیله‌ی روابط

$$v = u_x, \qquad w = u_y, \qquad v_y = w_x,$$

در $X \times \tilde{U}^{(1)}$ تعریف می‌شود و به‌وسیله‌ی متغیرهای غیرضروری u_x و u_y در $(\mathrm{M}^{(1)})^{(1)}$ و برابری مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم مختلط از u مشخص می‌شود.

مراحل استقرا برای تعیین $pr^{(n)}\mathbf{v}$ از $pr^{(n-1)}\mathbf{v}$ در ادامه می‌آید؛ ما $pr^{(n-1)}\mathbf{v}$ را به‌عنوان میدان برداری روی $\mathrm{M}^{(n-1)}$ در نظر می‌گیریم و بنابراین به‌وسیله‌ی فرمول امتداد مرتبه‌ی اول می‌توانیم آن‌را به $(\mathrm{M}^{(n-1)})^{(1)}$ امتداد دهیم، سپس میدان‌های برداری نتیجه را به زیرفضای $\mathrm{M}^{(n)}$ محدود می‌کنیم در نتیجه امتداد n-ام $pr^{(n)}\mathbf{v}$ مشخص خواهد شد. (بایستی بررسی کنیم که امکان این محدود کردن وجود داشته باشد، البته، با توجه به فرمول مشخص است.) حال مختصات مرتبه‌ی n-ام جدید در $(\mathrm{M}^{(n-1)})^{(1)}$ بوسیله‌ی $u^\alpha_{J,k} = \partial u^\alpha_J / \partial x^k$ که $J = (j_1, \ldots, j_{n-1})$، $1 \le k \le p$ و $1 \le \alpha \le q$ است، داده می‌شود. مطابق

(۸.۲)، ضرایب $\partial/\partial u^\alpha_{J,k}$ در امتداد اول $pr^{(n-1)}\mathbf{v}$، بصورت

$$\phi^{J,k}_\alpha = D_k\phi^J_\alpha - \sum_{i=1}^{p} D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i}, \tag{۹.۲}$$

می‌باشد. (همان طور که خواهیم دید، (۹.۲) رابطه‌ی بازگشتی مفیدی برای ضرایب تابعی $pr^{(n)}\mathbf{v}$ فراهم می‌کند.) حال کافی است بررسی کنیم که فرمول (۳.۲) رابطه‌ی بازگشتی (۹.۲) را حل می‌کند. به‌وسیله‌ی استقرا داریم،

$$\begin{aligned}
\phi^{J,k}_\alpha &= D_k\left\{D_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u^\alpha_i\right) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u^\alpha_{J,i}\right\} - \sum_{i=1}^{p} D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i} \\
&= D_kD_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u^\alpha_i\right) + \sum_{i=1}^{p}(D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i} + \xi^i u^\alpha_{J,ik}) - \sum_{i=1}^{p} D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i} \\
&= D_kD_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u^\alpha_i\right) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u^\alpha_{J,ik},
\end{aligned}$$

که $u^\alpha_{J,ik} = \partial^2 u^\alpha_J/\partial x^i\partial x^k$. بنابراین $\phi^{J,k}_\alpha$ دارای شکل (۳.۲) می‌باشد و مراحل استقرا تکمیل می‌شود. □

مثال ۷.۲.۲. فرض کنید $p=2$ و $q=1$. تابع $u=f(x,t)$ را در نظر بگیرید. میدان برداری روی $X\times U = \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ بصورت

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

است. امتداد مرتبه اول

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t}.$$

به‌وسیله‌ی

$$\begin{aligned}
\phi^x &= D_x(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} \\
&= D_x\phi - u_x D_x\xi - u_t D_x\tau \\
&= \phi_x + (\phi_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t, \\
\phi^t &= D_t(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_x + \tau u_{tt} \\
&= D_t\phi - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau \\
&= \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2,
\end{aligned}$$

داده می‌شود. به‌طور مشابه امتداد مرتبه دوم بصورت زیر است:

$$pr^{(2)}\mathbf{v} = pr^{(1)}\mathbf{v} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}.$$

که به‌طور مثال

$$\begin{aligned}
\phi^{xx} &= D_x^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} \\
&= D_x^2\phi - u_x D_x^2\xi - u_t D_x^2\tau - 2u_{xx}D_x\xi - 2u_{xt}D_x\tau \\
&= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 \\
&- 2\tau_{xu}u_x u_t - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t \\
&+ (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}.
\end{aligned}$$

۳.۲ ناوردا

تعریف ۱.۳.۲. یک سیستم از **معادلات جبری** سیستمی از معادلات

$$F_\nu(x) = 0, \qquad \nu = 1, \cdots, l$$

به‌طوری‌که $F_1(x), \cdots, F_l(x)$ توابع هموار حقیقی مقدار تعریف شده برای x در منیفلد M است. یک **جواب** نقطه‌ی $x \in M$ است به‌طوری‌که برای $\nu = 1, \cdots, l$ داریم $F_\nu(x) = 0$.

تعریف ۲.۳.۲. فرض کنید G یک گروه موضعی از عمل تبدیلات روی منیفلد M باشد، زیرمجموعه $S \subset M$ یک $G-$ ناوردا نامیده می‌شود هرگاه $g.x \in S$ که $g \in G$ و $x \in S$.

مثال ۳.۳.۲. فرض کنید $M = \mathbb{R}^2$.

- اگر G_c یک گروه یک پارامتری از تبدیلات

$$(x, y) \to (x + c\varepsilon, y + \varepsilon), \qquad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

باشد که c یک ثابت فرض شده است، آنگاه خطوط $x = cy + d$ یک G_c- ناوردا است. همچنین هر زیرمجموعه ناوردا از $\mathbb{R}^2$ به‌صورت اجتماعی از خطوط است، برای مثال نوار $\{(x, y) : k_1 < x - cy < k_2\}$ یک G_c-ناوردا است.

- فرض کنیم G^α یک گروه یک پارامتری از تبدیلات

$$(x. y) \to (\lambda x, \lambda^\alpha y), \qquad \lambda > 0,$$

که α یک ثابت است، مبدا$(0, 0)$ یک زیرمجموعه G^α ناوردا است.

تعریف ۴.۳.۲. فرض کنید G یک گروه موضعی از عمل تبدیلات روی منیفلد M باشد. تابع $I : M \to N$، **تابع $G-$ناوردا** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in M$ و هر $g \in G$ به‌طوری‌که $g.x$ تعریف شده است:

$$I(g.x) = I(x).$$

گزاره ۵.۳.۲. *فرض کنید $I : M \to \mathbb{R}$. شرایط زیر هم‌ارزند:*

(i) I یک تابع ناوردا است.

(ii) I روی مدارهای G ثابت است.

(iii) مجموعه ترازهای $\{I(x)=c\}$ از I زیرمجموعه‌های G–ناوردا از M هستند.

برهان. $(i)\to(ii)$: اگر $g_1, g_2 \in \mathcal{O}_x$ آنگاه $I(g_1.x)=I(g_2.x)$

$$g_1x, g_2x \in \mathcal{O}_x \to I(g_1x) = I((g_2g_1^{-1})g_1x)$$
$$= I(g_2(g_1^{-1}g_1)x) = I(g_2x).$$

$(ii)\to(iii)$:

$$x \in I^{-1}(c), g \in G \to I(g.x) = c$$
$$\to gx \in I^{-1}(c) \to \mathcal{O}_x \in I^{-1}(c)$$

چون از ابتدا x را از $I^{-1}(c)$ انتخاب کردیم مدارات مجددا در $I^{-1}(c)$ قرار می‌گیرند.

بنابراین $I^{-1}(c) = \cup \mathcal{O}_x$.

$(iii)\to(i)$:

$$\forall x \in I^{-1}(c) \to gx \in I^{-1}(c)$$
$$\to I(gx) = c = I(x).$$

□

قضیه ۶.۳.۲. *فرض کنید G یک گروه همبند از عمل تبدیلات روی منیفلد M است. تابع $I: M\to\mathbb{R}$ تحت G ناوردا است اگروفقط اگر*

$$\mathbf{v}[I] = 0,$$

برای هر $x\in M$ و هر مولد بینهایت کوچک $\mathbf{v}$ از G.

برهان. $(\leftarrow)$

$$I(\exp(t\mathbf{v})x) = I(x) \Rightarrow \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} I(\exp(t\mathbf{v})x) = 0$$
$$\Rightarrow \mathbf{v}_x[I] = 0.$$

$(\rightarrow)$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} I(\exp(t\mathbf{v})\exp(s\mathbf{v})x) = 0 \Rightarrow \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} I(\exp(t+s)\mathbf{v})x = 0$$
$$\Rightarrow \left.\frac{d}{d(t+s)}\right|_{t+s=S} I(\exp(t+s)\mathbf{v})x = 0$$
$$\Rightarrow \left.\frac{d}{dt'}\right|_{t'=S} I(\exp(t'\mathbf{v})x) = 0$$
$$\Rightarrow I(\exp(t'\mathbf{v})x) = c \Rightarrow t' = 0$$
$$\Rightarrow I(\exp(t'\mathbf{v})x) = I(x)$$

□

قضیه ۷.۳.۲. یک زیرمنیفلد بسته $N \subset M$، G–ناوردا است اگروفقط اگر فضای $\mathcal{G}$ از مولدهای بینهایت کوچک به N مماس باشد، به عبارت دیگر: $\mathcal{G}|_x \subset TN|_x$ برای هر $x \in N$.

برهان.

$$N = x_{n+1}^{-1}\{c\} \bigcap \cdots \bigcap x_m^{-1}\{c\}$$

$$GN \subseteq N \Leftrightarrow x_{n+i}(gP) = x_{n+i}(P)$$
$$\Leftrightarrow \forall \mathbf{v} \in \mathcal{G}|_x, \mathbf{v}(x_{n+i}) = 0 \Leftrightarrow dx_{n+i}(\mathbf{v}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{v} \in T_xN.$$

□

قضیه ۸.۳.۲. *فرض کنید G گروه تبدیلات همبند روی منیفلد M عمل می‌کند. میدان برداری $\mathbf{w}$ روی M، $G-$ ناوردا است اگروفقط اگر برای هر مولد بینهایت کوچک $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$، $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \circ$.*

برهان. [۱۰]. □

تعریف ۹.۳.۲. فرض کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. زیرمجموعه $S \subset M$ به‌طور **موضعی $G-$ناوردا** است اگر برای هر $x \in M$ یک همسایگی $\widetilde{G}_x \subset G_x$ از همانی G وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\forall g \in \widetilde{G}_x, \quad g.x \in S$$

تابع هموار $F : U \to N$ که U زیرمجموعه بازی از M است به‌طور موضعی $G-$ناوردا نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in U$، یک همسایگی $\widetilde{G}_x \subset G_x$ از عنصر همانی $e \in G$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\forall g \in \widetilde{G}_x, \quad F(g.x) = F(x)$$

گوییم F به‌طور عمومی $G-$ناوردا نامیده می‌شود اگر $F(g.x) = F(x)$ برای هر $x \in U$ و $g \in G$ به‌طوری‌که $g.x \in U$.

قضیه ۱۰.۳.۲. *فرض کنیم G به‌طور نیم‌- منظم روی منیفلد $m-$ بعدی M با مدارهای $s-$ بعدی عمل می‌کند، اگر $x_\circ \in M$، آنگاه دقیقا $(M - S)$ ناورداهای موضعی مستقل تابعی $\zeta^1(x), \cdots, \zeta^{m-s}(x)$ تعریف شده در یک همسایگی از $x_\circ$ وجود دارد. بعلاوه هر ناوردای دیگر از عمل گروه که در همسایگی $x_\circ$ تعریف شده است برای تابع هموار F دارای فرم*

$$\zeta(x) = F(\zeta^1(x), \cdots, \zeta^{m-s})$$

است. اگر عمل G منظم باشد ناورداهای $\zeta^1, \cdots, \zeta^{m-s}$ به‌طور عمومی در همسایگی از $x_\circ$ ناوردا هستند.

برهان. [۹]. □

۱.۳.۲ روشهایی برای ساختن ناورداها

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه ناورداهای یک عمل گروه داده شده بدست می‌آیند. ابتدا فرض کنید G یک گروه ۱-پارامتری از عمل تبدیلات روی M، با مولد بینهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \xi^{1}(x)\frac{\partial}{\partial x^{1}} + \cdots + \xi^{m}(x)\frac{\partial}{\partial x^{m}},$$

در مختصات موضعی باشد، یک ناوردای موضعی $\zeta(x)$ از G یک جواب معادله دیفرانسیل جزئی منظم همگن و خطی

$$\mathbf{v}(\zeta) = \xi^{1}(x)\frac{\partial\zeta}{\partial x^{1}} + \ldots + \xi^{m}(x)\frac{\partial\zeta}{\partial x^{m}} = 0, \qquad (۱۰.۲)$$

است. قضیه فوق بیان می‌کند که اگر $\mathbf{v}|_{x} \neq 0$، آنگاه $(m-1)$-ناوردای مستقل تابعی وجود دارد. بنابراین $(m-1)$-جواب مستقل تابعی از معادلات دیفرانسیل جزئی (۱۰.۲) در همسایگی‌ای از x_0 وجود دارد. قضیه‌ای کلاسیک از چنین معادلاتی نشان می‌دهد که حل عمومی آنها می‌تواند با انتگرال گرفتن از سیستم مشخصه متناظر زیر از معادلات دیفرانسیل معمولی پیدا شود:

$$\frac{dx^{1}}{\xi^{1}(x)} = \frac{dx^{2}}{\xi^{2}(x)} = \cdots = \frac{dx^{m}}{\xi^{m}(x)}, \qquad (۱۱.۲)$$

که جواب‌های آن به صورت زیر است:

$$\zeta^{1}(x^{1}, \cdots, x^{m}) = c_{1}, \cdots, \zeta^{m-1}(x^{1}, \cdots, x^{m}) = c_{m-1},$$

که $c_1, \cdots, c_{m-1}$ ثابتهای انتگرال‌گیری و $\zeta^{i}(x)$ توابع مستقل c_jها هستند. براحتی می‌توان دید که توابع $\zeta^{1}, \cdots, \zeta^{m}$ جواب مستقل تابعی از(۱۱.۲) هستند.

مثال ۱۱.۳.۲. در اینجا دو مثال از این روش را ارائه می‌دهیم.

- گروه دوران $SO(۲)$ با مولد بینهایت کوچک $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$ در نظر بگیرید، بنابراین داریم:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \to xdx = -ydy \to xdx + ydy = \circ$$
$$\to x^{۲} + y^{۲} = c$$
$$\to \zeta(x,y) = x^{۲} + y^{۲}$$

- میدان برداری

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial_x} + x\frac{\partial}{\partial_y} + (۱ + z^{۲})\frac{\partial}{\partial_z}$$

روی $\mathbb{R}^{۳}$ تعریف شده است، بنابراین می‌توانیم دو ناوردای مستقل از گروه یک پارامتری تولید شده توسط $\mathbf{v}$ را بیابیم. بنا به مثال اول یکی از ناورداها شعاع $r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ است. چون r ثابت است بنابراین $x = \sqrt{r^{۲} - y^{۲}}$ را در $\frac{dy}{x} = \frac{dz}{۱ + z^{۲}}$ جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{dy}{\sqrt{r^{۲} - y^{۲}}} = \frac{dz}{۱ + z^{۲}},$$

بنابراین جواب زیر بدست می‌آید:

$$\arcsin\frac{y}{r} = \arctan z + k,$$

که k یک ثابت است، پس

$$\arctan z - \arcsin\frac{y}{r} = \arctan z - \arctan\frac{y}{x},$$

یک ناوردای مستقل دوم برای $\mathbf{v}$ است، البته با محاسباتی می‌توان آنرا بصورت $\zeta = \frac{xz - y}{yz + x}$ نوشت. بنابراین $\zeta = \frac{xz - y}{yz + x}$ و $r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ درصورتی که $(yz \neq -x)$ ناورداهای مستقل تابعی برای $\mathbf{v}$ هستند. به‌طور معمول هر تابع دیگری از r و ζ نیز یک ناورداست. برای مثال

$$\tilde{\zeta} = \frac{r}{\sqrt{۱ - \zeta^{۲}}} = \cdots = \frac{x + yz}{\sqrt{۱ + z^{۲}}},$$

نیز یک ناورداست، که همراه با r جفت دیگری از ناورداهای مستقل را شکل می‌دهند.

محاسبه‌ی ناورداهای مستقل برای گروههای r-پارامتری از تبدیلات که $r > 1$ می‌تواند دشوار باشد.

اگر

$$\mathbf{v}_k = \sum \xi_k^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad k = 1, \cdots, r,$$

یک پایه از مولدهای بینهایت کوچک تشکیل دهد آنگاه ناورداها به‌وسیله‌ی حل سیستمی از معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول، خطی و همگن زیر بدست می‌آیند.

$$\mathbf{v}_k(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} \xi_k^i(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x^i} = 0, \quad k = 1, \cdots, r.$$

از طرف دیگر، هر ناوردای ζ باید یک ناوردای مشترک از همه میدان‌های برداری $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ باشد. یک راه محاسبه، این است که ابتدا ناورداهای یکی از میدان‌های برداری مثلا $\mathbf{v}_1$، را محاسبه کنیم. سپس میدان‌های برداری $\mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$ را با استفاده از ناوردای $\mathbf{v}_1$ بیان می‌کنیم و سرانجام ناوردای مشترک این $(r-1)$-میدان برداری را با تکرار همین روال می‌یابیم.

مثال ۱۲.۳.۲. میدان‌های برداری زیر را روی $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید:

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \mathbf{w} = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^2 + 1 - x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial z}$$

می‌توان دید که یک گروه آبلی ۲-پارامتری از تبدیلات روی $\mathbb{R}^3$ تولید می‌کنند که روی $M = \mathbb{R}^3 \setminus (\{x = y = 0\} \cup \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\})$. منظم است. ناوردای $\zeta(x, y, z)$ یک جواب برای جفت معادلات $\mathbf{v}(\zeta) = 0 = \mathbf{w}(\zeta)$ می‌باشد. ناورداهای $\mathbf{v}$، z و $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ هستند. حال $\mathbf{w}$ را بر حسب z و r بیان می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$r^2 = x^2 + y^2 \to 2r\frac{\partial}{\partial r} = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$$

لذا:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= 2z(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}) + (z^2 + 1 - (x^2 + y^2))\frac{\partial}{\partial z}\\ &= 2zr\frac{\partial}{\partial r} + (z^2 + 1 - r^2)\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

مورد به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{1+z^2}.$$

که تساوی اول در مثال (۱۲.۳.۲) محاسبه شد، بنابراین یکی از ناورداها شعاع $r=\sqrt{x^2+y^2}$ می باشد.

برای پیدا کردن ناوردای دیگر x را با $\sqrt{r^2-y^2}$ جایگزین می‌کنیم و داریم:

$$\frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}}=\frac{dz}{1+z^2}.$$

جواب آن $\arcsin\frac{y}{r}=\arctan z+k$ برای ثابت دلخواه k می‌باشد. بنابراین

$$\arctan z-\arcsin\frac{y}{r}=\arctan z-\arctan\frac{y}{x}.$$

ناوردای دیفرانسیلی دوم برای w می‌باشد. بیان ساده‌تری از این ناوردا با گرفتن تانژانت آن بدست می‌آید: $\frac{xz-y}{yz+x}$، بنابراین با توجه به تغییر متغیر اولیه

$$\frac{xu_x-u}{x+uu_x} \quad \text{و} \quad \sqrt{x^2+u^2}$$

مجموعه‌ی کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه اول برای $\mathrm{SO}(2)$ تشکیل می‌دهند.

۴.۲ معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۴.۲. یک سیستم Δ از معادلات دیفرانسیل مرتبه n-ام با p متغیر مستقل و q متغیر وابسته با سیستم معادلاتی $\Delta_\nu(x,u^{(n)})=0,\quad \nu=1,\dots,\ell$ شامل $x=(x^1,\dots,x^p)$، $u=(u^1,\dots,u^q)$ و مشتقات u نسبت به x تا مرتبه n داده می‌شود. توابع $\Delta(x,u^{(n)})=(\Delta_1(x,u^{(n)}),\dots,\Delta_\ell(x,u^{(n)}))$ در اندیس‌هایشان هموار فرض می‌شوند به‌طوری‌که Δ می‌توانند به عنوان نگاشتی هموار از فضای جت $X\times U^{(n)}$ به فضای اقلیدسی ℓ-بعدی دیده شود، $\Delta: X\times U^{(n)}\to\mathbb{R}^\ell$.

مجموعه جواب سیستم را با

$$\mathcal{S}_\Delta=\left\{(x,u^{(n)})|\Delta_\nu(x,u^{(n)})=0,\qquad \nu=1,\cdots,l\right\}, \tag{۱۲.۲}$$

نشان می‌دهیم که زیرمجموعه‌ای از فضای جت مرتبه‌ی n-ام، و شامل تمام نقاط $(x, u^{(n)}) \in J^n$ است که در سیستم صدق می‌کند.

تعریف ۲.۴.۲. فرض می‌کنیم $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \ \nu = 0, \ldots, \ell$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد. آنرا دارای **رتبه ماکسیمال** گوییم اگر ماتریس ژاکوبین $\ell \times (p + qp^{(n)})$

$$\mathbb{J}_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_J^\alpha}\right).$$

از Δ نسبت به همه‌ی متغیرهای $(x. u^{(n)})$ از رتبه ℓ باشد هرگاه $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0$.

۵.۲ تقارن‌ها

تعریف ۱.۵.۲. فرض می‌کنیم Δ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد. یک **گروه تقارن** برای Δ یک گروه موضعی از تبدیلات G است که روی زیر مجموعه باز M از فضای متغیرهای مستقل و وابسته دستگاه عمل می‌کند با این خاصیت که هرگاه $u = f(x)$ یک جواب از Δ باشد و برای هر $g \in G$، $g \cdot f$ تعریف شده باشد، آنگاه $u = g \cdot f(x)$ نیز یک جواب از دستگاه باشد.

قضیه ۲.۵.۲. *تصور کنید G گروه لی موضعی همبند از تبدیلات باشد که روی منیفلد m-بعدی M عمل می‌کند. فرض کنید $\ell \leq m$، $F : M \to \mathbb{R}^\ell$ یک سیستم از معادلات جبری*

$$F_\nu(x) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, \ell,$$

با رتبه‌ی ماکسیمال باشد، به این معنی که ماتریس ژاکوبین $(\partial F_\nu / \partial x^k)$ در نقطه‌ی x از جواب سیستم دارای رتبه‌ی ℓ باشد. سپس G گروه تقارن سیستم است اگر و تنها اگر برای هر مولد بینهایت کوچک $\mathbf{v}$ از G داشته باشیم:

$$\mathbf{v}[F_\nu(x)] = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, \ell, \tag{۱۳.۲}$$

هرگاه $F(x) = 0$.

برهان. [۹]. □

قضیه ۳.۵.۲. *فرض کنیم M زیرمجموعه‌ی بازی از $X \times U$ و $\Delta(x, u^{(n)}) = \circ$ سیستم مرتبه‌ی n-ام از معادلات دیفرانسیل باشد که روی M با مجموعه‌ی جواب متناظر $S_\Delta \subset M^{(n)}$ تعریف شده است. تصور کنید G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کند و امتداد آن S_Δ را ناوردا می‌گذارد به این معنی که هرگاه $(x, u^{(n)}) \in S_\Delta$ برای هر $g \in G$ در صورت تعریف داشته باشیم: $pr^{(n)} g \cdot (x, u^{(n)}) \in S_\Delta$. سپس G یک گروه تقارن از دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشد.*

برهان. [۹]. □

با ترکیب دو قضیه‌ی (۲.۵.۲) و (۳.۵.۲) بلافاصله شرایط بینهایت کوچک و مهمی را برای گروه G می‌یابیم که به وسیله‌ی آن، G گروه تقارن سیستم معادلات دیفرانسیل می‌باشد.

قضیه ۴.۵.۲. *فرض کنید $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = \circ, \ \nu = \circ, \dots, \ell$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با رتبه ماکسیمال روی $M \subset X \times U$ باشد. اگر G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کند و برای هر مولد بینهایت کوچک $\mathbf{v}$ از G داشته باشیم:*

$$pr^{(n)}\mathbf{v}[\Delta_\nu(x, u^{(n)})] = \circ, \ \nu = 1, \dots, \ell,$$

هرگاه $\Delta(x, u^{(n)}) = \circ$. آنگاه G یک گروه تقارن برای این دستگاه می‌باشد.

برهان. با توجه به قضیه‌ی (۲.۵.۲) و (۳.۵.۲) اثبات می‌شود. □

مثال ۵.۵.۲. معادله‌ی گرمای

$$u_t - u_{xx} = \circ,$$

را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\partial_x + \tau(x,t,u)\partial_t + \phi(x,t,u)\partial_u,$$

مولد بینهایت کوچک آن باشد. امتداد دوم آن بصورت

$$pr^{(۲)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x\partial_{u_x} + \phi^t\partial_{u_t} + \phi^{xx}\partial_{u_{xx}} + \phi^{xt}\partial_{u_{xt}} + \phi^{tt}\partial_{u_{tt}},$$

می‌باشد. طبق ضابطه‌ی بینهایت کوچک ناوردایی بایستی

$$\circ = pr^{(۲)}\mathbf{v}(u_t - u_{xx})|_{u_t - u_{xx} = \circ} = (\phi^t - \phi^{xx})|_{u_t - u_{xx} = \circ}, \tag{۱۴.۲}$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} \phi^t &= D_t\phi - u_xD_t\xi - u_tD_t\tau \\ &= \phi_t - \xi_tu_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_uu_xu_t - \tau_uu_t^۲, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^x &= D_x\phi - u_xD_x\xi - u_tD_x\tau \\ &= \phi_x + (\phi_u - \xi_x)u_x - \tau_xu_t - \xi_uu_x^۲ - \tau_uu_xu_t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^{xx} &= D_x\phi^x - u_{xx}D_x\xi - u_{xt}D_x\tau \\ &= \phi_{xx} + (۲\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - ۲\xi_{xu})u_x^۲ - ۲\tau_{xu}u_xu_t \\ &\quad -\xi_{uu}u_x^۳ - \tau_{uu}u_x^۲u_t + (\phi_u - ۲\xi_x)u_{xx} - ۲\tau_xu_{xt} - ۳\xi_uu_xu_{xx} \\ &\quad -\tau_uu_tu_{xx} - ۲\tau_uu_xu_{xt}. \end{aligned}$$

طبق (۱۴.۲)، و رابطه‌ی محاسبه شده برای ϕ^t و ϕ^{xx} بایستی

$$\begin{aligned} \circ = &\quad \phi_t - \xi_tu_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_uu_xu_t - \tau_uu_t^۲ - \phi_{xx} - (۲\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x \\ &+\tau_{xx}u_t - (\phi_{uu} + ۲\xi_{xu})u_x^۲ + ۲\tau_{xu}u_xu_t + \xi_{uu}u_x^۳ + \tau_{uu}u_x^۲u_t \\ &-(\phi_u - ۲\xi_x)u_{xx} + ۲\tau_xu_{xt} + ۳\xi_uu_xu_{xx} + \tau_uu_tu_{xx} + ۲\tau_uu_xu_{xt}. \end{aligned}$$

که در آن با جایگزین کردن u_t با u_{xx} (چون $u_t = u_{xx}$) داریم:

$$
\begin{aligned}
0 = \quad & \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) u_{xx} - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 - \phi_{xx} - (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x \\
& + \tau_{xx} u_{xx} - (\phi_{uu} + 2\xi_{xu}) u_x^2 + 2\tau_{xu} u_x u_{xx} + \xi_{uu} u_x^3 + \tau_{uu} u_x^2 u_{xx} \\
& - (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} + 2\tau_x u_{xt} + 3\xi_u u_x u_{xx} + \tau_u u_{xx}^2 + 2\tau_u u_x u_{xt}.
\end{aligned}
$$

در آن ضرایب یک‌جمله‌ایهای متشابه را با هم برابر قرار می‌دهیم،

$$
\begin{array}{rl}
u_x u_{xt} & 0 = 2\tau_u \\
u_{xt} & 0 = 2\tau_x \\
u_{xx}^2 & 0 = \tau - \tau \\
u_x^2 u_{xx} & 0 = \tau_{uu} \\
u_x u_{xx} & 0 = -\xi_u + 2\tau_{xu} + 3\xi_u \\
u_{xx} & 0 = -\tau_t + \tau_{xx} + 2\xi_x \\
u_x^3 & 0 = \xi_{uu} \\
u_x^2 & 0 = 2\xi_{xu} - \phi_{uu} \\
u_x & 0 = \xi_{xx} - \xi_t - 2\phi_{xu} \\
1 & 0 = \phi_t - \phi_{xx}
\end{array}
$$

با حل سیستم خطی معادلات دیفرانسیل جزئی قبلی داریم:

$$
\begin{aligned}
&\xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt, \\
&\tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2, \\
&\phi = (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2) u + \alpha(x, t),
\end{aligned}
$$

که $\alpha_t = \alpha_{xx}$. جبرلی تقارن‌های بینهایت کوچک به‌وسیله‌ی میدان‌های برداری زیر تولید می‌شود:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \partial_x,\\
\mathbf{v}_2 &= \partial_t,\\
\mathbf{v}_3 &= u\partial_u,\\
\mathbf{v}_4 &= x\partial_x + 2t\partial_t,\\
\mathbf{v}_5 &= 2t\partial_x - xu\partial_u,\\
\mathbf{v}_6 &= 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)\partial_u,\\
\mathbf{v}_\alpha &= \alpha(x,u)\partial_u.
\end{aligned}$$

هر مولد بینهایت کوچک گروه ۱-پارامتری از تبدیلات تولید می‌کند،

$$\begin{aligned}
G_1 &: (x+\varepsilon, t, u),\\
G_2 &: (x, t+\varepsilon, u),\\
G_3 &: (x, t, e^\varepsilon u),\\
G_4 &: (e^\varepsilon x, e^{2\varepsilon} t, u),\\
G_5 &: (x + 2\varepsilon t, t, u\cdot \exp(-\varepsilon x - \varepsilon^2 t)),\\
G_6 &: \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left[\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right]\right),\\
G_\alpha &: (x, t, u+\varepsilon\alpha(x,t)).
\end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم $u(x,t)$ جوابی از معادله‌ی گرما باشد، سپس $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})$ جواب جدیدی از آن می‌باشد.

گروه ۱-پارامتری

$$G_6 : (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) = \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left[\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right]\right),$$

را در نظر می‌گیریم. سپس

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t}) &= u(x,t)\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left[\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right]\\ &= u\left(\frac{\tilde{x}}{1+4\varepsilon\tilde{t}},\frac{\tilde{t}}{1+4\varepsilon\tilde{t}}\right)\frac{\exp\left[\frac{-\varepsilon\tilde{x}^2}{1+4\varepsilon\tilde{t}}\right]}{\sqrt{1+4\varepsilon\tilde{t}}},\end{aligned}$$

نیز جوابی از معادله‌ی گرما می‌باشد. قرار می‌دهیم $u=\sqrt{\varepsilon/\pi}$، داریم:

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})=\frac{\sqrt{\varepsilon}\exp\left[\frac{-\varepsilon\tilde{x}^2}{1+4\varepsilon\tilde{t}}\right]}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+4\varepsilon\tilde{t}}}.$$

$\tilde{t}$ را با $-1/4\varepsilon$ (با استفاده از G_4) جایگزین می‌کنیم، بنابراین

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})=\frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{t}}}\exp\left[\frac{-\tilde{x}^2}{4\tilde{t}}\right],\qquad t\geq 0,$$

که جواب اساسی معادله‌ی گرما می‌باشد.

۶.۲ فرم برخوردی

تعریف ۱.۶.۲. یک ۱-فرم دیفرانسیلی θ روی فضای جت J^n **فرم برخوردی** نامیده می‌شود اگر به وسیله‌ی همه‌ی توابع امتداد داده شده صفر شود. به عبارت دیگر، اگر $u=f(x)$ تابعی هموار با امتداد n-ام $f^{(n)}:X\to J^n$ باشد، سپس بایستی $(f^{(n)})^*\theta=0$.

مثال ۲.۶.۲. فرض می‌کنیم یک متغیر مستقل ویک متغیر وابسته داریم. روی فضای جت J^1، بامختصات $x, u, u_x=p$، یک ۱-فرم کلی به فرم $\theta=adx+bdu+cdp$، داریم که a, b, c توابعی از x, u, p هستند، تابع $u=f(x)$ دارای امتداد مرتبه اول $p=f'(x)$ است، بنابراین $(f^{(1)})^*\theta$ برابر

$$\left[a(x,f(x),f'(x))+b(x,f(x),f'(x))f'(x)+c(x,f(x),f'(x))f''(x)\right]dx$$

که همه توابع را صفر خواهد کرد اگرو فقط اگر $c=0$ و $a=-bp$. بنابراین $\theta=b(x,u,p)\theta_0$ لزوما باید ضربی از فرم برخوردی پایه $\theta_0=du-pdx=du-u_xdx$ باشد. روی فضای جت مرتبه دو، J^2

با مختصات اضافی $q = u_{xx}$ شباهت محاسباتی دارد که ۱-فرم $\theta = adx + bdu + cdp + edq$، یک فرم برخوردی است، اگروفقط اگر $\theta = b\theta_\circ + c\theta_1$، که $\theta_1 = dp - qdx = du_x - u_{xx}dx$ یک فرم برخوردی پایه‌ی بعدی است. در حالت کلی، اگر $u, x \in \mathbb{R}$، فرم برخوردی کلی می‌تواند بصورت ترکیب خطی از فرم‌های برخوردی پایه $\theta_k = du_k - u_{k+1}dx$ برای $k = \circ, \cdots, n-1$ باشد. که $u_k = D_x^k u$ مشتق مرتبه kام است. به‌طور مشابه محاسبات اولیه نشان می‌دهد که در نوع دو متغیر وابسته u و v، هر فرم برخوردی یک ترکیب خطی از فرم برخوردی پایه از u و v است. یعنی $dv - v_x dx$ و $dv_x - v_{xx}dx$.

به‌عبارت دیگر برای دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته یک فرم برخوردی پایه $\theta_\circ = du - u_x dx - u_y dy$ روی J^1 وجود دارد، و همچنین دو فرم برخوردی پایه $\theta_x = du_x - u_{xx}dx - u_{xy}dy$ و $\theta_y = du_y - u_{xy}dx - u_{yy}dy$ روی J^2 وجود دارد.

قضیه ۳.۶.۲. *هر فرم برخوردی روی J^n به‌عنوان یک ترکیب خطی $\theta = \sum_{J,\alpha} P_J^\alpha \theta_J^\alpha$، با تابع هموار $P_J^\alpha(x, u^{(n)})$، از فرم‌های برخوردی پایه $\theta_J^\alpha = du_J^\alpha - \sum_{i=1}^p u_{J,i}^\alpha dx^i$ نوشته می‌شود. که $\sharp J$، مرتبه‌ای از فرم برخوردی θ_J^α است.*

برهان. [۱۰]. □

تعریف ۴.۶.۲. گروه تبدیلات G را در نظر می‌گیریم. فرم دیفرانسیل ω روی J^n **ناوردای برخوردی** نامیده می‌شود اگر و تنها اگر، برای هر $g \in G$ و هر فرم برخوردی $\theta = \theta_g$، داشته باشیم:

$$(g^{(n)})^*\omega = \omega + \theta.$$

ضابطه‌ی بینهایت کوچک برای بررسی ناوردای برخوردی بودن این است که مشتق لی فرم نسبت به همه‌ی مولدهای بی‌نهایت کوچک امتداد داده شده‌ی $\mathbf{v}^{(n)} \in G^{(n)}$ صفر باشد: $\mathbf{v}^{(n)}(\omega) = \circ$. فرم‌های برخوردی به طور بدیهی ناوردای برخوردی اند بنابراین تنها فرم‌های ناوردای برخوردی افقی مورد توجه‌اند. هر ۱-فرم روی J^n افقی نامیده می‌شود اگر همه‌ی جهت‌های مماس عمودی صفر باشند (یعنی $\theta = \circ$).

۷.۲ تبدیلات برخوردی

تعریف ۱.۷.۲. یک دیفیومورفیسم موضعی $\Psi : J^n \to J^n$ **تبدیل برخوردی** از مرتبه n می‌باشد اگر فضای همه‌ی فرم‌های برخوردی را حفظ کند، به این معنی که اگر θ فرمی برخوردی روی J^n باشد آنگاه $(\Psi^{(n)})^*\theta$ نیز فرمی برخوردی است.

مثال ۲.۷.۲. تبدیل لوژاندر[۲]، که در مکانیک همیلتنی [۳] مهم است، تبدیل برخوردی مرتبه اول است.

$$\overline{x} = p, \quad \overline{u} = u - xp, \quad \overline{p} = -x, \tag{۱۵.۲}$$

که $p = u_x$ و $\overline{p} = \overline{u}_{\overline{x}}$. در اینجا فرم‌های برخوردی با $d\overline{u} - \overline{p}d\overline{x} = du - pdx$ مطابقت می‌کند. بنابراین (۱۵.۲) یک تبدیل برخوردی روی J^1 تعریف می‌کند. اگر $u = f(x)$ یک تابع باشد، تبدیل لوژاندر آن $\overline{u} = \overline{f}(\overline{x})$ است که به‌طور پارامتری توسط فرمول $\overline{x} = f'(x)$ و $\overline{u} = f(x) - xf'(x)$ تعریف شده است.

تبدیل لوژاندر یک حالت خاص از تبدیل برخوردی

$$\overline{x} = \chi(x,u,p), \quad \overline{u} = \psi(x,u,p), \quad \overline{p} = \pi(x,u,p), \tag{۱۶.۲}$$

در حالت یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته است. شرط آن‌که معادله‌ی (۱۶.۲) یک تبدیل برخوردی باشد آن است که:

$$\Psi^*(d\overline{u} - \overline{p}d\overline{x}) = d\psi - \pi d\chi = \lambda(du - pdx),$$

برای تابع $\lambda(x,u,p)$ داریم:

$$\psi_x - \pi\chi_x = -p\lambda, \quad \psi_u - \pi\chi_u = \lambda, \quad \psi_p - \pi\chi_p = 0.$$

با حذف λ نتیجه می‌گیریم که (۱۶.۲) با معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\psi_x + p\psi_u = \pi(\chi_x + p\chi_u), \quad \psi_p - x\chi_p = 0.$$

Legendre[۲]
Hamiltonian[۳]

معادله‌ی (۱۶.۲) یک تبدیل نقطه‌ای امتداد داده شده تعریف می‌کند، اگروفقط اگر χ و ψ مستقل از مشتق p باشند.

۱.۷.۲ تبدیلات برخوردی بینهایت کوچک

فرض کنید یک میدان برداری $\mathbf{v}^{(1)}$ روی J^1 داده شده است که:

$$\sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u^{(1)})\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi^\alpha(x,u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} \chi_i^\alpha(x,u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}. \tag{۱۷.۲}$$

برای اینکه شرط برخوردی بینهایت کوچک از گزاره‌ی فوق برقرار باشد، با استفاده از $\mathbf{v}^{(1)}$ و فرم برخوردی پایه $\theta^\alpha = du^\alpha - \sum_{i=1}^{p} u_i^\alpha dx^i$ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^{(1)}(\theta^\alpha) &= d\varphi^\alpha - \sum_{i=1}^{p}\left[\chi_i^\alpha dx^i + u_i^\alpha d\xi^i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left\{\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} + \sum_{\beta=1}^{q} u_i^\beta \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta} - \sum_{i=1}^{p} u_j^\alpha\left[\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} + \sum_{\beta=1}^{q} u_i^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u^\beta}\right] - \chi_i^\alpha\right\} dx^i \\
&+ \sum_{i=1}^{p}\sum_{\beta=1}^{q}\left\{\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u_i^\beta} - \sum_{j=1}^{p} u_j^\alpha \frac{\partial \xi^j}{\partial u_i^\beta}\right\} du_i^\beta + \sum_{\beta=1}^{q}\left\{\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta} - \sum_{j=1}^{p} u_j^\alpha \frac{\partial \xi^j}{\partial u^\beta}\right\}\theta^\beta.
\end{aligned}$$

بنابراین، $\mathbf{v}^{(1)}$ یک تبدیل برخوردی بینهایت کوچک تعیین می‌کند اگرو فقط اگر ضرایب dx^i و du_i^β در این فرمول صفر شوند، لذا شرایط برخورد

$$\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u_j^\beta} - \sum_{i=1}^{p} u_i^\alpha \frac{\partial \xi^i}{\partial u_j^\beta} = 0. \tag{۱۸.۲}$$

است. می‌توان فرمول ساده‌تری برای ضرایب مشتق مرتبه اول $\mathbf{v}^{(1)}$ بدست آورد.

$$\chi_i^\alpha = \widehat{D}_i \varphi^\alpha - \sum_{j=1}^{p}(\widehat{D}_i \xi^j) u_j^\alpha, \tag{۱۹.۲}$$

که

$$\widehat{D}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

از فرمول (۱۹.۲) داریم:

$$\chi_i^\alpha = D_i\varphi^\alpha - \sum_{j=1}^{p}(D_i\xi^j)u_j^\alpha, \tag{۲۰.۲}$$

شرایط برخوردی (۱۸.۲) می‌تواند دوباره در فرم ساده‌تری بیان شود:

$$\frac{\partial Q^\alpha}{\partial u_i^\beta} + \xi^i\delta_\beta^\alpha = 0, \quad \alpha,\beta = 1,\cdots,q, \quad j = 1,\cdots,p, \tag{۲۱.۲}$$

که δ_β^α دلتای کرونکر است. اگر $Q = (Q^1,\cdots,Q^q)$ و $\xi = (\xi^1,\cdots,\xi^p)$ جوابی برای شرایط برخورد (۲۱.۲) باشند، آنگاه میدان برداری (۱۷.۲) با

$$\varphi^\alpha = Q^\alpha + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha, \quad \chi_i^\alpha = \widehat{D}_i Q^\alpha = D_i Q^\alpha + \sum_{j=1}^{p}\xi^j u_{ij}^\alpha, \tag{۲۲.۲}$$

یک جواب برای (۱۸.۲) و (۱۹.۲) تعیین می‌کند. و از این‌رو یک میدان برداری برخوردی است. اگر $q = 1$، آنگاه یک مشخصه $Q = \varphi - \sum_i \xi^i u_i$ وجود دارد. در این حالت (۲۱.۲) و (۲۲.۲) به‌صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\xi^i = \frac{\partial Q}{\partial u_i}, \quad \varphi = Q - \sum_{i=1}^{p} u_i\frac{\partial Q}{\partial u_i}, \quad \chi_i = \frac{\partial Q}{\partial x^i} + u_i\frac{\partial Q}{\partial u}, \quad i = 1,\cdots,p, \tag{۲۳.۲}$$

فرمول (۲۳.۲) در کار اصلی لی روی تبدیلات برخوردی ظاهر می‌شود. که تابع $W = -Q$، تابع مشخصه از تبدیل برخوردی بینهایت کوچک تعیین شده توسط میدان برداری $\mathbf{v}$ نامیده می‌شود.

مثال ۳.۷.۲. فرض کنیم $p = 1$ و $q = 1$، میدان برداری برخوردی مرتبه اول با مشخصه $Q(x,u,u_x) = Q(x,u,p)$ به فرم زیر است:

$$\mathbf{v} = -\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x} + (Q - p\frac{\partial Q}{\partial p})\frac{\partial}{\partial u} + (\frac{\partial Q}{\partial x} + p\frac{\partial Q}{\partial u})\frac{\partial}{\partial p}.$$

فصل ۳

طبقه بندی معادلات دیفرانسیل معمولی در حد تبدیلات برخوردی

در این فصل به طبقه‌بندی موضعی از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی برای $n \geq ۳$ در یک همسایگی از نقاط منظم می‌پردازیم.

هر معادله دیفرانسیل معمولی خطی توسط یک تبدیل نقطه‌ای به فرم

$$y^{(n)} = a_{n-۲}(x)y^{(n-۲)} + a_{n-۳}(x)y^{(n-۳)} + \cdots + a_۰(x)y. \tag{۱.۳}$$

تبدیل می‌شود. در [۱۲] ثابت شده است که هر معادله دیفرانسیل معمولی خطی از مرتبه $n \geq ۳$، توسط یک تبدیل نقطه‌ای به فرم

$$y^{(n)} = a_{n-۳}(x)y^{(n-۳)} + a_{n-۴}(x)y^{(n-۴)} + \cdots + a_۰(x)y \tag{۲.۳}$$

تبدیل می‌شود. همچنین در [۶] ثابت شده است که بعد جبری تقارن‌های نقطه‌ای یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه n، دقیقا $(n+۴)$ یا $(n+۲)$، یا $(n+۱)$ است.

در قضیه (۱.۵.۳) ثابت می‌کنیم که هر معادله دیفرانسیل معمولی خطی با جبر $(n+۴)$-بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای توسط یک تبدیل نقطه‌ای به فرم $y^{(n)} = ۰$ ساده می‌شود. برای معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با جبرهای $(n+۲)$ و $(n+۱)$-بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای، در قضیه (۲.۳.۳) ثابت می‌کنیم یک تبدیل برخوردی که یکی از این معادلات را به دیگری تصویر می‌کند، یک تبدیل نقطه‌ای است. این نتایج مساله طبقه‌بندی موضعی از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی نسبت به تبدیلات برخوردی در مقابل طبقه‌بندی نسبت به تبدیلات نقطه‌ای را کاهش می‌دهد.

به‌علاوه در قضیه (۴.۳.۳) مساله طبقه‌بندی نسبت به تبدیلات نقطه‌ای به فرم

$$X = f(x), \quad Y = |f'(x)|^{(n-۱)/۲}y \tag{۳.۳}$$

را کاهش می‌دهیم.

در [۷] ثابت شده است که هر معادله دیفرانسیل معمولی خطی با جبر $(n+۲)$-بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای توسط یک تبدیل نقطه‌ای از فرم (۳.۳) به یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت تبدیل

می‌شود. در اینجا ناورداهایی از تبدیلاتی از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت و جبرهای $(n+۲)$-بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای را پیدا می‌کنیم. این ناورداها مساله هم‌ارزی برای این معادلات را حل می‌کنند. سپس، معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت را طبقه‌بندی می‌کنیم.

به‌علاوه در قضیه (۵.۷.۳) جبری از ناورداهای دیفرانسیل اسکالر از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی را محاسبه می‌کنیم. از این ناورداها در طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با جبرهای $(n+۱)$-بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{E}$ یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی دلخواه با جبر $(n+۱)$-بعدی از تبدیلات نقطه‌ای است، و فرض کنید $I(x)$ ناوردای دیفرانسیل اسکالر غیرثابت است. تبدیلی از فرم (۳.۳)، $X = I(x)$ و $Y = |I'(x)|^{(n-۱)/۲}y$ ، $\mathcal{E}$ را به معادله‌ی $\mathcal{E}'$ تصویر می‌کند. در (۱.۸.۳) ثابت می‌کنیم که معادلات هم‌ارزی فرم کانونی یکسانی دارند. در این فصل همه‌ی منیفلدها و نگاشتها هموار فرض می‌شوند. و توسط $\mathbb{R}^n$ فضای حسابی n-بعدی را تعریف می‌کنیم.

۱.۳ کلاف‌های جت

۱.۱.۳ توزیع کارتان

فرض کنید E و M منیفلدهای هموار به ترتیب از بعد $n+m$ و n باشند، همچنین فرض کنید $\pi : E \to M$ یک کلاف هموار باشد. توسط $[S]_x^k$، k-جت از یک برش S از π در نقطه‌ی $x \in M$ را تعریف می‌کنیم. همچنین

$$\pi_k : J^k\pi \to M, \quad \pi_k : [S]_x^k \to x, \quad k = ۰, ۱, ۲, \cdots, \infty,$$

کلافی از k-جت‌هایی از همه‌ی برش‌های π است. و تصویر $\pi_{k,r} : J^k\pi \to J^r\pi, k > r$ توسط $\pi_{k,r}([S]_x^k) = [S]_x^r$ تعریف می‌شود.

هر برش S از π، برش j_kS از کلاف π_k را توسط فرمول $j_kS : x \to [S]_x^k$ تولید می‌کند. به‌وسیله‌ی $L_S^{(k)}$ تصویری از برش j_kS را تعریف می‌کنیم. همچنین $T_{x_k}(J^k\pi)$ فضای مماس به $J^k\pi$ در $x_k \in J^k\pi$ را مشخص می‌کند، و توسط $T_{x_k}(L_S^{(k)})$ فضای مماس به $L_S^{(k)}$ در $x_k \in L_S^{(k)}$ را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۳. زیرفضای $C_{x_k} \subset T_{x_k}(J^k\pi)$ تولید شده روی اجتماعی از این فضاهای مماس **صفحه کارتان** در x_k نامیده می‌شود. همچنین توزیع $C : x_k \to C_{x_k}$ روی $J^k\pi$ را **توزیع کارتان** می‌نامند.

۲.۱.۳ تبدیلات لی

تعریف ۲.۱.۳. یک دیفیومورفیسم موضعی از $J^k\pi$ که توزیع کارتان را به خودش تصویرمی‌کند یک **تبدیل لی** می‌نامند، و یک تبدیل لی از $J^\circ\pi$ یک **تبدیل نقطه‌ای** نامیده می‌شود، همچنین یک تبدیل لی از $J^1\pi$ یک تبدیل برخوردی است هرگاه $m = 1$.

هر تبدیل لی $f : U \to U'$ از $J^k\pi$ می‌تواند به‌طور متعارف به تبدیل لی $f^{(r)} : \pi_{k+r,k}(U) \to \pi_{k+r,k}(U')$ از $J^{k+r}\pi$، $r = 1, 2, \cdots$ امتداد یابد، به‌طوری‌که برای $l \leq r$، نمودار زیر جابه‌جایی است:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}_{k+r,k}(U) & \xrightarrow{f^{(r)}} & \pi^{-1}_{k+r,k}(U') \\ {\scriptstyle \pi_{k+r,k+l}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{k+r,k+l}} \\ \pi^{-1}_{k+l,k}(U) & \xrightarrow[f^{(l)}]{} & \pi^{-1}_{k+l,k}(U') \end{array}$$

۳.۱.۳ میدان‌های لی

تعریف ۳.۱.۳. میدان برداری ξ در $J^k\pi$ یک **میدان لی** نامیده می‌شود اگر شار آن توسط تبدیل لی تولید شود. یک میدان برداری در $J^\circ\pi$،**میدان برداری نقطه‌ای** می‌نامند، و یک میدان لی در $J^1\pi$ یک **میدان برداری برخوردی** است هرگاه $m = 1$.

امتداد متعارفی از تبدیلات لی امتدادی از میدان‌های لی را تولید می‌کند. درواقع، فرض کنید ξ یک میدان برداری در $J^k\pi$ باشد، و فرض کنید f_t شار آن باشد. آنگاه شار $f_t^{(r)}$ از تبدیلات لی، میدان لی $\xi^{(r)}$ در $J^{k+r}\pi$، $r = 1, 2, \cdots$ را تعریف می‌کند، به‌طوری‌که:

$$(\pi_{k+r,k+l})_*\xi^{(r)} = \xi^{(l)}, \quad r \geq l.$$

۲.۳ معادلات دیفرانسیل معمولی

۱.۲.۳ طبقه‌بندی برخوردی

فرض کنید $\pi : \mathbb{R}^{۱} \times \mathbb{R}^{۱} \to \mathbb{R}^{۱}$ و $x, y, p_۱, \cdots, p_k$ مختصات استاندارد در $J^k\pi$ باشند. هر معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی k

$$F(x, y(x), dy/dx, \cdots, d^ky/dx^k) = ۰$$

با زیرمنیفلد

$$\mathcal{E} = \{F(x, y, p_۱, \cdots, p_k) = ۰\} \subset J^k\pi.$$

مشخص شده است.

یک جواب معمولی $S(x)$ ازمعادله دیفرانسیل معمولی اولیه با زیرمنیفلد $L_S^{(k)} \subset \mathcal{E}$ تولید شده توسط برش $S : x \to S(x)$ از π تعریف می‌شود. که $L_S^{(k)}$ یک منیفلد انتگرال ۱−بعدی از توزیع کارتان روی $J^k\pi$ است. یک جواب چندمقداری از $\mathcal{E}$ یک منیفلد انتگرال ۱−بعدی L از توزیع کارتان در $J^k\pi$ است به‌طوری‌که $L \subset \mathcal{E}$.

طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه k، در حد یک دیفیومورفیسم از $J^k\pi$ است، که مجموعه‌ای از همه‌ی جوابهای معادلات دیفرانسیل معمولی را به خودش تصویر می‌کند. که این دیفیومورفیسم یک تبدیل لی است. بنابراین، توسط یک تبدیل برخوردی تولید شده است. پس مساله طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی در حد یک تبدیل برخوردی پیش می‌آید.

فرض کنید $\mathcal{E}_۱, \mathcal{E}_۲ \subset J^k\pi$، معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه k و f یک تبدیل (برخوردی) نقطه‌ای است. گوییم که f (به‌طور موضعی) $\mathcal{E}_۱$ را به $\mathcal{E}_۲$ تصویر می‌کند هرگاه $f^{(k)}(f^{(k-۱)})$ (به‌طور موضعی) زیرمنیفلد $\mathcal{E}_۱ \subset J^k\pi$ را به زیر منیفلد $\mathcal{E}_۲ \subset J^k\pi$ تصویر کند. گوییم معادلات دیفرانسیل معمولی $\mathcal{E}_۱$ و $\mathcal{E}_۲$ هم‌ارز هستند هرگاه یک تبدیل نقطه‌ای (برخوردی) وجود داشته باشد به‌طوری‌که (به‌طور موضعی) $\mathcal{E}_۱$ را به $\mathcal{E}_۲$ تصویر کند.

۲.۲.۳ تبدیلات برخوردی و نقطه‌ای

هر تبدیل نقطه‌ای f در مختصات استاندارد توسط فرمول زیر تعریف شده است:

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y). \tag{۴.۳}$$

و امتداد $f^{(k)}$ در مختصات استاندارد توسط فرمول

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y), \quad P_1 = \frac{DY}{DX}, \quad \cdots, \quad P_k = \frac{DP_{k-1}}{DX} \tag{۵.۳}$$

تعریف شده است. که

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + p_1 \frac{\partial}{\partial y} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + \cdots + p_{k+1} \frac{\partial}{\partial p_k} + \cdots \tag{۶.۳}$$

عملگری از مشتق کامل نسبت به x است.

یک تبدیل برخوردی در مختصات استاندارد بصورت زیر است:

$$X = X(x, y, p_1), \quad Y = Y(x, y, p_1), \quad P_1 = \frac{Y_x + p_1 Y_y}{X_x + p_1 X_y}, \tag{۷.۳}$$

که توابع $X(x, y, p_1)$ و $Y(x, y, p_1)$ توسط رابطه‌ی

$$Y_{p_1}(X_x + p_1 X_y) - X_{p_1}(Y_x + p_1 Y_y) = 0,$$

به هم ارتباط داده می‌شوند.

۳.۲.۳ میدان‌های برداری برخوردی و نقطه‌ای

فرض کنید ξ یک میدان برداری برخوردی باشد، می‌توان نشان داد که ξ در مختصات استاندارد توسط

$$\xi = \xi_\varphi = \varphi_{p_1} \frac{\partial}{\partial x} + (\varphi - p_1 \varphi_{p_1}) \frac{\partial}{\partial y} + (\varphi_x + p_1 \varphi_y) \frac{\partial}{\partial p_1}, \tag{۸.۳}$$

نمایش داده می‌شود. که تابع $\varphi = \varphi(x, y, p_1)$، تابع مولد ξ نامیده می‌شود.

فرض کنید ζ یک میدان برداری نقطه‌ای دلخواه باشد. بنابراین در مختصات استاندارد فرم زیر را دارد:

$$\zeta = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{۹.۳}$$

همچنین فرض کنید یک میدان برداری برخوردی را توسط تبدیل برخوردی دلخواه (۷.۳) تبدیل می‌کنیم. در این‌صورت، یک میدان برداری برخوردی جدید بدست می‌آوریم. بنابراین تابع مولد ϕ از میدان برداری بدست آمده و تابع مولد φ توسط فرمول

$$\frac{X_x + p_1 X_y}{X_x Y_y - X_y Y_x}\phi(X,Y,P_1) = \varphi(x,y,p_1) \tag{۱۰.۳}$$

به هم ارتباط داده می‌شوند.

۴.۲.۳ تقارن‌های کلاسیک

تعریف ۱.۲.۳. یک میدان برداری نقطه‌ای ζ در $J^0\pi$ یک **تقارن نقطه‌ای** از معادله دیفرانسیل $\mathcal{E} \subset J^n\pi$ نامیده می‌شود هرگاه $\zeta^{(n)}$ به زیرمنیفلد $\mathcal{E}$ مماس باشد. توسط $\mathrm{Pnt}\mathcal{E}$ مجموعه‌ای از همه‌ی تقارن‌های نقطه‌ای $\mathcal{E}$ را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۳. یک میدان برداری برخوردی ξ در $J^1\pi$ یک **تقارن برخوردی** از معادله دیفرانسیل $\mathcal{E} \subset J^n\pi$ نامیده می‌شود، هرگاه $\xi^{(n-1)}$ به زیرمنیفلد $\mathcal{E}$ مماس باشد، و یک میدان برداری نقطه‌ای ζ با $\xi = \zeta^{(1)}$ وجود نداشته باشد.

تقارن‌های نقطه‌ای و برخوردی **تقارن‌های کلاسیک** نامیده می‌شوند. توسط $\mathrm{Sym}\mathcal{E}$ مجموعه‌ای از همه‌ی تقارن‌های کلاسیک $\mathcal{E}$ را تعریف می‌کنیم.

۳.۳ معادلات دیفرانسیل معمولی خطی

فرض کنید $\mathcal{E}$ یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه n دلخواه است. برای $n = ۳$ نتایج زیر برقرار است: $\dim(\mathrm{Sym}\mathcal{E})$ می‌تواند برابر با ۱۰ یا ۵ یا ۴ باشد، اگر ۱۰ $= \dim(\mathrm{Sym}\mathcal{E})$ آنگاه توسط سه تقارن برخوردی و هفت تقارن نقطه‌ای تولید شده است. اگر ۵ $= \dim(\mathrm{Sym}\mathcal{E})$ یا ۴ باشد آنگاه $\mathrm{Sym}\mathcal{E} = \mathrm{Pnt}\mathcal{E}$.

قضیه ۱.۳.۳. *بعد جبری تقارن‌های نقطه‌ای یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی، یک ناوردا از تبدیلات برخوردی است که مجموعه‌ای از همه‌ی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی را به خودش تصویر می‌کند.*

برهان. [۱۷]. □

۱.۳.۳ تقارن‌های نقطه‌ای

فرض کنید $\mathcal{E}$ یک معادله دیفرانسیل معمولی دلخواه به فرم (۱.۳) است. در [۶] ثابت شده است که یک تقارن نقطه‌ای از $\mathcal{E}$ به فرم زیر است:

$$(\varphi(x)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{n-1}{2}\varphi' y\frac{\partial}{\partial y})+Cy\frac{\partial}{\partial y}+\gamma(x)\frac{\partial}{\partial y},$$

که $\gamma(x)$ یک جواب از $\mathcal{E}$، $C\in\mathbb{R}$، و $\varphi(x)$ جوابی از سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی

$$\begin{cases} R_n^3\varphi^{(3)}-2a_{n-2}\varphi^{(1)}-a_{n-2}^{(1)}\varphi=0\\ R_n^{k+1}\varphi^{(k+1)}-\sum_{s=0}^{k-3}R_{n-2-s}^{k-1-s}a_{n-2-s}\varphi^{(k-1-s)}\\ \qquad -ka_{n-k}\varphi^{(1)}-a_{n-k}^{(1)}\varphi=0, k=3,4,\cdots,n, \end{cases} \tag{11.3}$$

است که $R_p^q=\binom{p}{q-1}(n-1)/2-\binom{p}{q}$. بعد جوابهای دستگاه (۱۱.۳) می‌تواند برابر با۳ یا ۱ یا ۰ باشد. نتیجه می‌گیریم که $\dim(\mathrm{Pnt}\mathcal{E})$ می‌تواند برابر $n+4$ یا $n+2$، یا $n+1$ باشد.

۲.۳.۳ تبدیلات برخوردی

معادلات دیفرانسیل معمولی خطی از مرتبه $n\geq 3$ با جبرهای $(n+4)$−بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای، تقارن‌های برخوردی دارند هرگاه $n=3$.

قضیه ۲.۳.۳. *فرض کنید $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$ معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با جبرهای $(n+2)$ یا $(n+1)$−بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای باشند، و فرض کنید f یک تبدیل برخوردی است که $\mathcal{E}_1$ را به $\mathcal{E}_2$ تصویر می‌کند، آنگاه f امتدادی از یک تبدیل نقطه‌ای است.*

برهان. فرض کنید $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$ فرم (۱.۳) را دارند. و $\dim(\mathrm{Pnt}\mathcal{E}_1)=n+2$. تبدیل برخوردی f در مختصات استاندارد توسط (۷.۳) تعریف شده است. فرض کنید $\Gamma_1(X)$ و $\Gamma_2(X)$ و $\Gamma_3(X)$ جواب‌های مستقل خطی

$\mathcal{E}_1$ هستند. این جوابها را به‌عنوان توابع مولد از تقارن‌های نقطه‌ای $\mathcal{E}_1$ در نظر می‌گیریم. هر تابع با تابع مولد متناظر از تقارن‌های نقطه‌ای $\mathcal{E}_2$ توسط فرمول (۱۰.۳) به هم ارتباط داده می‌شوند. با در نظر گرفتن فرمی از توابع مولد با جبر $(n+2)$–بعدی $\mathrm{Pnt}\mathcal{E}_2$، بدست می‌آوریم:

$$\Delta\Gamma_1(X(x,y,p_1)) = K_1(\varphi(x)p_1 - \frac{n-1}{2}\varphi' y) + C_1 y + \gamma_1(x)$$
$$\Delta\Gamma_2(X(x,y,p_1)) = K_2(\varphi(x)p_1 - \frac{n-1}{2}\varphi' y) + C_2 y + \gamma_2(x)$$
$$\Delta\Gamma_3(X(x,y,p_1)) = K_3(\varphi(x)p_1 - \frac{n-1}{2}\varphi' y) + C_3 y + \gamma_3(x)$$

که $\Delta = (X_x + p_1 X_y)/(X_x Y_y - X_y Y_x)$، $K_j, C_j \in \mathbb{R}$ و $j = 1,2,3$. اگر یکی از اعداد K_1 و K_2 و K_3 صفر نباشد، گوییم $K_1 \neq 0$، آنگاه:

$$\Delta(\Gamma_2 - \frac{K_2}{K_1}\Gamma_1) = (C_2 - \frac{K_2}{K_1}C_1)y + \gamma_2 - \frac{K_2}{K_1}\gamma_1$$
$$\Delta(\Gamma_3 - \frac{K_3}{K_1}\Gamma_1) = (C_3 - \frac{K_3}{K_1}C_1)y + \gamma_3 - \frac{K_3}{K_1}\gamma_1$$

که$(K_1\Gamma_2 - K_2\Gamma_1)/(K_1\Gamma_3 - K_3\Gamma_1)$ روی p_1 مستقل است. بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{K_1\Gamma_2 - K_2\Gamma_1}{K_1\Gamma_3 - K_3\Gamma_1}\right) = \frac{d}{dX}\left(\frac{K_1\Gamma_2 - K_2\Gamma_1}{K_1\Gamma_3 - K_3\Gamma_1}\right)X_{p_1} = 0$$

فرض کنید $X_{p_1} \neq 0$، آنگاه

$$K_1\Gamma_2 - K_2\Gamma_1 = K(K_1\Gamma_3 - K_3\Gamma_1),$$

که $K \in \mathbb{R}$. بنابراین جواب‌های Γ_1، Γ_2 و Γ_3 از $\mathcal{E}_1$ وابسته خطی هستند. از این تناقض، داریم $X_{p_1} \equiv 0$. بنابراین f امتدادی از تبدیل نقطه‌ای است. بدیهی است اثبات برای $K_1 = K_2 = K_3 = 0$ و برای $\dim(\mathrm{Pnt}\mathcal{E}) = n+1$ به‌طور مشابه است. □

۳.۳.۳ کاهش دادن به تبدیلات (۳.۳)

می‌دانیم که هر معادله دیفرانسیل معمولی خطی توسط یک تبدیل نقطه‌ای به فرم (۱.۳) ساده می‌شود.

گزاره ۳.۳.۳. *فرض کنید $\mathcal{E}$ یک معادله دیفرانسیل معمولی از فرم (۱.۳) است. آنگاه یک تبدیل نقطه‌ای $\mathcal{E}$ را به یک معادله دیفرانسیل معمولی از این فرم تصویر می‌کند اگروفقط اگر این تبدیل فرم زیر را داشته باشد:*

$$X = X(x), \quad Y = C.|X'|^{(n-1)/2}.y + \beta(x), \quad C \in \mathbb{R}. \tag{۱۲.۳}$$

برهان. [۱۲]. □

از (۵.۳) نتیجه می‌شود که امتدادی از تبدیل نقطه‌ای (۱۲.۳) به تبدیل لی $J^n\pi$ توسط

$$X = X(x), \quad Y = C|X'|^{(n-1)/2}y + \beta(x),$$

$$P_k = C\nabla^k(|X'|^{(n-1)/2}y) + \nabla^k(\beta), k = 1, 2, \cdots, n,$$

تعریف شده است، که $\nabla = D/DX$ و D عملگر (۶.۳) است.

فرض کنید $\mathcal{E}_1 = \{P_n = A_{n-2}(X)P_{n-2} + A_{n-3}(X)P_{n-3} + \cdots + A_0(X)Y\}$ و $\mathcal{E}_2 = \{p_n = a_{n-2}(x)p_{n-2} + a_{n-3}(x)p_{n-3} + \cdots + a_0(x)y\}$. فرض کنید تبدیل (۱۲.۳)، $\mathcal{E}_1$ را به $\mathcal{E}_2$ تصویر می‌کند. یعنی

$$C\nabla^n(|X'|^{(n-1)/2}y) + \nabla^n(\beta(x)) =$$

$$\sum_{i=2}^{n}\Big[CA_{n-i}(X(x))\nabla^{n-i}(|X'|^{(n-1)/2}y) + A_{n-i}(X(x))\nabla^{n-i}(\beta(x))\Big].$$

نتیجه می‌شود:

- تابع $\beta(x)$ جوابی از معادله دیفرانسیل معمولی خطی همگن

$$\nabla^n(\beta(x)) = \sum_{i=2}^{n}A_{n-i}(X(x))\nabla^{n-i}(\beta(x)).$$

است.

- تبدیل (۱۲.۳) برای یک ثابت غیر صفر دلخواه $C \in \mathbb{R}$، $\mathcal{E}_1$ را به $\mathcal{E}_2$ تصویر می‌کند.

قضیه ۴.۳.۳. *فرض کنید $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$ معادلات دیفرانسیل معمولی از فرم (۱.۳) هستند. اگر یک تبدیل نقطه‌ای وجود داشته باشد که $\mathcal{E}_1$ را به $\mathcal{E}_2$ تصویر کند، آنگاه یک تبدیل نقطه‌ای از فرم (۳.۳) وجود دارد که $\mathcal{E}_1$ را به $\mathcal{E}_2$ تصویر می‌کند.*

برهان. [۱۷]. □

۴.۳.۳ تبدیلات لاگرفورسیت

گزاره ۵.۳.۳. *فرض کنید $\mathcal{E} = \{P_n = A_{n-2}(X)P_{n-2} + A_{n-3}(X)P_{n-3} + \cdots + A_0(X)Y\}$ یک معادله دیفرانسیل معمولی از فرم (۱.۳) است. تبدیل نقطه‌ای*

$$X = f(x), \quad Y = |f'|^{(n-1)/2}y,$$

که f یک جواب از معادله دیفرانسیل معمولی

$$2f'''f' - 3(f'')^2 - 24((n+1)n(n-1))^{-1}(f')^4A_{n-2}(f) = 0,$$

است، $\mathcal{E}$ را به معادله‌ی $\mathcal{E}'$ از فرم (۲.۳) تصویر می‌کند. این تبدیل، تبدیل لاگرفورسیت [۱] از معادله‌ی $\mathcal{E}$ نامیده می‌شود. همچنین معادله‌ی $\mathcal{E}'$ را یک فرم لاگرفورسیت از معادله‌ی $\mathcal{E}$ می‌نامند.

برهان. [۱۶]. □

این گزاره مساله طبقه‌بندی موضعی از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی را به طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی از فرم (۲.۳) کاهش می‌دهد.

۵.۳.۳ کاهش دادن به تبدیلات (۱۳.۳)

گزاره ۶.۳.۳. *فرض کنید $\mathcal{E}$ یک معادله دیفرانسیل معمولی از فرم (۲.۳) است. آنگاه یک تبدیل نقطه‌ای $\mathcal{E}$ را به یک معادله دیفرانسیل معمولی از این فرم تصویر می‌کند اگروفقط اگر این تبدیل فرم زیر را داشته باشد:*

$$X = \frac{\alpha.x + \beta}{\gamma.x + \delta}, \quad Y = C.|X'|^{(n-1)/2}.y, \quad \alpha, \beta, \delta, C \in \mathbb{R}.$$

[۱] Laguerre–Forsyth

برهان. [۱۲]. □

قضیه ۷.۳.۳. *فرض کنید $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$ معادلات دیفرانسیل معمولی از فرم (۲.۳) هستند. اگر یک تبدیل نقطه‌ای که $\mathcal{E}_1$ را به $\mathcal{E}_2$ تصویر می‌کند وجود داشته باشد، آنگاه یک تبدیل نقطه‌ای به فرم*

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \widehat{f}(x, y) = |f'|^{(n-1)/2}.y, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \tag{۱۳.۳}$$

$\mathcal{E}_1$ را به $\mathcal{E}_2$ تصویر می‌کند.

برهان. [۱۲]. □

۴.۳ کلاف‌هایی از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی فرم (۱.۳)

فرض کنید $\pi : E = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^1$ یک کلاف حاصل‌ضربی باشد، توسط x، مختصات استاندارد روی پایه‌ی $\mathbb{R}^1$ تعریف می‌کنیم. توسط $a_{n-2}, a_{n-4}, \cdots, a_0$ مختصات استاندارد روی تار $\mathbb{R}^{n-1}$ تعریف می‌کنیم. برش

$$S : x \to (x, a_{n-2}(x), a_{n-3}(x), \cdots, a_0(x))$$

از π با معادله دیفرانسیل معمولی خطی

$$\mathcal{E}_s = \{p_n = a_{n-2}(x)p_{n-2} + a_{n-3}(x)p_{n-3} + \cdots + a_0(x)y\}$$

مشخص می‌شود. توسط $S_{\mathcal{E}}$ برشی از π متناظر با معادله‌ی $\mathcal{E}$ تعریف می‌کنیم. توسط Γ، شبه گروه لی از همه‌ی دیفیومورفیسم‌های موضعی از $\mathbb{R}^1$ را تعریف می‌کنیم. همچنین به‌وسیله‌ی ϕ، شبه گروه لی از همه‌ی تبدیلات نقطه‌ای فرم (۳.۳) را تعریف می‌کنیم. این فرمول، ایزومورفیسم

$$\Gamma \to \phi, \quad f \to (f, \widehat{f}), \tag{۱۴.۳}$$

را تعریف می‌کند. که $\widehat{f}(x, y) = |f'|^{(n-1)/2}y$.

فرض کنید

$$\mathcal{E}_۲ = \left\{ P_n = A_{n-۲}(X)P_{n-۲} + A_{n-۳}(X)P_{n-۳} + \cdots + A_۰(X)Y \right\}$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی دلخواه از فرم (۱.۳) است. با توجه به اینکه $\mathcal{E}_۲$ مطابق یک تبدیل دلخواه $(f, \widehat{f})$ از فرم (۱۳.۳) است، معادله دیفرانسیل معمولی خطی زیر را بدست می‌آوریم:

$$\mathcal{E}_۱ = \left\{ p_n = a_{n-۲}(x)p_{n-۲} + a_{n-۳}(x)p_{n-۳} + \cdots + a_۰(x)y \right\}.$$

تبدیل f توسط معادلاتی از فرم زیر بیان شده است:

$$a_{n-j} = F_{n-j}\left(A_{n-۲}, \cdots, A_{n-j}; \frac{df}{dx}, \cdots, \frac{d^{j+۱}f}{dx^{j+۱}} \right), \quad j = ۲, ۳, \cdots, n.$$

و تبدیل $f^{-۱}$ توسط معادلات یکسان

$$A_{n-j} = F_{n-j}\left(a_{n-۲}, \cdots, a_{n-j}; \frac{df^{-۱}}{dX}, \cdots, \frac{d^{j+۱}f^{-۱}}{dX^{j+۱}} \right), \quad j = ۲, ۳, \cdots, n. \qquad (۱۵.۳)$$

بیان می‌شوند.

معادله‌ی (۱۵.۳) امتدادی از $f \in \Gamma$ به دیفیومورفیسم f° از کلاف π تعریف می‌کند، به‌طوری‌که نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f^{\circ}"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

برای $f \in \Gamma$، تبدیلی از برش‌های π توسط فرمول زیر تعریف می‌کنیم.

$$S \to f(S) = f^{(\circ)} \circ S \circ f^{-۱}. \qquad (۱۶.۳)$$

گزاره ۱.۴.۳. *فرض کنید $\mathcal{E}_۱$ و $\mathcal{E}_۲$ معادلاتی از فرم (۱.۳) هستند. تبدیل $(f, \widehat{f}) \in \phi$، $\mathcal{E}_۱$ را به $\mathcal{E}_۲$ تصویر می‌کند اگروفقط‌اگر $S_{\mathcal{E}_۲} = f(S_{\mathcal{E}_۱})$.*

برهان. [۱۶]. □

فرض کنید S یک برش از π و فرض کنید p یک نقطه از دامنه S باشد. توسط $\{S\}_p$ ریشه‌ی S در نقطه‌ی p را تعریف می‌کنیم. گوییم ریشه‌های $\{S_1\}_{P_1}$ و $\{S_2\}_{P_2}$ هم‌ارز هستند هرگاه $f \in \Gamma$ موجود باشد به‌طوری‌که:

$$f(\{S_1\}_{p_1}) = \{f(S_1)\}_{f(p_1)} = \{S_2\}_{p_2}.$$

۱.۴.۳ تقارن‌هایی از برش‌ها

فرض کنید S یک برش از π و فرض کنید ξ یک میدان برداری در پایه‌ی $\mathbb{R}^1$ از π باشد. شار ξ را به‌وسیله‌ی f_t تعریف می‌کنیم. گوییم ξ یک تقارن از S است اگر یکی از شرایط هم‌ارزی زیر برقرار باشد:

- میدان برداری $\xi^{(0)}$ به تصویر L_s^0 از S مماس است،
- به ازای هر t، $f_t(S) = S$.
- $df_t(S)/dt = 0$.

توسط $\mathrm{Sym}S$ جبرلی همه‌ی تقارن‌های برش S را تعریف می‌کنیم.

گزاره ۲.۴.۳. *فرض کنید $S : x \to (x, a_{n-2}(x), \cdots, a_0(x))$ یک برش از π و فرض کنید $\xi = \varphi(x)\partial/\partial x$. آنگاه:*

- *ξ یک تقارن از S است اگروفقط‌اگر $\varphi(x)$ یک جواب از سیستم (۱۱.۳) باشد.*
- *$\varphi(x)\partial/\partial x$ یک تقارن از S است اگروفقط‌اگر $\varphi(x)\partial/\partial x + ((n-1)/2)\varphi' y\partial/\partial y$ یک تقارن نقطه‌ای از معادله $\mathcal{E}_s$ باشد.*
- *$\dim(\mathrm{Sym}S)$ برابر با ۳ یا ۱، یا ۰ است.*
- $\dim(\mathrm{pnt}\mathcal{E}_s) = \dim(\mathrm{Sym}S_{\mathcal{E}}) + n + 1$

برهان. [۱۶]. □

گزاره ۳.۴.۳. *فرض کنید ξ تقارنی از یک برش S از π و فرض کنید $f \in \Gamma$. آنگاه $f_*(\xi)$ تقارنی از برش $f(S)$ است.*

برهان. فرض کنید f_t شار ξ باشد. آنگاه $f \circ f_t \circ f^{-1}$ شاری از $f_*\xi$ است و همچنین $(f \circ f_t \circ f^{-1})(f(S)) = (f \circ f_t)(S) = f(S)$. □

۲.۴.۳ کلاف‌های لاگر فورسیت

فرض کنید E^{n-3} زیرفضایی از فضای کامل E از π توسط

$$E^{n-3} = \{(x, a_{n-2}, a_{n-3}, \cdots, a_0) \in E | a_{n-2} = 0\}.$$

تعریف شده است، آنگاه $\tau = \pi|_{E^{n-3}} : E^{n-3} \to \mathbb{R}$ یک زیرکلاف از کلاف π است.

توسط

$$G = \left\{ f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad | \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \quad , \quad \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \neq 0 \right\}.$$

گروه لی از همه‌ی تبدیلات تصویری $\mathbb{R}^1$ را تعریف می‌کنیم. که مجموعه‌ای از جواب‌های غیرثابت معادله‌ی

$$2f'''f' - 3(f'')^2 = 0 \tag{۱۷.۳}$$

با G منطبق است. از گزاره (۶.۳.۳)، قضیه (۷.۳.۳) و گزاره (۱.۴.۳)، برای هر $f \in G$، دیفیومورفیسم $f^{(0)}$ را داریم که کلاف τ را به خودش تصویر می‌کند. به‌وسیله $\mathcal{G}$ جبر لی G را تعریف می‌کنیم که $\mathcal{G}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است و توسط میدان‌های برداری

$$\xi_0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \xi_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad \xi_2 = x^2\frac{\partial}{\partial x}. \tag{۱۸.۳}$$

تولید شده است.

فرض کنید S یک برش از π و $f \in \Gamma$. گوییم تبدیل f یک تبدیل لاگرفورسیت برای S است هرگاه تبدیل $\phi \ni (f,\hat{f})$ یک تبدیل لاگرفورسیت برای معادله $\mathcal{E}_s$ باشد.

۵.۳ طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی

۱.۵.۳ طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با جبر $(n+۴)$−بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای

قضیه ۱.۵.۳. *فرض کنید S یک برش از π با $\dim(\mathrm{Sym}S) = ۳$ و فرض کنید ۰ یک برش صفر از π باشد. آنگاه برای هر p از دامنه‌ی S، ریشه‌های $\{S\}_p$ و $\{۰\}_۰$ هم‌ارز هستند.*

برهان. یک تبدیل لاگرفورسیت $f \in \Gamma$ برای S انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که $f(p) = ۰$. فرض کنید $S' = f(S) : x \to (x, a_{n-۳}(x), \cdots, a_۰(x))$. از $\dim(\mathrm{Sym}S) = ۳$، داریم $\dim(\mathrm{Sym}S') = ۳$. از گزاره (۲.۴.۳)، نتیجه می‌گیریم $\mathrm{Sym}S'$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است به‌طوری‌که توسط میدان‌های برداری مستقل خطی $\varphi_i(x)\partial/\partial x, i = ۱,۲,۳$ تولید شده است، که تابع φ_i جواب‌هایی از دستگاه (۱۱.۳) است.در این مورد این سیستم به فرم زیر است:

$$\begin{cases} \varphi''' = ۰ \\ ۳a_{n-۳}\varphi' + a'_{n-۳}\varphi = ۰ \\ \dfrac{(k-۱)(n-(k-۱))}{۲}a_{n-k+۱}\varphi'' + ka_{n-k}\varphi' + a'_{n-k}\varphi = ۰, \\ k = ۴,۵,\cdots,n. \end{cases} \tag{۱۹.۳}$$

از معادله‌ی دوم از این دستگاه، داریم $a_{n-۳} \equiv ۰$. از معادله‌ی سوم، داریم $a_{n-۴} \equiv ۰$. و از معادله‌ی آخر بدست می‌آوریم $a_۰ \equiv ۰$. □

از قضیه (۲.۳.۳)، گزاره (۱.۴.۳) و قضیه (۱.۵.۳)، مساله طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی نسبت به تبدیلات برخوردی به مساله طبقه‌بندی ریشه‌های برش کلاف π نسبت به شبه‌گروه Γ کاهش یافته است.

۶.۳ طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با جبر $(n+۲)$–بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای

۱.۶.۳ معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت

فرض کنید S یک برش از کلاف π با $\dim(\mathrm{Sym}S)=۱$. جبر $\mathrm{Sym}S$ به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$، روی میدان برداری $\varphi(x)\partial/\partial x$ تولید شده است، که $\varphi(x)$ یک جواب یکتا از (۱۱.۳) است.

تعریف ۱.۶.۳. فرض کنید p یک نقطه از دامنه S باشد. گوییم p یک **نقطه‌ی منظم** از $S(\mathcal{E}_{s})$ است هرگاه $\varphi(p)\neq ۰$. همچنین ریشه‌ی S در یک نقطه‌ی منظم، **ریشه‌ی منظم** نام دارد.

قضیه ۲.۶.۳. *فرض کنید S یک برش از π با $\dim(\mathrm{Sym}S)=۱$، و فرض کنید $\{S\}_p$ یک ریشه‌ی منظم است. آنگاه یک برش ثابت S' از π وجود دارد به‌طوری‌که $\{S\}_p$ و $\{S'\}_۰$ هم‌ارز هستند.*

برهان. در یک همسایگی از p، یک دیفیومورفیسم f از $\mathbb{R}^۱$، میدان برداری $\varphi(x)\partial/\partial x$ (که دیفیومورفیسم $f: x\to X$، $\varphi(x)\partial/\partial x$ را به $\partial/\partial X$ تصویر می‌کند) و $f(p)=۰$ وجود دارد. نتیجه می‌شود برش $f(S)$ تقارن $\partial/\partial X$ را دارد. بنابراین $f(S)$، یک برش ثابت در همسایگی $۰\in\mathbb{R}^۱$ است. توسط S' برش ثابت از π منطبق با$f(S)$ در همسایگی $۰\in\mathbb{R}^۱$ مشخص می‌کنیم. □

نتیجه ۳.۶.۳. *فرض کنید $\mathcal{E}$ یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی از فرم (۱.۳) با $\dim(\mathrm{Pnt}\mathcal{E})=n+۲$ و p یک نقطه‌ی منظم برای $\mathcal{E}$ است. آنگاه، در همسایگی p، $\mathcal{E}$ با یک معادله دیفرانسیل معمولی از فرم (۱.۳) با ضرایب ثابت هم‌ارز است.*

برهان. [۷]. □

از گزاره (۲.۶.۳) مساله طبقه‌بندی برشهای π با جبرهای ۱–بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای در همسایگی نقاط منظم به طبقه‌بندی برشهای ثابت از π در حد هم‌ارزی کاهش یافته است.

گزاره ۴.۶.۳. *فرض کنید $S: x\to(x, a_{n-۲},\cdots,a_۰)$ یک برش ثابت از π است. آنگاه $\dim(\mathrm{Sym}S)=۳$ اگروفقط‌اگر مولفه‌های a_{n-k} در شرایط زیر صدق کنند.*

- *اگر k فرد باشد، آنگاه $a_{n-k}=0$،*

- *اگر k زوج باشد، آنگاه ضرایب a_{n-k} در جملاتی از a_{n-2} توسط فرمول بازگشتی*

$$a_{n-2m}=\frac{1}{2m}\left(R_n^{2m-1}\lambda^{2m}-\sum_{s=0}^{2m-4}R_{n-2-2s}^{2m-1-2s}a_{n-2-2s}\lambda^{2m-2-2s}\right),$$

که

$$R_p^q=\binom{p}{q-1}(n-1)/2-\binom{p}{q},\lambda^2=\frac{2}{R_n^3}a_{n-2},m=2,4,\cdots.$$

بیان شده‌اند. بویژه، اگر $a_{n-2}=0$، آنگاه همه‌ی ضرایب صفر هستند.

برهان. فرض کنید $S:x\to(x,a_{n-2},\cdots,a_0)$ یک برش ثابت از π است. آنگاه $\dim(\mathrm{Sym}S)=3$ اگروفقط‌اگر دستگاه (۱۱.۳) سه جواب مستقل خطی برای S داشته باشد. این دستگاه در این مورد فرم زیر را دارد:

$$\begin{cases} R_n^3\varphi^{(3)}-2a_{n-2}\varphi^{(1)}=0\\ R_n^{k+1}\varphi^{(k+1)}-\sum_{s=0}^{k-3}R_{n-2-s}^{k-1-s}a_{n-2-s}\varphi^{(k-1-s)}-ka_{n-k}\varphi^{(1)}=0,\\ k=3,4,\cdots,n.\end{cases}$$

از معادله‌ی اول، سه جواب مستقل خطی ۱ و $e^{\lambda x}$ و $e^{-\lambda x}$ بدست می‌آوریم. که $\lambda^2=(2/R_n^3)a_{n-2}$. واضح است که دستگاه سه جواب مستقل خطی دارد اگروفقط‌اگر:

$$a_{n-k}=\frac{1}{k}\left(R_n^{k+1}\lambda^k-\sum_{s=0}^{k-3}R_{n-2-s}^{k-1-s}a_{n-2-s}\lambda^{k-2-s}\right),\quad k=3,4,\cdots,n$$
$$\lambda^2=\frac{2}{R_n^3}a_{n-2}$$

واین برای $\pm\lambda$ قابل تحقق است. بنابراین اثبات کامل است. □

۲.۶.۳ طبقه‌بندی برش‌های ثابت با جبرهای ۱−بعدی از تقارن‌ها

گزاره ۵.۶.۳. *فرض کنید S یک برش ثابت از π با جبر ۱−بعدی از تقارن‌ها و فرض کنید f یک دیفئومورفیسم از $\mathbb{R}^1$ است. آنگاه $f(S)$ یک برش ثابت است اگروفقط‌اگر $f(x)=\lambda x+\nu$، که $\lambda\neq 0,\nu\in\mathbb{R}$.*

برهان. برش S تقارن $\partial/\partial x$ را دارد. f_* این تقارن را به تقارن $f'(f^{-1}(X))\frac{\partial}{\partial X}$ از برش $f(S)$ تصویر می‌کند. بدیهی است که $f(S)$ ثابت است اگروفقط‌اگر $f' = \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$. و در نهایت با $f(x) = \lambda x + \nu, \nu \in \mathbb{R}$ هم‌ارز است. □

بدیهی است که مساله طبقه بندی برش‌هایی ازπ با جبرهای ۱–بعدی از تقارن‌ها در یک همسایگی از نقطه منظم به طبقه‌بندی برش‌های ثابت با جبرهای ۱–بعدی از تقارن‌ها نسبت به گروهی از همه‌ی تبدیلات خطی $x \to \lambda x, \lambda \neq 0$ از $\mathbb{R}^1$ کاهش یافته است.

گزاره ۶.۶.۳. *فرض کنید* $(a_0$ *و* $S_1 : x \to (x, a_{n-2}, a_{n-3}, \cdots, a_0)$ *و* $S_2 : X \to (X, A_{n-2}, A_{n-3}, \cdots, A_0)$ *برش‌های ثابت از* π *با جبرهای ۱–بعدی از تقارن‌ها باشند، آنگاه* S_1 *و* S_2 *هم‌ارز هستند اگروفقط‌اگر* $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ *وجود داشته باشد، به‌طوریکه*

$$a_{n-2} = \lambda^2 A_{n-2}, \quad a_{n-3} = \lambda^3 A_{n-3}, \quad \cdots, \quad a_0 = \lambda^n A_0. \tag{۲۰.۳}$$

برهان. فرض کنید S_1 و S_2 هم‌ارز هستند. به این معنی که یک تبدیل خطی $f(x) = \lambda x$ وجود دارد که S_1 را به S_2 تصویر می‌کند. تبدیل نقطه‌ای $(f, \hat{f})$ از فرم (۳.۳) تولید شده توسط f بوسیله $X = \lambda x$ و $Y = |\lambda|^{(n-1)/2} y$ تعریف شده است. از (۵.۳)، امتداد $(f, \hat{f})^{(n)}$ توسط

$$X = \lambda x, \quad Y = |\lambda|^{(n-1)/2} y, \quad P_1 = |\lambda|^{(n-1)/2}\lambda^{-1} p_1, \cdots, P_n = |\lambda|^{(n-1)/2}\lambda^{-n} p_n.$$

تعریف شده است. نتیجه می‌شود که $p_n = \lambda^2 A_{n-2} p_{n-2} + \lambda^3 A_{n-3} p_{n-3} + \cdots + \lambda^n A_0 y$ معادله‌ی $\mathcal{E}_{s_1}$ بدست آمده از $\mathcal{E}_{s_2}$ توسط تبدیل نقطه‌ای $(f, \hat{f})$ است. که حالتی از گزاره بالاست. □

فرض کنید $\mathcal{J} \subset \{2, 3, \cdots n\}, n \geq 3$ یک زیرمجموعه غیر تهی باشد. اگر $\mathcal{J}$ شامل اعداد فرد باشد، آنگاه توسطm عدد فرد کمین از $\mathcal{J}$ را مشخص می‌کنیم. اگر $\mathcal{J}$ شامل اعداد زوج باشد، آنگاه به‌وسیله m عدد کمین از $\mathcal{J}$ را تعیین می‌کنیم.

توسط $S^{\mathcal{J}}$ یک برش ثابت با جبر ۱−بعدی از تقارن‌های $S : x \to (x, a_{n-2}, a_{n-3}, \cdots, a_0)$ با شرط $a_{n-i} \neq 0$ اگر $i \in \mathcal{J}$ و بقیه جاها $a_{n-i} = 0$ تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$I_k(S^{\mathcal{J}}) = \begin{cases} a_{n-k}/a_{n-m}^{k/m}, & k \in \mathcal{J}, \quad \text{درصورتی‌که } \mathcal{J} \text{ شامل اعداد فرد باشد} \\ a_{n-k}/|a_{n-m}|^{k/m}, & k \in \mathcal{J}, \quad \text{درصورتی‌که } \mathcal{J} \text{ شامل اعداد زوج باشد.} \end{cases}$$

قضیه ۷.۶.۳. • *اگر $\mathcal{J}_1 \neq \mathcal{J}_2$، آنگاه برش‌های $S^{\mathcal{J}_1}$ و $S^{\mathcal{J}_2}$ هم‌ارز نیستند.*

• *برش‌های $S_1^{\mathcal{J}}$ و $S_2^{\mathcal{J}}$ هم‌ارز هستند اگروفقط‌اگر*

$$I_k(S_1^{\mathcal{J}}) = I_k(S_2^{\mathcal{J}}) \quad \text{برای هر } k \in \mathcal{J}. \tag{۲۱.۳}$$

برهان. • حالت اول از رابطه (۲۰.۳) ثابت می‌شود.

• فرض کنید برش‌های $S_1^{\mathcal{J}}$ و $S_2^{\mathcal{J}}$ هم‌ارز هستند. آنگاه، از رابطه (۲۰.۳) نتیجه می‌شود که $\lambda = a_{n-m}^{1/m}/A_{n-m}^{1/m}$ درصورتی‌که $\mathcal{J}$ شامل اعداد فرد باشد و $\lambda = |a_{n-m}|^{1/m}/|A_{n-m}|^{1/m}$ هنگامیکه $\mathcal{J}$ شامل اعداد زوج باشد. این عبارت را برای λ (به ترتیب برای λ^2) در (۲۰.۳) قرار می‌دهیم. رابطه (۲۱.۳) بدست می‌آید.

برعکس، فرض کنید رابطه (۲۱.۳) برقرار است. فرض کنید $\mathcal{J}$ شامل اعداد فرد باشد. آنگاه λ را توسط فرمول $\lambda = a_{n-m}^{1/m}/A_{n-m}^{1/m}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین $(a_{n-m})^{1/m} = \lambda(A_{n-m})^{1/m}$. این عبارت را برای $(a_{n-m})^{1/m}$ در (۲۱.۳) جایگزین می‌کنیم، رابطه (۲۰.۳) بدست می‌آید. اگر $\mathcal{J}$ شامل اعداد زوج باشد، آنگاه $\lambda = |a_{n-m}|^{1/m}/|A_{n-m}|^{1/m}$، بنابراین رابطه (۲۰.۳) را توسط استدلال مشابه بدست می‌آوریم.

□

نتیجه ۸.۶.۳. *گردایه‌ای از اعداد $I_k(S^{\mathcal{J}})$، $k \in \mathcal{J}$، گردایه‌ای کامل از ناورداهاست به‌طوری‌که مساله هم‌ارزی برای برش‌هایی از فرم $S^{\mathcal{J}}$ را حل می‌کند.*

برهان. [۱۶]. □

توسط $\mathcal{J}_۱$ زیرمجموعه غیر تهی از $\{۲,۳,\cdots,n\}$، $n \geq ۳$، شامل اعداد فرد، تعیین می‌کنیم. همچنین توسط $\mathcal{J}_۲$ زیرمجموعه غیر تهی از $\{۲,۳,\cdots,n\}$، $n \geq ۳$، شامل اعداد زوج مشخص می‌کنیم. به‌وسیله‌ی $S_{+۱}^{\mathcal{J}_۱}$ یک برش از فرم $S^{\mathcal{J}_۱}$ با $a_{n-m}=۱$، توسط $S_{+۱}^{\mathcal{J}_۲}$ یک برش از فرم $S^{\mathcal{J}_۲}$ با $a_{n-m}=۱$، و در نهایت توسط $S_{-۱}^{\mathcal{J}_۲}$ یک برش از فرم $S^{\mathcal{J}_۲}$ با $a_{n-m}=-۱$ مشخص می‌کنیم. و به‌وسیله‌ی $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از همه‌ی برش‌های فرم $S_{+۱}^{\mathcal{J}_۱}$، $S_{+۱}^{\mathcal{J}_۲}$ و $S_{-۱}^{\mathcal{J}_۲}$ برای $\mathcal{J}_۱$ و $\mathcal{J}_۲$ تعیین می‌کنیم.

قضیه ۹.۶.۳. *(طبقه‌بندی برش‌های ثابت از π با جبرهای ۱-بعدی از تقارن‌ها در حد هم‌ارزی)*

- *هر دو برش از $\mathcal{F}$ هم‌ارز نیستند.*
- *هر برش ثابت از π با جبر ۱-بعدی از تقارن‌ها با برشی از $\mathcal{F}$ هم‌ارز است.*

برهان. [۱۶]. □

قضیه ۱۰.۶.۳. *(طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه $n \geq ۳$ با جبرهای $(n+۲)$-بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای در یک همسایگی از یک نقطه‌ی منظم در حد هم‌ارزی)*

- *فرض کنید $S_۱, S_۲ \in \mathcal{F}$ و $S_۱ \neq S_۲$. آنگاه ریشه‌های $\{S_۱\}_{p_۱}$ و $\{S_۲\}_{p_۲}$ هم‌ارز نیستند.*
- *فرض کنید S یک برش از π با جبر ۱-بعدی از تقارن‌ها و p یک نقطه منظم از این دامنه باشد. آنگاه $\{S\}_p$ با یک ریشه از برش $\mathcal{F}$ هم‌ارز است.*

برهان. [۱۶]. □

بنابراین $\mathcal{F}$ یک خانواده کامل از برش‌های غیر هم‌ارز با جبرهای ۱-بعدی از تقارن‌هاست. به‌طور مثال، $\mathcal{F}$ را برای $n=۳,۴$ بررسی می‌کنیم.

فرض کنید $n=۳$. آنگاه $\mathcal{J}_۱=\{۱,۰\},\{۰\}$ و $\mathcal{J}_۲=\{۱\}$. از (۲۳.۳)، داریم $\dim(\mathrm{Sym}S^{\mathcal{J}_۲})=۳$.
بنابراین خانواده‌ی $\mathcal{F}$ شامل برش‌های زیر است:

$$p_۳=a_۱p_۱+y,\quad a_۱\in\mathbb{R}\setminus\{۰\},$$

$$p_۳=y.$$

فرض کنید $n=۴$. آنگاه $\mathcal{J}_۱=\{۲,۱,۰\},\{۲,۱\},\{۱,۰\},\{۱\}$ و $\mathcal{J}_۲=\{۲,۰\},\{۰\}$. از (۲۳.۳)، برش‌های $S:x\to(x,\pm p_۲,۰,(۱/۲۰)y)$ از فرم $S^{\mathcal{J}_۲}$ جبرهای ۳−بعدی از تقارن‌ها را دارند. برش‌های دیگر از این فرم جبرهای ۱−بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای را دارند. بنابراین خانواده‌ی $\mathcal{F}$ شامل برش‌های زیر است.

$$p_۴=a_۲p_۲+p_۱+a_۰y,\quad a_۲,a_۰\in\mathbb{R}\setminus\{۰\},$$

$$p_۴=b_۲p_۲+p_۱,\quad b_۲\in\mathbb{R}\setminus\{۰\},$$

$$p_۴=\pm p_۲+c_۰y,\quad c_۰\in\mathbb{R}\setminus\{۰\},\quad c_۰\neq ۱/۲۰,$$

$$p_۴=p_۱+d_۰y,\quad d_۰\in\mathbb{R}\setminus\{۰\},$$

$$p_۴=p_۱,$$

$$p_۴=\pm y.$$

۷.۳ ناورداهای دیفرانسیل از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی فرم (۲.۳)

در اینجا جبری از ناورداهای دیفرانسیل اسکالر معادلات دیفرانسیل معمولی خطی فرم (۲.۳) را محاسبه می‌کنیم و مساله هم‌ارزی برای این معادلات را حل می‌کنیم.

۱.۷.۳ کلاف‌های جت

مختصات استاندارد x,a_{n-i} به‌طوریکه $i=۳,۴,\cdots n$، روی کلاف τ، مختصات استاندارد $x,a_{n-j}^{(r)}$ به‌طوریکه $j=۳,۴,\cdots,n,r=۰,۱,۲,\cdots,k$ روی کلاف جت $\tau_k:J^k\tau\to\mathbb{R}$ که $k=۰,۱,۲,\cdots,\infty$

تعریف می‌کند.

هر دیفیمورفیسم $f^{(\circ)}$، $f \in G$، می‌تواند به تبدیلات لی $f^{(k)}$ از کلاف‌های جت $J^k\mathcal{T}$ که $k = ۱, ۲, \cdots, \infty$ توسط فرمول

$$f^{(k)}([S]^k_p) = \left[f^{(\circ)} \circ S \circ f^{-۱}\right]^k_{f(p)}. \qquad (۲۲.۳)$$

امتداد یابد. و برای هر $l > m$، نمودار

$$\begin{tikzcd} J^l\mathcal{T} \arrow[r, "f^{(l)}"] \arrow[d, "\pi_{l,m}"'] & J^l\mathcal{T} \arrow[d, "\pi_{l,m}"] \\ J^m\mathcal{T} \arrow[r, "f^{(m)}"'] & J^m\mathcal{T} \end{tikzcd}$$

جابه‌جایی است.

فرض کنید

$$G^{(k)} = \{f^{(k)} | f \in G\}, \quad k = ۰, ۱, ۲, \cdots, \infty.$$

همچنین فرض کنید

$$G_+ = \{f \in G | f' > ۰\}, \quad G_- = \{f \in G | f' < ۰\}.$$

به‌وسیله μ، عنصری از G_- تعریف شده توسط

$$\mu(x) = -x, \quad \text{برای هر } x \in \mathbb{R}^۱$$

مشخص می‌کنیم. داریم

$$G = G_+ \cup G_-, \quad G_- = \mu \circ G_+,$$

امتداد μ^k توسط

$$\mu^{(k)}((x, a^{(r)}_{n-j})) = (-x, (-۱)^{j+r} a^{(r)}_{n-j}), j = ۳, ۴, \cdots, n, r = ۰, ۱, \cdots, k \qquad (۲۳.۳)$$

تعریف شده است.

فرض کنید

$$G_+^{(k)} = \{f^{(k)}|f \in G_+\}, \quad G_-^k = \{f^{(k)}|f \in G_-\}.$$

داریم:

$$G^{(k)} = G_+^{(k)} \cup G_-^k, \quad G_-^{(k)} = \mu^{(k)} \circ G_+^{(k)}.$$

فرض کنید $\xi = \varphi(x)\partial/\partial x$ یک عنصر دلخواه از $\mathcal{G}$ است. میدان برداری $\xi^{(\infty)}$ توسط فرمول

$$\xi^{(\infty)} = \varphi D_x + \Theta_\psi, \tag{۲۴.۳}$$

تعریف شده است که $D_x = \partial/\partial x + \sum_{k=\circ}^{\infty}\sum_{j=۳}^{n} a_{n-j}^{(k+۱)}\partial/\partial a_{n-j}^{(k)}$ عملگری از مشتق کامل نسبت به x است. و $\Theta_\psi = \sum_{k=\circ}^{\infty}\sum_{j=۳}^{n} D_x^k(\psi_{n-j})\partial/\partial a_{n-j}^{(k)}$ عملگری از مشتق‌گیری ریشه‌یابی با تابع مولد $\psi = (\psi_{n-۳}, \cdots, \psi_\circ)^t$ است. فرض کنید $x_۱ = [S]_x^۱ \in J^۱\tau$ و $x = \tau_۱(x_۱)$، آنگاه

$$\psi(x_۱) = \begin{pmatrix} \psi_{n-۳}(x_۱) \\ \cdots \\ \psi_\circ(x_۱) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\left(f_t^{(\circ)} \circ S \circ f_t^{-۱}(x)\right)\Big|_{t=\circ} \tag{۲۵.۳}$$

فرض کنید $S(x) = (x, a_{n-۳}(x), \cdots, a_\circ(x))$. آنگاه، با توجه به این‌که $df_t/dt|_{t=\circ} = \varphi$ و $\varphi''' = \circ$، داریم:

$$\psi = \begin{pmatrix} -۳a_{n-۳}\varphi' - a_{n-۳}^{(۱)}\varphi \\ -\frac{۳(n-۳)}{۲}a_{n-۳}\varphi'' - ۴a_{n-۴}\varphi' - a_{n-۴}^{(۱)}\varphi \\ \cdots \\ -\frac{(k-۱)(n-(k-۱))}{۲}a_{n-k+۱}\varphi'' - ka_{n-k}\varphi' - a_{n-k}^{(۱)}\varphi \\ \cdots \\ -\frac{n-۱}{۲}۱.a_۱\varphi'' - na_\circ\varphi' - a_\circ^{(۱)}\varphi \end{pmatrix} \tag{۲۶.۳}$$

از (۲۴.۳) و (۲۶.۳) برای هر $k = \circ, ۱, ۲, \cdots, \infty$، داریم:

$$\xi_\circ^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x} \tag{۲۷.۳}$$

$$\xi_1^{(k)} = x\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{r=0}^{k}\sum_{j=3}^{n}(j+r)a_{n-j}^{(r)}\frac{\partial}{\partial a_{n-j}^{(r)}}. \tag{۲۸.۳}$$

$$\begin{aligned}\xi_2^{(k)} = x^2\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{r=0}^{k}\sum_{j=3}^{n} & 2x(j+r)a_{n-j}^{(r)}\frac{\partial}{\partial a_{n-j}^{(r)}} \\ & + (j-1)(n-(j-1))a_{n-(j-1)}^{(r)}\frac{\partial}{\partial a_{n-j}^{(r)}} \\ & + (2j+r-1)ra_{n-j}^{(r-1)}\frac{\partial}{\partial a_{n-j}^{(r)}},\end{aligned} \tag{۲۹.۳}$$

که $a_{n-2}^{(r)} = 0$.

۲.۷.۳ زیرکلاف‌های ناوردا

فرض کنید E^i، $i = n-3, n-4, \cdots, 0, -1$، زیرفضایی از فضای کامل E از τ توسط

$$E^i = \{(x, a_{n-3}, a_{n-4}, \cdots a_0) \in E | a_j = 0 \text{ اگر } j > i\}.$$

تعریف شده است. زیرکلاف $\tau|_{E^i} \to \mathbb{R}$ از کلاف τ را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۱.۷.۳. *هر زیرکلاف E^i نسبت به G° ناورداست.*

برهان. از (۲۹.۳)-(۲۷.۳)، تحدیدهایی از میدان‌های برداری $\xi_0^{(0)}$، $\xi_1^{(0)}$، و $\xi_2^{(0)}$ روی E^i داریم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_0^{(0)}|_{E^i} = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{۳۰.۳}$$

$$\xi_1^{(0)}|_{E^i} = x\frac{\partial}{\partial x} - (\,(n-i)a_i\frac{\partial}{\partial a_i} + \cdots + na_0\frac{\partial}{\partial a_0}), \tag{۳۱.۳}$$

$$\begin{aligned}\xi_2^{(0)}|_{E^i} = x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2x(\,(n-i)a_i\frac{\partial}{\partial a_i} + \cdots + na_0\frac{\partial}{\partial a_0} \\ - (i(n-i)a_i\frac{\partial}{\partial a_{i-1}} + \cdots + (n-1)a_1\frac{\partial}{\partial a_0}).\end{aligned} \tag{۳۲.۳}$$

پس $\xi_{\circ}^{(\circ)}|_{E^i}$، $\xi_{1}^{(\circ)}|_{E^i}$ و $\xi_{2}^{(\circ)}|_{E^i}$ میدان‌های برداری مماس به E^i است. بنابراین هر زیرکلاف E^i نسبت به G_{+}° ناورداست. از (۲۳.۳)، داریم $\mu^{(\circ)}(E^i) = E^i$. پس اثبات کامل است. □

فرض کنید E_i، $i = n-3, n-4, \cdots, \circ, -1$، زیرمجموعه‌ای از فضای کامل E از τ است که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$E_i = E^i/E^{i-1} \quad \text{اگر } i \geq \circ, \quad E_{-1} = E^{-1}.$$

زیرکلاف

$$\tau^i = \tau|_{E_i} : E_i \to \mathbb{R}$$

از کلاف τ را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۲.۷.۳. *$(n-i)$- فرم دیفرانسیل تقارنی $\omega_i = a_i dx^{n-i}|_{E_i}$ روی E_i، نسبت به $G^{(\circ)}$ ناورداست.*

برهان. [۱۶]. □

۳.۷.۳ ناورداهای دیفرانسیل اسکالر از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی

تعریف ۳.۷.۳. تابع $I \in C^{\infty}(J^k\tau^i)$ یک **ناوردای دیفرانسیل اسکالر** از $G(G_+)$ نامیده می‌شود هرگاه:

$$(f^{(k)})^* I = I \qquad \text{برای هر } f \in G\,(G_+)$$

فرض کنید I یک ناوردای دیفرانسیل اسکالر از $G\,(G_+)$ و فرض کنید S یک برش از τ^i است. با استفاده از تعریف قرار می‌دهیم:

$$I(S) = (j_k S)^* I \tag{۳۳.۳}$$

برای هر $f \in G$، داریم:

$$I(\,f(S)\,) \circ f = I(S). \tag{۳۴.۳}$$

در واقع:

$$I(f(S)) = (j_k f(S))^* I = (j_k(f^{(\circ)} \circ S \circ f^{-1}))^* I = (f^{(k)} \circ j_k S \circ f^{-1})^* I$$
$$= (f^{-1})^* \circ (j_k S)^* \circ (f^{(k)})^* I = (f^{-1})^* \circ (j_k S)^* I = (f^{-1})^* I(S) = I(S) \circ f^{-1}.$$

فرض کنید S یک برش از τ است که یک جبر ۱–بعدی از تقارن‌های تصویری می‌پذیرد. آنگاه $I(S)$ برای هر ناوردای دیفرانسیل اسکالر I ثابت است. در واقع، فرض کنید ξ یک تقارن تصویری از S و فرض کنید f_t شار آن باشد. آنگاه

$$I(S) = I(f_t(S)) = I(f_t(S)) \circ f_t = I(S) \circ f_t.$$

بنابراین $I \in C^\infty(J^k\tau^i)$ یک ناوردای دیفرانسیل اسکالر از G_+ است اگروفقط‌اگر I جوابی از دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی خطی زیر باشد:

$$\begin{cases} \overline{\xi}_\circ^{(k)}(I) = \circ \\ \overline{\xi}_1^{(k)}(I) = \circ \\ \overline{\xi}_2^{(k)}(I) = \circ, \end{cases} \tag{۳۵.۳}$$

که $\overline{\xi}_\circ^{(k)}$، $\overline{\xi}_\circ^{(k)}$ و $\overline{\xi}_2^{(k)}$ تحدیدهایی از $\xi_\circ^{(k)}$، $\xi_1^{(k)}$ و $\xi_2^{(k)}$ نسبت به $J^k\tau^i$ هستند. از (۲۹.۳)– (۲۷.۳)، داریم:

$$\overline{\xi}_\circ^{(k)} = \xi_\circ^{(k)}\Big|_{J^k\tau^i} = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{۳۶.۳}$$

$$\overline{\xi}_1^{(k)} = \xi_1^{(k)}\Big|_{J^k\tau^i} = x\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{r=\circ}^{k}\sum_{j=\circ}^{i}(n-j+r)a_j^{(r)}\frac{\partial}{\partial a_j^{(r)}}, \tag{۳۷.۳}$$

$$\begin{aligned} \overline{\xi}_2^{(k)} = \xi_2^{(k)}\Big|_{J^k\tau^i} &= x^2\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{r=\circ}^{k}\sum_{j=\circ}^{i} 2x(n-j+r)a_j^{(r)}\frac{\partial}{\partial a_j^{(r)}} \\ &+ (n-j-1)(j+1)a_{j+1}^{(r)}\frac{\partial}{\partial a_j^{(r)}} \\ &+ (2(n-j)+r-1)ra_j^{(r-1)}\frac{\partial}{\partial a_j^{(r)}}. \end{aligned} \tag{۳۸.۳}$$

به‌وسیله $\mathcal{A}_i^k$ جبری از ناورداهای دیفرانسیل اسکالر G_+ روی $J^k\tau^i$ را مشخص می‌کنیم. و توسط $\mathcal{D}_i^k$ توزیع تولید شده به‌وسیله‌ی میدان‌های برداری $\overline{\xi}_\circ^{(k)}$، $\overline{\xi}_1^{(k)}$ و $\overline{\xi}_2^{(k)}$ روی $J^k\tau^i$ را تعریف می‌کنیم. از (۳۸.۳)-(۳۶.۳)، هرگاه $i=\circ, k=\circ$ داریم $\dim\mathcal{D}_i^k=2$ ، در غیر اینصورت $\dim\mathcal{D}_i^k=3$. توسط N_i^k تعداد ناوردای دیفرانسیل اسکالر مستقل تابعی در $\mathcal{A}_i^k$ را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$N_i^k=\dim J^k\pi^i-\dim\mathcal{D}_i^k$$

بنابراین

$$N_\circ^\circ=\circ,\quad N_\circ^1=\circ,\quad N_\circ^k=k-1\quad \text{اگر } k\geq 2, \tag{۳۹.۳}$$

$$N_1^\circ=\circ,\quad N_1^k=2k\quad \text{اگر } k\geq 1, \tag{۴۰.۳}$$

$$N_i^\circ=i-1,\quad N_i^k=(k+1)(i-1)+2k\quad \text{اگر } k\geq 1. \tag{۴۱.۳}$$

میدان برداری

$$\zeta_i=|a_i|^{-1/(n-i)}\overline{D}_x \tag{۴۲.۳}$$

روی $J^\infty\tau^i$ که $\overline{D}_x=D_x|_{J^\infty\tau^i}=\partial/\partial x+\sum_{r=\circ}^\infty\sum_{j=\circ}^i a_j^{(r+1)}\partial/\partial a_j^{(r)}$ عملگری از مشتق کامل نسبت به x روی $J^\infty\tau^i$ را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۴.۷.۳. *میدان برداری ζ_i نسبت به G_+^∞ ناورداست.*

برهان. توسط $\overline{\xi}_r^\infty$، $r=\circ,1,2$، تحدیدی از $\xi_r^{(\infty)}$ به $J^\infty\tau^i$ مشخص می‌کنیم. برای هر r بررسی می‌کنیم که $\left[\zeta_i,\overline{\xi}_r^\infty\right]=\circ$. مطابق با (۲۷.۳)، داریم:

$$\left[\zeta_i,\overline{\xi}_\circ^{(\infty)}\right]=\left[|a_i|^{-1/(n-i)}\overline{D}_x,\frac{\partial}{\partial x}\right]=\circ.$$

با توجه به (۲۶.۳)، میدان‌های برداری $\overline{\xi}_1^{(\infty)}$ و $\overline{\xi}_2^{(\infty)}$ در فرم (۲۴.۳) به صورت زیر است:

$$\overline{\xi}_1^{(\infty)} = x\overline{D}_x + \overline{\Theta}_{((n-i)a_i + xa_i^{(1)})},$$

$$\overline{\xi}_2^{(\infty)} = x^2\overline{D}_x + \overline{\Theta}_{((i+1)(n-i+1)a_{i+1} + 2(n-i)xa_i + x^2 a_i^{(1)})},$$

که $\overline{\Theta}_\psi$ تحدیدی از Θ_ψ روی $J^\infty\tau^i$ است. با در نظر گرفتن اینکه برای هر ψ، $[\overline{D}_x, \overline{\Theta}_\psi] = 0$ است، بدست می‌آوریم $\left[\zeta_i, \overline{\xi}_1^{(\infty)}\right] = 0$ و $\left[\zeta_i, \overline{\xi}_2^{(\infty)}\right] = 0$. □

قضیه ۵.۷.۳. *جبر A_i توسط مولدهای*

$$\zeta_i^k(I_{i-m}), \quad m = 0, 1, \cdots, i, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

تولید شده است.

که

$$I_i = \left[2a_i a_i^{(2)} - \frac{2(n-i)+1}{n-i}(a_i^{(1)})^2\right].(a_i)^{-2(n-i+1)/(n-i)}; \tag{۴۳.۳}$$

$$I_{i-1} = \left[a_{i-1} - \frac{i}{2}a_i^{(1)}\right].|a_i|^{-(n-i+1)/(n-i)}; \tag{۴۴.۳}$$

برای $2 \le m \le i$

$$\begin{aligned} I_{i-m} = \Bigg[& a_{i-m} + \frac{(-1)^m}{m!}\Pi_{r=n-i+1}^{n-i+m-1}\frac{(n-r)r}{(n-i)i}(a_i)^{1-m}(a_{i-1})^m \\ & + \sum_{l=n-i+1}^{n-i+m-1}\frac{(-1)^{n-i+m-l}}{(n-i+m-l)!}\Pi_{r=l}^{n-i+m-1}\frac{(n-r)r}{(n-i)i}(a_i)^{i-n+l-m} \\ & (a_{i-1})^{n-i+m-l}a_{n-l}\Bigg].|a_i|^{-(n-i+m)/(n-i)}. \end{aligned} \tag{۴۵.۳}$$

برهان. می‌توان به راحتی ثابت کرد که $I_0, \cdots, I_i$ جوابهایی از دستگاه (۳۵.۳) است. فرض کنید $i = 0$. داریم $I_0 \in A_0^2$. برای هر $k = 0, 1, 2, \cdots$، ناورداهای $I_0, \zeta_0(I_0), \zeta_0^2(I_0), \cdots, \zeta_0^k(I_0)$ متعلق به A_0^{k+2} و

مستقل تابعی هستند. و تعداد آنها برابر $۱-(k+۲)$ است. از (۳۹.۳)، بدست می‌آوریم $N_۰^{k+۲}=۱-(k+۲)$.

در اینجا اثبات برای $i=۰$ به پایان می‌رسد. حال فرض کنید $i\geq ۱$. داریم

$$\zeta_i(I_{i-۱})=[\frac{-i}{۲}|a_i|a_i^{(۲)}+\cdots].(a_i)^{-۲(n-i+۱)/(n-i)}$$

منیفلد $J^\infty\tau^i$ دو مولفه‌ی همبند تعریف شده توسط نابرابری $a_i>۰$ و $a_i<۰$ دارد. با مقایسه $\zeta_i(I_{i-۱})$ با I_i، ناوردای دیفرانسیل اسکالر $J\in\mathcal{A}_i^۱$ را توسط فرمول

$$J=\begin{cases} I_i+\frac{۴}{i}\zeta_i(I_{i-۱}) & \text{اگر } a_i>۰ \\ I_i-\frac{۴}{i}\zeta_i(I_{i-۱}) & \text{اگر } a_i<۰. \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. به راحتی می‌توان بررسی کرد که

$$J=\left[\frac{۴}{i}a_ia_{i-۱}^{(۱)}-\frac{۴(n-i+۱)}{i(n-i)}a_i^{(۱)}a_{i-۱}+\frac{۱}{n-i}(a_i^{(۱)})^۲\right].(a_i)^{-۲(n-i+۱)/(n-i)}$$

فرض کنید $i=۱$. آنگاه $I_{i-۱},J\in\mathcal{A}_i^۱$ و مستقل تابعی هستند. ناورداهای

$$I_{i-۱},J,\zeta_i(I_{i-۱}),\zeta_i(J),\cdots,\zeta_i^k(I_{i-۱}),\zeta_i^k(J)$$

متعلق به $\mathcal{A}_i^{k+۱}$، $k=۰,۱,۲,\cdots$، و مستقل تابعی هستند و تعداد آنها برابر $۲(k+۱)$ است. از (۴۰.۳)، داریم $N_۱^{k+۱}=۲(k+۱)$. بنابراین اثبات برای $i=۱$ تمام می‌شود. حال فرض کنید $i>۱$. آنگاه ناورداهای $I_{i-۲},\cdots,I_۰$ متعلق به $\mathcal{A}_i^۰$ و مستقل تابعی هستند. ناورداهای $I_{i-۲},\cdots,I_۰,I_{i-۱},J$ مستقل تابعی و متعلق به $\mathcal{A}_i^۱$ هستند. در نهایت، ناورداهای

$$I_{i-۲},\cdots,I_۰,I_{i-۱},J,\cdots,\zeta_i^k(I_{i-۲}),\cdots,\zeta_i^k(I_۰),\zeta_i^k(I_{i-۱}),\zeta_i^k(J)$$

مستقل تابعی، متعلق به $\mathcal{A}_i^k$، $k=۱,۲,\cdots$ و تعداد آنها برابر $۲k+(i-۲)(k+۱)$ است. از (۴۱.۳)، داریم $N_i^k=۲k+(i-۱)(k+۱)$. بنابراین اثبات برای $i>۱$ به پایان می‌رسد. □

۴.۷.۳ مساله هم‌ارزی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی

فرض کنید

$$S_1(x) = (0, \cdots, 0, a_i(x), \cdots, a_0(x))$$

و

$$S_2(X) = (0, \cdots, 0, A_i(X), \cdots, A_0(X))$$

برش‌هایی از τ^i به‌ترتیب در همسایگی از نقاط $p \in \mathbb{R}$ و $P \in \mathbb{R}$ هستند. برش‌های S_1 و S_2 به‌طور موضعی در (p, P) نسبت به $G_+(G)$ هم‌ارز هستند هرگاه $f \in G_+(G)$ و همسایگی V از p و U از P وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(p) = P$ و $f(S_1|_V) = f^{(0)} \circ S_1|_V \circ f^{-1} = S_2|_U$.

قضیه ۶.۷.۳. *برش‌های S_1 و S_2 از τ^i به‌طور موضعی در (p, P) نسبت به G_+ هم‌ارز هستند، اگروفقط‌اگر شرایط زیر برقرار باشد:*

- $a_i(p).A_i(P) > 0$,
- *جواب f از معادله‌ی کوشی*

$$f' = |a_i(x)|^{1/(n-i)}.|A_i(f(x))|^{-1/(n-i)}, \quad f(p) = P \qquad (۴۶.۳)$$

در معادلات

$$I_m(S_2) \circ f = I_m(S_1), \quad m = i, i-1, \cdots 0 \qquad (۴۷.۳)$$

در همسایگی p صدق کند.

برهان. [۱۷] □

گزاره ۳.۷.۷. *فرض کنید S یک برش از τ^i آنگاه $\dim(\mathrm{Prj}S) = 1$ اگروفقط‌اگر $I_i(S), I_{i-1}(S), \cdots, I_0(S)$ ثابت‌ها باشند.*

برهان. [۱۶] □

۸.۳ طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با جبر $(n+1)$–بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای

۱.۸.۳ ریشه‌های منظم

فرض کنید S یک برش از π، و فرض کنید p یک نقطه‌ی دلخواه از دامنه S باشد، همچنین فرض کنید f یک تبدیل لاگرفورسیت از S در همسایگی p باشد. گوییم p یک نقطه از کلاس i برای S، (برای معادله $\mathcal{E}_s$) است هرگاه یک همسایگی U' از $f(p)$ و زیرکلاف E_i از τ به‌طوری‌که $\mathrm{Im}\, f(S)|_{U'} \subset E_i$ موجود باشد.

گوییم S یک برش از کلاس i است هرگاه هر نقطه از دامنه S یک نقطه از کلاس i باشد. اگر p یک نقطه از کلاس i برای S باشد آنگاه، در همسایگی U از p، $S|_U$ یک برش از کلاس i است. فرض کنید S یک برش از کلاس i با $\dim(\mathrm{Sym}S) = 0$، و f یک تبدیل لاگرفورسیت از S، فرض کنید $S' = f(S)$، و $I_i, I_{i-1}, \cdots, I_0$ مولدهایی از جبر ناورداهای دیفرانسیل اسکالر A_i تعریف شده در قضیه (۵.۷.۳) باشد. توابع هموار $I_i(S'), I_{i-1}(S'), \cdots, I_0(S')$ در $\mathbb{R}^1$ را بررسی می‌کنیم. از $\dim(\mathrm{Sym}S) = 0$ داریم $\dim(\mathrm{Sym}S') = 0$. با توجه به گزاره (۷.۷.۳) عدد صحیح j، $0 \leq j \leq i$، وجود دارد به‌طوری‌که $I_j(S')$ ثابت نیست. گوییم نقطه p از دامنه S یک نقطه منظم از S (از معادله $\mathcal{E}_s$) است هرگاه $dI_j(S')|_{f(p)} \neq 0$.

گوییم ریشه $\{S\}_p$ با $\dim(\mathrm{Sym}S) = 0$ یک ریشه منظم از کلاس i است هرگاه p یک نقطه از کلاس i و یک نقطه منظم برای S باشد. توسط $\mathcal{F}_i$، $i = n-3, n-4, \cdots 0$، مجموعه‌ای از ریشه‌های منظم $\{S\}_0$ از کلاس i را مشخص می‌کنیم.

۲.۸.۳ طبقه‌بندی ریشه‌های منظم

فرض کنید $\{S\}_\circ \in \widetilde{\mathcal{F}}_i$ و f یک تبدیل لاگرفورسیت از S، فرض کنید $S' = f(S)$ و $p_\circ = f(\circ)$. قرار می‌دهیم:

$$m = \max\{j \in \{i, i-1, \circ\} \,|dI_j(S')|_{p_\circ} \neq \circ\}$$

از (۳۴.۳)، عدد m یک ناوردا از عمل Γ است. با توجه به این‌که $dI_m(S')|p_\circ \neq \circ$ همسایگی U از $p_\circ$ وجود دارد به‌طوری‌که $I_m(S')|_U$ یک عنصر از Γ است. فرض کنید

$$\widetilde{f} = I_m(S')|_U - I_m(S')(p_\circ).$$

بنابراین، $\widetilde{f} \in \Gamma$. تابع $\widetilde{f}$ بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\widetilde{f} = R_{I_m(S')(p_\circ)} \circ I_m(S')|_U,$$

که تابع R_a توسط $R_a : x \to x - a$ تعریف شده است. گوییم ریشه $\{\widetilde{f}(S')\}_\circ \in \widetilde{\mathcal{F}}_i$ فرم کانونی ریشه $\{S\}_\circ$ است.

قضیه ۱.۸.۳. *فرض کنید $\{S_1\}_\circ, \{S_2\}_\circ \in \widetilde{\mathcal{F}}_i$. آنگاه $\{S_1\}_\circ$ و $\{S_2\}_\circ$ هم‌ارز هستند اگروفقط‌اگر فرم‌های کانونی یکسانی داشته باشند.*

برهان. فرض کنید $\{S_1\}_\circ$ و $\{S_2\}_\circ$ دو ریشه‌ی هم‌ارز هستند. بنابراین $g \in \Gamma_\circ$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{S_2\}_\circ = \{g(S_1)\}_\circ$. فرض کنید f_1 و f_2 تبدیلات لاگرفورسیت به‌ترتیب برای S_1 و S_2 در همسایگی $\circ \in \mathbb{R}^1$ هستند. فرض کنید $S'_1 = f_1(S_1)$، $S'_2 = f_2(S_2)$ و $p_1 = f_1(\circ)$، $p_2 = f_2(\circ)$. آنگاه در

همسایگی p_2 داریم:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_2 &= I_m(S_2') - I_m(S_2')(p_2)\\ &= I_m\big((f_2 \circ g \circ f_1^{-1})(S_1')\big) - I_m\big((f_2 \circ g \circ f_1^{-1})(S_1')\big)(p_2)\\ &= I_m(S_1') \circ (f_1 \circ g^{-1} \circ f_2^{-1}) - I_m(S_1')(p_1)\\ &= R_{I_m(S_1')(p_1)} \circ I_m(S_1') \circ (f_1 \circ g^{-1} \circ f_2^{-1}).\end{aligned}$$

بنابراین در همسایگی متناظر $0 \in \mathbb{R}^1$، داریم:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_2(S_2') &= R_{I_m(S_1')(p_1)} \circ I_m(S_1') \circ (f_1 \circ g^{-1} \circ f_2^{-1})\big((f_2 \circ g \circ f_1^{-1})(S_1')\big)\\ &= \big(R_{I_m(S_1')(p_1)} \circ I_m(S_1')\big)(S_1') = \widetilde{f}_1(S_1')\end{aligned}$$

$\square$

مراجع

[1] Alekseevskiy, D.V., and Lychagin, V.V., and Vinogradov, A.M., Fundamental ideas and conceptions of differential geometry, Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniy, Vol. 28 (Itogi nauki i techniki, VINITI, AN SSSR, Moscow, 1988 (Russian)) [English transl.: Encyclopedia of Math. Sciences, Vol.28 (Springer, Berlin, 1991)]

[2] Catran, E., Sur les varietes a connexion projective, Bull. Soc. Math. France 52 (1924), 205 – 241.

[3] Krasil'shchik, I.S., and Lychagin, V.V., and Vinogradov, A.M., Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations, Gordon and Breach, New York, 1986.

[4] Laguerre, E., Sur les equations differentielles lineaires du troisieme ordre Comptes Rendus. Acad. Sci. Paris, Vol. 88, pp. 116–119, 1879.

[5] Lee, John M., *Introduction to smooth manifolds*, Springer, Washington, 2002.

[6] Leach, P.G.L., and Mahomed, F.M., Symmetry Lie algebras of nth order ordinary differential equations, J. Math. Analysis and Appl., 151, 80-107, 1990.

[7] Mahomed, F.M., Symmetry Lie algebras of nth order ordinary differential equations, Ph.D thesis, Faculty of science, University of the Witwatersrand, Johannesburg, 1989.

[8] Neuman, F., Global properties of linear ordinary differential equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[9] Olver, P.J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1986.

[10] Olver, P.J., *Equivalence, Invariants, and Symmetry*, University of Minnesota, 1995.

[11] Vinogradov, A.M., Scalar differential invariants, diffieties and characteristic classes, in: Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years after Lagrange, ed. M.Francaviglia (North-Holland), pp.379–414, 1991.

[12] Wilczynski, E.J., Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, B. G. Teubner, Leipzig, 1906.

[13] Yumaguzhin, V.A., Point transformations and classification of 3-order linear ODEs, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 4, No. 3, pp. 403-410,1996.

[14] Yumaguzhin, V.A., Classification of 3-rd order linear ODEs up to equivalence, Journal of Differential Geometry and its Applications Vol. 6, No. 4, pp. 343- 350, 1996.

[15] Yumaguzhin, V.A., Local classification of linear ordinary differential equations, Doklady Mathematics, Vol. 377, No. 5, pp. 1-3, 2001.

[16] Yumaguzhin, V.A., Contact classification of linear ordinary differential equations. I., Acta Applicandae Mathematicae, to appear, April 2, 2001.

[17] Yumaguzhin, V.A., Contact classification of linear ordinary differential equations. II., April 12, 2001.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اساسی .... Fundamental

امتداد .... Prolongation

انتقال .... Translation

برش .... Section

بعد .... Dimension

پس‌کشنده .... Pull Back

پیش‌برنده .... Push Forward

تابع مولد .... Generating Function

تبدیل .... Transformation

تبدیلات مقیاسی .... Transformations Scale

تبدیلات برخوردی .... Contact Transformations

تبدیلات لاگرفورسیت .... Laguerre-Forsyth Transformations

تبدیلات لی .... Lie Transformations

تقارن برخوردی .... Contact Symmetry

توزیع کارتان .... Cartan Distribution

جابه‌جایی .... Commutative

دیفرانسیل کامل .... Total Differential

دیفئومورفیسم .... Diffeomorphism

ریشه‌های منظم .... Regular Germs

زیرفضا .... Subspace

ناوردا .... Invariant

شبه گروه .... Pseudo-Group

طبقه‌بندی برخوردی .... Contact Classification

عملگر .... Operator

فرم برخوردی .... Contact Form

فضای جت-فضای افشانه .... Jet Space

فضای مماس .... Tangent Space

شار .... Flow

کاهش .... Reduction

کروشه لی .... Lie Bracket

کلاف برداری .... Vector Bundle

کلاف مماس .... Tangent Bundle

گروه تقارن .... Symmetry Group

متعدی .... Transitive

مدار .... Orbit

مستقل .... Independent

مشتق کامل .... Total Derivative

مشتق لی .... Lie Derivative

مشخصه .... Characteristic

معادله دیفرانسیل .... Differential Equation

مقیاس .... Scale

نقطه منظم .... Regular Point

موضعی .... Local

مولد بی‌نهایت کوچک .... Infinitesimal Generator

میدان برداری .... Vector Field

نیم-منظم .... Semi-Regular

ناوردای دیفرانسیل اسکالر .... Scalar Differential Invariant

ناوردای راست .... Right Invariant

ناوردای چپ .... Left Invariant

نگاشت نمایی .... Exponential Map

هم‌ارز .... Equivalent

همبند .... Connect

وابسته .... Dependent

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

توزیع کارتان .... Cartan Distribution
مشخصه .... Characteristic
جابه‌جایی .... Commutative
همبند .... Connect
طبقه‌بندی برخوردی .... Contact Classification
فرم برخوردی .... Contact Form
تبدیل برخوردی .... Contact Transformation
تقارن برخوردی .... Contact Symmetry
وابسته .... Dependent
دیفئومورفیسم .... Diffeomorphism
معادله دیفرانسیل .... Differential Equation
بعد .... Dimensin
نگاشت نمایی .... Exponential Map
هم‌ارز .... Equivalent
شار .... Flow
اساسی .... Fundamental
تابع مولد .... Generating Function

Independent .... مستقل

Infinitesimal Generator .... مولد بی‌نهایت کوچک

Invariant .... ناوردا

Jet Space .... فضای جت

Laguerre-Forsyth Transformation .... تبدیلات لاگرفورسیت

Left Invariant .... ناوردای چپ

Lie Bracket .... کروشه لی

Lie Derivative .... مشتق لی

Lie Transformation .... تبدیل لی

Local .... موضعی

Operator .... عملگر

Orbit .... مدار

Prolangation .... امتداد

Pseudo-Group .... شبه گروه

Push Forward .... پیش‌برنده

pull back .... پس‌کشنده

Reduction .... کاهش

Regular Germ .... ریشه منظم

Regular Point .... نقطه منظم

Right Invariant .... ناوردای راست

Scalar Differential Invariant .... ناوردای دیفرانسیل اسکالر

Scale .... مقیاس

Section .... برش

نیم-منظم	Semi-Regular
زیرفضا	Subspace
گروه تقارن	Symmetry Group
کلاف مماس	Tangent Bundle
فضای مماس	Tangent Space
مشتق کامل	Total Derivative
دیفرانسیل کامل	Total Differential
تبدیل	Transformation
تبدیلات مقیاسی	Transformations Scale
انتقال	Translation
متعدی	Transitive
کلاف برداری	Vector Bundle
میدان برداری	Vector Field

Surname: Taghizadeh Name: Marziyeh

Title: Classification of Linear Ordinary Differential Equations Up to Contact Transformation.

Supervisor: Dr. Reza Hejazi

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics
Field: Differential Geometry

Shahrood University of Technology Faculty Of Mathematical Sciences
Date: 92/06/25 Number of pages: 90

Keywords: Prolongation, Jet Sapce, Linear Ordinary Differential Equations, Point Transforamation, Contact Transformation, Projective Transformation, Laguerre-Forsyth Transformation, Scalar Differential Invariants, Equivalence Problem, Classical Symmetry, Point symmetry

Abstract

This assigned into classification of linear ordinary differential equations $y^{(n)} = \sum_{i=2}^{n} a_{n-i}(x)y^{(n-i)}$ and $n \geq 3$ up to contact transformation in a neighborhood of a regular point.

Any linear ordinary differential equations can be transformed by a point transformation to the form

$$y^{(n)} = a_{n-3}(x)y^{(n-3)} + a_{n-4}(x)y^{(n-4)} + \cdots + a_0(x)y$$

By contact transformations we express the forms of this equation into simpler forms. In chapter 3 of in thesis,We find invariants of transformations of linear differential equations with constant coefficients and $n+2-$dimensional algebras of point symmetries. These invariants solve the equivalence problem for these equations. finally into the classification of linear differential equations with $n+1-$dimensional algebras of point symmetries in a neighborhood of regular point up to equivalence.

دانشگاه صنعتی شاهرود

Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

Classification of Linear Ordinary Differential Equations Up to Contact Transformation.

Supervisor
Dr. Reza Hejazi

by
Marziyeh Taghizadeh

92/06/25