بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

نگاشت‌های مدولی حافظ تعامد، C^*-همدیس و همدیس روی C^*-مدول‌های هیلبرت

سکینه حسین‌زاده

استاد راهنما:
دکتر کامران شریفی

استاد مشاور:
دکتر محمدباقر اسدی

پایان نامه‌ی ارشد جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد

بهمن‌ماه سال ۱۳۹۱

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **سکینه** حسین‌زاده رشته ریاضی گرایش محض تحت عنوان« **نگاشت‌های مدولی حافظ تعامد، C^*–همدیس و همدیس روی C^*–مدول‌های هیلبرت** » که در تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۲۸ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸/۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹)   ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶)   ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنمای اول	کامران شریفی	دانشیار	
۱ـ استاد راهنمای دوم	-	-	
۲ـ استاد مشاور	[illegible]	[illegible]	—
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	علیرضا خدامی	استادیار	علیرضا خدامی
۴ـ استاد ممتحن	احمد زیره	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	علی غفاری	استاد	

احمد زیره- رئیس دانشکده ریاضی

سلام...

سلام بر تو ای برگزیده و جانشین خدا...

سلام بر تو ای حجت روشن خدا...

سلام بر آن هنگام که قرآن می‌خوانی و دعایمان می‌کنی...

سلام بر تو و بر گریه‌های بی‌حدت بر حسین(ع)...

سلام بر تو ای غایب از دیده‌ها، بر من بگو چگونه صبر پیشه سازم که ببینم همگان را و نبینم تورا...

سلام هستی بر تو و آن لحظه‌ی قیامت...

سلام بر آن لحظه که فریاد خواهی زد:

اَلا یا اهل العالم، قُتِلَ جَدّی الحُسَین (علیه‌السلام) عطشاناً...

آن سفر کرده که صد قافله دل همره اوست   هرکجا هست خدایا به سلامت دارش

تقدیم به پیشگاه ثامن الحجج حضرت علی بن موسی الرضا (علیه السلام)

وحضرت صاحب الامر بقیة ا... الاعظم الامام المهدی

عجل ا... تعالی فرجه الشریف

سپاسگزاری...

سپاس بی‌کران پروردگار آدمیان را، که خدایی سزاوار و شایسته‌ی اوست و بس.

در آغاز، وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات استاد ارجمندم جناب آقای دکتر کامران شریفی صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که مجموعه‌ی حاضر مرهون زحمات و راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان است.

ونیز تشکر و سپاس فراوان دارم از پدر و مادر مهربان و همسر عزیزم، به پاس محبت بی‌دریغ و لطف بی‌اندازه‌شان که در این مسیر بهترین پشتیبان من بودند.

همچنین از دلبند پنج‌ماهه‌ام، مهدیار عزیزم سپاسمندم که در تمامی این لحظات همدم و همقدم من بود و با وجود سختی‌های بسیار، حضور شیرینش بر نشاط و استواری‌ام می‌افزود.

تعهد نامه

اینجانب ....سکینه حسین زاده..... دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ......ریاضی محض..........

دانشکده ....ریاضی................. دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه ....نگاشتهای مدولی حافظ

تعامد، C*- جبرها و جبرهای روی C*- مدولهای هیلبرت.....تحت راهنمائی دکتر کامران شریفی متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

۱۳۹۱/۱۲/۲۰

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

*** متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .**

چکیده

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است:

در فصل اول و دوم به صورت مقدماتی به مبحث C^*-جبرها، عملگرهای روی فضاهای هیلبرت، C^*-مدولهای هیلبرت و ضرب‌های داخلی روی C^*-جبرها و بیان چند قضیه و مثال پرداخته ایم.

هدف اصلی این دو فصل زمینه‌سازی برای تنه اصلی پایان‌نامه است که در فصل سوم ارایه می شود.

در فصل سوم به بررسی نگاشت‌های مدولی حافظ تعامد و C^*-همدیس روی C^*-مدول‌های هیلبرت برای بدست آوردن ساختار عمومی‌شان می‌پردازیم.

نگاشت مدولی کراندار حافظ تعامد T به‌صورت ضرب یک عنصر λ از مرکز ضربگر جبری C^*-جبر ضرایب با یک عملگر مدولی طولپا (ایزومتریک) عمل می کند، مادامی که برخی شرایط تجزیه قطبی برای عنصر λ از مرکز ضربگر جبری اعمال شود.

بطور کلی T همواره تساوی

$$\langle T(x), T(y)\rangle = |\lambda|^{2} \langle x, y\rangle$$

را برای هر عنصر y, x در C^*-مدول هیلبرت نتیجه می‌دهد.

اما نگاشت‌های مدولی کراندار C^*-همدیس فقط با مضرب‌های حقیقی مثبت عملگرهای مدولی طولپا (یکمتری ها) نشان داده می شوند.

واژه‌های کلیدی: C^*-جبر، عملگر، C^*-مدول هیلبرت، ضرب داخلی، نگاشت حافظ تعامد، نگاشت C^*-همدیس، ضربگر جبری، قضیه تجزیه قطبی، عملگر مدولی طولپا (یکمتری).

پیش گفتار

C^*-مدول‌های هیلبرت برای اولین بار در کاری از کاپلانسکی [1] ظاهر شد. نظریه‌ی او یک فضای هیلبرت عمومی است که با پذیرفتن یک ضرب داخلی C^*-مقداری در میدان اعداد مختلط ارائه شد.

بررسی و تحقیق روی C^*-مدول‌های هیلبرت در سال‌های بعد توسط ریفل [2] و پاشکه [3] ادامه یافت و مفاهیم جدیدی روی C^*-مدول‌های هیلبرت پایه‌گذاری شد.

از جمله این مفاهیم ظهور نگاشت‌های مختلفی همچون نگاشت‌های حافظ تعامد و C^*-همدیس است که اساس آنها بر پایه‌ی C^*-مدول‌های هیلبرت استوار است.

نگاشت‌های خطی و کراندار حافظ تعامد بین C^*-جبرها توسط شوایزر [4] در سال ۱۹۹۶ بررسی شده است. یک نگاشت مدولی کراندار حافظ تعامد دارای یک مفهوم هندسی با توجه به حضور C^*-زیرمدول‌های دوبدو متعامد در این نگاشتها است.

تعامد عناصر C^*-مدول‌های هیلبرت نسبت به ضرب داخلی C^*-مقدارشان با تعامد کلاسیک جیمز بیرخوف در کل متفاوت است. با این وجود نتایج در هر دو روش شبیه هستند و پایه و اساس هر دو این مسائل بر راه‌حل بخصوص فضاهای هیلبرت استوار است.

C^*-مدول‌های هیلبرت و همچنین نگاشت‌های حافظ تعامد روی C^*-مدول‌های هیلبرت اغلب به‌عنوان ابزاری در مطالعه گروه‌های بنیادی موضعا فشرده و نمایش آنها، هندسه ناجابجایی، KK-تئوری، فیزیک نوین، الکترونیک و البته سایر شاخه‌های ریاضی به‌کار برده می‌شوند .

همچنین در مطالعه نگاشت‌های مثبت بین C^*-جبرها از جمله دیگر زمینه‌های پژوهشی است که مورد استفاده قرار می‌گیرند.

نگاشت‌های حافظ تعامد روی C^*-مدول‌های هیلبرت و نیز C^*-مدول‌های هیلبرت به دلیل گردآوردن شاخه‌های مختلف ریاضی همچون جبر، آنالیز وهندسه در کنار هم، شرایط و امکان خوبی را برای پژوهشگران و علاقه‌مندان فراهم می‌سازد تا در این شاخه از ریاضیات و همچنین در زمینه‌های جانبی و کاربردهای آن به پژوهش و تفحص بپردازند.

---

[1] I. Kaplansky

[2] Reiffel

[3] Paschke

[4] J. Schwaizer

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه‌ای بر C^*-جبرها و عملگرهای روی فضاهای هیلبرت

این فصل شامل دو بخش است که تعاریف ابتدایی و قضایای اولیه و چند مثال ساده از C^*-جبرها در بخش اول و عملگرهای روی فضاهای هیلبرت در بخش دوم ارائه می کنیم و از بیان جزئیات و اثبات قضایا خودداری کرده و اثبات آنها را به بخش مراجع ذکر شده در انتهای پایان‌نامه [۱۱] می سپاریم.

۱.۱ مقدمه ای بر C^*-جبرها

با یک تعریف روی جبر A این بخش را آغاز می کنیم([۱۱ بخش ۲.۱]):

تعریف ۱.۱.۱. یک پیچش روی جبر مفروض A عبارت است از نگاشت مزدوج خطی $a \longmapsto a^*$ روی A به قسمی که برای هر $a, b \in A$، $a^{**} = a$ و $(ab)^* = b^*a^*$. زوج $(A, *)$ را یک جبر پیچشی یا یک $*$-جبر نامیم.

اگر S یک زیر مجموعه از A باشد، $S^* = \{a^*; a \in S\}$، اگر $S = S^*$ آنگاه S را خودالحاق می نامیم.
یک زیر جبر خودالحاق B از A را یک $*$-زیرجبر از A نامیم، B یک $*$-جبر است هرگاه پیچش روی A را به پیچش روی B تحدید کنیم.
اگر I یک ایده آل خود الحاق از A باشد، جبر خارج قسمت $\frac{A}{I}$ یک $*$-جبر است که پیچش آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$* : \frac{A}{I} \longrightarrow \frac{A}{I}$$
$$(a + I) \longmapsto (a + I)^* = a^* + I$$

اگر A^1 یکدار شده A به صورت $A \oplus \mathbb{C}$ باشد، دراین‌صورت می توان A^1 را با پیچش $(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$ به یک $*$-جبر تبدیل نمود. توجه می‌کنیم A یک ایده آل خود الحاق از A^1 می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم A یک $*$-جبر باشد، در این صورت:

(۱) عنصر $a \in A$ را خود الحاق یا هرمیتی گوییم اگر $a = a^*$

(۲) عنصر $a \in A$ را نرمال گوییم اگر $aa^* = a^*a$

(۳) عنصر $p \in A$ را یک تصویر نامیم هرگاه $p = p^* = p^2$، اگر A یکدار باشد در این صورت $1 = 1^*$ و اگر $a \in A$ معکوس‌پذیر باشد، دراین‌صورت

$$(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$$

و بنابراین

$$\sigma(a^*) = \sigma(a)^* = \{\overline{\lambda} \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \sigma(a)\}$$

(۴) عنصر $u \in A$ را یکانی گوییم هرگاه $uu^* = u^*u = 1$

(۵) اگر برای هر $u \in A$ داشته باشیم $u^*u = 1$، آنگاه u را یک یکمتری می نامیم و اگر $uu^* = 1$ آنگاه u را یک هم-یکمتری می نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. یک $*$-جبر باناخ عبارت است از یک $*$-جبر A به همراه نرم $\| \cdot \|$ بطوریکه برای هر $a, b \in A$،

$$\| a.b \| \leq \| a \| . \| b \|$$

و $\| a \| = \| a^* \|$. اگر جبر A یکدار باشد و $\| 1 \| = 1$ آنگاه A را یک $*$-جبر باناخ یکدار می نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم A و B دو $*$-جبر باشند و $\varphi : A \longrightarrow B$ یک همریختی باشد، φ را یک $*$-همریختی گوییم اگر برای هر $a \in A$ داشته باشیم $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$، همچنین اگر φ یک‌به‌یک و پوشا باشد آنگاه φ را یک $*$-یکریختی گوییم. هر $*$-یکریختی $\varphi : A \longrightarrow A$ را یک خودریختی نامیم. و هر همریختی $\varphi : A \longrightarrow A$ را یک همریختی داخلی یا یک درونریختی نامیم. مجموعه‌ی خودریختی‌های A را با $Aut(A)$ و مجموعه‌ی درونریختی‌های A را با $End(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. یک C^*-جبر A عبارت است از یک $*$-جبر باناخ A بطوریکه برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$\| a^*a \| = \| a \|^2$$

هر $*$-زیر جبر از یک C^*-جبر را یک C^*-زیر جبر نامیم.

مثال ۶.۱.۱. *اگر H فضای هیلبرت باشد $B(H)=\{T: H\longrightarrow H;$خطی و کراندار است $T\}$ به همراه $*: B(H)\longrightarrow B(H), T\longmapsto T^*$ و $\| T \| = sup_{\|x\|\leq 1} \| Tx \|$ یک C^*-جبر است.*

هرگاه A یک $*$-جبر باشد، حداکثر یک نرم وجود دارد که آنرا به یک C^*-جبر تبدیل می کند. لم زیر براین اساس استوار است:

لم ۷.۱.۱. *اگر A یک جبر باناخ پیچشی باشد و برای هر $a\in A$ داشته باشیم $\| a \|^2 \leq \| a^*a \|$ آنگاه A یک C^*-جبر است.*

تعریف ۸.۱.۱. یک مرکزساز مضاعف برای C^*-جبر A عبارت است از زوج (L,R) از نگاشتهای خطی و کراندار بر A بطوریکه

$$L(ab)=L(a)b$$
$$R(ab)=aR(b) \quad (\forall a,b\in A)$$
$$R(a)b=aL(b)$$

لم ۹.۱.۱. *اگر A یک C^*-جبر و (L,R) یک مرکز ساز مضاعف بر A باشد، آنگاه*

$$\| L \| = \| R \|$$

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر A یک C^*-جبر باشد، مجموعه تمام زوج های مرکزساز مضاعف بر A را با $M(A)$ نمایش داده و نرم یک زوج $(L,R)\in M(A)$ را برابر $\| L \| = \| R \|$ تعریف می‌کنیم.

فرض کنیم A یک C^*-جبر باشد، $M(A)$ یک زیرفضای برداری بسته از $B(A)\oplus B(A)$ است، برای $(L_1,R_1),(L_2,R_2)\in M(A)$ حاصلضرب آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(L_1,R_1)(L_2,R_2)=(L_1L_2,R_2R_1)$$

و (L_1L_2,R_2R_1) یک مرکزساز مضاعف است، زیرا:

$$M(A)\times M(A)\longrightarrow M(A)$$
$$((L_1,R_1),(L_2,R_2))\longmapsto (L_1,R_1)(L_2,R_2)$$

$$L_1L_2(ab)=L_1(L_2(a)b)=(L_1L_2(a))b \quad (1)$$

$$R_2R_1(ab) = R_2(aR_1(b)) = a(R_2R_1(b)) \quad (۲)$$

$$R_2(R_1(a))b = R_1(a)L_2(b) = aL_1(L_2(b)) = aL_1L_2(b) \quad (۳)$$

بنابراین

$$(L_1L_2, R_2R_1) \in M(A)$$

و $M(A)$ به‌همراه ضرب تعریف شده در بالا یک جبر است. اکنون اگر $L : A \longrightarrow A$ یک نگاشت خطی باشد $L^* : A \longrightarrow A$ که $a \longmapsto (L(a^*))^*$ دراین‌صورت $L^* \in B(A)$، $L^{**} = L$ و $(L_1L_2)^* = L_1^*L_2^*$.
و حال برای هر $(L, R) \in M(A)$ تعریف می کنیم: $(L, R)^* := (R^*, L^*)$ دراین‌صورت

$$* : M(A) \longrightarrow M(A)$$
$$(L, R) \longmapsto (R^*, L^*)$$

یک پیچش است.

قضیه ۱.۱.۱۱. *اگر A یک C^*-جبر باشد، آنگاه $M(A)$ به همراه ضرب، پیچش و نرم تعریف شده در بالا یک C^*-جبر است.*

تبصره ۱.۱.۱۲. *مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های خطی و کراندار L تعریف ۱.۱.۸ را با $LM(A)$ نشان داده و آن‌را ضربگر جبری چپ A می‌نامیم. $LM(A)$ با مفروضات تعریف ۱.۱.۱۰ یک جبر باناخ است.*

تعریف ۱.۱.۱۳. اگر A یک C^*-جبر باشد، C^*-جبر یکدار $M(A)$ را ضربگر جبری A می نامیم و

$$1_{M(A)} = (id_A, id_A)$$

که

$$id : A \longrightarrow A$$
$$a \longmapsto a$$

تابع همانی است.

C^*-جبر A یک ایده‌آل از C^*-جبر $M(A)$ است و اگر A یکدار باشد، در این صورت $A = M(A)$.

۱.۱.۱ عناصر مثبت در C^*-جبرها([۱۱ بخش ۲.۲])

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم A یک C^*-جبر باشد، عنصر خودالحاق $a \in A$ را مثبت نامیم هرگاه $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$ و می‌نویسیم $a \geq 0$.

اگر Ω-$f \in C_0(\Omega)$ یک فضای موضعا فشرده هاسدورف است-خودالحاق باشد یعنی $f = \overline{f}$:

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, sp(f) = \sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C}; f - \lambda = 0\}.$$

بنابراین می‌توان گفت که در C^*-جبر $A = C_0(\Omega)$ عنصر $f \in A$ مثبت است اگروتنها اگر به‌ازای هر x در Ω، $f(x) \geq 0$ باشد و اگر f, g عناصر مثبت در A باشند دراین‌صورت $g(\omega) - f(\omega) \geq 0$ به ازای هر $\omega \in \Omega$ اگروتنها اگر $f \leq g$.

قضیه ۱۵.۱.۱. *اگر A یک C^*-جبر و $a \in A^+$، آنگاه عنصر یکتایی چون $b \in A^+$ چنان موجود است که $a = b^2$. در واقع برای هر عنصر مثبت، ریشه دوم مثبتی وجود دارد که یکتاست.*

لم ۱۶.۱.۱. *فرض کنیم A یک C^*-جبر یکدار و a یک عنصر هرمیتی در A و $t \in \mathbb{R}$، اگر $\| a - t \| \leq t$، آنگاه $a \geq 0$ و اگر $a \geq 0$ و $\| a \| \leq t$، آنگاه $\| a - t \| \leq t$.*

لم ۱۷.۱.۱. *مجموع دو عنصر مثبت در یک C^*-جبر، یک عنصر مثبت است.*

قضیه ۱۸.۱.۱. *اگر a یک عنصر دلخواه از C^*-جبر A باشد آنگاه aa^* مثبت است.*

قضیه ۱۹.۱.۱. *اگر $a, b \in A^+$ و $a \leq b$ آنگاه*

$$a^{1/2} \leq b^{1/2}$$

(A^+ مجموعه عناصر مثبت جبر است)

۲.۱ عملگرهای روی فضاهای هیلبرت

بررسی فضاهای هیلبرت و عملگرهای روی فضای هیلبرت بسیار گسترده است و ما به تناسب نیازمان در این بخش به عملگرهای روی فضاهای هیلبرت می پردازیم و در ادامه نیز به ایده‌آلهای روی C^*-جبرها و تابعکهای خطی مثبت بین C^*-جبرها اشاره می نماییم.

مفاهیمی چون عملگر، فضای هیلبرت، تابعک‌های خطی روی فضاهای هیلبرت، $B(H)$ و قضیه‌ی نمایش ریس را دانسته شده می پنداریم.

قضیه ۱.۲.۱. *فرض کنیم H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت باشند.*([۱۱ قضیه ۱.۳.۲])

(۱) اگر $u \in B(H_۱, H_۲)$، آنگاه یک عنصر مثبت $u^* \in B(H_۲, H_۱)$ چنان موجود است که

$$\langle u(x_۱), x_۲\rangle = \langle x_۱, u^*(x_۲)\rangle \quad (x_۱ \in H_۱, x_۲ \in H_۲)$$

(۲) نگاشت $u^* \longmapsto u$ یک نگاشت مزدوج خطی است و $u^{**} = u$ همچنین

$$\| u \| = \| u^* \| = \| u^*u \|^{۱/۲}$$

اگر $u : H_۱ \longrightarrow H_۲$ یک نگاشت خطی پیوسته بین فضاهای هیلبرت $H_۱$ و $H_۲$ باشد،

$$u^* : H_۲ \longrightarrow H_۱$$

را الحاق u می‌نامیم، توجه می‌کنیم که $\ker(u^*) = (Im(u))^\perp$
هرگاه $Im(u)$ برد u باشد و همچنین $(Im(u^*))^\perp = \ker(u)^\perp$ اگر $| u | = (u^*u)^{۱/۲}$ داریم

$$\ker(u) = \ker(| u |)$$

اگر $H_۱ \xrightarrow{u} H_۲ \xrightarrow{v} H_۳$ نگاشتهای خطی پیوسته بین فضاهای هیلبرت $H_۱$، $H_۲$ و $H_۳$ باشند، آنگاه

$$(vu)^* = u^*v^*$$

اگر H یک فضای هیلبرت باشد، $B(H)$ یک C^*-جبر تحت پیچش $u^* \longmapsto u$ است هرگاه u^* همان الحاق u باشد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم $P : H \longrightarrow H$ یک عملگر روی فضای هیلبرت H باشد، P را خودتوان نامیم هرگاه $P^۲ = P$ و $H = P(H) \oplus \ker(P)$ یعنی

$$H = P(H) + \ker(P), \quad P(H) \cap \ker(P) = \{۰\}$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم $u : H_۱ \longrightarrow H_۲$ نگاشت خطی پیوسته از فضای هیلبرت $H_۱$ به $H_۲$ باشد، u را یک یکمتری جزئی گوییم هرگاه برای هر $x \in \ker(u)^\perp$،

$$\| u(x) \| = \| x \|$$

قضیه ۴.۲.۱. *فرض کنیم $H_۱$ و $H_۲$ فضای هیلبرت باشند و $u \in B(H_۱, H_۲)$، آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند([۱۱ قضیه ۲.۳.۳]):*

(۱) $u = uu^*u$

(۲) u^*u *تصویر است.*

(۳) uu^* *تصویر است.*

(۴) u *یک یکمتری جزئی است.*

قضیه ۵.۲.۱. *(تجزیه‌ی قطبی): فرض کنیم ν یک عملگر خطی پیوسته روی فضای هیلبرت H باشد، آنگاه یک یکمتری جزئی $u \in B(H)$ چنان موجود است که*

$$\nu = u \mid \nu \mid, \quad \ker(u) = \ker(\nu), \quad u^*\nu = \mid \nu \mid$$

اثبات زیبای این قضیه را به ([۱۱ قضیه ۲.۳.۴]) می‌سپاریم و در ادامه‌ی بحث، به مباحثی کوتاه روی ایده‌آل‌های یک C^*-جبر می پردازیم.

۱.۲.۱ ایده آل‌های یک C^*-جبر

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم $\mathbb{D}$ یک مجموعه‌ی ناتهی باشد، $(\mathbb{D}, \leq)$ را یک مجموعه‌ی جهت‌دار نامیم، اگر $\leq$ یک رابطه روی $\mathbb{D}$ باشد به‌طوریکه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) برای هر $x, y, z \in \mathbb{D}$ اگر $x \leq y$ و $y \leq z$، آنگاه $x \leq z$

(۲) برای هر $x \in \mathbb{D}$، $x \leq x$

(۳) برای هر $x, y \in \mathbb{D}$ عنصری همچون $z \in \mathbb{D}$ موجود است که $x \leq z$ و $y \leq z$.

به‌عبارت دیگر، یک مجموعه‌ی جهت‌دار، مجموعه‌ای به همراه یک رابطه‌ی بازتابی است. همچنین یک مجموعه‌ی جهت‌دار، مجموعه‌ی ناتهی $\mathbb{D}$ است به‌طوریکه هر زیرمجموعه‌ی متناهی از $\mathbb{D}$ دارای یک کران بالا است. با این تعریف، هر مجموعه‌ی جهت‌دار، یک مجموعه‌ی جهت‌دار رو به بالا است.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم $\mathbb{D}$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار و X یک فضای توپولوژیک باشد، یک تور روی X تابعی است از $\mathbb{D}$ به X به‌طوریکه این تابع هر عنصر α در $\mathbb{D}$ را به یک همچون x_α در X می‌نگارد. یک تور را به‌صورت (x_α) نشان می‌دهیم.

مثال ۸.۲.۱. *هر مجموعه‌ی ناتهی مرتب کلی یک مجموعه‌ی جهت‌دار است، بنابراین هر تابع روی این مجموعه یک تور است.*

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم A یک C^*-جبر باشد، یک یکه تقریبی برای A عبارت است از یک تور صعودی $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از عناصر مثبت A بطوریکه برای هر $\lambda \in \Lambda$، $\| u_\lambda \| < ۱$ و برای هر $a \in A$، $a = \lim a u_\lambda$.

گزاره ۱۰.۲.۱. *اگر A یک C^*-جبر باشد و Λ مجموعه‌ی تمام عناصر مثبت $a \in A$ باشد که $\| a \| < ۱$، آنگاه Λ جهتدار و رو به بالا است.*

قضیه ۱۱.۲.۱. *هر C^*-جبر A دارای یک یکه‌ی تقریبی است. در واقع، اگر Λ مجموعه‌ی جهت دار رو به بالا (صعودی) از عناصر مثبت $a \in A$ باشد بطوریکه $\| a \| < ۱$، برای هر $\lambda \in \Lambda$ قرار می دهیم $u_\lambda = \lambda$، آنگاه $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ یک یکه‌ی تقریبی برای A است(یکه‌ی تقریبی کانونی).*

قضیه ۱۲.۲.۱. *اگر A یک C^*-جبر و I یک ایده‌آل راست (چپ) بسته در A باشد آنگاه یک تور صعودی $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از عناصر مثبت موجود است که $\| u_\lambda \| < ۱$ و برای هر $a \in I$، $a = \lim u_\lambda a$. یعنی هر ایده‌آل راست (چپ) بسته در یک C^*-جبر نیز دارای یک یکه‌ی تقریبی است.*

قضیه ۱۳.۲.۱. *هرگاه I یک ایده‌آل بسته در C^*-جبر A باشد، آنگاه I خودالحاق است ($I = I^*$) و لذا I یک C^*-زیرجبر از A است اگر $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ یک یکه‌ی تقریبی برای I باشد، آنگاه برای هر $a \in A$،*

$$\| a + I \| = \lim \| a - u_\lambda a \| = \lim \| a - a u_\lambda \| .$$

و البته $\| a + I \| = \inf_{x\in I} \| a + x \|$.

گزاره ۱۴.۲.۱. *اگر A یک C^*-جبر باشد و $I \trianglelefteq A$ و $J \trianglelefteq I$ آنگاه J نیز یک ایده‌آل از A است.*

قضیه ۱۵.۲.۱. *اگر I یک ایده‌آل بسته در C^*-جبر A باشد، آنگاه $\frac{A}{I}$ خود یک C^*-جبر است که جمع، ضرب و پیچش آن به صورت زیر تعریف می شود:*

$$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I \quad a,b\in A$$

$$(a+I)(b+I)=(ab)+I$$

$$(a+I)^* = a^* + I$$

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنیم $H_۱$ و $H_۲$ دو فضای هیلبرت باشند، $T : H_۱ \longrightarrow H_۲$ را یک عملگر فشرده نامیم هرگاه $\overline{T(u)} \subseteq H_۲$ فشرده باشد مادامی که $u = \{x \in H_۱, \|x\| < ۱\}$

مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای فشرده $T : H \longrightarrow H$ را با $K(H)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۷.۲.۱. *اگر T یک عملگر فشرده روی فضای هیلبرت H باشد، آنگاه T^* نیز یک عملگر فشرده روی H است.*

قضیه ۱.۲.۱۸. *اگر $\{T_n\}$ یک دنباله از عملگرهای فشرده روی H باشد به‌طوریکه به عملگری همچون $A \in B(H)$ همگراست، آنگاه $A \in K(H)$.*

نتیجه ۱.۲.۱۹. *اگر H یک فضای هیلبرت باشد $K(H)$ یک $*$-ایده‌آل از C^*-جبر $B(H)$ است.*

تبصره ۱.۲.۲۰. *اگر H یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه $K(H)$ خودالحاق است و چون $K(H)$ یک ایده‌آل بسته از $B(H)$ است لذا $K(H)$ یک C^*-جبر است.*([۱۱ نتیجه ۲.۳.۴])

به مبحث ایده‌آل‌های یک C^*-جبر خاتمه داده و در حد بضاعت به تابعک‌های خطی مثبت روی C^*-جبر ها می‌پردازیم.

۱.۲.۲ تابعک‌های خطی مثبت روی C^*-جبرها

تعریف ۱.۲.۲۱. اگر A و B دو C^*-جبر باشند و $\varphi : A \longrightarrow B$ یک تابع (نگاشت) خطی باشد φ را مثبت گوییم اگر $\varphi(A^+) \subseteq B^+$.

A^+ و B^+ به ترتیب عناصر مثبت A و B هستند. با توجه به تعریف ارائه شده در ۱.۲.۲۱ تابعک خطی $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ را مثبت نامیم هرگاه برای هر $a \in A^+$ داشته باشیم $f(a) \geq 0$.

قضیه ۱.۲.۲۲. *اگر f یک تابعک خطی مثبت بر C^*-جبر A باشد، آنگاه f کراندار است.*

تبصره ۱.۲.۲۳. *اگر تابعک خطی f روی A مثبت باشد و $a, b \in A^+$ بطوریکه $a \leq b$، آنگاه $f(a) \leq f(b)$.*

تعریف ۱.۲.۲۴. فرض کنیم A یک C^*-جبر باشد، هر تابعک خطی مثبت بر A که نرم آن برابر ۱ است یک حالت بر A می نامیم و مجموعه‌ی تمام حالت‌های C^*-جبر A را با $S(A)$ نمایش می‌دهیم.

این فصل را با یک تعریف دیگر به سرانجام می‌بریم:

تعریف ۱.۲.۲۵. فرض کنیم A یک C^*-جبر و H یک فضای هیلبرت باشد، همچنین $\varphi : A \longrightarrow B(H)$ یک $*$-همریختی باشد، زوج (H, φ) را یک نمایش برای C^*-جبر A می‌نامیم.

فصل ۲

C^*-مدول‌های هیلبرت و ضرب‌های داخلی روی C^*-جبرها

هدف کلی این فصل بیان مطالبی درباره‌ی C^*-مدول‌های هیلبرت است و شامل دو بخش بوده، که در بخش اول به بیان تعاریف و قضایایی از مبانی C^*-مدول‌های هیلبرت پرداخته و در ادامه یک A-مدول هیلبرت خاص معرفی می‌کنیم و به دلیل حجم گسترده‌ی این مبحث از بیان جزئیات و ارایه‌ی اثبات قضایا (جز در مواردی اندک) خودداری می‌کنیم. در بخش دوم و سوم نیز به بحث درباره‌ی خوددوگانی مدول‌های هیلبرت و توسیع یک مدول با استفاده از جبر بزرگتر می‌پردازیم.

برای ارائه مطالب این فصل از [۹]، [۷]، [۱۰] و [۱۲] یاری گرفته‌ایم.

۱.۲ C^*-مدول‌های هیلبرت چیستند؟

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید A یک C^*-جبر (نه لزوما یکدار و جابجایی) باشد، یک A-مدول ضرب داخلی یا یک A-مدول پیش هیلبرت یک A-مدول راست X مجهز به نگاشت مزدوج دوخطی

$$\langle .,. \rangle : X \times X \longrightarrow A$$

است به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق می‌کند:([۱۰ تعریف ۲.۱])

(۱) $\langle x,x\rangle \geq 0 \quad (x \in X)$

(۲) $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (x \in X)$

(۳) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle^* \quad (x,y \in X)$

(۴) $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle x,z\rangle \quad (x,y,z \in X, \alpha,\beta \in \mathbb{C})$

$$\langle x, ya\rangle = \langle x, y\rangle a \quad (x, y \in X, a \in A) \quad (۵)$$

توجه می‌کنیم که رابطه‌ی (۴) نتیجه می‌دهد که ضرب داخلی در متغیر دوم خطی است و رابطه‌ی (۵) نشان می‌دهد که ضرب داخلی در متغیر اول مزدوج خطی است اما در پژوهش‌های اخیر، اغلب نویسندگان ضرب‌های داخلی را به گونه‌ای استفاده می‌کنند که در متغیر اول خطی و در متغیر دوم مزدوج خطی باشند.

نگاشت $\langle .,.\rangle$ را یک ضرب داخلی A-مقداری روی X می‌نامیم.

مثال ۲.۱.۲. *اگر J یک ایده‌آل راست از C^*-جبر A باشد، آنگاه J یک A-مدول پیش هیلبرت است هرگاه $\langle .,.\rangle$ را به‌صورت*

$$\langle x, y\rangle = y^* x \quad (x, y \in J)$$

تعریف کنیم. هم‌چنین $\{J_\alpha\}$ یک خانواده از ایده‌آل‌های راست از A باشند در این‌صورت فضای X از همه‌ی چندتایی‌های

$$\{x_\alpha\} \quad (\forall\alpha; x_\alpha \in J_\alpha)$$

و

$$\sum_\alpha \|x_\alpha\|^۲ < \infty$$

یک A-مدول راست است هرگاه تعریف کنیم:

$$\{x_\alpha a\} = \{x_\alpha\}.a \quad (a \in A, \{x_\alpha\} \in X)$$

و یک A-مدول پیش هیلبرت است هرگاه قرار دهیم:

$$\langle \{x_\alpha\}, \{y_\alpha\}\rangle = \sum_\alpha y_\alpha^* \ x_\alpha \quad (\{x_\alpha\}, \{y_\alpha\} \in X)$$

هرگاه X در همه‌ی شرایط یک A-مدول ضرب داخلی بجز قسمت (۲) صدق کند، X را یک A-مدول نیم ضرب داخلی می‌نامیم.

برای بعضی از مدول‌ها یک حالت مفید از نامساوی کشی-شوارتز وجود دارد.

گزاره ۳.۱.۲. *([۹ گزاره ۱.۱]) اگر X یک A-مدول نیم ضرب داخلی باشد و $x, y \in X$، آنگاه*

$$\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle \le \|\langle x, x\rangle\|.\langle y, y\rangle$$

برای x در X، $\|x\|$ را به‌صورت $\|x\| = \|\langle x,x\rangle\|^{۱/۲}$ می‌نویسیم بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\begin{aligned}\|\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle\| &= \|\langle x,y\rangle\|^{۲}\\ &\leq \|x\|^{۲}.\|y\|^{۲}\\ \Rightarrow \|\langle x,y\rangle\| &\leq \|x\|.\|y\|.\end{aligned}$$

لذا اگر X یک A-مدول پیش هیلبرت باشد، آنگاه $\|.\|$ یک نرم بر روی X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\|x.a\| \leq \|x\|.\|a\| \quad (x\in X, a\in A) \ (۱)$$

$$\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle \leq \|y\|^{۲}.\langle x,x\rangle \quad (x,y\in X) \ (۲)$$

$$\|\langle x,y\rangle\| \leq \|x\|.\|y\| \quad (x,y\in X) \ (۳)$$

به‌همراه نرم اسکالر مقداری $\|.\|$، یک A-مدول پیش هیلبرت X دارای یک نرم A-مقداری $|.|$ است که توسط

$$|x| = \langle x,x\rangle^{۱/۲}$$

مشخص می‌شود.

ازآنجایی‌که ریشه‌ی دوم از عناصر مثبت گرفتن یک عمل حافظ مرتبه در یک C^*-جبر است (۴.۲.۱) و از گزاره‌ی ۳.۱.۲ داریم:

$$\begin{aligned}\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle &\leq \|\langle x,x\rangle\|\langle y,y\rangle\\ \Rightarrow |\langle x,y\rangle| &\leq \|x\|.|y| \quad (x,y\in X)\end{aligned}$$

هرگاه برای هر $a\in A$ تعریف کنیم:

$$|a| = (a^* \ a)^{۱/۲}.$$

توجه می‌کنیم که نرم روی X، X را به یک A-مدول نرمدار یا یک A-مدول ضرب داخلی تبدیل می‌کند.

تعریف ۴.۱.۲ . C^*-مدول پیش هیلبرت X را یک C^*-مدول هیلبرت یا یک A-مدول هیلبرت روی C^*-جبر A نامیم هرگاه X نسبت به نرمی که در بالا تعریف شد تام باشد.

مثال ۵.۱.۲. *فرض کنیم $\{X_n\}$ یک دنباله از A-مدول‌های هیلبرت باشد، آنگاه*

$$\oplus_{i=1}^{\infty} X_n = \{\{x_n\} \mid x_n \in X_n, A \text{ همگرا در } \sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n, x_n\rangle\}$$

با اعمال زیر یک C^*-مدول هیلبرت است.

(۱) $\{x_n\} + \lambda\{y_n\} = \{x_n + \lambda y_n\}$

(۲) $\{x_n\}a = \{x_n a\}$

(۳) $\langle\{x_n\}, \{y_n\}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n, y_n\rangle \quad (x_n, y_n \in X_n \ \ \forall n, a \in A)$

C^*-مدول‌های هیلبرت در بعضی مواقع شبیه فضاهای هیلبرت رفتار می‌کنند، برای مثال $\|x\|$ در هر دو به‌صورت

$$\sup\{\|\langle x, y\rangle\|; y \in X, \|y\| \leq 1\}$$

تعریف می‌شود اما تفاوت‌های اساسی وجود دارند که C^*-مدول‌های هیلبرت را از فضاهای هیلبرت متمایز و متفاوت می‌سازد.([۹ بخش ۱])

برای یک زیرمدول داده شده F از یک A-مدول هیلبرت X تعریف می‌کنیم:

$$F^{\perp} = \{y \in X; \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in F\}$$

دراین‌صورت $F^{\perp}$ یک زیرمدول بسته از X است و

$$X \neq F + F^{\perp}, \quad F^{\perp\perp} \neq F$$

درصورتی‌که در فضای هیلبرت هرگاه F یک زیرفضایی از فضای هیلبرت H باشد $F^{\perp}$ به‌صورت ذکر شده در بالا تعریف می‌شود و

$$H = F^{\perp} + F, \quad F^{\perp\perp} = F$$

$F^{\perp}$ را متمم متعامد F می‌نامیم.

مثال ۶.۱.۲. ([۱۰ *مثال ۲.۹*]) *فرض کنیم*

$$A = C([0, 1]), \quad I = \{f \in A, f(0) = 0\} \approx C_0((0, 1])$$

و I $X = A \oplus I$، X یک A-مدول هیلبرت است. اگر

$$F = \{(f,f) \mid f \in I\}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
F^{\perp} &= \{(g_1, g_2) \in X; \langle (f,f), (g_1, g_2) \rangle = 0, \forall f \in I\} \\
&= \{(g_1, g_2) \in X; (fg_1 + fg_2) = 0; \forall f \in I\} \\
&= \{(g_1, g_2) \in X; fg_1 = -fg_2; \forall f \in I\} \\
&= \{(g, -g); g \in I\} \\
&\Rightarrow F^{\perp} = \{(g, -g) \mid g \in I\} \\
&\Rightarrow F + F^{\perp} = I + I \neq X
\end{aligned}$$

تعریف ۷.۱.۲. ([۱۰ بخش ۴]) فرض کنیم X و Y دو C^*-مدول هیلبرت روی C^*-جبر A باشند، $L(X,Y)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y \mid \exists T^* : Y \longrightarrow X; \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle\}$$

T، A-خطی است.

$$\begin{aligned}
\langle T(xa), y \rangle &= \langle xa, T^*y \rangle \quad (x \in X, y \in Y) \\
&= a^* \langle x, T^*y \rangle \\
&= a^* \langle Tx, y \rangle \\
&= \langle (Tx)a, y \rangle
\end{aligned}$$

بنابراین $\langle T(xa) - (Tx)a, y \rangle = 0$ لذا

$$\begin{aligned}
&\langle T(xa) - (Tx)a, T(xa) - (Tx)a \rangle = 0 \\
&\Rightarrow T(xa) - (Tx)a = 0 \\
&\Rightarrow T(xa) = (Tx)a
\end{aligned}$$

به‌همین صورت می‌توان نشان داد که:

$$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y).$$

T باید کراندار باشد، برای هر x در گوی یکه‌ای از X تعریف می‌کنیم:

$$f_x : Y \longrightarrow A$$
$$f_x(y) = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$
$$\|f_x(y)\| = \|\langle x, T^*(y)\rangle\| \leq \|x\|.\|T^*y\| \leq \|T^*y\|$$

چون به‌ازای هر y، $\|f_x\| \leq \|T^*\|$ بنابراین $\{\|f_x\|; x \in X\}$ کراندار است و

$$\|Tx\| = \sup\{\|\langle Tx, y\rangle\|; y \in Y\} = \sup \|f_x(y)\| = \|f_x\|$$

نشان می‌دهد که T کراندار است.درنتیجه T، A-خطی و کراندار است.
$L(X,Y)$ را فضای نگاشت‌های الحاق‌پذیر می‌نامیم.

نتیجه ۲.۱.۸. *از تعریف ۲.۱.۷ در می‌یابیم که هر نگاشت الحاق‌پذیر خطی و کراندار است باید توجه کنیم که لزومی ندارد که هر نگاشت خطی و کراندار الحاق‌پذیر باشد.*

مثال ۲.۱.۹. ([۱۰ *مثال ۱.۴*]) *فرض کنیم:*

$$F = A = C([\circ, \text{۱}]), \quad X = \{f \in A; f(\text{۱}/\text{۲}) = \circ\}$$

و $F \longrightarrow X : i$ نگاشت شمول باشد. فرض کنیم ۱ نشان‌دهنده‌ی عنصر همانی A باشد، دراین‌صورت برای هر $x \in X$:

$$\langle i(x), \text{۱}\rangle = \langle x, i^*(\text{۱})\rangle = \langle x, \text{۱}\rangle$$
$$\Rightarrow i^*(\text{۱}) = \text{۱} \notin X$$
$$\Rightarrow i^* \notin L(A, X)$$

و بنابراین i الحاق‌پذیر نیست.

اکنون یک A-مدول طبیعی نظیر جبر عملگرهای کراندار روی یک فضای هیلبرت را معرفی می‌کنیم.

برای یک A-مدول پیش هیلبرت X، $L(X)$ را مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای $T \in B(X)$ که یک عملگر $T^* \in B(X)$ وجود داشته باشد قرار می‌دهیم. یعنی $L(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای کراندار روی X دارای الحاق کراندار نسبت به ضرب داخلی A-مقداری است. ([۱۰ بخش ۵]) براحتی قابل مشاهده است که برای $T \in L(X)$، الحاق T^* یکتا و متعلق به $L(X)$ است.

درواقع $L(X)$ همان $L(X, X)$ است. بنابراین $L(X)$ یک $*$-جبر با پیچش $T \longmapsto T^*$ است، با یک محاسبه‌ی ساده نتیجه می‌گیریم که:

$$\|T^*T\| = \|T\|^2$$

برای $T \in L(X)$، هرگاه $\|.\|$ همان نرم روی $B(X)$ باشد.

اکنون اگر $\{t_n\}$ یک دنباله همگرا به t در $L(X)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
\|t_n^* y - t_m^* y\| &= \sup_{x \in X} \|\langle x, (t_n^* - t_m^*)y\rangle\| \\
&= \sup_{x \in X} \|\langle (t_n - t_m)x, y\rangle\| \\
&\leq \sup_{x \in X} \|(t_n - t_m)x\|.\|y\| \\
&\leq \|t_n - t_m\|.\|y\|
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\{t_n^* y\}$ همگراست. فرض کنیم به sy همگرا باشد لذا:

$$\langle tx, y\rangle = \lim_n \langle t_n x, y\rangle = \langle x, \lim_n t_n^* y\rangle = \langle x, sy\rangle.$$

بنابراین $t \in L(X)$ و درنتیجه $L(X)$ یک زیرمجموعه‌ی بسته از $B(X)$ است و لذا $L(X)$ یک جبر باناخ است. افزون‌بر این:

$$\begin{aligned}
\|t\|^2 = \sup_{x \in X} \|tx\|^2 &= \sup_{x \in X} \|\langle tx, tx\rangle\| \\
&= \sup \|\langle t^* tx, x\rangle\| \\
&\leq \|t^* t\| \\
&\leq \|t^*\|.\|t\| \\
&\leq \|t\|^2
\end{aligned}$$

پس $\|t\|^2 \leq \|t^* t\| \leq \|t\|^2$ یعنی $\|t^* t\| = \|t\|^2$ بنابراین $L(X)$ یک C^*-جبر است.

اکنون فرض کنیم A یک C^*-جبر و B یک $*$-زیرجبر بسته از A، X یک B-مدول پیش هیلبرت و Y

یک A-مدول پیش هیلبرت باشد و ضرب‌های داخلی A و B-مقداری روی Y و X را توسط $\langle .,. \rangle_A$ و $\langle .,. \rangle_B$ نشان می‌دهیم.

توجه داریم که Y یک B-مدول راست است. یک مشخصه از نگاشت‌های کراندار B-مدولی از X به Y را در شرایط ضرب داخلی $\langle .,. \rangle_B$ و $\langle .,. \rangle_A$ ارائه خواهیم کرد. برای احتراز از پیچیدگی‌های غیرضروری، فرض می‌کنیم A یکدار است و 1_A عنصر همانی A است به‌گونه‌ای که $1_A \in B$. (درغیراین‌صورت می‌توانیم Y را یک A^1-مدول پیش هیلبرت و X را به عنوان یک B'-مدول پیش هیلبرت، هرگاه B' یک زیرجبر از A^1 تولید شده توسط 1_A و B باشد در نظر بگیریم.)

گزاره ۲.۱.۱۰. *([۱۲ گزاره ۲.۷]) فرض کنیم $\tau : B \longrightarrow A$ یک نگاشت خطی به‌گونه‌ای باشد که برای $K \geq 0$ حقیقی داشته باشیم:*

$$\tau(x)^*\tau(x) \leq Kx^*x \quad (x \in B)$$

دراین‌صورت

$$\tau(x) = \tau(1)x \quad (x \in B)$$

قضیه ۲.۱.۱۱. *([۱۲ قضیه ۲.۸]) برای هر نگاشت خطی $\tau : X \longrightarrow Y$ شرایط زیر هم‌ارزند:*

(۱) τ کراندار است و

$$\tau(x.b) = (\tau x).b \quad (x \in X, b \in B)$$

(۲) یک $K \geq 0$ حقیقی موجود است که

$$\langle \tau(x), \tau(x) \rangle_A = K\langle x, x \rangle_B \quad (x \in X)$$

قضیه ۲.۱.۱۲. *فرض کنیم A یک C^*-جبر و X یک A-مدول هیلبرت باشد، $End_A(X)$ مجموعه‌ی تمام درونریختی‌های روی X و $LM(A)$ ضربگر جبری چپ روی A باشد دراین‌صورت داریم:*

$$LM(A) \cong End_A(X)$$

همچنین اگر $M(A)$ ضربگر جبری A باشد آنگاه $Z(LM(A)) = Z(M(A))$ [۷].

نتیجه ۲.۱.۱۳. *برای نگاشت کراندار B-مدولی $\tau : X \longrightarrow Y$ داریم:*

$$\|\tau\| = \inf\{K^{1/2}; \langle \tau x, \tau x \rangle_A \leq K\langle x, x \rangle_B; \forall x \in X\}$$

۲.۲ خوددوگانی مدول‌ها([۱۲ بخش ۳])

فرض کنیم A یک C^*-جبر و X یک A-مدول پیش هیلبرت باشد، مجموعه‌ی نگاشت‌های A-مدولی کراندار از X به داخل A را با X^* نمایش داده و آن را دوگان X می‌نامیم. با استفاده از (۱۳.۱.۲) $(A = B = Y)$ X^* به‌طور خلاصه مجموعه‌ی نگاشت‌های خطی $\tau : X \longrightarrow A$ است هرگاه یک $K \geq \circ$ موجود باشد که

$$\tau(x)^* \ \tau(x) \leq K\langle x, x\rangle \quad (x \in X)$$

نگاشت $\widehat{x} \in X^*$ را برای هر $x \in X$ به‌صورت $\widehat{x}(y) = \langle y, x\rangle$ برای هر $y \in X$ نسبت می‌دهیم. به‌وضوح اگر $\widehat{X}$ مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های به‌صورت $\widehat{x}$ باشد آنگاه $\widehat{X} \subset X^*$.

تعریف ۱.۲.۲. X را خوددوگان نامیم اگر $\widehat{X} = X^*$. یعنی هر نگاشت در X^* را به ضرب‌های داخلی A-مقداری با x ثابت در X منتسب نماییم.

به‌عنوان یک مثال بدیهی، اگر A یکدار باشد دراین‌صورت A خود یک A-مدول هیلبرت خوددوگان است.

به‌عنوان یک تذکر بیان می‌کنیم که اگر X خوددوگان باشد، X باید تام باشد. عکس این مطلب صادق نیست، یعنی تمامیت شرط کافی برای ضمانت خوددوگانی نیست. برای دیدن مثال‌هایی در این‌باره می‌توان به [۱۲] رجوع نمود.

اگر ضرب اسکالر را روی X^* به‌صورت $(\lambda\tau)(x) = \overline{\lambda}\tau(x)$ برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$، $\tau \in X^*$ و $x \in X$ تعریف کنیم، داریم:

$$(\lambda x)^\wedge = \lambda\widehat{x} \quad (x \in X, \lambda \in \mathbb{C})$$

با اضافه کردن این نگاشت‌ها به X^*، X^* به یک فضای خطی تبدیل می‌شود و اگر قرار دهیم:

$$(\tau.a)(x) = a^*\tau(x) \quad (\tau \in X^*, a \in A, x \in X)$$

X^* یک A-مدول راست است. لذا نگاشت $x \longmapsto \widehat{x}$ یک نگاشت مدولی یک‌به‌یک از X به X^* است.

طبیعی به نظر می‌رسد که بپرسیم آیا X^* یک A-مدول پیش هیلبرت است یعنی آیا $\langle .,.\rangle$ را می‌توان به یک ضرب داخلی A-مقداری روی X^* توسیع داد. با معرفی چند نمادگذاری به این پرسش پاسخ می‌دهیم. فرض کنیم f یک تابعک خطی مثبت روی A باشد. دراین‌صورت $f(\langle .,.\rangle)$ یک ضرب داخلی مزدوج دوخطی مثبت روی X است و

$$N_f = \{x \in X; f(\langle x, x\rangle) = \circ\}$$

یک زیرفضای خطی از X است. این نشان می‌دهد که X/N_f یک فضای پیش هیلبرت با ضرب داخلی $\langle .,.\rangle_f$

تعریف شده به‌صورت زیر است:

$$\langle x+N_f, y+N_f\rangle_f = f(\langle x,y\rangle) \quad (x,y\in X)$$

H_f را فضای هیلبرت تکمیل شده X/N_f قرارداد می‌کنیم و $\|.\|_f$ را برای نرم روی H_f که از ضرب داخلی‌اش به‌دست آوردیم می‌نویسیم.

اکنون اگر $\tau\in X^*$ طبق نتیجه‌ی ۱۳.۱.۲ داریم:

$$\tau(x)^*\,\tau(x)\le \|\tau\|^{۲}\langle x,x\rangle \quad (x\in X)$$

بنابراین اگر $x\in N_f$، دراین‌صورت

$$f(\tau(x)^*\,\tau(x)) = ۰ = f(\tau(x))$$

به‌این معنی که نگاشت

$$x+N_f\longmapsto f(\tau(x))$$

یک تابعک خطی خوش‌تعریف روی X/N_f است. برای هر $x\in X$ داریم:

$$\begin{aligned}|f(\tau(x))| &\le \|f\|^{۱/۲}\, f(\tau(x)^*\,\tau(x))\\ &\le \|f\|^{۱/۲}.\|\tau\|.f(\langle x,x\rangle)^{۱/۲}\\ &= \|f\|^{۱/۲}.\|\tau\|.\|x+N_f\|_f\end{aligned}$$

بنابراین یک بردار منحصربه‌فرد $\tau_f\in H_f$ وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$\|\tau_f\|_f\le \|\tau\|.\|f\|^{۱/۲}$$

$$\langle x+N_f,\tau_f\rangle_f = f(\tau(x)) \quad (x\in X)$$

تبصره ۲.۲.۲. *برای هر $y\in X$ قرار می‌دهیم.* $\widehat{y}_f = y+N_f$

اکنون فرض کنیم g تابعک خطی مثبت دیگری روی A به‌گونه‌ای باشد که $g\le f$، داریم: $N_f\subseteq N_g$، نگاشت استاندارد

$$x+N_f\longmapsto x+N_g \quad (x\in X)$$

از X/N_f به X/N_f را به نگاشت $V_{f,g}$ از H_f به H_g توسیع می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$V_{f,g}(\widehat{x}_f) = x + N_g = \widehat{x}_g$$

گزاره ۳.۲.۲. *فرض کنیم X یک A-مدول پیش هیلبرت، f و g دو تابعک خطی مثبت روی A با $g \leq f$ باشد، آنگاه*

$$V_{f,g}(\tau_f) = \tau_g \quad (\tau \in X^*)$$

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنیم A یک C^*-جبر باشد، A را یک W^*-جبر نامیم هرگاه دوگان فضای باناخی همچون M باشد، M را پیش‌دوگان A گوئیم.

فرض کنیم A یک W^*-جبر باشد. پیش دوگان A را با M نشان می‌دهیم و فرض کنیم F مجموعه‌ی تابعک‌های خطی مثبت نرمال روی A باشد. M یک زیرفضای A^*، فضای مزدوج A، F یک زیرمجموعه از M است. بنابراین M را می‌توان به‌صورت ترکیبات خطی F در A^* نوشت. برای یادآوری ذکر می‌کنیم که فضای مزدوج A، فضای همه‌ی تابعک‌های خطی و پیوسته بر A است. حقایق بیشتر درباره‌ی W^*-جبرها را به [۱۴] می‌سپاریم.

قضیه ۵.۲.۲. *فرض کنیم X یک A-مدول پیش هیلبرت باشد ضرب داخلی A-مقداری $\langle .,. \rangle$ به $X^* \times X^*$ توسیع می‌یابد به‌طوری‌که X^* را به یک A-مدول هیلبرت خوددوگان تبدیل می‌سازد. به‌ویژه ضرب داخلی توسیع‌یافته در شرط*

$$\langle \widehat{x}, \tau \rangle = \tau(x) \quad (x \in X, \tau \in X^*)$$

صدق می‌کند.

گزاره ۶.۲.۲. *فرض کنید X یک A-مدول پیش هیلبرت خوددوگان باشد. $(X^* = \widehat{X})$ و Y یک A-مدول پیش هیلبرت و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت کراندار باشد. دراین‌صورت یک نگاشت مدولی کراندار $T^* : Y \longrightarrow X$ چنان موجود است که*

$$\langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle \quad (x \in X, y \in Y)$$

نکته ۷.۲.۲. *اگر X یک A-مدول هیلبرت خوددوگان باشد. هرنگاشت مدولی در $B(X)$ متعلق به $L(X)$ است.*

اگر A یک W^*-جبر باشد، نگاشت‌های مدولی کراندار بین دو A-مدول پیش هیلبرت به‌طور منحصربه‌فرد به نگاشت‌های مدولی کراندار بین مدول‌های خوددوگان (متناظر با مدول‌های حوددوگان) توسیع می‌یابد.

قضیه ۸.۲.۲. *فرض کنیم X و Y دو A-مدول پیش هیلبرت باشد و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت مدولی*

کراندار باشد. دراین‌صورت T به‌طور منحصربه‌فرد به یک نگاشت مدولی کراندار $\tilde{T} : X^* \longrightarrow Y^*$ توسیع می‌یابد.

اگر X یک A-مدول پیش هیلبرت باشد طبق قضیه‌ی پیشین $T \in L(X)$ به‌طور منحصربه‌فرد به یک نگاشت مدولی $\tilde{T}$ توسیع می‌یابد که $\tilde{T} \in B(X^*)$. باتوجه به ۷.۲.۲ داریم $\tilde{T} \in L(X^*)$. نگاشت $T \longrightarrow \tilde{T}$ از $L(X)$ به $L(X^*)$ خطی است.

اکنون اگر $T, U \in L(X)$، عملگرهای $\tilde{T}\tilde{U}$ و $(\tilde{T})^*$ به‌ترتیب توسیع‌هایی از TU و T^* هستند و درنتیجه $(TU)^\sim = \tilde{T}\tilde{U}$ و $(T^*)^\sim = (\tilde{T})^*$ یعنی نگاشت $T \longmapsto \tilde{T}$ یک $*$-همریختی است و ازآنجایی‌که $\tilde{T} = 0$ نتیجه می‌دهد $T = 0$. بنابراین این نگاشت یک $*$-یکریختی است.

نکته ۹.۲.۲. *فرض کنیم X یک A-مدول پیش هیلبرت باشد. هر $T \in L(X)$ به یک نگاشت منحصربه‌فرد $\tilde{T} \in L(X^*)$ گسترش (توسیع) می‌یابد. نگاشت $T \longmapsto \tilde{T}$ یک $*$-یکریختی از $L(X)$ به $L(X^*)$ است.*

قضیه ۱۰.۲.۲. *فرض کنیم X یک A-مدول هیلبرت خوددوگان باشد، آنگاه X یک فضای مزدوج است.*

قضیه ۱۱.۲.۲. *فرض کنیم X یک A-مدول هیلبرت خوددوگان باشد. دراین‌صورت $L(X)$ یک W^*-جبر است.*

نتیجه ۱۲.۲.۲. *اگر X یک A-مدول هیلبرت خوددوگان باشد، X و $L(X)$ فضای مزدوج هستند و درنتیجه $L(X)$ یک W^*-جبر است.*

نتیجه‌ی دیگری که از این بحث حاصل می‌شود وجود یک تجزیه‌ی قطبی برای هر عنصر از یک مدول خوددوگان روی یک W^*-جبر است.

نتیجه ۱۳.۲.۲. *اگر X یک A-مدول هیلبرت خوددوگان باشد، هر $x \in X$ را می‌توان به‌صورت $x = u.\langle x, x\rangle^{1/2}$ نوشت هرگاه $u \in X$ چنان باشد که $\langle u, u\rangle$ تصویر برد $\langle x, x\rangle^{1/2}$ باشد. این تجزیه یکتاست.*

۳.۲ توسیع یک مدول با استفاده از یک جبر بزرگتر([۱۲ بخش ۴])

فرض کنیم A یک C^*-جبر یکدار باشد و B یک $*$-زیرجبر بسته از A به‌گونه‌ای باشد که $1_A \in B$ و X یک B-مدول پیش هیلبرت باشد، در این بخش یک توسیع روی $(X \odot A)$ از X توسط A که یک A-مدول پیش هیلبرت است بنا می‌کنیم و نشان می‌دهیم که تحت شرایط معینی $(X \odot A)^*$ به‌طور ایزومتریک با A-مدول راست از تمام نگاشت‌های B-مدولی کراندار از X به A یکریخت است.

یک نتیجه این است که مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های B-مدولی کراندار از X به B^{**} می‌تواند به یک B^{**}-مدول هیلبرت خوددوگان تبدیل شود.

برای شروع، ضرب تانسوری جبری $X \otimes A$ را که یک A-مدول راست است بررسی می‌کنیم هرگاه قرار دهیم:

$$(x \otimes a)a_1 = x \otimes aa_1 \quad (x \in X, a, a_1 \in A)$$

تعریف می‌کنیم:

$$[.,.] : X \otimes A \times X \otimes A \longmapsto A$$
$$[\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes a_j, \sum_{i=1}^{m} y_i \otimes \alpha_i] = \sum_{i,j} \alpha_i^* \langle x_j, y_i \rangle a_j$$

$[.,.]$ خوشتعریف و مزدوج دوخطی است و

$$[z, w] = [w, z]^* \qquad (z, w \in X \otimes A)$$
$$[z.a, w] = [z, w]a \qquad (z, w \in X \otimes A, a \in A)$$

برای هر $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ و $b_1, b_2, \cdots, b_n \in B$ داریم:

$$\sum_{i,j} b_i^* \langle x_j, x_i \rangle b_j = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i\, b_i, \sum_{i=1}^{n} x_i\, b_i \rangle \geq 0.$$

برای ادامه‌ی بحث نیازمند یک تعریف یا در حقیقت یک معرفی و یک گزاره هستیم که در زیر به آن‌ها اشاره کرده و سپس به بحث خود ادامه می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنیم A یک C^*-جبر باشد. $A_{(n)}$ را C^*-جبر ماتریس‌های $n \times n$ با مقدار درایه‌های هر ماتریس در A برای $n = 1, 2, \cdots$ تعریف می‌کنیم.

گزاره ۲.۳.۲. *فرض کنیم $c_{ij} \in A$ برای $i, j = 1, 2, \cdots, n$، دراین‌صورت ماتریس $[c_{i,j}] \in A_{(n)}$ مثبت است یعنی $[c_{i,j}] \geq 0$ اگروتنهااگر*

$$\sum_{i,j} a_i^*\, c_{ij}\, a_j \geq 0 \quad (\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in A).$$

به ادامه‌ی بحث برمیگردیم. اکنون بنابر ۲.۳.۲ ماتریس $[\langle x_j, x_i \rangle]$ در $B_{(n)}$، C^*-جبر ماتریس‌های $n \times n$ با مقدار درایه‌هایش در B، مثبت است، لذا یک عنصر مثبت از C^*-جبر بزرگتر یعنی $A_{(n)}$ نیز می‌باشد و باز

هم طبق ۲.۳.۲

$$\sum_{i,j} a_i^* \langle x_j, x_i \rangle \geq ۰ \quad (a_۱, \cdots, a_n \in A, x_۱, \cdots, x_n \in X).$$

یعنی

$$[z, z] \geq ۰ \quad (z \in X \otimes A)$$

اگر قرار دهیم

$$N = \{z \in X \otimes A; [z, z] = ۰\}$$

N یک A-زیرمدول از $X \otimes A$ است و $Y = (X \otimes A)/N$ یک A-مدول پیش هیلبرت است.

یک محاسبه‌ی ساده نشان می‌دهد که

$$(x.b) \otimes ۱ - x \otimes b \in N \quad (x \in X, b \in B)$$

بنابراین نگاشت $x \longmapsto x \otimes ۱ + N$ یک نگاشت B-مدولی از X به Y است. اگرچه داریم:

$$\langle x \otimes ۱ + N, y \otimes ۱ + N \rangle = \langle x, y \rangle \quad (x, y \in X)$$

ملاحظه می‌شود که X یک B-زیرمدول Y است. Y را توسیع X توسط A می‌نامیم و قرار می‌دهیم

$$Y := X \odot A.$$

حال اگر $M(X, A)$ مجموعه‌ی همه‌ی B-مدول‌های کراندار از X به A باشد، $M(X, A)$ با ضرب اسکالر طبیعی زیر به یک فضای خطی تبدیل می‌شود:

$$(\lambda\, \varphi)(x) = \overline{\lambda}\, \varphi(x) \quad (\lambda \in \mathbb{C}, x \in X, \varphi \in M(X, A))$$

$M(X, A)$ هم‌چنین با عمل مدولی زیر به یک A-مدول راست تبدیل می‌شود:

$$(\varphi.a)(x) = a^*\, \varphi(x) \quad (a \in A, \varphi \in M(X, A)).$$

توجه می‌کنیم که هر $\tau \in (X \odot A)^*$ را می‌توان به یک نگاشت $\tau_R \in M(X, A)$ با تحدید کردن τ به X تبدیل نمود. به‌وضوح

$$\tau_R(x) = \tau(x \otimes ۱ + N) \quad (x \in X)$$

زیرا τ_R همان نگاشت τ تحدید شده به X است.

نگاشت $\tau_R \longmapsto \tau$ را در نظر می‌گیریم. این نگاشت یک نگاشت A-مدولی از $(X \odot A)^*$ به $M(X, A)$ است، خواهیم دید که تحت شرایط معینی این نگاشت یک ایزومتری از $(X \odot A)^*$ بروی $M(X, A)$ است.

لم ۳.۳.۲. *فرض کنیم A یک C^*-جبر یکدار بوده و S یک مجموعه از تابعک‌های خطی مثبت روی A با نرم کمتر مساوی ۱ باشد به‌طوری‌که*

$$\|a\| = \sup\{f(a); f \in S\} \quad a \in A, a \geq ۰.$$

دراین‌صورت اگر $b \in A$ خودالحاق باشد و $f(b) \geq ۰$، برای هر $f \in S$ داریم: $b \geq ۰$.

قضیه ۴.۳.۲. *با A و B فوق‌الذکر شرایط زیر هم‌ارزند:*

(۱) برای هر B-مدول پیش هیلبرت X، تحدید نگاشت $(X \odot A)^*$ به داخل $M(X, A)$ یک یکمتری (ایزومتری) برو است.

(۲) برای هر زیرمجموعه‌ی $\{c_{i,j} \mid i, j = ۱, ۲, \cdots, n\}$ از A که

$$\sum_{i,j} b_i^* \, c_{ij} b_j \geq ۰ \quad (\forall b_۱, b_۲, \cdots, b_n \in B)$$

داریم:

$$\sum_{i,j} a_i^* \, c_{ij} \, a_j \geq ۰ \quad (a_۱, a_۲, \cdots, a_n \in A)$$

اگر A یک C^*-جبر دلخواه یکدار باشد و X یک A-مدول پیش هیلبرت باشد. در حالت کلی نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که ضرب داخلی A-مقداری روی X را به یک ضرب داخلی A-مقداری روی X^* (همچون ۵.۲.۲) توسیع دهیم.

اگرچه، می‌توانیم یک جایگزین رضایت‌بخشی برای ۵.۲.۲ با بررسی نگاشت‌های A-مدولی کراندار از X به A^{**}، فضای مزدوج دوم A، به دست آوریم.

با استفاده از ۵.۲.۲ $(X \odot A^{**})^*$ یک A^{**}-مدول هیلبرت خوددوگان با یک ضرب داخلی A^{**}-مقداری توسیع یافته است که توسیعی از $X \odot A^{**}$ است.

لذا تبصره‌ی زیر را به‌عنوان یک حالت از ۴.۳.۲ بیان می‌نماییم:

تبصره ۵.۳.۲. *فرض کنیم A یک C^*-جبر یکدار و X یک A-مدول پیش هیلبرت باشد، آنگاه ضرب داخلی A-مقداری روی X را می‌توان به یک ضرب داخلی A^{**}-مقداری روی $M(X, A^{**})$ توسیع (گسترش) داد به‌طوری‌که $M(X, A^{**})$ به یک A^{**}-مدول خوددوگان تبدیل می‌گردد.*

فصل ۳

نگاشت‌های حافظ تعامد و C^*-همدیس روی C^*-مدول‌های هیلبرت

در فصلی که پیش رو داریم نگاشت‌های حافظ تعامد و C^*-همدیس را روی C^*-مدول‌های هیلبرت بررسی خواهیم کرد تا یک ساختار کلی و عمومی برای این‌گونه نگاشت‌ها ارائه کنیم [۶].
در بخش اول مقدمه‌ای از پژوهش‌ها و تحقیقات روی نگاشت‌های حافظ تعامد ارائه می‌نماییم و در بخش دوم به بررسی ساختار این نگاشت‌ها می‌پردازیم. البته در بخش سوم نیز به نگاشت‌های C^*-همدیس اشاره‌ای خواهیم داشت و یک تعریف هم برای نگاشت‌های همدیس روی C^*-مدول‌های هیلبرت می‌آوریم.

۱.۳ پیشینه‌ی پژوهش درباره‌ی نگاشت‌های حافظ تعامد

شرح و توصیف مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های خطی کراندار حافظ تعامد روی فضای هیلبرت نسبتا آسان و ساده است و با مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های خطی همدیس منطبق می‌شود.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم $H_۱$ و $H_۲$ دو فضای هیلبرت و $T : H_۱ \longrightarrow H_۲$ یک نگاشت خطی باشد T را حافظ تعامد می‌نامیم اگر برای هر x و y در $H_۱$ که $\langle x, y\rangle = ۰$ نتیجه دهد

$$\langle T(x), T(y)\rangle = ۰.$$

گزاره ۲.۱.۳. *نگاشت خطی T بین دو فضای هیلبرت $H_۱$ و $H_۲$ حافظ تعامد است اگروتنهااگر T مضرب اسکالر یکمتری (ایزومتری) V باشد به‌طوری‌که $V^*V = id_{H_۱}$.*

با توجه به گزاره بالا مجموعه‌ی نگاشت‌های حافظ تعامد به‌صورت $\{\lambda V; \lambda \in \mathbb{C}, V^*V = id_{H_۱}\}$ است.
اما در مورد یک C^*-مدول هیلبرت روی C^*-جبر ضرایب، از روی نگاشتی که حافظ تعامد است خاصیت

نگاشتی را که C^*-همدیس باشد، نمی‌توان استنتاج کرد. بنابراین هدف این فصل دست یافتن به ساختار نگاشت‌های مدولی کراندار حافظ تعامد C^*-همدیس روی C^*-مدول‌های هیلبرت بر یک C^*-جبر بدون هیچ‌گونه فرض بیشتری است.

راه‌حل‌های جزئی در نشریه‌ای توسط ایلیشویچ [1] و تورنشک [2] ارائه شد. [۸]

نگاشت‌های حافظ تعامد در یک مقاله که به‌وسیله‌ی چمیلنسکی [3]، ایلیشویچ، مصلحیان [4] و صادقی [5] ارائه شد نیز یادآوری شده‌اند. [۳]

نگاشت‌های خطی کراندار حافظ تعامد بین C^*-جبرها به‌وسیله‌ی شوایزر در سال ۱۹۹۶ بررسی شده است. [۱۵]

بعد از بیان مختصری از پیشینه‌ی پژوهش در زمینه‌ی نگاشت‌های حافظ تعامد، اکنون تعریفی از این‌گونه نگاشت‌ها روی C^*-مدول‌های هیلبرت بیان می‌کنیم. این تعریف مشابه تعریف ۱.۱.۳ است که روی C^*-مدول هیلبرت بنا شده است.

تعریف ۳.۱.۳. فرض کنیم X یک C^*-مدول هیلبرت روی C^*-جبر A و T یک نگاشت مدولی روی X باشد. T حافظ تعامد نامیده می‌شود اگر برای x و y معین در X، $\langle x,y\rangle = 0$، آنگاه $\langle T(x),T(y)\rangle = 0$.

به‌ویژه برای دو C^*-مدول هیلبرت X و Y روی یک C^*-جبر A نگاشت مدولی کراندار $T : X \longrightarrow Y$ حافظ تعامد است اگروتنهااگر نامساوی

$$\langle x,y\rangle \leq \langle x+ay, x+ay\rangle \quad (x,y\in X, a\in A)$$

نامساوی زیر را نتیجه دهد:

$$\langle T(x),T(y)\rangle \leq \langle T(x)+T(y), T(x)+aT(y)\rangle$$

برای مشاهده‌ی اثبات این حکم می‌توان به [۸] رجوع کرد.

برای یک فضای هیلبرت داده شده H مجموعه‌ی نگاشت‌های خطی و کراندار حافظ تعامد عبارت‌است‌از تمام مضارب اسکالر یکمتری V به‌صورت λV که $\lambda\in\mathbb{C}$ و یکمتری V نگاشتی است چون $V : H \longrightarrow H$ به‌طوری‌که $V^*V = id_H$.

فرض کنیم $T : H \longrightarrow H$ یک نگاشت حافظ تعامد و T^* همان نگاشت الحاق T باشد. نگاشت T،

[1] D.Ilisevic

[2] A.Turnsek

[3] J. Chmielinski

[4] M.S. Moslehian

[5] GH. Sadeghi

نگاشت خطی و کراندار T^*T را به‌صورت

$$T^*T(x) = \lambda_x x + z \quad (x \in H, z \in \{x\}^{\perp}, \lambda_x \in \mathbb{C})$$

القا می‌کند. همان‌گونه که اشاره کردیم هرگاه H یک فضای هیلبرت باشد و E یک زیرمجموعه از H باشد، می‌توان H را به‌صورت $H = E + E^{\perp}$ نوشت که $E \cap E^{\perp} = \{0\}$. لذا هر عنصر $x \in H$ نیز به‌صورت $x = y + z$ نوشته می‌شود که $z \in E^{\perp}$ و $y \in E$.

چون $T^*T(x)$ یک عنصر از H است پس می‌توان آن را به صورت $T^*T(x) = \lambda_x\, x + z$ که $z \in \{x\}^{\perp}$ نوشت. چون T و T^* هردو خطی و کراندارند، لذا:

$$\begin{aligned} T^*T(ax + y) &= T^*(T(ax + y)) \\ &= T^*(T(ax) + T(y)) \\ &= T^*(aT(x)) + T^*(T(y)) \\ &= aT^*T(x) + T^*T(y) \end{aligned}$$

یعنی T^*T خطی است. اکنون فرض کنیم $\|T\| \leq M$ و $\|T^*\| \leq N$ برای M و N معین. درنتیجه:

$$\begin{aligned} \|T^*T\| &= \sup\{\|T^*T(x)\|; \|x\| \leq 1, x \in X\} \\ &= |T^*T(x)\| \\ &\leq \|T^*\|.\|T\|.\|x| \\ &\leq \|T^*\|.\|T\| \leq N.M \end{aligned}$$

درنتیجه T^*T نیز خطی و کراندار است.

بنابراین چون $z \in \{x\}^{\perp}$ درنتیجه $\langle x, z\rangle = 0$. درنتیجه داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(x), T(z)\rangle = \langle T^*T(x), z\rangle \\ &= \langle \lambda_x x + z, z\rangle \\ &= \langle \lambda_x x, z\rangle + \langle z, z\rangle \\ &= \lambda_x \langle x, z\rangle + \langle z, z\rangle \\ &= \langle z, z\rangle \end{aligned}$$

بنابراین $T^*T(x) = \lambda_x x$ و $z = 0$ و چون T^*T مثبت است بنابراین $\lambda_x \geq 0$. اکنون فرض کنیم $x, y \in H$ دو عنصر متعامد باشند:

$$\begin{aligned} T^*T(x+y) &= \lambda_{x+y}(x+y) \\ &= \lambda_{x+y}(x) + \lambda_{x+y}(y) \end{aligned}$$

یعنی $T^*T(x+y) = \lambda_{x+y}(x) + \lambda_{x+y}(y)$ و از طرفی نیز داریم:

$$T^*T(x+y) = T^*T(x) + T^*T(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

و درنتیجه داریم:

$$T^*T(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x) + \lambda_{x+y}(y)$$

واین یعنی:

$$\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y := \lambda$$

بنابراین عملگر حافظ تعامد T یک عملگر T^*T که به‌صورت ضرب یک اسکالر مثبت λ در عملگر همانی عمل می‌کند یعنی $T^*T = \lambda.id_H$ را ایجاب می‌کند.

تجزیه‌ی قطبی T روی $B(H)$ هرگاه H یک فضای هیلبرت باشد تساوی $T = \sqrt{\lambda}V$ را نتیجه می‌دهد. یادآور می‌شویم که $B(H)$ جبر تمام عملگرهای خطی و کراندار روی H است.

$$\begin{aligned} &T = |T|.V \\ &|T| = (T^*T)^{1/2} = \sqrt{\lambda} \\ &T^*T = (\sqrt{\lambda}V)^*(\sqrt{\lambda}V) = \lambda.V^*V \end{aligned}$$

وبا توجه به اینکه $T^*T = \lambda.id_H$ خواهیم داشت: $V^*V = id_H$ اکنون می‌توان $\sqrt{\lambda}$ مثبت را با یک عدد مختلط دلخواه $z \in \mathbb{C}$ با قدرمطلق یکسان ضرب در یک یکانی $u \in \mathbb{C}$ جایگزین کرد. دراین‌صورت یکمتری V نیز با u^*V جایگزین می‌شود.

$$T = \sqrt{\lambda}V = zuu^*V = zu.u^*V$$

واین تجزیه دیگری از T را در حالت عمومی‌تری نتیجه می‌دهد.

اما در قضیه‌ی تجزیه‌ی قطبی روی فضاهای هیلبرت یکمتری معرفی شده منحصربه‌فرد است، باتوجه به اینکه $u \in \mathbb{C}$ یکانی بوده و v با u^*v جایگزین شده، ایرادی به قضیه وارد نیست.

۲.۳ نگاشت‌های حافظ تعامد روی C^*-مدول‌های هیلبرت

در بخش قبل تعریفی برای یک نگاشت حافظ تعامد روی یک C^*-مدول هیلبرت ارائه کردیم و همچنین ساختار یک نگاشت خطی و کراندار حافظ تعامد T روی فضای هیلبرت را نیز به‌دست آوردیم.

دراین بخش به بررسی نگاشت مدولی کراندار حافظ تعامد T روی C^*-مدول هیلبرت X می‌پردازیم. درکل به چندین علت نمی‌توانیم شناسه‌های فضاهای هیلبرت را در جایگزینی با یک C^*-مدول دلخواه تکرار کنیم، که در فصل دوم به تفاوت‌های میان یک فضای هیلبرت و یک C^*-مدول هیلبرت اشاره نمودیم. پس در حالت کلی نتایج نگاشت‌های خطی و کراندار حافظ تعامد روی یک فضای هیلبرت را نمی‌توان به نگاشت‌های حافظ تعامد کراندار روی C^*-مدول‌های هیلبرت تعمیم داد.([۶ بخش ۱])

مثال ۱.۲.۳. *فرض کنیم A، C^*-جبر توابع پیوسته روی فاصله‌ی واحد $[۰,۱]$ باشد، قرار می‌دهیم $X = A \oplus A$، X یک A-مدول هیلبرت شامل دو کپی از A است که ضرب داخلی A-مقداری استاندارد زیر روی آن تعریف شده است:*

$$\langle .,. \rangle : A \oplus A \times A \oplus A \longrightarrow A$$
$$((f_۱, g_۱), (f_۲, g_۲)) \longmapsto \langle (f_۱, g_۱), (f_۲, g_۲) \rangle$$

به‌طوری‌که

$$\langle (f_۱, g_۱), (f_۲, g_۲) \rangle = \overline{f_۱} g_۱ + \overline{f_۱} g_۲ + \overline{f_۲} g_۱ + \overline{f_۲} g_۲$$
$$(f_۱, f_۲, g_۱, g_۲ \in A)$$

عمل ضرب T را روی دوبخش X توسط تابع $h \in A$ که $h(t) = t$ برای $t \in [۰,۱]$ بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که T حافظ تعامد است.

$$T : A \oplus A = X \longrightarrow X = A \oplus A, \quad (f, g) \longmapsto (hf, hg) = (tf, tg).$$

فرض کنیم:

$$\langle (f_1,g_1),(f_2,g_2)\rangle = 0 \quad (f_1,f_2,g_1,g_2\in A)$$

$$\begin{aligned}\langle T(f_1,g_1),T(f_2,g_2)\rangle &= \langle (tf_1,tg_1),(tf_2,tg_2)\rangle\\ &= \overline{tf_1}tg_1+\overline{tf_1}tg_2+\overline{tf_2}tg_1+\overline{tf_2}tg_2\\ &= t^2\overline{f_1}g_1+t^2\overline{f_1}g_2+t^2\overline{f_2}g_1+t^2\overline{f_2}g_2\\ &= t^2\langle (f_1,g_1),(f_2,g_2)\rangle = 0\end{aligned}$$

درنتیجه T حافظ تعامد است. می‌توان بررسی نمود که T یک‌به‌یک، A-خطی و کراندار نیز می‌باشد.

مثال ۲.۲.۳. فرض کنیم A یک C^*-جبر از تمام توابع پیوسته روی فاصله‌ی $[0,1]$ باشد و $X=A$ که ضرب داخلی A-مقداری زیر روی آن تعریف شده است:

$$\langle .,.\rangle : X\times X\longrightarrow A$$
$$(f,g)\longrightarrow \overline{f}g$$

عمل ضرب T را روی X توسط تابع $h\in A$ که $h(t)=t$ برای $t\in[0,1]$ بررسی می‌کنیم:

$$T:X\longrightarrow X; T(f)=hf+h=tf+t$$

نشان می‌دهیم T حافظ تعامد نیست، فرض کنیم:

$$\langle f_1,f_2\rangle=\overline{f_1}.f_2=0$$

درنتیجه:

$$\langle Tf_1,Tf_2\rangle=\langle tf_1+t,tf_2+t\rangle=(\overline{tf_1+t})(tf_2+t)=t^2\overline{f_1}f_2+t^2\overline{f_1}+t^2f_2+t^2\neq 0$$

مثال ۳.۲.۳. فرض کنیم A یک C^*-جبر از تمام توابع پیوسته روی فاصله‌ی $[0,1]$ باشد، $A=C([0,1])$، A یک C^*-مدول هیلبرت روی خودش است. نگاشت T_0 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_0:A\longrightarrow A,\quad f\longmapsto hf,\quad h(t)=t.(\sin\frac{1}{t}+i\cos\frac{1}{t}).$$

با توجه به ضرب داخلی A- مقداری استاندارد زیر نشان می‌دهیم $T_{\circ}$ یک نگاشت حافظ تعامد است.

$$\langle .,. \rangle : A \times A \longrightarrow A, \quad (f,g) \longmapsto \langle f,g \rangle = \overline{f}g$$

فرض کنیم

$$\langle f,g \rangle = \overline{f}g = \circ \quad (f,g \in A)$$

نشان می‌دهیم $\langle T_{\circ}f, T_{\circ}g \rangle = \circ$.

$$\begin{aligned}
\langle T_{\circ}f, T_{\circ}g \rangle &= \langle hf, hg \rangle \\
&= \overline{h}\,\overline{f}.hg \\
\overline{h}\,\overline{f}.hg(t) &= \overline{h}(t).\overline{f}(t).h(t)g(t) \quad (t \in [\circ, 1]) \\
&= t(\sin\frac{1}{t} - i\cos\frac{1}{t}).\overline{f}(t).t(\sin\frac{1}{t} + icos\frac{1}{t})g(t) \\
&= t^{2}(\sin^{2}\frac{1}{t} + \cos^{2}\frac{1}{t}).\overline{f}(t)g(t) \\
&= t^{2}.\overline{f}(t)g(t) \\
&= t^{2}.\langle f(t), g(t) \rangle = \circ
\end{aligned}$$

درنتیجه $\langle T_{\circ}f, T_{\circ}g \rangle = \circ$ *. یعنی نگاشت $T_{\circ}$ حافظ تعامد است.*

پس از بیان این سه مثال، سعی می‌کنیم نتایج روی نگاشت‌های مدولی کراندار حافظ تعامد را تنظیم نماییم. برای این منظور نیازمند ساختاری هستیم که پاشکه [۱۲] ارائه کرده است و البته در فصل دوم بخش سوم و چهارم بیان نمودیم.

تعریف ۴.۲.۳. فرض کنیم A یک C^*-جبر و X یک A-مدول هیلبرت باشد. هرگاه برد ضرب داخلی A-مقداری روی X در A نرم چگال باشد، C^*-مدول هیلبرت X را یک A-مدول هیلبرت کامل می‌نامیم.

فرض کنیم X یک A-مدول هیلبرت روی C^*-جبر A باشد. X را به‌طور متعارف می‌توانیم آن‌چنان که در بخش سوم از فصل دوم بیان نمودیم به یک A^{**}-مدول هیلبرت X^* روی هر فضای دوگان دوم باناخ و جبر فون نویمن A^{**} از A توسیع دهیم.

برای این منظور نگاشت A^{**}-مقداری $[.,.]$ را تعریف می‌کنیم:

$$[.,.] : A^{**} \otimes X \times A^{**} \otimes X \longrightarrow A^{**}$$

$$[a \otimes x, b \otimes y] = a\langle x,y \rangle b^* \quad (x,y \in X, a,b \in A^{**})$$

تعریف می‌کنیم:

$$N = \{z \in A^{**} \otimes X; [z,z] = ۰\}.$$

مدول خارج‌قسمت $\frac{A^{**} \otimes X}{N}$ را با $X^\sharp$ نشان می‌دهیم.

طبق آنچه در بخش سوم از فصل دوم بیان نمودیم $X^\sharp$ که یک A^{**}-مدول پیش هیلبرت است را می‌توان به داخل یک A^{**}-مدول هیلبرت خوددوگان کامل (تام) همچون M نشاند (M با A^{**}-مدول A^{**}-دوگان از $X^\sharp$ یکریخت است).

همچنین طبق قضایای ۵.۲.۲ و ۱۰.۲.۲ M، یک دوگان فضای باناخ خودش است یعنی M خوددوگان است و فرض کنیم π' نشانندهٔ X به داخل $X^\sharp$ باشد. هر نگاشت کراندار و A-خطی $T : X \longrightarrow X$ را می‌توان به یک نگاشت منحصربه‌فرد A^{**}-خطی $T : X^\sharp \longrightarrow X^\sharp$ تبدیل کرد به‌طوری‌که حافظ عملگر نرم بوده و از نشانندهٔ $\pi'(X)$ از X به داخل $X^\sharp$ تبعیت کند. به‌همین‌صورت می‌توان نگاشت T را به A^{**}-مدول خوددوگان M نیز توسیع داد.

در این توسیع، $\pi'(X)$ یک نشانده‌شده جبری ایزومتریک از X در M است به‌طوری‌که یک A-زیرمدول از M است.

مقادیر ضرب داخلی A-مقداری از عناصر X نشانده‌شده در M، نسبت به ضرب داخلی A^{**}-مقداری روی M حفظ شده است.

و طبق ۸.۲.۲ و ۷.۲.۲ هر عملگر A-خطی کراندار T روی X به یک عملگر A^{**}-خطی کراندار منحصربه‌فرد روی N حافظ عملگر نرم توسیع می‌یابد.

با بیان این مقدمه قصد داریم حقیقتی را روی طبیعت نگاشت‌های مدولی کراندار حافظ تعامد روی C^*-مدول‌های هیلبرت ثابت کنیم.

آکمان[۶] در [۲] چنین می‌گوید:

فرض کنیم A یک C^*-جبر و A^{**} جبر فون‌نویمن دوگان مضاعف A باشد. π یک نشانده متعارف A به داخل A^{**} است. ترکیب π با تصویر ρ که A را به بخش تجزیه‌ناپذیری از A^{**} دنبال می‌کند یک $*$-همریختی یک‌به‌یک است.

قضیه ۵.۲.۳. *فرض کنیم A یک C^*-جبر باشد، اگر برای برخی فضای هیلبرت H، A یک نمایش ایزومتریک π روی H با خاصیت $K(H) \subseteq \pi(A) \subseteq B(H)$ بپذیرد و X و Y دو A-مدول پیش هیلبرت باشند. برای نگاشت غیرصفر $T : X \longrightarrow Y$ و برای حداقل یک $\lambda > ۰$ شرایط زیر هم‌ارزند([۸ قضیه ۱.۳]):*

(۱) *T یک نگاشت A-خطی است و $\|Tx\| = \lambda\|x\|$، $\forall x \in X$.*

(۲) *برای هر x و y در X، $\langle Tx, Ty\rangle = \lambda^۲\langle x, y\rangle$*

[۶] Akemann

(۳) T یک نگاشت A-خطی و حافظ تعامد است.

قضیه ۶.۲.۳. *فرض کنیم A یک C^*-جبر، X یک A-مدول هیلبرت کامل و $X^\sharp$، A^{**}-توسیع متعارف X باشد. هر عملگر A-خطی کراندار حافظ تعامد T روی X به شکل $T = \lambda V$ است هرگاه $V : X^\sharp \longrightarrow X^\sharp$ یک نشاننده A-خطی طولپا (یکمتری) و λ یک عنصر مثبت از مرکز ضربگر جبری A، $Z(M(A))$، باشد.*

اگر هر عنصر $\lambda' \in Z(M(A))$ با $\lambda = |\lambda'|$ یک تجزیه در داخل $Z(M(A))$ بپذیرد، آنگاه عملگر V، $\pi'(X) \subseteq X^\sharp$ را حافظ می‌کند و بنابراین $T = \lambda V$ روی X.([۶ قضیه ۱.۳])

در [۸] ایلشویچ و تورنشک قضیه‌ی ۶.۲.۳ را برای حالت خاصی اثبات می‌کنند: اگر برای برخی فضای هیلبرت H، C^*-جبر A یک نمایش ایزومتریک π روی H با خاصیت $K(H) \subseteq \pi(A) \subseteq B(H)$ بپذیرد. که این حالت را در قضیه‌ی ۵.۲.۳ بیان نمودیم.

برهان. فرض کنیم π نمایش ایزومتریک ناتباهیده‌ی A در فضای دوگان دوم باناخ A و جبر فون‌نویمن A^{**} باشد. بعلاوه π' نیز عملگر توسیع π باشد یعنی $\pi' : X \longrightarrow X^\sharp \longrightarrow M$.

قصد داریم از سه‌تایی $\{A^{**}, X^\sharp \subseteq M, T\}$ به‌جای سه‌تایی $\{A, X, T\}$ استفاده کنیم. یعنی باید نشان دهیم که برای نگاشت A-خطی و کراندار حافظ تعامد T روی X، عملگر A^{**}-خطی کراندار توسیع مربوط به آن هنوز برای M حافظ تعامد است.

فرض کنیم $x, y \in M$ به‌طوری‌که $\langle x, y\rangle = ۰$ و x و y هر دو غیرصفر باشند. اگر $\{x\}^{\perp\perp}$ متمم متعامد دوم $\{x\}$ و $\{y\}^{\perp\perp}$ متمم متعامد دوم $\{y\}$ باشند. هرکدام A^{**}-زیرمدول هیلبرت از M هستند و به دلیل خوددوگان بودنشان مجموع مستقیم‌های متعامد M هستند.

با توجه به ساختار M که روی X بدست آمده، مجموعه‌های $\{x\}^{\perp\perp} \cap X$ و $\{y\}^{\perp\perp} \cap X$ به‌ترتیب در $\{x\}^{\perp\perp}$ و $\{y\}^{\perp\perp}$ چگال هستند. همان‌گونه که اشاره کردیم توسیع T از X به M، نسبت به w^*-توپولوژی روی M پیوسته است و از آنجایی‌که

$$\langle T(z), T(s)\rangle = ۰ \quad (z \in \{x\}^{\perp\perp} \cap X, \quad s \in \{y\}^{\perp\perp} \cap X).$$

نتیجه می‌گیریم که $\langle T(x), T(y)\rangle = ۰$ یعنی T حافظ تعامد است.

اکنون قصد داریم W^*-جبرهای مجزا (تجزیه‌ناپذیر) را بررسی کنیم.

همان‌طور که قبل از آغاز قضیه اشاره کردیم $*$-همریختی یک C^*-جبر چون A در درون بخش تجزیه‌ناپذیری از جبر A^{**} که ترکیب π از A به داخل A^{**} و ρ نگاشت تصویر از بخش مجزایی از A^{**} می‌باشد، یک $*$-همریختی یک‌به‌یک است.

$*$-همریختی یک‌به‌یک ρ تا اندازه‌ای همچون یک نگاشت تصویر مرکزی $P \in Z(A^{**})$ عمل می‌کند به‌طوری‌که P ضرب در A^{**} بخش مجزا(تجزیه‌ناپذیر)ی از A^{**} بدست می‌دهد.

باجایگزینی سه‌تایی $\{PA^{**}, PM, PT\}$ با $\{A^{**}, M, T\}$ مساله را ساده‌تر می‌کنیم. هرگاه

$$\rho\circ\pi : A \longrightarrow PA^{**}, \quad \rho'\circ\pi' : X \longrightarrow PM$$

یک‌به‌یک باشد. از آنجایی‌که برای x ناصفر، $\langle x, x\rangle \neq \circ$ نتیجه می‌دهد که

$$\langle Px, Px\rangle = p^{۲}\langle x, x\rangle = P\langle x, x\rangle = \rho\circ\pi(\langle x, x\rangle) \neq \circ$$

نشان می‌دهیم نگاشت $PT : PM \longrightarrow PM$ حافظ تعامد است. یادآور می‌شویم که M یک A^{**}-مدول هیلبرت خوددوگان است بنابراین PM نیز یک PA^{**}-مدول هیلبرت خوددوگان است.

اکنون فرض کنیم برای هر x و y در M، $\langle Px, Py\rangle = \circ$. درنتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\langle PT(Px), PT(Py)\rangle &= \langle P^{۲}T(x), P^{۲}T(y)\rangle\\ &= \langle PT(x), PT(y)\rangle\\ &= P^{۲}\langle T(x), T(y)\rangle\\ &= P\langle Tx, Ty\rangle = \circ\end{aligned}$$

زیرا که T عملگر حافظ تعامد است بنابراین PT نیز حافظ تعامد است. حال ضربگر جبری $M(A)$ و ضربگر جبری چپ $LM(A)$ از C^*-جبر A را بررسی می‌کنیم. پدرسون [۷] در [۱۳] اشاره می‌کند به این که: هر $*$-نمایش ناتباهیده یک‌به‌یک از A در یک جبر فون‌نویمن B به یک $*$-نمایش یک‌به‌یک از ضربگر جبری $M(A)$ در B و به یک نمایش جبری ایزومتریک از $LM(A)$ از A روی $M(A)$ و $LM(A)$ توسیع می‌یابد.

به‌ویژه، $*$-نمایش $\rho\circ\varphi$ به $M(A)$ و $LM(A)$ توسیع می‌یابد طوری‌که:

$$\rho\circ\varphi(M(A)) = \{b \in PA^{**};\ \ b\rho\circ\varphi(a) \in A,\ \ \rho\circ\varphi(a)b \in A,\ \ \forall a \in A\}$$
$$\rho\circ\varphi(LM(A)) = \{b \in PA^{**};\ \ b\rho\circ\varphi(a) \in A,\ \ \forall a \in A\}$$

از طرفی برای ضربگر جبری A روی هر C^*-جبر A داریم:

$$Z(LM(A)) = Z(M(A)).$$

[۷] Pedersen

بنابراین

$$\rho \circ \varphi(Z(LM(A))) = \{b \in PA^{**};\ \ b\rho \circ \varphi(a) = \rho \circ \varphi(a)b \in A,\ \ \forall a \in A\}.$$

همان‌طور که در ابتدای اثبات اشاره نمودیم جبر فون‌نویمن PA^{**} تجزیه‌ناپذیر است. لذا نگاشت P را می‌توان به‌صورت مجموع یک مجموعه ماکزیمال از تصاویر تجزیه‌ناپذیر دوبه‌دو متعامد $\{q_\alpha; \alpha \in I\}$ از مرکز $Z(PA^{**})$ از PA^{**} نشان داد یعنی

$$\sum_{\alpha \in I} q_\alpha = P \quad (q_\alpha \in Z(PA^{**}), \alpha \in I)$$

یک تصویر تجزیه‌ناپذیر مانند $q_\alpha \in Z(PA^{**})$ از این مجموعه را انتخاب می‌کنیم و مساله‌ی موردنظر را باز هم ساده‌تر می‌کنیم یعنی از سه‌تایی $\{q_\alpha\ PA^{**}, q_\alpha\ PM, q_\alpha\ PT\}$ برای هر $\alpha \in I$ برای بررسی مساله موردنظرمان استفاده می‌کنیم.

درواقع به‌جای بررسی اینکه $T = \lambda V$ برای $T : X \longrightarrow X$ هرگاه X یک A-مدول هیلبرت باشد نگاشت $q_\alpha\ PT$ از $q_\alpha\ PM$ به $q_\alpha\ PM$ را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که

$$q_\alpha\ PT = \lambda' V'$$

که V' باید یک یکمتری از $q_\alpha\ PX$ به $q_\alpha\ PM$ باشد باتوجه به قضیه ۵.۲.۳ عملگر $q_\alpha\ PT$ می‌تواند به‌صورت ضرب یک عنصر ثابت و نامنفی λ_{q_α} در یک یکمتری چون V_{q_α} روی $q_\alpha\ PA^{**}$-مدول هیلبرت $q_\alpha\ PM$ توصیف شود، هرگاه یکمتری V_{q_α}، $q_\alpha\ PA$-زیرمدول $q_\alpha\ PX$ را به داخل $q_\alpha\ PM$ حفظ کند والبته چون $q_\alpha\ PT$، $q_\alpha\ PA$-زیرمدول $q_\alpha\ PX$ را به داخل $q_\alpha\ PM$ حفظ می‌کند و ضرب در یک عنصر مثبت این واقعیت را تغییر نمی‌دهد لذا یکمتری V_{q_α}، $q_\alpha\ PA$-زیرمدول $q_\alpha\ PX$ را به داخل $q_\alpha\ PM$ حفظ می‌کند.

هرگاه $\lambda_{q_\alpha} = ۰$ به‌سادگی قرار می‌دهیم $V_{q_\alpha} = ۰$.

اکنون باید وجود عملگرهای سراسری روی PA^{**}-مدول هیلبرت PM را نشان دهیم.

ابتدا توجه کنیم که مجموعه‌ی همه مجموع متناهی با جمعوند دوبه‌دو متمایز $\{\lambda_{q_\alpha}.q_\alpha\ :\ \ \alpha \in I\}$ متشکل از تور جهت‌دار صعودی از عناصر مثبت از مرکز جبر عملگر $End_{PA^{**}}(PM)$ با جبر فون‌نویمن $Z(PA^{**})$ $*$-یکریخت است.

عملگر PT یک عملگر الحاقی روی PA^{**}-مدول هیلبرت خوددوگان PM می‌پذیرد. و از آنجایی‌که برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی $I_۰$ از I بازهم این تور با جبر $Z(PA^{**})$ $*$-یکریخت است. داریم:

$$۰ \leq \sum_{\alpha \in I_۰} \lambda_{q_\alpha}^{۲}.id_{q_\alpha PM} = \sum_{\alpha \in I_۰} q_\alpha.PT^*T \leq PT^*T \leq \|PT\|^{۲}\ id_{PM}$$

بنابراین این تور با $\|PT\|\ id_{PM}$ کراندار است. درنتیجه، سوپریمم این تور کراندار جهت‌دار صعودی از عناصر مثبت موجود است و این سوپریمم نیز به‌عنوان یک عنصر از مرکز جبر عملگر $End_{PA^{**}}(PM)$ با جبر فون‌نویمن $Z(PA^{**})$ $*$-یکریخت است. سوپریمم این تور را با λ_P نشان می‌دهیم.

باتوجه به ساختار سوپریمم تورهای جهت‌دار کراندار صعودی از عناصر مثبت جبرهای فون‌نویمن، تساوی زیر را داریم:

$$\lambda_p = \lim_{I_\circ \subset I} \sum_{\alpha \in I_\circ} \lambda_{q_\alpha} . q_\alpha \in Z(PA^{**}) \cong Z(End_{PA^{**}}(PM))$$

هرگاه $I_\circ$ روی بخشی از تور منظم جزیی، از تمام زیرمجموعه‌های متناهی I، حرکت کند. برای هر $z \in q_\alpha M$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle q_\alpha\ PT^*T(z), z\rangle &= \langle \lambda_{q_\alpha}^{۲} . id_{q_\alpha PM}(z), z\rangle \\ &= \lambda_{q_\alpha}^{۲} q_\alpha \langle z, z\rangle\end{aligned}$$

حال برای هر $\alpha \in I$ و $z \in PM$ خواهیم داشت:

$$\langle PT^*T(z), (z)\rangle = \lambda_p^{۲} . P\langle z, z\rangle$$

که عنصر مثبت $\lambda_p \in Z(PA^{**}) \cong Z(End_{PA^{**}}(PM))$.

درنتیجه و بنابر (۴.۳.۲) عملگر PT را می‌توان به‌صورت $PT = \lambda_p . V_P$ نوشت که V_P یک یکمتری PA^{**}-خطی است و $V_P \in End_{PA^{**}}(PM)$.

عملگر PT روی PM را بررسی می‌کنیم. با توجه به روابط بالا داریم:

$$\langle PT(x), PT(x)\rangle = \lambda_P^{۲} \langle x, x\rangle \in \rho \circ \pi(A) \quad (x \in \rho' \circ \pi'(X) \subseteq PM)$$

اما پدرسون در [۱۳] برای A، π و ρ با مفروضات بالا تساوی زیر را بیان می‌کند:

$$LM(PA) \cap Z(PA^{**}) = Z(M(\rho \circ \pi(A))) = \rho \circ \pi(Z(M(A))).$$

وچون $\lambda_p \in Z(PA^{**})$، $\lambda_p^{۲} \in Z(PA^{**})$ و همچنین

$$\lambda_p^{۲} \langle x, x\rangle \in \rho \circ \pi(A)$$

خواهیم داشت:

$$\lambda_p^{2}\langle x,x\rangle \in \rho\circ\pi(Z(M(A))) = Z(M(\rho\circ\pi(A))).$$

گرفتن ریشه‌ی دوم از λ_p^{2} در مفهوم C^*-جبری عملی است که عنصر منحصربه‌فرد از C^*-جبر خودش را نتیجه می‌دهد. بنابراین در می‌یابیم که:

$$\lambda_p \in \rho\circ\pi(Z(M(A)))$$

عملگر $\lambda_p.id_{PM}$، $\rho'\circ\pi'(X)$ را که یک $\rho\circ\pi(A)$-زیرمدول است حفظ می‌کند.

به‌عنوان یک نتیجه، می‌توانیم عملگر حافظ تعامد PA^{**}-خطی کراندار PT روی PN را به $X^\sharp$ برگردانیم چون جبر فون‌نویمن A^{**} برای هر عنصر تجزیه قطبی می‌پذیرد و نشاننده $\rho\circ\pi : A \longrightarrow PA^{**}$ و نگاشت‌های مدولی و عملگرهایی که توسط $\rho\circ\pi$ فقط با ضرب یا عمل در P جبری یکریخت بودند. بنابراین یک تجزیه‌ی $T = \lambda V$ از $T \in End_A(X)$ با تابع مثبت $\lambda \in Z(M(A))$ مشتق از λ_p به‌دست می‌آوریم. البته نشاننده‌ی A-خطی طولپایی $V \in End_A(X^\sharp)$ نیز از V_p مشتق شده است.

برای قسمت دوم قضیه نیز هرگاه هر عنصر $\lambda' \in Z(M(A))$ به‌طوری‌که $\lambda = |\lambda'|$ چنان باشد که یک تجزیه قطبی درون $Z(M(A))$ بپذیرد. عملگر V، $X^\sharp \subseteq \pi'(X)$ را حفظ می‌کند و بنابراین $T = \lambda V$ روی X.

(در پایان فقط توجه کنیم که الحاق‌پذیری V در گام آخر این اثبات درنظر گرفته شد در حالتی که T روی X الحاق‌پذیر نبوده است.) □

قضیه ۷.۲.۳. *فرض کنیم A یک C^*-جبر و X یک A-مدول هیلبرت باشد. هر نگاشت A-خطی کراندار حافظ تعامد T روی X تساوی زیر را برای هر عنصر مثبت $K \in Z(M(A))$ و هر x، y در X نتیجه می‌دهد.*

$$\langle T(x),T(y)\rangle = K\langle x,y\rangle$$

برای این قضیه دو اثبات ارائه می‌دهیم روش اول اثباتی است که فرانک و پائولوف در [۶] ارائه کردند و روش دوم را نیز با استفاده از قضیه‌ی ۳.۳.۳ که در فصل سوم خواهد آمد اثبات نموده‌ام.

برهان. (روش اول): در روش اثبات قضیه‌ی ۶.۲.۳ بیان نمودیم که

$$\langle pT(x),pT(y)\rangle = \lambda_p^{2}\langle x,y\rangle$$

که $\lambda_p^{2} \in LM(pA)\cap Z(pA^{**}) = Z(M(\rho\circ\pi(A)))$.

باید توجه کنیم که مقادیر ضرب داخلی A-مقداری روی X هرگاه که X به‌طور متعارف به داخل $X^\sharp$ یا M نشانده شده باشد تغییر نمی‌کند و رابطه‌ی ذکر شده در بالا در این جایگزینی دوگانی کار می‌کند.

دقت می‌کنیم که در این حالت $K := \lambda_p^2 \in Z(M(A))$.

(روش دوم): چون T حافظ تعامد است لذا طبق قضیه‌ی ۶.۲.۳، $T = \lambda V$ برای یک $\lambda \in Z(M(A))$ و یکمتری V، برای x و y در X می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\langle T(x), T(y)\rangle &= \langle \lambda V(x), \lambda V(y)\rangle \\ &= \lambda^2 \langle V(x), V(y)\rangle\end{aligned}$$

اما V یک یکمتری است یعنی $\|V(x)\| = \|x\|$ برای $x \in X$. یعنی $\langle V(x), V(x)\rangle = \langle x, x\rangle$ و طبق قضیه‌ی ۳.۳.۳ که در بخش سوم این فصل در ادامه آمده است داریم:

$$\langle V(x), V(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad (x, y \in X)$$

با جایگذاری این رابطه در رابطه‌ی $\lambda^2 \langle V(x), V(y)\rangle$ خواهیم داشت:

$$\langle T(x), T(y)\rangle = \lambda^2 \langle x, y\rangle$$

که $K := \lambda^2 \in Z(M(A))$ یعنی

$$\langle T(x), T(y)\rangle = K\langle x, y\rangle \quad (x, y \in X)$$

و این اثبات را تمام می‌کند. $\square$

برای جمع‌بندی نتایج این بخش یک گزاره دیگر مطرح می‌کنیم، اما برای اثبات این گزاره نیازمند چند مقدمه هستیم که فرانک[۸] و دکتر شریفی[۹] در [۴] و [۵] آورده‌اند.

قضیه ۸.۲.۳. ([۵ قضیه ۳.۱]) *فرض کنیم X و Y دو A-مدول هیلبرت روی C^*-جبر A باشند و T یک عملگر الحاق‌پذیر و برد $T^*T + 1$ در Y چگال است، آنگاه شرایط زیر هم‌ارزند.*

(۱) *T دارای یک تجزیه‌ی قطبی منحصربه‌فرد است. $T = V|T|$ هرگاه $V \in B(X, Y)$ یک یکمتری جزیی باشد و*

$$\ker(V^*) = \ker(T^*), \quad \ker(V) = \ker(T), \quad Ran(V) = \overline{Ran(T)}, \quad Ran(V^*) = \overline{Ran(|T|)}$$

[۸] M. Frank

[۹] K. Sharifi

(۲) $X = \ker(|T|) \oplus \overline{Ran(|T|)}$, $\quad Y = \ker(T^*) \oplus \overline{Ran(T)}$.

(۳) T و T^* دارای معکوس‌های منحصربه‌فرد عمومی هستند به‌ترتیب با S و S^* نمایش می‌دهیم که هرکدام الحاق دیگری است.

منظور از معکوس عمومی این است که اطلاع خاصی درباره‌ی منفرد یا نامنفرد بودن آنها نداریم و در حالت کلی در نظر می‌گیریم.

گزاره ۹.۲.۳. ([۵ گزاره ۳.۵]) *فرض کنیم X و Y دو A-مدول هیلبرت روی C^*-جبر A باشند و: $T: X \longrightarrow Y$ یک عملگر کراندار A-خطی باشد و T دارای تجزیه‌ی قطبی است، آنگاه T یک عملگر منظم به‌عنوان معکوسش که با S نشان می‌دهیم می‌پذیرد. به‌علاوه، S کراندار است اگروتنهااگر برد T بسته باشد.*

تبصره ۱۰.۲.۳. ([۴ نتیجه ۳.۲]) *فرض کنیم $T: Dom(T) \subseteq X \longrightarrow Y$ یک عملگر بسته و A-خطی بین دو A-مدول هیلبرت X و Y باشد. نمودار T در $X \oplus Y$ یک جمعوند مستقیم متعامد است اگروتنهااگر T منظم باشد یعنی T الحاق‌پذیر و برد $T^*T + 1$ در Y چگال باشد.*

اطلاعات و مطالب بیشتر درباره‌ی هرآنچه در قضیه‌ی ۸.۲.۳، گزاره ۹.۲.۳ و تبصره‌ی ۱۰.۲.۳ آمده است را به [۴] و [۵] و مقالات دیگر می‌سپاریم.

گزاره ۱۱.۲.۳. *فرض کنیم A یک C^*-جبر و X یک A-مدول هیلبرت باشد. همچنین T یک عملگر کراندار A-خطی حافظ تعامد روی X به‌شکل $T = \lambda V$ باشد، به‌گونه‌ای که $V: X \longrightarrow X$ یک نشاننده یکمتری A-خطی الحاق‌پذیر باشد و λ یک عنصر از مرکز $Z(M(A))$ باشد. دراین‌صورت شرایط زیر هم‌ارزند:*

(۱) *T الحاق‌پذیر است.*

(۲) *V الحاق‌پذیر است.*

(۳) *نمودار نشاننده‌ی یکمتری V یک جمعوند مستقیم متعامد از A-مدول هیلبرت $X \oplus X$ است.*

(۴) *برد V ($Im(V)$) یک جمعوند مستقیم متعامد از X است.*

برهان. توجه می‌کنیم که ضرب یک عملگر الحاق‌پذیر در یک عنصر $\lambda \in Z(M(A))$ همواره الحاق‌پذیر است زیرا فرض کنیم T الحاق‌پذیر باشد و چون T حافظ تعامد و به‌صورت $T = \lambda V$ است داریم:

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle \quad (x, y \in X)$$

با جایگذاری $T = \lambda V$ در رابطه‌ی بالا داریم:

$$\lambda\langle V(x), y\rangle = \langle \lambda V(x), y\rangle = \langle x, (\lambda V)^*(y)\rangle = \langle x, \overline{\lambda} V^*(y)\rangle = \lambda\langle x, V^*(y)\rangle$$

و این نشان می‌دهد که یکمتری V نیز الحاق‌پذیر است و به‌همین ترتیب اگر V الحاق‌پذیر باشد T نیز باید الحاق‌پذیر باشد. طبق تبصره‌ی ۱۰.۲.۳ عملگر کراندار V الحاق‌پذیر است اگروتنهااگر نمودار آن جمعوند مستقیم متعامد A-مدول هیلبرت $X \oplus X$ باشد. همچنین از آنجاکه برد نشانندهٔ A-خطی یکمتری V همواره بسته است، الحاق‌پذیر بودن V ناگزیر می‌کند که V یک عملگر معکوس A-خطی کراندار روی X بپذیرد (طبق گزاره‌ی ۱۰.۲.۳) هسته‌ی این معکوس به‌جای متمم متعامد $Im(V)$ به‌کار می‌رود، و $X = Im(V) \oplus Im(V)^{\perp}$ یک جمع مستقیم متعامد است و طبق قضیه‌ی ۸.۲.۳ اگر $Im(V)$ از V یک جمعوند مستقیم متعامد از X باشد. بنابراین V الحاق‌پذیر است و این حکم را اثبات می‌کند. □

۳.۳ نگاشتهای C^*-همدیس روی C^*-مدولهای هیلبرت

در این بخش قصد داریم ساختار عمومی نگاشتهای C^*-همدیس را روی C^*-مدولهای هیلبرت بررسی و مطالعه نماییم.

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنیم X یک مدول هیلبرت روی C^*-جبر A باشد، نگاشت مدولی کراندار و یک‌به‌یک T روی X را C^*-همدیس نامیم اگر شرط

$$\frac{\langle Tx, Ty\rangle}{\| Tx \| \| Ty \|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\| x \| \| y \|}$$

برای هر بردار غیر صفر x, y در X بر قرار باشد.

تعریف ۲.۳.۳. با مفروضات تعریف ۱.۳.۳، T را یک نگاشت همدیس نامیم هرگاه شرط

$$\frac{\| \langle Tx, Ty\rangle \|}{\| Tx \| . \| Ty \|} = \frac{\| \langle x, y\rangle \|}{\| x \| . \| y \|}$$

برای هر بردار غیر صفر x, y در X بر قرار باشد.

قضیه ۳.۳.۳. *([۸ گزاره ۲.۳]) فرض کنیم X یک A-مدول پیش هیلبرت روی C^*-جبر A و T یک نگاشت مدولی روی X باشد، برای حداقل یک $\lambda > 0$، شرایط زیر هم ارزند:*

(۱) T، A-*خطی است و به‌ازای هر x در X*، $\| Tx \| = \lambda \| x \|$

(۲) *به‌ازای هر x در X*، $\langle Tx, Ty\rangle = \lambda^2 \langle x, y\rangle$

قضیه ۴.۳.۳. *فرض کنیم X یک A-مدول هیلبرت روی C^*-جبر A و T یک نگاشت مدولی کراندار یک به یک روی X باشد،شرایط زیر هم ارزند:*

(۱) T ، C^*-*همدیس است.*

(۲) $T=\lambda u$ برای حداقل یک $\lambda\in\mathbb{R}$ که λ مثبت و غیر صفر باشد و یک عملگر یکمتری u روی X.

برهان. شرط (۲) شرط (۱) را نتیجه می دهد زیرا طبق فرض u یک یکمتری است بنابراین

$$\| ux \|=\| x \| \quad x\in X$$

وطبق قضیه پیشین ۳.۳.۳ داریم:

$$\langle ux,uy\rangle=\langle x,y\rangle \quad (x,y\in X)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{\langle Tx,Ty\rangle}{\| Tx \| . \| Ty \|}&=\frac{\langle \lambda ux,\lambda uy\rangle}{\| \lambda ux \| . \| \lambda uy \|}\\&=\frac{\lambda^{2}\langle ux,uy\rangle}{\lambda^{2}\| ux \| . \| uy \|}\\&=\frac{\langle x,y\rangle}{\| x \| . \| y \|}\end{aligned}$$

بنابراین T ، C^*-همدیس است. اکنون فرض کنیم نگاشت مدولی کراندار یک به یک T روی X ، C^*-همدیس باشد.می توان شرط تعریف ۱.۳.۳ را به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$\langle Tx,Ty\rangle=\langle x,y\rangle\frac{\| Tx \| . \| Ty \|}{\| x \| . \| y \|}$$

سمت چپ این تساوی به عنوان یک ضرب داخلی A-مقداری روی X است. در نتیجه سمت راست آن نیز دارای تمام شرایط یک ضرب داخلی C^*-مقداری است بنابر این:

$$\begin{aligned}\langle x,y_{1}+y_{2}\rangle\frac{\| Tx \| . \| T(y_{1}+y_{2}) \|}{\| x \| . \| y_{1}+y_{2} \|}&=\langle x\frac{\| Tx \|}{\| x \|},(y_{1}+y_{2})\frac{\| T(y_{1}+y_{2}) \|}{\| y_{1}+y_{2} \|}\rangle\\&=\langle x\frac{\| Tx \|}{\| x \|},y_{1}\frac{\| Ty_{1} \|}{\| y_{1} \|}\rangle+\langle x\frac{\| Tx \|}{\| x \|}+y_{2}\frac{\| Ty_{2} \|}{\| y_{2} \|}\rangle\\&=\langle x,y_{1}\rangle\frac{\| Tx \| . \| Ty_{1} \|}{\| x \| . \| y_{1} \|}+\langle x,y_{2}\rangle\frac{\| Tx \| . \| Ty_{2} \|}{\| x \| . \| y_{2} \|}\end{aligned}$$

برای هر x,y_{1},y_{2} نا صفر در X , بنابر این

$$(y_1+y_2)\frac{\| T(y_1+y_2) \|}{\| y_1+y_2 \|}=y_1\frac{\| Ty_1 \|}{\| y_1 \|}+y_2\frac{\| Ty_2 \|}{\| y_2 \|} \quad \forall x\in X$$

در این حالت به دلیل اینکه y_2, y_1 مختلط نیستند باید مقدار داخل پرانتز ها برابر صفر شود یعنی:

$$\frac{\| T(y_1+y_2) \|}{\| y_1+y_2 \|}=\frac{\| Ty_1 \|}{\| y_1 \|}=\frac{\| Ty_2 \|}{\| y_2 \|} \quad (y_1, y_2)$$

حال عدد مثبت و حقیقی

$$\frac{\| Tx \|}{\| x \|}$$

را برابر t قرار می دهیم.بنابراین تساوی بالا رابطه زیر را نتیجه می دهد.

$$\| (\frac{1}{t}T)(z) \| = \| z \|$$

زیرا که این تساوی برای هر y_2, y_1 غیر صفر در X برقرار است پس می توانیم برای z, x دلخواه غیر صفر در X نیز این تساوی را بنویسیم:

$$\frac{\| Tx \|}{\| x \|}=\frac{\| Tz \|}{\| z \|}$$

$$\frac{\| x \|}{\| Tx \|}=\frac{\| z \|}{\| Tz \|}$$

و در نتیجه همانطور که اشاره شد با قراردادن

$$\frac{\| x \|}{\| Tx \|}:=t$$

داریم:

$$\| (\frac{1}{t})T(z) \| = \| z \|$$

قرار می دهیم $u:=\frac{1}{t}T$ یعنی u یک یکمتری است و این اثبات را کامل می کند. $\square$

مثال ۵.۳.۳. *فرض کنیم $X=A=C_0((0,1])$ و T یک نگاشت C^*-همدیس روی X باشد. نشان می‌دهیم $T=tu$ برای حداقل یک $t\in\mathbb{R}^+ \neq 0$ و برخی عملگر یکمتری u روی X.*

برای شروع یاد آوری می‌کنیم که جبر باناخ $End_A(X)$ از همه نگاشتهای مدولی کراندار روی X با جبر $LM(A)$ که همان ضربگر جبری چپ A است، یکریخت است.

همچنین می‌دانیم که $LM(A)=C_b((0,1])$ ، C^*-جبر همه توابع پیوسته کراندار روی $(0,1]$ است.

پس هر عملگر کراندار A-خطی روی X به شکل ضرب یک تابع معین از $LM(A)=C_b((0,1])$ است.

علی الخصوص:

$$T(g) = f_T.g \quad g \in A, f_T \in C_b((۰,۱]).$$

فرض کنیم $x_۰$ یک نقطه از $(۰,۱]$ باشد هر گاه تابع $| f_T |$ در $x_۰$ برابر با مقدار سوپریمم f_T باشد یعنی $\| f_T \| = | f_T(x_۰) |$ و قرار می دهیم $\| f_T \| =: t$. ادعا می کنیم که عملگر $\frac{۱}{t}T$ یک یکمتری است.

$$\| \frac{۱}{t}T(g) \| = \| g \|$$

$$\| \frac{۱}{t}f_T g \| = \| \frac{۱}{t}f_T \| . \| g \| = \| g \|$$

$$\| \frac{۱}{t}f_T \| = ۱$$

$$\frac{| f_T(x) |}{\| f_T \|} \quad \forall x \in (۰,۱]$$

فرض کنیم $x \neq x_۰$ و فرض کنیم $\theta_x \in C_۰((۰,۱])$ تابعی باشد که

$$۰ \leqslant \theta_x \leqslant ۱ \quad \theta_x(x) = ۱$$

و $\theta_x = ۰$ در خارج از همسایگی x (تابعی که در شرایط تابع θ_x صدق کند تابع آریسون [۱۰] می نامیم) اکنون فرض کنیم $\theta_{x_۰}$ تابع آریسون $x_۰$ باشد یعنی:

$$\theta_{x_۰}(x_۰) = ۱ \quad ۰ \leqslant \theta_{x_۰} \leqslant ۱$$

و $\theta_{x_۰} = ۰$ در خارج از همسایگی $x_۰$، قرار می دهیم: $x = y = \theta_x + \theta_{x_۰}$ و شرط تعریف ۱.۳.۳ را برای T و بردارهای $x = y$ می نویسیم:

$$T(x) = T(y) = f_T.x = f_T.y = f_T.(\theta_x + \theta_{x_۰})$$

$$\frac{\langle Tx, Ty \rangle}{\| Tx \| \| Ty \|} = \frac{\langle x, y \rangle}{\| x \| . \| y \|}$$

$$\frac{\langle Tx, Ty \rangle}{\| Tx \| \| Ty \|} = \frac{\langle f_T x, f_T y \rangle}{\| f_T.x \| . \| f_T.y \|}$$

$$\frac{\langle f_T\theta_x + \theta_{x_۰}, f_T\theta_x + \theta_{x_۰} \rangle}{\| f_T.\theta_x + \theta_{x_۰} \|^۲}$$

$$\frac{| f_T |^۲ (\theta_x + \theta_{x_۰})^۲}{\| f_T.\theta_x + \theta_{x_۰} \|^۲}$$

[۱۰] Uryson

و همچنین

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\| x \| . \| y \|} = \frac{\langle \theta x + \theta x_{\circ} , \theta x + \theta x_{\circ} \rangle}{\| \theta x + \theta x_{\circ} \|^{۲}}$$

بنابراین چون T یک نگاشت C^*-همدیس است، داریم:

$$\frac{| f_T |^{۲} \ (\theta_x + \theta_{x_\circ})^{۲}}{\| f_T.\theta_x + \theta_{x_\circ} \|^{۲}} = \frac{(\theta_x + \theta_{x_\circ})^{۲}}{\| \theta_x + \theta_{x_\circ} \|^{۲}}$$

که نتیجه می دهد:

$$\frac{| f_T |^{۲} \ (\theta_x + \theta_{x_\circ})^{۲}}{\| f_T \|^{۲}} = (\theta_x + \theta_{x_\circ})^{۲}$$

و این تساوی در نقطه x رابطه

$$\frac{f_{T(x)}}{\| f_T \|} = ۱$$

را برای هر $x \in (\circ , ۱]$ نتیجه می دهد و این یعنی

$$u = \frac{| f_T |}{\| f_T \|}$$

یک یکمتری است.

مراجع

[1] CH. A. Akemann, *A Gelfand representation theory for C^*-algebras*, Pacific J. Math. 39(1971) 1-11.

[2] Ch. A. Akemann, *The general Stone-Weierstrass problem for C^*-algebras*, J.Funct. Anal 4(1969) 277-294.

[3] J. Chmielinski, D. Ilisevic, M. S. Moslehian, Gh. Sadeghi, *Perturbanon of the Wigner equation in inner product C^*-modules*, J. Math. Phys. 40(3)(2008) 033519, 8pp.

[4] M. Frank, K. Sharifi, *Adjointability of densely defined closed operators and the magajna-schweizer theorem*, J.Operator theory 63(2010) 271-282.

[5] M. Frank, K. Sharifi, *Generalized inverses and polar decomposition of unbounded regular operators on Hilbert C^*-modules*, J. Operator Theory 64(2010) 377-386.

[6] M. Frank, A. S. Mishchenko, A. A. Pavlov, *Orthogonality-preserving C^*-conformal and conformal module mappings on Hilbert C^*-modules*, J. Functional Analysis 260(2011) 327-339.

[7] M. Frank, A. A. Parlov, *Strict essential extensions of C^*-algebras and Hilbert C^*-modules*, arXiv:0710.0586V1 [math.OA]2 Oct 2007.

[8] D. Ilisevic, A. Turnsek, *Approximately orthogonality preserving mappings on C^*-modules*, J. Math. Anal. Appl. 341(2008) 298-308.

[9] E. C. Lance, *Hilbert C^*-modules*, LMS Lecture Note series 210, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[10] M. S. Moslehian, *What is Hilbert C^*-modules?*, arxiv: math/0212368 V2 [math.OA] 16 Mar 2007.

[11] G. Murphy, *C^*-algebra and operator theory*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.

[12] W. L. Paschke, *Inner product modules over B^*-algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. 182(1973) 443-468.

[13] G. K. Pedersen, *C^*-algebras and their Automorphism groups*, Academic Press, London, NewYork, san Fran cisco, 1979.

[14] S. Sakai, *C^*-algebras and W^*-algebras*, Springer, Newyork, 1971.

[15] J. Schweizer, *Interplay between noncommutative topology and operators on C^*-algebra*, Habilitation thesis, Mathematische Fakultat der Universitat Tubingen, Germany 1996.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الحاق .... Adjoint
ایده آل .... Ideal
بسته .... Closed
برد .... Image
بردار .... Vector
برو .... Onto
پایه متعامد .... Orthogonal basis
پیچش .... Involution
پیش دوگان .... Pre- dual
پیوسته .... Continious
تابع آریسون .... Uryson function
تابعک خطی .... Linear functional
تابع همانی .... Identity functional
تجزیه .... Decoposition
تحدید .... Restriction
ترکیب خطی .... Liniear combination
تصویر .... Projection
تور .... Net
تور جهتدار .... Directed net
تور صعودی .... Increasing net
توسیع،تعمیم .... Extention
جابجایی .... Commutative
جبر .... Algebra
جبر باناخ .... Banach algebra
جبر فون نویمن .... Von-neuman algebra
جبری یکریخت .... Algebraic isometric
جفت،زوج .... Pair

Directed sum	جمع مستقیم
Orthogonal direct sum	جمع مستقیم متعامد
Directed summand	جمعوند مستقیم
Dense	چگال
State	حالت
Quotient	خارج قسمت
Collection	خانواده
Linear	خطی
Self-adjoint	خودالحاق
Self-dual	خوددوگان
Automorphism	خودریختی
Entry	درایه
Sequence	دنباله
Dual	دوگان
Upward	رو به بالا
Second root	ریشه دوم
Subspace	زیرفضا
Subset	زیرمجموعه
Supremum	سوپریمم
Sesquilinear form	صورت یک و نیم خطی
Algebraic tensor product	ضرب تانسوری جبری
Inner product	ضرب داخلی
A-valued inner product	ضرب داخلی A-مقداری
Multiplier algebra	ضربگر جبری
Left multiplier algebra	ضربگر جبری چپ
Operation	عمل
Operator algebra	عملگر جبری
Compact operator	عملگر فشرده
Operator diagonal	عملگر قطری
Normed operator	عملگر نرمدار
Unitary operator	عملگر یکانی
Element	عنصر
Idempotent element	عنصر خودتوان
Positive element	عنصر مثبت
Identity element	عنصر همانی

Compact	فشرده
Space	فضا
Banach space	فضای باناخ
Vector space	فضای برداری
Linear space	فضای خطی
Conjugate space	فضای مزدوج
Second conjugate space	فضای مزدوج دوم
Hilbert space	فضای هیلبرت
Polar decomposition theorem	قضیه تجزیه قطبی
Completion	کامل شده
Bounded	کراندار
Quantum group	گروه بنیادی
Unit ball	گوی واحد
Matrix	ماتریس
Maximal	ماکزیمال
Maximal set	مجموعه ماکزیمال
Set	مجموعه
Orthogonal	متعامد
Orthogonal complement	متمم متعامد
Complex	مختلط
Module	مدول
Conjugate	مزدوج
Double centraliser	مرکزساز مضاعف
Central	مرکزی
Character	مشخصه
Inverse	معکوس
Locally compact	موضعا فشرده
Non- degenerated	ناتباهیده
Cauchy-schwarz inequality	نامساوی کشی-شوارتز
Embeding	نشانده شده
Embeded	نشاننده
Mapping	نگاشت
Adjointable map	نگاشت الحاق پذیر
Orthogonality- preserving map	نگاشت حافظ تعامد
Bilinear map	نگاشت دوخطی

Inclusion map	نگاشت شمول
Conformal mapping	نگاشت همدیس
Norm	نرم
Scalar valued norm	نرم اسکالر مقداری
Normal	نرمال
Representation	نمایش
Semi inner product	نیم ضرب داخلی
Hausdorff	هاوسدورف
Hermitian	هرمیتی
Co-isometry	هم - ایزومتری،هم یکمتری
Homomorphism	همریختی
Converges	همگرا
Non- commutative geometry	هندسه ناجابجایی
Injective	یک به یک
Unital	یکدار
Isometric	یکمتر
Isometry	یکمتری
Partial isometry	یکمتری جزئی
Isomorphic	یکریخت
Isomorphism	یکریختی
Unit	یکه
Approximate unit	یکه تقریبی
Canonical unit	یکه کانونی
Pre-Hilbert A-module	A-مدول پیش هیلبرت
Right A-module	A-مدول راست
Normed A- module	A-مدول نرمدار
C^*-algebra	C^*-جبر
Coefficient C^*-algebra	C^*-جبرضرایب
Hilbert C^*-module	C^*-مدولهای هیلبرت
C^*-conformal	C^*-همدیس
w^*-topology	w^*-توپولوژی
W^*-algebra	W^*-جبر
$*$-algebra	$*$-جبر
$*$-isomorphism	$*$-یکریختی
$*$-homomorphism	$*$-همریختی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjoint	الحاق
Adjointable map	نگاشت الحاق پذیر
Algebra	جبر
Algebraic isometric	جبری یکریخت
Algebraic tensor product	ضرب تانسوری جبری
Approximate unit	یکه تقریبی
Automorphism	خودریختی
A-valued inner product	ضرب داخلی A-مقداری
Banach algebra	جبر باناخ
Banach space	فضای باناخ
Bilinear map	نگاشت دوخطی
Bounded	کراندار
C^*-algebra	C^*-جبر
Canonical unit	یکه کانونی
Cauchy-schwarz inequality	نامساوی کشی-شوارتز
C^*-conformal	C^*-همدیس
Central	مرکزی
Character	مشخصه
Closed	بسته
Coefficient C^*-algebra	C^*-جبرضرایب
Co-isometry	هم-ایزومتری،هم یکمتری
Collection	خانواده
Commutative	جابجایی
Compact	فشرده
Compact operator	عملگر فشرده
Completion	کامل شده
Complex	مختلط

Conformal mapping .... نگاشت همدیس
Conjugate .... مزدوج
Conjugate space .... فضای مزدوج
Continious .... پیوسته
Converges .... همگرا
Decoposition .... تجزیه
Dense .... چگال
Directed net .... تور جهتدار
Directed sum .... جمع مستقیم
Directed summand .... جمعوند مستقیم
Double centraliser .... مرکزساز مضاعف
Dual .... دوگان
Element .... عنصر
Embeded .... نشاننده
Embeding .... نشانده شده
Entry .... درایه
Extention .... توسیع،تعمیم
Hausdorff .... هاوسدورف
Hermitian .... هرمیتی
Hilbert C^*-module .... C^*-مدولهای هیلبرت
Hilbert space .... فضای هیلبرت
Homomorphism .... همریختی
Ideal .... ایده آل
Idempotent element .... عنصر خودتوان
Identity element .... عضو همانی
Identity functional .... تابع همانی
Image .... برد
Inclusion map .... نگاشت شمول
Increasing net .... تور صعودی
Injective .... یک به یک
Inner product .... ضرب داخلی
Isometric .... یکمتر
Isometry .... یکمتری
Isomorphic .... یکریخت
Isomorphism .... یکریختی

Inverse .... معکوس

Involution .... پیچش

Left multiplier algebra .... ضربگر جبری چپ

Linear .... خطی

Liniear combination .... ترکیب خطی

Linear functional .... تابعک خطی

Linear space .... فضای خطی

Locally compact .... موضعا فشرده

Mapping .... نگاشت

Matrix .... ماتریس

Maximal .... ماکزیمال

Maximal set .... مجموعه ماکزیمال

Module .... مدول

Multiplier algebra .... ضربگر جبری

Net .... تور

Non- commutative geometry .... هندسه ناجابجایی

Non- degenerated .... ناتباهیده

Norm .... نرم

Normal .... نرمال

Normed A- module .... A-مدول نرمدار

Normed operator .... عملگر نرمدار

Onto .... برو

Operation .... عمل

Operator algebra .... عملگر جبری

Operator diagonal .... عملگر قطری

Orthogonal .... متعامد

Orthogonal basis .... پایه متعامد

Orthogonal complement .... متمم متعامد

Orthogonal direct sum .... جمع مستقیم متعامد

Orthogonality- preserving map .... نگاشت حافظ تعامد

Pair .... جفت،زوج

Partial isometry .... یکمتری جزئی

Ppolar decomposition theorem .... قضیه تجزیه قطبی

Positive element .... عنصر مثبت

Pre-dual .... پیش دوگان

Pre-Hilbert A-module .... A-مدول پیش هیلبرت

Projection .... تصویر

Quantum group .... گروه بنیادی

Quotient .... خارج قسمت

Representation .... نمایش

Restriction .... تحدید

Right A-module .... A-مدول راست

Scalar valued norm .... نرم اسکالر مقداری

Second conjugate space .... فضای مزدوج دوم

Second root .... ریشه دوم

Self-adjoint .... خود الحاق

Self-dual .... خود دوگان

Semi inner product .... نیم ضرب داخلی

Sequence .... دنباله

Set .... مجموعه

Space .... فضا

State .... حالت

Subset .... زیرمجموعه

Subspace .... زیرفضا

Supremum .... سوپریمم

Unit .... یکه

Unit ball .... گوی واحد

Unital .... یکدار

Unitary operator .... عملگر یکانی

Upward .... روبه بالا

Uryson function .... تابع آریسون

Vector .... بردار

Vector space .... فضای برداری

Von-neuman algebra .... جبر فون نویمن

W^*-algebra .... W^*-جبر

W^*-topology .... W^*-توپولوژی

$*$— algebra .... $*$-جبر

$*$-isomorphism .... $*$-یکریختی

$*$-homomorphism .... $*$-همریختی

Abstract

This thesis have three chapters:

In chapters one and two we will describe C^*-algebra, operators on Hilbert space, Hilbert C^*-modules and Inner product over C^*-algebras, briefly.

In chapter three we investigate orthogonality-preserving, C^*-conformal mappings on Hilbert C^*-modules to obtain their general structure.

Orthogonality-preserving bounded module maps T act as a multiplication by an element λ of the center of the multiplier algebra of the C^*-algebra of coefficients combined with an isometric module operator as long as some polar decomposition conditions for the spesific element λ are fulfilled inside that multiplier algebra.

Generally, T always fulfills the equality $\langle T(x), T(y)\rangle = |\lambda|^{۲} \langle x, y\rangle$

for any elements x, y of the Hilbert C^*-module.

At the contrary, C^*-conformal bounded module maps are shown to be only the positive real multiples of isometric module operators.

Keywords: C^*-algebra, Operator, Hilbert C^*-module, Inner product, Orthogonality-preserving mapping, C^*-conformal mapping, Multiplier algebra, Polar decomposion theorem, Isometric module operator.

Ministry of sciences, Researches, and Technology

Shahrood University of Technology

Facutly of Mathematics

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS

Orthogonality-Preserving, C^*-Conformal and Conformal Module Mappings on Hilbert C^*-Modules

Supervisor:

K. Sharifi (Ph.D)

Advisor:

M. B. Asadi (Ph.D)

By:

S. Hosseinzadeh