بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

کنترل همزمان سیستم‌های خطی با پس‌خورد حالت

الهام عرب یارمحمدی

استاد راهنما:

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور:

دکتر محمد مهدی فاتح

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

مهر ماه ۹۱

مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :
تاریخ :
ویرایش :

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم الهام عرب یارمحمدی رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان کنترل همزمان سیستم‌های خطی با پس خورد حالت که در تاریخ ۹۶/۷/۳۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : ۱۸/۳۰ امتیاز بسیار خوب ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)
۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)
۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)
۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱- استادراهنما	دکتر حجت احسنی طهرانی	استادیار	
۲- استاد مشاور	دکتر محمد مهدی فاتح	استاد	
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	میثم علیشاهی	استادیار	
۴- استاد ممتحن	دکتر محمد حداد ظریف	استادیار	
۵ - استاد ممتحن	دکتر علیرضا ناظمی	استادیار	

رئیس دانشکده :

تشکر و قدردانی

سپاس بیکران بر همدلی و همراهی پدر و مادر دلسوز و مهربانم که سجده ی ایثارشان گل محبت را در وجودم پروراند و دامان گهربارشان لحظه های مهربانی را به من آموخت.

از همسر مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمود تا با حمایت های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه را به نحو احسن به اتمام برسانم سپاسگزاری می نمایم.

از برادر گرانقدرم که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی های کارساز و سازنده بارور ساختند تقدیر و تشکر می نمایم.

و با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر احسنی طهرانی که با نکته های دلاویز و گفته های بلند، صحیفه های سخن را علم پرور نموده و همواره راهنما و راه گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان نامه بوده اند.

معلما مقامت ز عرش برتر باد   همیشه توسن اندیشه ات مظفر باد

تعهد نامه

اینجانب **الهام عرب یارمحمدی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **ریاضی** گرایش **کاربردی** دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه کنترل **همزمان سیستم‌های خطی با پس‌خورد حالت** تحت راهنمائی **دکتر حجت احسنی طهرانی** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۹۱/۸/۲۹

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه، پایداری همزمان مجموعه‌ای از سیستم‌های خطی با پس‌خورد حالت و پایداری سیستم‌های خطی با پس‌خورد خروجی مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس با ترکیب این دو روش و استفاده از نرم افزارهای *Lingo* و *Matlab*، روش جدیدی برای محاسبه‌ی ماتریس پس‌خورد خروجی سیستم‌های خطی ارائه می‌شود. با بهره گیری از بردار افزوده، روشی جدید برای محاسبه‌ی پس‌خورد حالت برای مجموعه‌ای از سیستم‌های با تاخیر زمانی بیان می‌شود. در پایان، با تعمیم روش پس‌خورد حالت – مشتق برای سیستم‌های توسیع یافته، روشی جدید برای محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت همزمان برای مجموعه‌ای از سیستم‌های توسیع یافته ارائه می‌شود. برای پایداری تمامی سیستم‌ها در این‌پایان‌نامه لازم است که مقادیر ویژه‌ی همه‌ی سیستم‌های حلقه – بسته در منطقه‌ای از پیش تعیین شده در سمت چپ صفحه‌ی مختلط قرار گیرد. در اینجا هدف، حل معادلات سیستم‌های خطی و غیرخطی با استفاده از برنامه‌ریزی غیرخطی است.

کلمات کلیدی: بردار افزوده – پایداری - پس‌خورد خروجی - پس‌خورد حالت – تخصیص مقادیر ویژه- سیستم‌های تاخیر زمانی – سیستم‌های توسیع یافته – سیستم‌های خطی.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فصل ۱

مقدمه

فصل ۱– مقدمه

رسیدگی به مسئله کنترل همزمان سیستم‌های خطی با پس‌خورد حالت در سال ۱۹۸۰ آغاز شد و این مسئله نخستین بار توسط سیکس[۱] و ویدیاساگار[۲] مطرح شد. یکی از پیشگامان در این مسئله پترسون[۳] است و از آن به بعد محققان بسیاری به این مسئله پرداختند. آقایان هویت[۴]، کابامبا[۵]، کرباسی[۶]، طهرانی[۷] و لوز[۸] با استفاده از حل عددی مسئله کمینه سازی کمکی، یک جواب تقریبی برای مساله‌ی اصلی به‌دست آوردند و سپس کنترل‌گر بهینه همزمان پس‌خورد حالت را برای مجموعه‌ای از سیستم‌ها، برای مساله‌ی اصلی ایجاد کردند. کرباسی و طهرانی برای پایداری سیستم‌های خطی با پس‌خورد حالت از عملیات تشابهی مقدماتی بهره گرفتند. در نهایت خانم سعادت جو[۹]، آقای درهمی[۱۰] و کرباسی از روشی غیرپارامتری برای به‌دست آوردن پس‌خورد حالت همزمان سیستم‌های خطی استفاده کرده‌اند به گونه‌ای که می‌توان مقادیر ویژه‌ی دلخواهی را به این سیستم‌ها اختصاص داد. ایچیکاوا[۱۱] و کاتایاما[۱۲] پی بردند که ماتریس پس‌خورد خروجی را می‌توان تحت شرایط معین از ماتریس پس‌خورد حالت به‌دست آورد. کرباسی و سعادت جو نیز با استفاده از این ایده از روشی پارامتری برای به‌دست آوردن پس‌خورد خروجی ایستا توسط تخصیص مقادیر ویژه استفاده نمودند.

مطالب ارائه شده در هر فصل پایان نامه به صورت ذیل آورده شده است:

برای درک بهتر بعضی از مفاهیم در این پایان نامه ابتدا در فصل ۲ تعاریف مقدماتی لازم ارائه شده است.

[1] Saeks
[2] Vidyasagar
[3] Peterson
[4] Howitt
[5] Kabamba
[6] Karbassi
[7] Tehrani
[8] Looze
[9] Saadatjoo
[10] Derhami
[11] Ichikawa
[12] Katayama

در فصل ۳ کنترل همزمان سیستم‌های خطی با پس‌خورد حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد و با استفاده از عملیات تشابهی مقدماتی و حل دستگاه معادلات خطی و غیرخطی که در طی مراحل کار به‌دست می‌آید و حل همزمان آن ها به صورت برنامه‌ریزی غیرخطی توسط نرم افزار، ماتریس پس‌خورد حالت که سیستم را پایدار کند و مقادیر ویژه‌ی خاصی را به این دسته از سیستم‌ها اختصاص دهد به‌دست می‌آید. در فصل ۴ روشی برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد خروجی برای یک سیستم ارائه می‌شود که در این روش نیز می‌توان مقادیر ویژه‌ی دلخواهی را به سیستم اختصاص داد و با پس‌خورد خروجی به‌دست آمده، تمام مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه – بسته در سمت چپ صفحه‌ی مختلط قرار می گیرد. در فصل ۵ با استفاده از مطالب ارائه شده در فصل ۳ و ۴، روشی جدید و پارامتری برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان برای مجموعه‌ای از سیستم‌ها بیان می‌شود. در فصل ۶ با استفاده از بردار افزوده، روشی نوین برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت همزمان برای پایدار نمودن مجموعه‌ای از سیستم‌ها ارائه می‌شود. و در نهایت در فصل ۷ با استفاده از روش پس‌خورد حالت – مشتق برای سیستم‌های توسیع یافته، روشی جدید و کارآمد برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت همزمان مجموعه‌ای از سیستم‌های توسیع یافته بیان می‌شود.

فصل ۲

تعاریف و نمادهای مقدماتی

فصل ۲- تعاریف و نمادهای مقدماتی

تعریف ۲-۱- فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد. ریشه‌های چندجمله‌ای

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

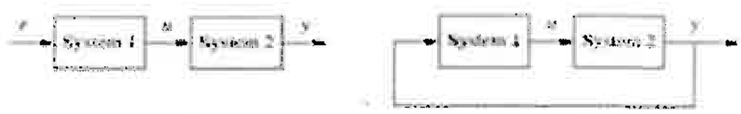
را که به چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A موسوم است، مقادیر ویژه‌ی[1] ماتریس A گوییم. به عبارت دیگر λ را یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A می‌نامیم اگر و تنها اگر بردار غیرصفر x موجود باشد به طوری که:

$$Ax = \lambda x$$

بردار x را بردار ویژه‌ی[2] متناظر با مقدار ویژه‌ی λ گوییم.

تعریف ۲-۲- سیستم

یک سیستم دینامیکی سیستمی است که رفتارش در هر زمان در پاسخ به یک محرک خارجی یا نیروی خارجی تغییر می‌کند و سیستم، آرایشی از تجهیزات فیزیکی مرتبط با یکدیگر است به نحوی که تشکیل وسیله یکپارچه‌ای دهند. یک سیستم را حلقه- بسته[3] گوییم هرگاه مانند شکل ۲-۱- الف یک چرخه متصل به یکدیگر داشته باشیم که اگر این اتصال را از بین ببریم مانند شکل ۲-۱- ب سیستم حلقه – باز[4] خواهیم داشت. [۹]



(ب) (الف)

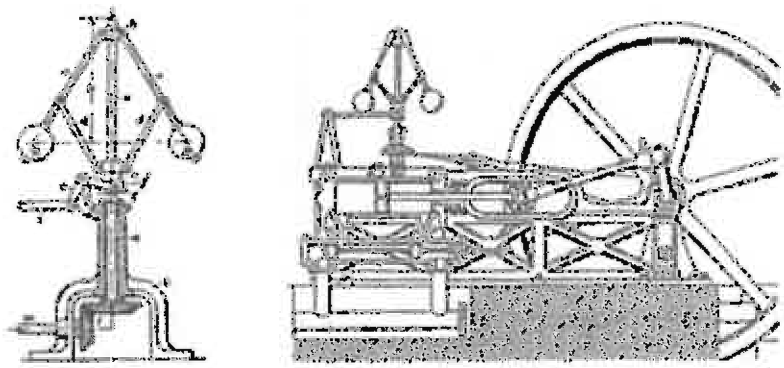
شکل ۲-۱- سیستم دینامیکی الف: حلقه بسته ؛ ب:حلقه باز

[1] Eigenvalue
[2] Eigenvector
[3] Closed- loop
[4] Opened- loop

تعریف ۲-۳- پس‌خورد[1]

کلمه‌ی پس‌خورد به وضعیتی اشاره دارد که در آن دو یا چند سیستم دینامیکی با هم در ارتباطند به طوری که هر سیستم تحت تاثیر سیستم‌های دیگر است. [۹] برای نمونه در سیستم‌های بیولوژیکی از پس‌خورد استفاده‌های زیادی می‌شود. مثلا هنگامی که پس از خوردن غذا سطح گلوکز خون افزایش می‌یابد با ترشح انسولین توسط لوزالمعده می‌توان میزان گلوکز را کاهش داد تا غلظت خون ثابت بماند. که در شکل ۲-۱- الف می‌توان کبد را به عنوان سیستم ۱ و لوزالمعده را به عنوان سیستم ۲ فرض کرد به طوری که خروجی کبد غلظت گلوکز خون و خروجی لوزالمعده مقدار انسولین ساخته شده باشد که این دو سیستم به هم متصل باعث می‌شوند که غلظت خون همواره ثابت باقی بماند.

مثال: سیستم دینامیکی شکل ۲-۲ را در نظر بگیرید.



شکل ۲-۲- سیستم دینامیکی موتور بخار

این سیستم موتور بخار، طوری طراحی شده که وقتی سرعت موتور افزایش می‌یابد، آونگ ها شروع به حرکت کرده و اتصال بین موتور بخار و این آونگ ها سبب ایجاد جریان بنزین در موتور بخار می‌شود و زمانی که سرعت موتور کاهش می‌یابد آونگ ها به حالت اولیه باز می‌گردند که می‌توان این سیستم را به عنوان یک سیستم حلقه – بسته در نظر گرفت که در آن موتور بخار را سیستم ۱ وآونگ‌ها را به عنوان سیستم ۲ باشد که اگر سیستم درست طراحی شده باشد آونگ ها سرعت موتور

[1] Feedback

به طور ثابت حفظ می‌کنند. به طور کلی قانون پس‌خورد این امکان را می‌دهد که عملکرد سیستم در برابر محرک‌های خارجی بدون تغییر باقی بماند.

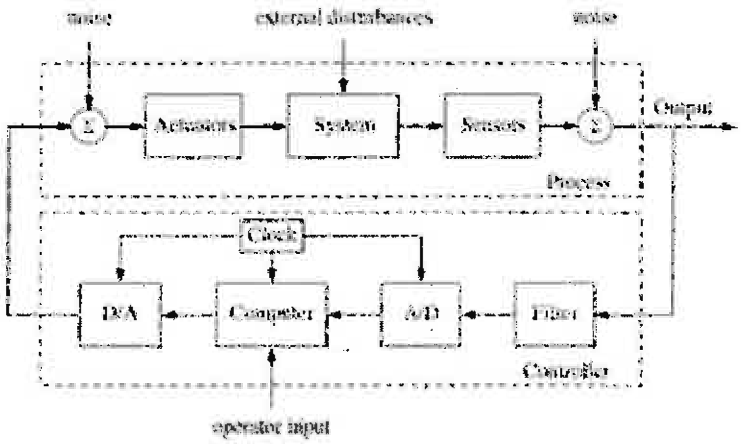
تعریف ۲-۴- حالت سیستم

مجموعه متغیرهای $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ ، . . . . ، $x_n(t)$ را حالت سیستم گوییم. حالت یک سیستم لزوما منحصر بفرد نیست. حالت یک سیستم دینامیکی کوچکترین مجموعه از متغیرهای حالت است که اگر در لحظه ی $t = t_0$ این متغیرها معین باشند و به ازای $t \geq t_0$، ورودی‌های سیستم نیز معلوم باشند، در هر لحظه‌ی دیگر $t \geq t_0$، این مجموعه مشخص می‌گردد.

تعریف ۲-۵- کنترل

کنترل را می‌توان عملیات حفظ حالت سیستم داده شده در شرایط مطلوب تعریف نمود. یک کنترل‌گر سیستم عملیات سیستم را زیر نظر دارد و تغییرات رفتار سیستم را در برابر اغتشاشات خارجی کنترل می‌کند. هدف اصلی در کنترل، پویایی سیستم است. [۹] سیستم‌های کنترل برای موارد متعددی از قبیل کنترل دمای محیط سکونت، سیستم‌های هدایت کشتی یا هواپیما و . . . مورد نیاز می‌باشند.

مثال: سیستم کنترل‌گر کامپیوتری شکل ۲-۳ را در نظر بگیرید.



شکل ۲-۳- سیستم کنترل‌گر کامپیوتری

همانطور که می بینید قسمت بالایی سیستم شامل سنسورها و عملگرهاست که نشان دهنده‌ی روندی دینامیکی است که محرک‌های خارجی می‌تواند در این روند دینامیکی اختلال ایجاد کند و قسمت پایینی سیستم متشکل ازمبدل دیجیتال به آنالوگ، آنالوگ به دیجیتال، یک کامپیوتر که الگوریتم کنترل را پیاده سازی می‌کند ،یک زمان سنج سیستم که هماهنگ کننده‌ی این سه قسمت است و همچنین فیلتر می‌باشد. در این سیستم محاسبات بر روی کامپیوتر توسط مبدل های A/D و D/A اجرا می‌شود. زمانی که اغتشاشات خارجی پویایی سیستم را تحت تاثیر قرار می‌دهد کامپیوتر با پیاده سازی الگوریتم کنترل به صورت یک تابع، سیستم را به حالت اولیه باز می‌گرداند.

تعریف ۲-۶- در مبحث کنترل خطی، معادلات حالت

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (۱.۲)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \qquad (۲.۲)$$

توصیف کننده‌ی سیستم‌های چند متغیره‌ای هستند که در آن‌ها t متغیر زمان، $x\in\Re^{n\times 1}$ بردار حالت[1]، $u\in\Re^{m\times 1}$ بردار ورودی و $y\in\Re^{r\times 1}$ بردار خروجی می‌باشد. ماتریس‌های $A(t)$، $B(t)$، $C(t)$و$D(t)$ را ماتریس‌های سیستم می‌نامیم که به ترتیب دارای ابعاد $n\times n$، $n\times m$، $r\times n$ و$r\times m$ می‌باشند.

اگر همه‌ی ماتریس‌های سیستم معادلات (۱.۲) و (۲.۲) ثابت باشند آن‌گاه سیستم را یک سیستم کنترل ناوردای زمانی[2] گوییم.

تعریف ۲-۷- سیستم کنترلی مجموعه معادلات (۱.۲) و (۲.۲) را یک سیستم خطی پیوسته -زمانی[3] گوییم و چنانچه در این سیستم به جای$\dot{x}(t)$ ، $x(t+1)$ باشد، سیستم را گسسته – زمانی[4] می‌نامیم.

[1] State vector
[2] Time invariant
[3] Continuous - time
[4] Discrete - time

تعریف ۲-۸- کنترل‌پذیری

سیستم خطی ناوردای زمانی

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (۳.۲)$$

را به ازای $t \geq t_0$، با حالت اولیه‌ی $x(t_0) = x_0$ در نظر بگیرید.

هرگاه ورودی $u(t)$ که $t \in [t_0, t_1]$، حالت اولیه‌ی x_0 را در زمان t_1 به حالت تعادل منتقل نماید، حالت x_0 را در زمان t_0 کنترل‌پذیر[1] گوییم و در سیستم کنترل‌پذیر (۳.۲) زوج (A, B) را زوج کنترل‌پذیر می‌نامیم.

تعریف ۲-۹- مشاهده پذیری

سیستم خطی ناوردای

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (۴.۲)$$

$$y(t) = C\,x(t) \qquad (۵.۲)$$

را که در آن A، B و C به ترتیب ماتریس‌های $n\times n$، $n\times m$ و $r\times n$ می‌باشند را در نظر می‌گیریم. اگر بتوان هر حالت $x(t_0)$ را با مشاهده $y(t)$، در فاصله‌ی زمانی محدود $t_0 \leq t \leq t_1$ تعیین کرد، سیستم را مشاهده پذیر[2] گوییم.

تعریف ۲-۱۰- ماتریس پس خورد حالت

سیستم کنترل خطی ناوردای زمانی (۳.۲) را با بردار ورودی $u(t) = -Fx(t)$ موسوم به قانون کنترل، در نظر بگیرید. در این صورت، سیستم کنترل را یک سیستم کنترل با پس‌خورد حالت و $F \in \mathfrak{R}^{m\times n}$ را ماتریس پس‌خورد حالت[3] می‌نامیم.

---

[1] Controllable
[2] Observable
[3] State feedback matrix

تعریف ۲-۱۱- ماتریس پس خورد خروجی

اگر در سیستم کنترل (۴.۲) داشته باشیم $u(t) = -Ky(t)$ آن گاه، سیستم کنترل را یک سیستم کنترل با پس‌خورد خروجی و $K\in\Re^{m\times r}$ را ماتریس پس‌خوردخروجی[1] می‌نامیم.

تعریف ۲-۱۲- ماتریس حلقه باز و حلقه - بسته

با توجه به مجموعه معادلات

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{۶.۲}$$

$$u(t) = -Fx(t) \tag{۷.۲}$$

در رابطه‌ی $\dot{x}(t) = (A - BF)x(t)$ ماتریس A را حلقه - باز و ماتریس $\Gamma = A - BF$ را ماتریس سیستم حلقه - بسته می‌نامیم.

تعریف ۲-۱۳- پایداری سیستم‌های کنترل

یک سیستم کنترل خطی در صورتی پایدار است که هنگام اعمال یک شرط اولیه‌ی جدید به آن، به حالت تعادل خود برگردد. حالت تعادل برای یک سیستم کنترل خطی، حالتی است که در صورت نبود ورودی و اغتشاش، خروجی در آن حالت باقی بماند. یک سیستم کنترل خطی را پایدار بحرانی گوییم، هرگاه نوسانات خروجی برای همیشه ادامه یابد و در صورتی ناپایدار است که هنگام اعمال یک شرط اولیه‌ی جدید به آن، خروجی اش به طور بی‌کران واگرا شود. سیستم کنترل خطی توسط مجموعه معادلات (۶.۲) و (۷.۲) را یک سیستم پایدار مجانبی می نامیم، هرگاه قسمت حقیقی همه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه – بسته ی $\Gamma = A - BF$ منفی باشد و در صورتی که قسمت حقیقی همه‌ی مقادیر ویژه منفی یا صفر باشد، سیستم را پایدار و در غیر این دو صورت سیستم را ناپایدار می‌نامیم.

[1] Output feedback matrix

تعریف ۲-۱۴- مسئله‌ی تخصیص مقادیر ویژه

مسئله‌ی یافتن ماتریس پس‌خورد F، برای یک سیستم حلقه – بسته به گونه‌ای که سیستم را پایدار کند مسئله تخصیص مقادیر ویژه می‌گوییم.

قضیه ۲ – ۱- سیستم کنترل خطی تعریف شده توسط مجموعه معادلات (۴.۲) و (۵.۲)، کاملا کنترل‌پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس پس‌خورد حالت F موجود باشد به گونه‌ای که مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه – بسته ی $\Gamma = A - BF$ را به هر مجموعه دلخواه از اعداد تخصیص دهد. [۱۱]

تعریف ۲-۱۵- ناورداهای کرونکر

زوج کنترل‌پذیر (B, A) را در نظر بگیرید، ماتریس کنترل‌پذیر سیستم را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$Q = [B, A\,B\,, A^{۲}B, \dots, A^{p_{۱}-۱}b_{۱}\,, \dots, A^{p_m-۱}b_m] \qquad (۸.۲)$$

به طوری که $rank(Q) = n$.

اعداد $p_i\,, i = ۱, \dots m$ که هر کدام به بردار ستونی متناظر b_i از ماتریس B مربوط می‌شود را ناورداهای کرونکر زوج (B, A) می‌نامند. واضح است که $\sum_{i=۱}^{m} p_i = n\,, ۱ \le p_i \le n$ [۹]

ناورداهای کرونکر زوج کنترل‌پذیر (B, A) را منظم می‌نامند هر گاه اختلاف بین ماکسیمم و مینیمم آن‌ها حداکثر برابر واحد باشد.

اگر اختلاف بین ماکسیمم و مینیمم ناورداهای کرونکر زوج کنترل‌پذیر (B, A) بیشتر از واحد باشد آن‌ها را نامنظم می‌نامند.

تعریف ۲-۱۶- فرم همدم برداری

برای به‌دست آوردن فرم همدم برداری $(\tilde{B}, \tilde{A})$ ابتدا با استفاده از ماتریس تبدیل T زوج (B, A) را به فرم استاندارد اشلون $(\hat{B}, \hat{A})$ و سپس با استفاده از ماتریس تبدیل S فرم استاندارد اشلون را به فرم همدم برداری تبدیل می‌کنیم. [۱۱،۱۳]

فرض کنید که T ماتریس تبدیلات تشابهی باشد که سیستم $x(t+1)=Ax(t)+Bu(t)$ را به $\hat{x}(t+1)=\hat{A}\hat{x}(t)+\hat{B}u(t)$ تبدیل می‌کند به طوری که:

$$\begin{cases}\hat{x}(t)=T^{-1}x(t)\\ \hat{A}=T^{-1}AT\\ \hat{B}=T^{-1}B\end{cases} \qquad (۹.۲)$$

روش دیگری برای تبدیل زوج $(B\,,A)$ به $(\hat{B},\hat{A})$ وجود دارد بدین صورت که ماتریس افزوده $Q=[B,A,I_n]$ را در نظر می‌گیریم و عملیات تشابهی زیر را تعریف می‌کنیم:

۱) ضرب یا تقسیم یک سطر از Q به کمیت اسکالر $k\neq ۰$ و به دنبال آن تقسیم یا ضرب ستون متناظر از ماتریس A

$$Row(i)\leftrightarrow Row(i)\times k \qquad on\ Q$$
$$Column(i)\leftrightarrow Column(i)/k \qquad on\ A$$

۲) تفاضل مضربی از سطر i ام ماتریس Q از سطر jام آن و به دنبال آن جمع همان مضرب از ستون jام ماتریس A با ستون i ام ماتریس A

$$R(j)\leftrightarrow R(j)-kR(i) \qquad on\ Q$$
$$C(i)\leftrightarrow C(i)+kC(j) \qquad on\ A$$

۳) جا به جایی سطر i ام و سطر jام از ماتریس Q و به دنبال آن جا به جایی ستون jام و ستون i ام از ماتریس A

$$R(i)\leftrightarrow R(j) \qquad on\ Q$$
$$C(j)\leftrightarrow C(i) \qquad on\ A$$

بدین ترتیب $\hat{Q}=[\hat{B},\hat{A},T^{-1}]$ به‌دست می‌آید که ماتریس تشابهی T منحصر بفرد است و فرم ماتریسی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ O_{m\times m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ O_{m\times m} \\ O_{r\times m} \end{bmatrix} \text{ و } \hat{A} = \begin{bmatrix} O_{m\times m} & O_{m\times m} & \cdots & O_{m\times m} & V^{(1)} \\ I_m & O_{m\times m} & \cdots & O_{m\times m} & V^{(2)} \\ O_{m\times m} & I_m & \cdots & \vdots & V^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ O_{m\times m} & O_{m\times m} & \cdots & O_{m\times m} & V^{(q)} \\ O_{r\times m} & O_{m\times m} & \cdots & I_m \; O_{r\times s} & V^{(q+1)} \end{bmatrix} \qquad (۱۰.۲)$$

که در آن $V^{(i)}, i = 1,2,\ldots,q$ یک ماتریس مربعی $m \times m$ و $V^{(q+1)}$ یک ماتریس $r \times m$ می‌باشد.

فرم استاندارد اشلون، برای تعیین قوانین کنترل مناسب نیست لذا برای رفع این مشکل بردارهای ستونی غیر واحد فرم استاندارد اشلون را با انتخاب یک تبدیل مناسب به بردارهای سطری تبدیل می‌کنیم این فرم به فرم همدم برداری معروف است که تبدیل فرم استاندارد اشلون به فرم همدم برداری به صورت زیر انجام می‌شود:

فرض کنید S ماتریس تبدیلات تشابهی باشد که سیستم $\hat{x}(t+1) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$ را به سیستم $\tilde{x}(t+1) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t)$ تبدیل می‌کند به طوری که:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{x}(t) \\ \tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS \\ \tilde{B} = S^{-1}\hat{B} = S^{-1}T^{-1}B \end{cases} \qquad (۱۱.۲)$$

همچنین با استفاده از عملیات تشابهی روی زوج $(B\,,A)$ می‌توان فرم همدم برداری را به صورت زیر به‌دست آورد:

برای تبدیل $(B\,,A)$ به $(\tilde{B},\tilde{A})$ پس از به‌دست آوردن فرم استاندارد اشلون، ماتریس $\hat{Q} = [\hat{B},\hat{A},T^{-1}]$ را در نظر گرفته و سپس با استفاده از عملیات تشابهی آن را به فرم همدم برداری $\tilde{Q} = [\tilde{B},\tilde{A},S^{-1}]$ تبدیل می‌کنیم که فرم همدم برداری در حالتی که ناورداهای کرونکر منظم باشد به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} & G. & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B. \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix} \qquad (۱۲.۲)$$

که در آن B یک ماتریس بالامثلثی و معکوس پذیر است و در حالتی که ناورداهای کرونکر نـامنظم باشند ستون‌های ماتریس I_{n-m} در بلوک پایین ماتریس $\tilde{A}$ پخش می‌شوند.

فصل ۳

کنترل همزمان سیستم‌های خطی با پس‌خورد حالت

فصل ۳- کنترل همزمان سیستم‌های خطی با پس‌خورد حالت

۳-۱- مقدمه

یک مجموعه از p سیستم ناوردای زمانی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = A_k x_k(t) + B_k u_k(t) \\ y_k(t) = C_k x_k(t) \qquad K = ۱,۲,\dots,p \end{cases} \qquad (۱.۳)$$

که $x_k \in \Re^n$ یک بردار حالت، $u_k \in \Re^m$ یک بردار ورودی و $y_k \in \Re^r$ یک بردار خروجی از سیستم k ام است و A_k، B_k و C_k به ترتیب ماتریس‌هایی با اندازه‌های $n\times n$ ، $n\times m$ ، $r\times n$ هستند.

برای پایداری این p سیستم باید ماتریس کنترل‌پذیر پس‌خورد حالت F را با قانون پس‌خورد $u_k(t) = Fx_k(t)$ به گونه‌ای یافت که همه‌ی مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه – بسته‌ی $A_{kc} = A_k + B_k F$ در داخل محدوده‌ای معین و از پیش تعیین شده در سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرد. [۱۹]

مفروضات زیر را برای سیستم (۱.۳) در نظر بگیرید:

۱. (A_k, B_k) کنترل‌پذیر و (A_k, C_k) مشاهده پذیرند.

۲. C_k دارای رتبه کامل است.

هدف یافتن یک ماتریس پس‌خورد حالت برای همه p سیستم‌هایی است به طوری که دو فرض مذکور را به وجود آورند و همه ریشه های معادلات مشخصه هر سیستم حلقه – بسته در محدوده‌ای مشخص و از پیش تعیین شده قرار بگیرد.

در اینجا فرض کنید که ریشه‌ها داخل ناحیه‌ای مستطیلی و تعریف شده به صورت

$$\Omega = \{s \in ₵ / \alpha \le real\ (s)\ \le \beta, \_\gamma \le imag\ (s) \le \gamma\} \qquad (۲.۳)$$

قرار داشته باشد که $\alpha \in \Re$، $\beta \in \Re$ و $\gamma \in \Re$ و این ناحیه نسبت به محور حقیقی متقارن است.

۳-۲- تبدیلات تشابهی

برای محاسبه‌ی ماتریس پس‌خورد حالت F، ابتدا ماتریس $[B_k, A_k, I_k]$ را به فرم همدم برداری $[\tilde{B}_k, \tilde{A}_k, T_k^{-1}]$ توسط عملیات تشابهی تبدیل می‌کنیم و سپس ماتریس پس‌خورد حالت به فرم زیر به‌دست می‌آید:

$$F_k = B_{k.}^{-1}\left(- G_{k.} + G_{k\lambda}\right) T_k^{-1} \qquad k = 1, \dots, p \qquad (۳.۳)$$

که $G_{k.}$، $B_{k.}$ و T_k^{-1} به ترتیب ماتریس‌هایی با اندازه‌های $r\times n$، $n\times m$ و $n\times n$ هستند و فرم همدم برداری به صورت $[\tilde{B}_k, \tilde{A}_k, T_k^{-1}]$ می‌باشد که:

$$\tilde{B}_k = \begin{bmatrix} B_{k.} \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix} \qquad (۴.۳)$$

$$\tilde{A}_k = \begin{bmatrix} & G_{k.} & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m} \end{bmatrix} \qquad (۵.۳)$$

و $G_{k\lambda}$ در آن یک ماتریس پارامتری $m\times n$ است و از m سطر اول ماتریس $\tilde{\Gamma}_{k\lambda}$ به‌دست می‌آید به صورت زیر:

$$\tilde{\Gamma}_{k\lambda} = \begin{bmatrix} & G_{k\lambda} & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m} \end{bmatrix} \qquad (۶.۳)$$

$$G_{k\lambda} = \begin{bmatrix} g_{k11} & \cdots & g_{k1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{km1} & \cdots & g_{kmn} \end{bmatrix} \qquad (۷.۳)$$

که مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه – بسته A_{kc} می‌تواند توسط $\tilde{\Gamma}_{k\lambda}$ در طیف $\Lambda_k = \{\lambda_{k1} \text{ و } \dots \text{ و } \lambda_{kn}\}$ قرار بگیرد پس جهت محاسبه‌ی ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری پس از به‌دست آوردن فرم همدم برداری $(\tilde{B}_k , \tilde{A}_k)$، ماتریس پس‌خورد حالتی را که مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه – بسته را به صفر می‌برد به‌دست می‌آوریم یعنی $F_{kp} = -B_{k.}^{-1} G_{k.} T_k^{-1}$.

حال برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد پارامتری با توجه به این که باید مقادیر ویژه‌ی $\bar{\Gamma}_{k\lambda}$ در طیف مشخص $\Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \ldots, \lambda_{kn}\}$ قرار گیرد به منظور تعیین رابطه بین درایه های $g_{kij}(i = 1, 2, \ldots, m\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ ، باید قرار دهیم:

$$det(\bar{\Gamma}_{k\lambda} - \lambda_k I) = P_{kn}(\lambda_k) = 0 \qquad (8.3)$$

با بسط این دترمینان، چندجمله‌ای درجه n ای به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P_{kn}(\lambda_k) = (-1)^n \left(\lambda_k^n + C_{k1}\lambda_k^{n-1} + \ldots + C_{k(n-1)}\lambda_k + C_{kn}\right) \qquad (9.3)$$

حال با توجه به این که ریشه‌های این چندجمله‌ای باید همان مقادیر ویژه‌ی $\bar{\Gamma}_{k\lambda}$ باشد می‌توان نوشت:

$$P_{kn}(\lambda_k) = (-1)^n \left(\lambda_k - \lambda_{k1}\right) \ldots (\lambda_k - \lambda_{kn}) \qquad (10.3)$$

که با مساوی قرار دادن روابط (۹.۳) و (۱۰.۳)، $C_{ki}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m$ می‌توانند به صورت زیر محاسبه شوند: [۱۹]

$$\begin{cases} c_{k1} = -\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{ki}) \\ c_{k2} = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n}(\lambda_{ki}\lambda_{kj}) \\ \vdots \\ c_{kn} = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(\lambda_{ki}) \end{cases} \qquad (11.3)$$

اگر $\lambda_{ki}, i = 1, \ldots, n$ مشخص باشند، آنگاه $C_{k1}, \ldots, C_{kn}$ می‌توانند محاسبه شوند.

حال با محاسبه مستقیم $det(\bar{\Gamma}_{k\lambda} - \lambda_k I) = P_{kn}(\lambda_k)$ به صورت پارامتری و داشتن ضرائب چند جمله‌ای مشخصه بالا یک دستگاه معادلات غیرخطی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} f_{k1}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) = C_{k1} \\ \vdots \\ f_{kn}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) = C_{kn} \end{cases} \qquad (۱۲.۳)$$

که $g_{kij}(i = 1, 2, \dots, m \;,\; j = 1, 2, \dots, n)$ عناصر $G_{k\lambda}$ هستند و $f_{ki}, i = 1, \dots, n$

چندجمله‌ای‌های غیرخطی پارامتری هستند که با محاسبه $det(\tilde{\Gamma}_{k\lambda} - \lambda_k I)$ به‌دست می‌آیند.

(۱۲.۳) یک دستگاه از سیستم‌های غیرخطی با n معادله و nm مجهول است.

با انتخاب دلخواه $N = n(m-1)$ مجهول می‌توان سیستم را حل کرد.

۳-۳- یافتن ماتریس پس‌خورد حالت همزمان برای مجموعه ای از سیستم‌ها

در این بخش، روشی برای محاسبه یک پس‌خورد حالت همزمـان توسـط تبـدیلات تشـابهی بـرای مجموعه‌ای از سیستم‌های کنترل‌پذیر معرفی می‌کنیم.

فرض کنید سیستم (۱.۳) داده شده باشد، برای وجود مـاتریس پـس‌خـورد حالـت همزمـان بـرای مجموعه‌ای از سیستم‌ها باید داشته باشیم:

$$F = B_{k\cdot}^{-1}\left(-G_{k\cdot} + G_{k\lambda}\right)T_k^{-1} \qquad k = 1, \dots, p \qquad (۱۳.۳)$$

که p معادله به‌دست می‌آید و با مساوی قرار دادن آن‌ها با یکدیگر معادلات زیر به‌دست می‌آید:

برای مثال اگر $k = i, j$ باشد: $B_{i.}^{-1}\left(-G_{i.} + G_{i\lambda}\right)T_i^{-1} = B_{j.}^{-1}\left(-G_{j.} + G_{j\lambda}\right)T_j^{-1}$

که این معادله به صورت $\left(-G_{i.} + G_{i\lambda}\right) = B_{i.}B_{j.}^{-1}\left(-G_{j.} + G_{j\lambda}\right)T_j^{-1}T_i$ ساده می‌شود.

در نتیجه:

$$G_{i\lambda} - B_{i\cdot}B_{j\cdot}^{-1}G_{j\lambda}T_j^{-1}T_i = G_{i\cdot} - B_{i\cdot}B_{j\cdot}^{-1}G_{j\cdot}T_j^{-1} \qquad (۱۴.۳)$$

سرانجام معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$G_{i\lambda} - B_{i.}B_{j.}^{-1}G_{j\lambda}T_j^{-1}T_i - G_{i.} + B_{i.}B_{j.}^{-1}G_{j.}T_j^{-1}T_i = 0 \qquad (۱۵.۳)$$

در اینجا، $G_{i\lambda}$ و $G_{j\lambda}$ ها مجهول هستند. بنابراین طرف چپ (۱۴.۳) ماتریس مجهول با ابعاد $m\times n$ و طرف راست آن ماتریس معلوم $m\times n$ است.

حال با مساوی قرار دادن عناصر متناظر، معادله mn و $2mn$ مجهول به‌دست می‌آید.

در نتیجه با مساوی قرار دادن طرف راست (۱۳.۳) به صورت جمله به جمله، mn (p-۱) معادله و mnp مجهول به فرم (۱۵.۳) به‌دست می‌آید.

با حل این معادلات، ماتریس پس‌خورد حالت به‌دست می‌آید ولی این روش پایداری سیستم‌های کنترل‌پذیر را تضمین نمی‌کند. برای این منظور باید محدودیت‌های دیگری در نظر گرفته شود به‌طوری که سیستم‌ها پایدار شوند.

برای پایداری سیستم‌ها، باید ناحیه‌ای به صورت (۲.۳) تعریف شود که مقادیر ویژه‌ی سیستم‌ها در سمت چپ صفحه مختلط و در آن ناحیه قرار گیرند. معادلات (۱۲.۳) مقادیر ویژه سیستم‌های (۱.۳) را در طیفی مشخص قرار می‌دهد.

بنابراین کران بالا و کران پایین برای طرف چپ معادله (۱۲.۳) در نظر گرفته می‌شود به طوری که C_{imax} کران‌های بالا و C_{imin} ,$i = 1, \dots, n$ کران‌های پایین هستند که در آن: [۱۹]

$$\left\{\begin{array}{l} C_{1max} = -n(\lambda_{max}) \\ \vdots \\ C_{n\,max} = \left(-1\right)^n (\lambda_{max}^n) \\ C_{n\,max} = \left(-1\right)^n (\lambda_{max}^n) \\ \vdots \\ C_{1min} = -n(\lambda_{min}) \end{array}\right. \qquad (۱۶.۳)$$

و در آن $\alpha = \lambda_{max}$ و $\beta = \lambda_{min}$ که α و β در (۲.۳) معرفی شدند.

پس معادلات (۱۲.۳) به نامعادلات زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} C_{1\,min} \le f_{k1}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) \le C_{1max} \\ \vdots \\ C_{n\,min} \le f_{kn}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) \le C_{n\,max} \end{cases} \tag{۱۷.۳}$$

که این نامعادلات را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\begin{cases} f_{k1}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) - C_{1max} \le 0 \\ \vdots \\ -f_{kn}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) - C_{nmax} \le 0 \\ -f_{k1}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) + C_{1min} \le 0 \\ \vdots \\ -f_{kn}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) + C_{nmin} \le 0 \end{cases} \tag{۱۸.۳}$$

که $2np$ نامعادله و mnp مجهول به‌دست می‌آید. با استفاده از دستگاه معادلات (۱۵.۳) و نامعادلات (۱۸.۳) و حل همزمان آن‌ها، بردار $g \in \mathrm{R}^{nmp}$ به‌دست می‌آید به گونه‌ای که ماتریس پس‌خورد حالت همزمان برای پایداری سیستم (۱.۳) به‌دست می‌آید.

۳-۴- روشی برای حل سیستم‌های معادلات و نامعادلات به صورت همزمان

لم ۳-۱- دو سیستم زیر معادلند:

$$\begin{cases} j_1(x) = 0 \\ \vdots \\ j_k(x) = 0 \\ h_1(x) \le 0 \\ \vdots \\ h_l(x) \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min\ j_1^2(x) + j_2^2(x) + \ldots + j_k^2(x) \\ \text{به طوری که} \\ h_1(x) \le 0 \\ \vdots \\ h_l(x) \le 0 \end{cases}$$

سیستم۱ و سیستم ۲

اگر و تنها اگر تابع هدف در سیستم ۲ برابر صفر باشد. [۱۹]

برهان:

فرض کنید $X = \{ x \in \Re^n / h_1(x) \le 0, \ldots, h_l(x) \le 0 \}$ شدنی باشد اگر سیستم دارای یک جواب شدنی باشد بنابراین:

$$\exists\, x_0 \in R^n / j_1(x_0) = j_2(x_0) = \cdots = j_k(x_0) \qquad (۱۹.۳)$$

$$h_1(x_0) \le h_2(x_0) \le \cdots \le h_l(x_0) \le 0 \qquad (۲۰.۳)$$

از (۲۰.۳) نتیجه می شود $x_0 \in X$ و از (۱۹.۳) داریم:

$$j_1^2(x) + j_2^2(x) \mp \ldots + j_k^2(x) = 0$$

اما تابع هدف سیستم ۲ نامنفی است. بنابراین مقدار مینیمم آن صفر است. پس x_0 جواب سیستم ۲ می‌باشد.

برعکس، اگر جواب بهینه سیستم ۲ صفر باشد. بنابراین سیستم ۱ نیز دارای جواب است و این برهان را کامل می‌کند.

برای حل همزمان معادلات (۱۵.۳) و نامعادلات (۱۸.۳) لم ۳-۱ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برای این منظور، توابع به‌دست آمده از (۱۵.۳) را باید در j_i ها در سیستم ۲ و نامعادلات (۱۸.۳) را در نامعادلات سیستم ۲ جایگزین کرد.

برای هر p سیستم تعریف شده به صورت (۱.۳) مقادیر ویژه می‌تواند در یک منطقه محدود و یا حتی در یک نیم صفحه‌ی از پیش تعیین شده قرار بگیرد.

برای تخصیص مقادیر ویژه مجموعه‌ای از سیستم‌های کنترل‌پذیر در یک منطقه محدود و معین و پایداری همزمان آن‌ها، باید ناحیه به حد کافی بزرگ انتخاب شود به گونه‌ای که جواب معادلات و نامعادلات متناظر با سیستم (۱.۳) یک ماتریس پس‌خورد حالت همزمان تولید کند. جواب شدنی متناظر با سیستم ۲ به صورت برداری به فرم $k = ۱, \dots, p$ و $g \in R^{nmp} = \left(g_{k۱۱}, g_{k۱۲}, \dots, g_{kmn}\right)$ می‌باشد.

با جایگذاری عناصر بردار g در $k=۱, \dots, p$ ، $G_{k\lambda}$ یک ماتریس پس‌خورد حالت به صورت (۱۳.۳) به‌دست می‌آید.

چون محدودیت‌های (۱۸.۳) برای پایداری همزمان در نظر گرفته می‌شوند بنابراین ماتریس پس‌خورد به‌دست آمده یک کنترل‌گر پایدار همزمان برای سیستم‌های (۱.۳) می‌باشد.

مثال- دو سیستم کنترل‌پذیر زیر با اندازه‌ی ۳ را در نظر بگیرید. هدف اساسی، یافتن یک ماتریس پس‌خورد حالت پایدار همزمان برای سیستم‌های زیر است:

$$A_۱ = \begin{bmatrix} -۰.۵۰۰۰ & -۱.۰۰۰۰ & ۲.۵۰۰۰ \\ ۱۰.۲۵۰۰ & -۱۳.۰۰۰۰ & ۱۴.۷۵۰۰ \\ ۱۲.۰۰۰۰ & -۱۳.۰۰۰۰ & ۱۳.۵۰۰۰ \end{bmatrix}, B_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$A_۲ = \begin{bmatrix} -۱.۳۴۲۹ & ۲.۵۴۲۹ & ۲.۷۱۴۳ \\ -۱.۰۲۸۶ & ۱.۶۲۸۶ & -۱.۸۵۷۱ \\ -۰.۵۴۲۹ & ۰.۹۴۲۹ & ۴.۷۱۴۳ \end{bmatrix}, B_۲ = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۲ & -۱ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

با انجام تبدیلات تشابهی توسط برنامه کامپیوتری($Reg1$) ماتریس‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$T_{۱}^{-۱}=\begin{bmatrix}۲.۵ & -۲ & ۲.۵\\ ۰ & -۰.۲۵ & ۰.۵\\ ۲ & -۲ & ۲\end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{۱}=\begin{bmatrix}۰.۷۵ & ۴.۵ & ۳.۱۸۷۵\\ ۰ & -۰.۷۵ & ۱.۷۱۸۸\\ ۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$B_{۱۰}^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

که با توجه به $\tilde{A}_{۱}$ ماتریس $G_{۱۰}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$G_{۱۰}=\begin{bmatrix}۰.۷۵ & ۴.۵ & ۳.۱۸۷۵\\ ۰ & -۰.۷۵ & ۱.۷۱۸۸\end{bmatrix}$$

ماتریس $G_{۱\lambda}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$G_{۱\lambda}=\begin{bmatrix}g_{۱۱۱} & g_{۱۱۲} & g_{۱۱۳}\\ g_{۱۲۱} & g_{۱۲۲} & g_{۱۲۳}\end{bmatrix}$$

در مورد سیستم ۲ نیز با انجام عملیات تشابهی توسط نرم افزار داریم:

$$T_{۲}^{-۱}=\begin{bmatrix}-۰.۲ & ۰.۴ & ۰\\ ۰.۰۵۷۱ & -۰.۲۵۷۱ & -۰.۲۸۵۷\\ ۰.۲۲۸۶ & -۰.۰۲۸۶ & -۰.۱۴۲۹\end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{۲}=\begin{bmatrix}۳ & ۴ & ۰.۹۹۹۹\\ ۰ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$B_{۲۰}^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

که با توجه به $\tilde{A}_{۲}$ ماتریس $G_{۲۰}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$G_{۲۰}=\begin{bmatrix}۳ & ۴ & ۰.۹۹۹۹\\ ۰ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$$

ماتریس $G_{۲\lambda}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$G_{۲\lambda} = \begin{bmatrix} g_{۲۱۱} & g_{۲۱۲} & g_{۲۱۳} \\ g_{۲۲۱} & g_{۲۲۲} & g_{۲۲۳} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های به‌دست آمده را در رابطه‌ی زیر قرار می‌دهیم:

$$B_{۱.}^{-۱}\left(-G_{۱.} + G_{۱\lambda}\right)T_{۱}^{-۱} = B_{۲.}^{-۱}\left(-G_{۲.} + G_{۲\lambda}\right)T_{۲}^{-۱}$$

۶ معادله به‌دست می‌آید.

ناحیه مقادیر ویژه اختصاص داده شده برای هر دو سیستم به صورت زیر است:

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C} / -۲۵ \leq real\,(s) \leq -۰.۰۹, -۲۵ \leq imag\,(s) \leq ۲۵\}$$

حال با توجه به این طیف و مطالب بیان شده در بخش ۳.۳ محدودیت‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\lambda_{min} = -۰.۰۹ \quad , \quad \lambda_{max} = -۲۵$$

$$-g_{۱۱} - g_{۲۲} - ۷۵ \leq ۰$$

$$g_{۱۱}g_{۲۲} - g_{۱۲}g_{۲۱} - g_{۱۳} - ۶۲۵ \leq ۰$$

$$g_{۱۳}g_{۲۲} - g_{۱۲}g_{۲۳} - ۱۵۶۲۵ \leq ۰$$

$$g_{۱۱} + g_{۲۲} + ۰.۲۷ \leq ۰$$

$$g_{۱۲}g_{۲۱} + g_{۱۳} - g_{۱۱}g_{۲۲} + ۰.۰۰۸۱ \leq ۰$$

$$g_{۱۲}g_{۲۳} - g_{۱۳}g_{۲۲} + ۰.۰۰۰۷۲۹ \leq ۰$$

$$-g'_{۱۱} - g'_{۲۲} - ۷۵ \leq ۰$$

$$g'_{۱۱}g'_{۲۲} - g'_{۱۲}g'_{۲۱} - g'_{۱۳} - ۶۲۵ \leq ۰$$

$$g'_{۱۳}g'_{۲۲} - g'_{۱۲}g'_{۲۳} - ۱۵۶۲۵ \leq ۰$$

$$g'_{۱۱} + g'_{۲۲} + ۰.۲۷ \leq ۰$$

$$g'_{۱۲}g'_{۲۱} + g'_{۱۳} - g'_{۱۱}g'_{۲۲} + ۰.۰۰۸۱ \leq ۰$$

$$g'_{۱۲}g'_{۲۳} - g'_{۱۳}g'_{۲۲} + ۰.۰۰۰۷۲۹ \leq ۰$$

با حل دستگاه معادلات و نامعادلات به‌دست آمده و حل آن توسط نـرم‌افـزار *Lingo* بـردار $g \in R^{۱۲}$ بـه صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$g = (-۱.۱۶۲۶, -۳.۸۸۴۱, ۱۰.۴۱۱۰, ۲.۷۱۸۰, -۰.۰۵۸۵, ۰.۱۵۹۵, -۱۳.۳۱۳۹, -۵.۹۰۲۶, ۱۰.۴۰۳۸, -۳.۰۱۹۳, -۳.۸۵۹۵, ۷.۱۷۳۹)$$

با جایگزینی عناصر بردار g در ماتریس‌های $G_{۱\lambda}$ و $G_{۲\lambda}$ داریم:

$$G_{۱\lambda} = \begin{bmatrix} -۱.۱۶۲۶ & -۳.۸۸۴۱ & ۱۰.۴۱۱۰ \\ ۲.۷۱۸۰ & -۰.۰۵۸۵ & ۰.۱۵۹۵ \end{bmatrix}$$

$$G_{۲\lambda} = \begin{bmatrix} -۱۳.۳۱۳۹ & -۵.۹۰۲۶ & ۱۰.۴۰۳۸ \\ -۳.۰۱۹۳ & -۳.۸۵۹۵ & ۷.۱۷۳۹ \end{bmatrix}$$

و با جایگذاری نتایج به‌دست آمده در رابطه‌ی $B_{۱۰}^{-۱}\left(-G_{۱۰} + G_{۱\lambda}\right)T_{۱}^{-۱}$ ماتریس پس‌خورد حالت همزمان این دو سیستم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F = B_{۱۰}^{-۱}\left(-G_{۱۰} + G_{۱\lambda}\right)T_{۱}^{-۱}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -۰.۷۵ & -۴.۵ & -۳.۱۸۷۵ \\ ۰ & ۰.۷۵ & -۱.۷۱۸۸ \end{bmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{bmatrix} -۱.۱۶۲۶ & -۳.۸۸۴۱ & ۱۰.۴۱۱۰ \\ ۲.۷۱۸۰ & -۰.۰۵۸۵ & ۰.۱۵۹۵ \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} ۲.۵ & -۲ & ۲.۵ \\ ۰ & -۰.۲۵ & ۰.۵ \\ ۲ & -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۴.۳۳۳۰ & -۵.۵۰۳۷ & ۱.۶۵۲۶ \\ ۱.۴۳۹۶ & ۰.۴۸۸۹ & ۰.۵۴۷۶ \end{bmatrix}$$

پس:

$$F = \begin{bmatrix} ۴.۳۳۳۰ & -۵.۵۰۳۷ & ۱.۶۵۲۶ \\ ۱.۴۳۹۶ & ۰.۴۸۸۹ & ۰.۵۴۷۶ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه سیستم‌های حلقه – بسته با این ماتریس پس‌خورد حالت به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$v_{۱} = \{-۰.۰۹۰۶ + ۰.۲۰۵۳i, -۰.۰۹۰۶ + ۰.۲۰۵۳i, -۳.۶۶۶۸\}$$

$$v_{۲} = \{-۱۶.۵۹۷۱, -۱.۵۹۲۲, -۰.۴۷۴۴\}$$

توجه داشته باشید که قسمت حقیقی تمامی مقادیر ویژه‌ی بالا منفی می‌باشد یعنی تمامی مقادیر ویژه در سمت چپ صفحه‌ی مختلط قرار دارند یعنی این پس‌خورد حالت به‌دست آمده، به صورت همزمان هر دو سیستم را پایدار می‌کند.

فصل ۴

روشی پارامتری برای تخصیص مقادیر ویژه‌ی پس‌خورد خروجی

فصل ۴– روشی پارامتری برای تخصیص مقادیر ویژه‌ی پس‌خورد خروجی

۴-۱- مقدمه

یک سیستم قابل مشاهده و قابل کنترل چند متغیره زمان ثابت خطی را در نظر بگیرید که توسط معادلات حالت و خروجی زیر تعریف شده باشد:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (۱.۴)$$

$$y(t) = Cx(t) \qquad (۲.۴)$$

که $x \in \Re^n$، $u \in \Re^m$ و $y \in \Re^p$ و ماتریس‌های A و B و C ماتریس‌های حقیقی ثابت‌اند که به ترتیب دارای اندازه‌های $n \times n$، $n \times m$ و $p \times n$ هستند به طوری که $rank\ (B) = m$، $rank\ (C) = p$ و $mp \geq n$ برای $m \leq n$ و $p \leq n$. هدف تخصیص مقادیر ویژه برای طراحی یک ماتریس کنترل‌گر پس‌خورد خروجی K می‌باشد به گونه‌ای که بتوان قطب های سیستم حلقه - بسته را از مکان‌هایی نامطلوب به مکان‌هایی مطلوب تغییر داد. [۱۲]

فرض کنید

$$u(t) = Ky(t) \qquad (۳.۴)$$

که K ماتریس پس‌خورد خروجی یا ماتریس قابل کنترل با اندازه‌ی $m \times p$ است و به گونه‌ای انتخاب شده که سیستم حلقه – بسته‌ی

$$\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) = \Gamma_c x(t) \qquad (۴.۴)$$

دارای مقادیر ویژه‌ای در طیف

$$\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \qquad (۵.۴)$$

به صورت مردوج مختلط می‌باشد یعنی برای $\lambda \in \Lambda$، $det(\lambda I - A - BKC) = 0$. ماتریس پس‌خورد K می‌تواند با الگوریتم‌های متفاوتی برای جفت (A,B) داده شده به‌دست آید. در اینجا یک مساله

فرمول بندی شده جبری ساده با بیانی صریح از چند جمله‌ای مشخصه حلقه – بسته در نظر گرفته شده است.

۴-۲- محاسبه ماتریس پس خورد حالت خروجی

این روش بر اساس تبدیل معادلات غیرخطی سیستم به فرم همدم برداری (B,A) می‌باشد که توسط تبدیلات تشابهی مقدماتی به‌دست می‌آید که در این روش نیازی به دانش قبلی برای مقادیر ویژه نیست بنابراین برای تخصیص مقادیر ویژه‌ی پس‌خورد حالت با سیستم حلقه – بسته‌ی

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) = \Gamma_c\, x(t) \qquad (۶.۴)$$

داریم:

$$u(t) = Fx(t) \qquad (۷.۴)$$

که مقادیر ویژهΓ_c در طیف از پیش تعیین شده Λ قرار دارد. حال با مقایسه‌ی معادلات (۴.۴) و (۶.۴) واضح است که

$$F = KC \qquad (۸.۴)$$

هر چند K نمی‌تواند به صورت معادله از رابطه (۸.۴) به‌دست آید زیرا ماتریس C مستطیلی می‌باشد و ماتریس K نمی‌تواند از معکوس ماتریس C به‌دست آید.

فرض کنید

$$x(t) = T\tilde{x}(t) \qquad (۹.۴)$$

که (B,A) قابل تبدیل به فرم همدم برداری می‌باشد به صورت

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} B_{.} \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} & G_{.} \\ I_{n-m} & O_{n-m,m} \end{bmatrix}$$

که $B_{.}$ یک ماتریس بالا مثلثی $m \times m$ با قطر واحد است و $G_{.}$ یک ماتریس $m \times n$ است. می‌دانیم که ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری به صورت

$$F = B^{-1}(-G_{\circ} + G_{\lambda})T^{-1} \qquad (۱۰.۴)$$

به‌دست می‌آید که G_λ یک زیرماتریس $m \times n$ پارامتری از $\tilde{\Gamma}$ می‌باشد.

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} & G_\lambda \\ I_{n-m} & O_{n-m,m} \end{bmatrix}, G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} \qquad (۱۱.۴)$$

به طوری که مقادیر ویژه‌ی $\tilde{\Gamma}$ در طیف Λ قرار دارد. پارامتر های G_λ می‌توانند از یک سیستم غیرخطی از معادلات با توجه به فرم پارامتری سیستم حلقه – بسته‌ی $P_n(\lambda) = det(\tilde{\Gamma} - \lambda I)$ و محاسبه ضرائب چندجمله‌ای مشخصه‌ی از پیش تعیین شده‌ی

$$P_n(\lambda) = \left(\lambda - \lambda_1\right)\left(\lambda - \lambda_2\right) \dots \left(\lambda - \lambda_n\right) \qquad (۱۲.۴)$$

به‌دست آیند. بنابراین یک دستگاه n معادله و mn مجهول غیرخطی به‌دست می‌آید. بقیه پارامترها، n(۱-m) پارامتر آزاد هستند که با انتخاب‌های زیاد می‌توان جواب‌های متفاوتی به‌دست آورد. تئوری زیر به الگوریتمی برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد خروجی به وسیله‌ی ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری منجر می‌شود.

تئوری ۴-۱- همیشه یک ماتریس پس‌خورد خروجی K برای زوج قابل کنترل (B,A) و زوج قابل مشاهده (C,A) وجود دارد زمانی که $mp \geq n$. [۱۲]

برهان:

اگر زوج (B,A) قابل کنترل باشد پس یک ماتریس پس‌خورد حالت F وجود دارد به گونه‌ای که تمامی n مقدار ویژه‌ی سیستم حلقه – بسته $\Gamma = A + BF$ در طیفی مشخص قرار گیرد. الگوریتم‌های متفاوتی برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت وجود دارد. برای یک سیستم قابل مشاهده، یک ماتریس پس‌خورد خروجی K وجود دارد به گونه‌ای که تمامی n مقدار ویژه سیستم حلقه – بسته $\Gamma = A + BKC$ در طیفی مشخص قرار گیرد.

به عنوان نتیجه واضح است که این منجر می‌شود به رابطه‌ی $F = KC$. هر چند از این که F و K و C ماتریس‌های مستطیلی هستند، K نمی‌تواند از وارون C به‌دست آید. ولی می‌توان با انجام عملیات تشابهی مقدماتی روی C آن را به فرم مناسب E تبدیل کرد به گونه‌ای که $CE = [I_p , O_{p,n-p}]$ که E ماتریسی $n \times n$ و از مرتبه‌ی کامل است. بقیه $N=nm-n$ پارامتر در F می‌توانند به‌دست آیند به طوری که K از رابطه‌ی زیر به‌دست آید:

$$F E = K C E = K \left[I_p , O_{p,n-p}\right] = [K , O_{p,n-p}] \qquad (۱۳.۴)$$

که این به الگوریتم زیر برای به‌دست آوردن K از ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری F منجر می‌شود. [۱۲]

هدف: به‌دست آوردن پارامترهای g_{ij} (عناصر G_λ رابطه (۱۱.۴)) به منظور محاسبه‌ی ماتریس پس‌خورد خروجی K برای تخصیص مقادیر ویژه به سیستم حلقه – بسته Γ در طیف مشخص $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ می‌باشد.

ورودی: ماتریس‌های قابل مشاهده و قابل کنترل (A, B, C) و طیف مقادیر ویژه $\Lambda = \{\lambda_1 , \dots , \lambda_n \}$ می‌باشند که مقادیر ویژه مختلط به صورت جفت مزدوج مختلط هستند.

خروجی: ماتریس پس‌خورد خروجی K است به طوری‌که مقادیر ویژه خاصی را به سیستم حلقه – بسته اختصاص دهد.

گام ۱ : ابتدا توسط عملیات تشابهی $B_{.}^{-1}$ و $G_{.}$ و $T_{.}^{-1}$ را به‌دست می‌آوریم.

گام ۲ : ضرائب چند جمله‌ای مشخصه که ریشه‌هایش همان مقادیر ویژه طیف مورد نظر Λ هستند را محاسبه می‌کنیم.

گام ۳: چند جمله‌ای مشخصه را از $\bar{\Gamma}$ به‌دست می‌آوریم.

گام ۴ : معادلات سیستم غیرخطی مرتبط با پارامترهای g_{ij} را با محاسبه ضرائب چند جمله‌ای مشخصه که در گام ۲ و ۳ به‌دست آمده را مشخص می‌کنیم که شامل n معادله می‌باشد.

گام ۵ : ماتریس E را توسط عملیات ستونی مقدماتی روی C به گونه‌ای به‌دست آورید که $C\,E = [I_p\,, O_{p\,.n-p}]$ به طوری که $F\,E = K\,C\,E = B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1}E = K[I_p\,, O_{p\,.n-p}]$

گام ۶: $m\,(n-p)$ معادله‌ی دیگر را با مساوی قرار دادن $(n-p)$ ستون آخر رابطه‌ی

$$B_0^{-1}\left(-G_0 + G_\lambda\right)T^{-1}E \qquad (14.4)$$

با صفر به‌دست آورید.

گام ۷: حال $n + m\,(n-p) \leq mn$ دستگاه معادلات غیرخطی را حل کنید.

گام ۸: این پارامترها را در G_λ قرار دهید و K را به‌دست آورید.

با توجه به این که بسیاری از عناصر G_λ می‌توانند به عنوان پارامتر آزاد مورد استفاده قرار گیرند پس امکان انتخاب ماتریس پس‌خورد خروجی K با مینیمم نرم وجود دارد. همچنین این روش در مورد $mp = n$ نیز به کار می‌رود.

در مثال اول n=۴ و $m = p$=۲ و در مثال دوم $m\,p > n$ می‌باشد.

مثال ۴-۱- سیستم کنترل پذیر و مشاهده پذیر مرتبه چهارم زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 1.38 & -0.2077 & 6.715 & -5.676 \\ -0.5814 & -4.290 & 0 & 0.6750 \\ 1.067 & 4.273 & -6.654 & 5.893 \\ 0.0480 & 4.273 & 0 & -2.104 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۵.۶۷۹ & ۰ \\ ۱.۱۳۶ & -۳.۱۴۶ \\ ۱.۱۳۶ & ۰ \end{bmatrix}$$

برای سادگی فرض کنید C به صورت زیر باشد:

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

با انجام تبدیلات تشابهی توسط نـرم افـزار *Matlab* و برنامـه کـامپیوتری (***Reg1***) مـاتریس‌هـای زیـر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} -۵.۲۵۸۸ & ۰.۲۴۹۸ & -۱.۲۴۳۹ & ۲.۶۹۸۳ \\ -۱.۳۸۳۲ & -۶.۴۰۹۲ & -۱۱.۰۶۱۷ & ۱۹.۵۴۰۳ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$B^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$T^{-۱}=\begin{bmatrix} -۰.۰۰۴۰ & ۰.۱۸۳۹ & ۰ & -۰.۰۳۹۳ \\ -۰.۰۶۵۳ & ۰.۰۰۹۸ & -۰.۳۱۷۹ & ۰.۲۶۸۷ \\ -۰.۰۰۷۱ & -۰.۰۰۷۱ & ۰ & ۰.۰۳۵۶ \\ -۰.۰۴۷۳ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

با توجه به $\tilde{A}$ ماتریس $G_{۰}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$G_{۰}=\begin{bmatrix} -۵.۲۵۸۸ & ۰.۲۴۹۸ & -۱.۲۴۳۹ & ۲.۶۹۸۳ \\ -۱.۳۸۳۲ & -۶.۴۰۹۲ & -۱۱.۰۶۱۷ & ۱۹.۵۴۰۳ \end{bmatrix}$$

ماتریس G_λ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$G_\lambda=\begin{bmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} & g_{۱۳} \\ g_{۲۱} & g_{۲۲} & g_{۲۳} \end{bmatrix}$$

از این که C به صورت فرم مربوطه می‌باشد یعنی $C = [I_p\, , O]$ پس نیازی به محاسبه E نیست.

فرض کنید مقادیر ویژه‌ی مطلوب در طیف $\Lambda = \{-۱, -۲\, , -۳, -۴\}$ قرار داشته باشند.

ضرائب چند جمله‌ای مشخصه از درجه چهار با مقادیر ویژه‌ی بالا به صورت زیر هستند:

$$c_۱ = -\sum_{i=۱}^{۴}(\lambda_i) = ۱۰$$

$$c_۲ = \sum_{i,j=۱,i\neq j}^{۴}(\lambda_i\lambda_j) = ۳۵$$

$$c_۳ = \sum_{i,\mathrm{k},j=۱,i\neq j\neq \mathrm{k}}^{۴}(\lambda_i\lambda_j\,\lambda_k) = ۵۰$$

$$c_۴ = (-۱)^۴\prod_{i=۱}^{۴}(\lambda_i) = ۲۴$$

با توجه به رابطه‌ی (۹.۴) داریم:

$$P_{\mathrm{n}}(\lambda) = det(\tilde{\Gamma} - \lambda I) = det\begin{bmatrix} g_{۱۱}-\lambda & g_{۱۲} & g_{۱۳} & g_{۱۴} \\ g_{۲۱} & g_{۲۲}-\lambda & g_{۲۳} & g_{۲۴} \\ ۱ & ۰ & -\lambda & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -\lambda \end{bmatrix}$$

ضرائب چند جمله‌ای مشخصه‌ی رابطه‌ی بالا به شرح ذیل به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P_۴(\lambda) = \lambda^۴ &+ \left(-g_{۱۱} - g_{۲۲}\right)\lambda^۳ + \left(g_{۱۱}g_{۲۲} - g_{۱۲}g_{۲۱} - g_{۱۳} - g_{۱۴}\right)\lambda^۲ \\ &+ \left(g_{۱۳}g_{۲۲} - g_{۱۲}g_{۲۳} + g_{۱۱}g_{۲۴} - g_{۱۴}g_{۲۱}\right)\lambda \\ &+ (g_{۱۳}g_{۲۴} - g_{۱۴}g_{۲۳}) \end{aligned}$$

حال با مساوی قرار دادن ضرائب چندجمله‌ای مشخصه با ضرائب چند جمله‌ای مشخصه‌ی مطلوب سیستم، معادلات غیرخطی زیر به‌دست می‌آید:

$$-g_{۱۱} - g_{۲۲} = ۱۰$$

$$g_{۱۱}g_{۲۲} - g_{۱۲}g_{۲۱} - g_{۱۳} - g_{۱۴} = ۳۵$$

$$g_{۱۳}g_{۲۲} - g_{۱۲}g_{۲۳} + g_{۱۱}g_{۲۴} - g_{۱۴}g_{۲۱} = ۵۰$$

$$g_{۱۳}g_{۲۴} - g_{۱۴}g_{۲۳} = ۲۴$$

حال از رابطه‌ی (۸.۴) و (۱۴.۴) داریم:

$$B_{.}^{-۱}\left(-G_{.}+G_{\lambda}\right)T^{-۱}=KC$$

در این مورد، $KC=[K\,,O]$ و بنابراین کافی است ضرائب دو ستون آخر رابطه‌ی بالا را برابر صفر قرار دهیم که ۴ معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$-۰.۳۱۷۹g_{۱۲}=-۰.۰۷۹۳۹$$

$$-۰.۰۳۹۳g_{۱۱}+۰.۲۶۸۷g_{۱۲}+۰.۳۵۵۶g_{۱۳}=۰.۲۲۹۳$$

$$-۰.۳۱۷۹\,g_{۲۲}=۲.۰۳۷۳$$

$$-۰.۰۳۹۳g_{۲۱}+۰.۲۶۸۷g_{۲۲}+۰.۳۵۵۶g_{۲۳}=-۲.۰۶۱۱$$

حال ما ۸ معادله و ۸ مجهول داریم که با حل دستگاه معادلات ، دو کنترل‌گرپس‌خورد حالت خروجی مستقل از یکدیگر به‌دست می‌آید که نتایج به صورت زیر خواهد بود:

$$g_{۱۱}=۴.۵۹۰۸,\,g_{۱۲}=۰.۲۴۹۸,\,g_{۱۳}=۰.۵۹۷۳,\,g_{۱۴}=۰.۹۵۹۵$$

$$g_{۲۱}=۱۸.۵۱۳۳,\,g_{۲۲}=۶.۴۰۹۲,\,g_{۲۳}=-۲۹.۹۶۹۶,\,g_{۲۴}=-۷.۹۵۹۴$$

و

$$g_{۱۱}=۵.۵۹۰۸,\,g_{۱۲}=۰.۲۴۹۸,g_{۱۳}=۰.۵۹۷۳,g_{۱۴}=۲.۲۴۲۱$$

$$g_{۲۱}=۳.۸۶۴۰,\,g_{۲۲}=-۶.۴۰۹۲,g_{۲۳}=-۱۳.۷۹۹۳,g_{۲۴}=-۱۱.۶۱۸۱$$

ماتریس‌های کنترل‌گر پس‌خورد خروجی (اولین ۲ ستون حاصل از $B_{.}^{-۱}(-G_{.}+G_{\lambda})T^{-۱}E=K[I_p\,,O_{p\,,n-p}]$) به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$B_{.}^{-۱}\left(-G_{.}+G_{\lambda}\right)T^{-۱}E$$

$$=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Bigg(\begin{bmatrix}۵.۲۵۸۸ & -۰.۲۴۹۸ & ۱.۲۴۳۹ & -۲.۶۹۸۳\\ ۱.۳۸۳۲ & ۶.۴۰۹۲ & ۱۱.۰۶۱۷ & -۱۹.۵۴۰۳\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}۴.۵۹۰۸ & ۰.۲۴۹۸ & ۰.۵۹۷۳ & ۰.۹۵۹۵\\ ۱۸.۵۱۳۳ & -۶.۴۰۹۲ & -۲۹.۹۶۹۶ & -۷.۹۵۹۴\end{bmatrix}\Bigg)\begin{bmatrix}-۰.۰۰۴۰ & ۰.۱۸۳۹ & ۰ & -۰.۰۳۹۳\\ -۰.۰۶۵۳ & ۰.۰۰۹۸ & -۰.۳۱۷۹ & ۰.۲۶۸۷\\ -۰.۰۰۷۱ & -۰.۰۰۷۱ & ۰ & ۰.۰۳۵۶\\ -۰.۰۴۷۳ & ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$= K\left[I_p \,, O_{p\,.n-p}\right] = \begin{bmatrix} ۰.۰۰۱۹ & ۰.۲۹۳۷ & ۰ & ۰ \\ ۱.۵۰۴۳ & -۰.۴۳۶۸ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$K_۱ = \begin{bmatrix} ۰.۰۰۱۹ & ۰.۲۹۳۷ \\ ۱.۵۰۴۳ & -۰.۴۳۶۸ \end{bmatrix}$$

و مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه – بسته با پس خورد خروجی به دست آمده به شرح ذیل می‌باشد:

$$\Lambda = \left\{-۰.۹۹۹۹, -۲.۰۰۰۳\,, -۲.۹۹۹۷, -۴\right\}$$

و

$$B_.^{-۱}\left(-G_. + G_\lambda\right)T^{-۱}E$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} ۵.۲۵۸۸ & -۰.۲۴۹۸ & ۱.۲۴۳۹ & -۲.۶۹۸۳ \\ ۱.۳۸۳۲ & ۶.۴۰۹۲ & ۱۱.۰۶۱۷ & -۱۹.۵۴۰۳ \end{bmatrix}\right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} ۵.۵۹۰۸ & ۰.۲۴۹۸ & ۰.۵۹۷۳ & ۲.۲۴۲۱ \\ ۳.۸۶۴۰ & -۶.۴۰۹۲ & -۱۳.۷۹۹۳ & -۱۱.۶۱۸۱ \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -۰.۰۰۴۰ & ۰.۱۸۳۹ & ۰ & -۰.۰۳۹۳ \\ -۰.۰۶۵۳ & ۰.۰۰۹۸ & -۰.۳۱۷۹ & ۰.۲۶۸۷ \\ -۰.۰۰۷۱ & -۰.۰۰۷۱ & ۰ & ۰.۰۳۵۶ \\ -۰.۰۴۷۳ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$= K\left[I_p \,, O_{p\,.n-p}\right] = \begin{bmatrix} ۰.۰۶۲۶ & ۰.۲۹۳۷ & ۰ & ۰ \\ ۱.۵۰۴۳ & -۳.۰۱۶۴ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$K_۲ = \begin{bmatrix} ۰.۰۶۲۶ & ۰.۲۹۳۷ \\ ۱.۵۰۴۳ & -۳.۰۱۶۴ \end{bmatrix}$$

و مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه – بسته با پس خورد خروجی به دست آمده به شرح ذیل می‌باشد:

$$\Lambda = \left\{-۱, -۲.۰۰۰۲\,, -۲.۹۹۹۸, -۴\right\}$$

مثال ۴-۲- سیستم کنترل پذیر و مشاهده پذیر زیر را در نظر بگیرید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

با انجام تبدیلات تشابهی توسط نرم افزار *Matlab* و برنامه کامپیوتری (*Reg1*) ماتریس‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \tilde{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ T^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0 & -1\\ -1 & -3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

واضح است که:

$$G_0=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -1 & -2\end{bmatrix},\ B_0^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

حال E به سادگی توسط عملیات ستونی مقدماتی بر روی ماتریس واحد از اندازه‌ی۴ به‌دست می‌آید:

$$E=\begin{bmatrix}-\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3}\\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

فرض کنید مقادیر ویژه مطلوب در طیفی به صورت $\Lambda = \{-۱, -۲, -۳, -۴\}$ قرار داشته باشد.

ضرائب چند جمله‌ای مشخصه از درجه چهار با مقادیر ویژه‌ی بالا همانند مثال قبل، به صورت زیر می‌باشد:

$$c_۱=۱۰\ ,\ c_۲=۳۵\ ,\ c_۳=۵۰\ ,\ c_۴=۲۴$$

دستگاه معادلات غیرخطی همانند معادلات مثال ۴-۱ است، حال در اینجا داریم:

$$B_۰^{-۱}\left(-G_۰+G_\lambda\right)T^{-۱}E=$$

$$\begin{bmatrix}-۱+g_{۱۱} & ۱+g_{۱۲} & g_{۱۳} & -۱+g_{۱۴}\\ -۱+g_{۲۱} & -۳+g_{۲۲} & ۱+g_{۲۳} & ۲+g_{۲۴}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{۴}{۳} & ۰ & \frac{۲}{۳} & -\frac{۴}{۳}\\ \frac{۲}{۳} & ۰ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & -۱ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۵}{۳}\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

با مساوی قرار دادن ستون آخر حاصل بالا با صفر، ۲ معادله زیر به‌دست می‌آید.

$$-۱\,g_{۱۱}+۲g_{۱۲}-۵g_{۱۳}+۳g_{۱۴}=-۳$$

$$-۴g_{۲۱}+۲g_{۲۲}-۵g_{۲۳}+۳g_{۲۴}=۱$$

حال ۶ معادله و ۸ مجهول داریم. اگر انتخاب کنیم:

$$g_{۱۱}=-۵ \text{ و } g_{۱۲}=۰$$

با حل معادلات سیستم غیرخطی بالا، نتایج زیر به‌دست می‌آید:

$$g_{۱۳}=-۹۳.۰۷۱۴, g_{۱۴}=-۱۶۲.۷۸۵۷, g_{۲۱}=۰, g_{۲۲}=-۵, g_{۲۳}=۴۷.۶۴۲۹, g_{۲۴}=۸۳.۰۷۱۴$$

بنابراین ماتریس پس‌خورد خروجی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$B_{۰}^{-۱}\left(-G_{۰}+G_{\lambda}\right)T^{-۱}E=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & -۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix} -۵ & ۰ & -۹۳.۰۷۱۴ & -۱۶۲.۷۸۵۷ \\ ۰ & -۵ & ۴۷.۶۴۲۹ & ۸۳.۰۷۱۴ \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -۱ & -۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ & -۱ \\ -۱ & -۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{۴}{۳} & ۰ & \frac{۲}{۳} & -\frac{۴}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & ۰ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & -۱ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۵}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$=K\left[I_p , O_{p,n-p}\right]=\begin{bmatrix} -۲۸.۳۵۷۱ & ۹۳.۰۷۱۴ & -۳۵.۳۵۷۱ & ۰ \\ ۱۱.۲۱۴۳ & -۴۸.۶۴۲۹ & ۱۸.۲۱۴۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\mathrm{K}=\begin{bmatrix} -۲۸.۳۵۷۱ & ۹۳.۰۷۱۴ & -۳۵.۳۵۷۱ \\ ۱۱.۲۱۴۳ & -۴۸.۶۴۲۹ & ۱۸.۲۱۴۳ \end{bmatrix}$$

این مثال‌ها نشان می‌دهند که چطور ماتریس پس‌خورد خروجی به ماتریس پس‌خورد حالت وابسته است.

فصل ۵

روشی جدید و پارامتری جهت محاسبه ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان

فصل ۵– روشی جدید و پارامتری جهت محاسبه ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان

۵-۱- پایداری همزمان پس‌خورد خروجی ایستا از طریق تغییرات مختصات با پارامترهای آزاد

این روش به پایداری همزمان سیستم‌های زمان – ثابت خطی با پس‌خورد خروجی ایستا توسط تغییرات بردارهای حالتی که شامل پارامترهای آزاد می‌باشد، منجر می‌شود. [۵] در این روش هر سیستم به زیر سیستم‌هایی تجزیه می‌شود، سپس با انتخاب ماتریس متغیر آزاد به عنوان ماتریس پس‌خورد حالت مشترک می‌توان سیستم را پایدار کرد. ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان به‌دست می‌آید اگر یک ماتریس نابرابری خطی شدنی موجود باشد. این روش به بزرگی و کوچکی ماتریس نابرابری مرتبط نیست.

نکات و تعاریف بیان شده‌ی ذیل برای ارائه‌ی این روش آورده شده است:

- $P<0$ ($P>0$) یعنی P یک ماتریس محدود متقارن حقیقی منفی (مثبت) است.
- A^{T} یعنی ترانهاده ی ماتریس A
- $A^{\perp}$ یعنی یک ماتریس متعامد از A که دارای رتبه ی کامل ستونی می باشد.
- سه تایی (A,B,C) یعنی یک سیستم کنترل شامل ماتریس A، ماتریس کنترل B و ماتریس خروجی C در حالی که $(A,*,C)$ و $(A,B,*)$ به معنای ماتریس خروجی و ماتریس کنترل هستند.
- $\sigma(A)$ یعنی مجموعه مقادیر ویژه‌ی ماتریس A.
- $diag(A_1, A_2)$ یعنی ماتریس بلوکی – قطری با قطر اصلی همین عناصر.

m سیستم زمان پیوسته‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i \\ y_i = C_i x_i \,, i = 1, \dots, m \end{cases} \qquad (۱.۵)$$

به گونه‌ای که $x_i \in \mathfrak{R}^n$، $u_i \in \mathfrak{R}^p$، $y_i \in \mathfrak{R}^q$ به ترتیب بردارهای حالت، ورودی کنترل و خروجی قابل اندازه گیری i امین سیستم هستند. A_i، B_i و C_i ماتریس‌های ثابت با اندازه‌های مناسب می‌باشند. فرض کنید B_i دارای رتبه‌ی کامل ستونی باشد یعنی $rank(B_i) = p, \ i = 1, \dots, m$. مساله، یافتن ماتریس ثابت مشترک K برای پایداری سیستم (A_i, B_i, C_i) می‌باشد به گونه‌ای که:

$$u_i = K y_i \quad i = 1, \dots, m \qquad (۲.۵)$$

به عبارت دیگر :

$$\sigma(A_i + B_i K C_i) \subset \left\{ s : s \in C, Re(s) < 0 \right\} \qquad (۳.۵)$$

حال سیستم کنترل $(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, *)$ را در نظر بگیرید که:

$$\tilde{A}_i = {B_i^{\perp}}^T A_i B_i^{\perp} ({B_i^{\perp}}^T B_i^{\perp})^{-1} \,, \tilde{B}_i = {B_i^{\perp}}^T A_i B_i \,, i = 1, \dots, m \qquad (۴.۵)$$

به علاوه سیستم‌های کنترل به صورت

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_i = \bar{A}_i \bar{x}_i + \bar{B} u_i \\ y_i = \bar{C}_i \bar{x}_i i = 1, \dots, m \end{cases} \qquad (۵.۵)$$

تعریف می‌شود که

$$\bar{C}_i = \begin{bmatrix} \bar{C}_{i1} & \bar{C}_{i2} \end{bmatrix} \text{ و } \bar{B} = \begin{bmatrix} I_p \\ O_{(n-p)\times p} \end{bmatrix} \text{ و } \bar{A}_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_{i11} & \bar{A}_{i12} \\ \bar{A}_{i21} & \bar{A}_{i22} \end{bmatrix} \qquad (۶.۵)$$

تئوری ۵-۱- سیستم‌های (۱.۵) دارای ماتریس پس‌خورد خروجی پایدار همزمان می‌باشند اگر نابرابری ماتریس خطی زیر برای $i = 1, \dots, m$ برقرار باشد: [۵]

$$\begin{bmatrix} \left(P\bar{A}_{i11} + \bar{K}\bar{C}_{i1}\right) + \left(P\bar{A}_{i11} + \bar{K}\bar{C}_{i1}\right)^T & P\bar{A}_{i12} + \bar{K}\bar{C}_{i2} + \bar{A}_{i21}{}^T Q_i \\ ** & Q_i\bar{A}_{i22} + \bar{A}_{i22}Q_i \end{bmatrix} = 0 \qquad (۱۰.۵)$$

که اگر $P > 0$ و $\bar{K}$ و $Q_i > 0$ موجود باشد آنگاه (۱۰.۵) شدنی است و ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$K = P^{-1}\bar{K} \qquad (۱۱.۵)$$

برهان:

ماتریس‌های حلقه – بسته سیستم‌های (۱.۵) طبق قوانین کنترل (۲.۵) به صورت

$$A_i + B_i K C_i, i = 1, \dots, m \qquad (۱۲.۵)$$

هستند. توجه داشته باشید که (A_i, B_i, C_i) با $(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i)$ تحت تبدیل مختصات $\bar{x}_i = T_i{}^{-1}x_i$ برابر است بنابراین

$$\bar{A}_i = T_i{}^{-1}A_i T_i \text{ و } \bar{B}_i = T_i{}^{-1}B_i \text{ و } \bar{C}_i = C_i T_i \qquad (۱۳.۵)$$

که ایجاب می‌کند

$$A_i + B_i K C_i = T_i(\bar{A}_i + \bar{B}_i K\bar{C}_i)T_i{}^{-1}, i = 1, \dots, m \qquad (۱۴.۵)$$

بنابراین $(A_i + B_i K C_i)$ و $(\bar{A}_i + \bar{B}_i K\bar{C}_i)$ برای K دلخواه دارای مقادیر ویژه‌ی یکسانی هستند. بنابراین برای برهان کافی است که ماتریس‌های $(\bar{A}_i + \bar{B}_i K\bar{C}_i)$ پایدار باشند (دارای مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی باشند).

فرض کنید (۱۰.۵) شدنی باشد و (۱۱.۵) برقرار باشد. قرار دهید $\bar{P}_i = diag(P, Q_i)$ پس (۱۰.۵) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\bar{P}_i(\bar{A}_i + \bar{B}_i K \bar{C}_i) + (\bar{A}_i + \bar{B}_i K \bar{C}_i)^T \bar{P}_i < 0, \quad i = 1, \dots, m \qquad (۱۵.۵)$$

و این یعنی $(\bar{A}_i + \bar{B}_i K \bar{C}_i)$ پایدار می‌باشد.

تبصره ۵-۲- رابطه‌ی (۱۰.۵) شدنی است تنها اگر $Q_i \bar{A}_{i22} + \bar{A}_{i22} Q_i < 0$. [۵]

تبصره ۵-۳- چگونگی انتخاب Y_i به گونه‌ای که (۱۰.۵) شدنی باشد مساله‌ای پیچیده و مهم است و شدنی بودن (۱۰.۵) به Y_i مرتبط است. [۵]

تبصره ۵-۴- فرض کنید ${B_i}^{\perp}$ دارای رتبه کامل ستونی و متعامد از ماتریس B_i باشد پس ${B_i}^{\perp}S$ نیز دارای رتبه کامل ستونی و متعامد از S دلخواه غیر منحصر بفرد می‌باشد. انتخاب‌های متفاوت ${B_i}^{\perp}$ به قابل حل بودن (۱۰.۵) مرتبط است. ${B_i}^{\perp}$ می‌تواند به صورت ${B_i}^{\perp T}{B_i}^{\perp} = I_{n-p}$ و ${B_i}^T{B_i}^{\perp} = 0$ انتخاب شود. [۵]

الگوریتم زیر را برای یافتن ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان خواهیم داشت: [۵]

الگوریتم ۵-۱

گام ۱: ساخت سیستم‌های $(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, *)$, $i = 1, \dots, m$.

گام ۲: محاسبه‌ی ماتریس‌های پایدار Y_i از $(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, *)$ که پایداری $(\tilde{A}_i + \tilde{B}_i Y_i), i = 1, \dots, m$ را ایجاب می‌کند.

گام ۳: ساخت سیستم‌های $(\bar{A}_i, *, \bar{C}_i), i = 1, \dots, m$.

گام ۴: حل ماتریس نابرابری خطی (۱۰.۵) . زمانی که (۱۰.۵) شدنی است ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان K از (۱۱.۵) به‌دست می‌آید، به عبارت دیگر توقف.

تبصره ۵-۵- الگوریتم ۵-۱ حتی زمانی که بردارهای حالت x_i دارای اندازه‌های متفاوت باشند به کار می‌رود.

مثال ۵-۱- دو سیستم زمان پیوسته زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{x}_{۱} = A_{۱}x_{۱} + B_{۱}u_{۱} \\ y_{۱} = C_{۱}x_{۱} \end{cases}$$

$$A_{۱} = \begin{bmatrix} -۲.۹۰۹۵ & ۰.۶۳۵۹ & -۰.۲۳۸۴ \\ -۴.۴۰۱۴ & -۷.۰۵۳۷ & ۰.۴۸۵۵ \\ ۱۰.۲۵۷۴ & ۱۰.۹۱۶۶ & ۲.۷۱۷۵ \end{bmatrix}, B_{۱} = \begin{bmatrix} -۱.۹۳۱۴ & ۰.۹۳۶۴ \\ ۱.۰۵۳۰ & ۳.۷۴۸۱ \\ ۴.۵۵۴۱ & ۱.۵۱۴۵ \end{bmatrix}$$

$$C_{۱} = \begin{bmatrix} ۲.۹۶۴۱ & -۰.۱۷۶۳ & ۴.۸۸۰۲ \\ -۰.۴۳۷۲ & -۶.۶۸۲۷ & -۰.۱۰۹۲ \end{bmatrix}$$

که مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه- باز سیستم ۱به شرح ذیل می‌باشد:

$$\sigma(A_{۱}) = \{-۶.۴۳۲۱, -۳.۸۷۲۰, ۳.۰۵۸۳\}$$

و

$$\begin{cases} \dot{x}_{۲} = A_{۲}x_{۲} + B_{۲}u_{۲} \\ y_{۲} = C_{۲}x_{۲} \end{cases}$$

$$A_{۲} = \begin{bmatrix} -۳.۲۱۶۹ & -۷.۱۰۴۰ & -۰.۹۹۷۹ & ۳.۸۸۴۲ \\ ۴.۰۷۹۱ & -۷.۴۴۸۹ & -۵.۴۵۶۳ & -۵.۰۵۳۱ \\ ۰.۷۷۹۹ & ۱.۶۱۸۰ & ۱.۰۷۴۳ & -۰.۰۷۱۴ \\ -۷.۱۵۶۰ & -۳.۶۹۰۵ & -۱.۹۶۵۹ & -۵.۰۸۴۳ \end{bmatrix}$$

$$B_{۲} = \begin{bmatrix} ۳.۶۲۲۳ & ۳.۷۳۷۵ \\ -۳.۷۵۲۹ & ۲.۴۸۵۰ \\ -۰.۱۷۳۱ & -۵.۸۲۶۹ \\ ۱.۸۱۰۷ & ۵.۱۵۱۱ \end{bmatrix}$$

$$C_{۲} = \begin{bmatrix} -۱.۲۱۱۶ & ۱.۴۸۷۲ & ۱.۸۴۷۲ & -۰.۲۸۳۵ \\ ۱.۳۷۴۱ & -۰.۲۱۲۸ & -۰.۳۸۴۹ & ۳.۴۱۸۸ \end{bmatrix}$$

که مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه- باز سیستم ۲به شرح ذیل می‌باشد:

$$\sigma(A_{۲}) = \{۰.۵۸۴۲, ۱۰.۶۰۲۵ , -۲.۳۲۸۸ - ۷.۹۳۵۵\, i, -۲.۳۲۸۸ + ۷.۹۳۵۵\, i\}$$

توجه داشته باشید که این دو سیستم دارای بردارهای حالت با ابعاد متفاوتند و تمامی سیستم‌های حلقه – باز غیرپایدارند.

دو زیر ماتریس از $A_۱$ و $A_۲$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A_{۱۲۲} = \begin{bmatrix} ۲.۷۱۷۵ \end{bmatrix}$$

$$A_{۲۲۲} = \begin{bmatrix} ۱.۰۷۴۳ & -۰.۰۷۱۴ \\ -۱.۹۶۵۹ & -۵.۰۸۴۳ \end{bmatrix}$$

پس:

$$\sigma(A_{۲۲۲}) = \{۱.۰۹۷۰, -۵.۱۰۷۰\}.$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید $A_{۱۲۲}$ و $A_{۲۲۲}$ غیرپایدارند زیرا مقادیر ویژه‌ی آن‌ها دارای قسمت حقیقی مثبت می‌باشند. در این مورد، متغیر Y_i در (۸.۵) به ما در پایداری همزمان کمک می‌کند. ${B_i}^{\perp}$ را از طریق ${B_i}^{\perp T}{B_i}^{\perp} = I_{n-p}$ و ${B_i}^T{B_i}^{\perp} = ۰$ به‌دست می‌آوریم.

$${B_۲}^{\perp} = \begin{bmatrix} ۰.۴۱۲۳ & -۰.۵۸۷۵ \\ ۰.۴۹۵۵ & -۰.۲۱۲۱ \\ ۰.۷۱۵۰ & ۰.۲۰۰۱ \\ ۰.۲۷۰۶ & ۰.۷۵۴۹ \end{bmatrix} \text{و}\ {B_۱}^{\perp} = \begin{bmatrix} ۰.۸۱۶۹ \\ -۰.۳۷۹۵ \\ ۰.۴۳۴۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین سیستم‌های $(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, *)$ می‌توانند توسط (۴.۵) تعریف شوند. فرض کنید پایداری مشخص شده $(\tilde{A}_i+\tilde{B}_iY_i)$ برابر ۰.۵ باشد درنتیجه با انجام عملیات تشابهی توسط نرم افزار و به‌دست آوردن ماتریس‌های $\tilde{A}_i$ و $\tilde{B}_i$ و رابطه‌ی (۸.۵) پس‌خوردهای Y_i به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$Y_۲ = \begin{bmatrix} ۰.۱۶۲۵ & -۰.۰۰۱۹ \\ -۰.۱۹۷۹ & -۰.۰۳۷۷ \end{bmatrix} \text{و}\ Y_۱ = \begin{bmatrix} -۰.۰۰۳۵ \\ -۰.۰۲۵۵ \end{bmatrix}$$

حال با توجه به روابط (۷.۵) داریم:

$$\bar{A}_{۲۲۲} = \begin{bmatrix} ۰.۵ & -۰.۰۷۵۴ \\ ۰.۰۷۵۴ & -۰.۵ \end{bmatrix} \text{و}\ \bar{A}_{۱۲۲} = -۰.۵$$

درنتیجه:

$$\sigma(\bar{A}_{۲۲۲}) = \{-۰.۵ - ۰.۰۷۵۴i, -۰.۵ + ۰.۰۷۵۴i\}$$

همانطورکه ملاحظه می‌کنید ماتریس‌های $\bar{A}_{۱۲۲}$ و $\bar{A}_{۲۲۲}$ پایدار می‌باشند.

پس از حل ماتریس نابرابری خطی (۵.۱۰) به کمک نرم افزار، ماتریس پس‌خورد خروجی پایدار همزمان زیر به‌دست می‌آید:

$$K = \begin{bmatrix} -۰.۳۱۶۸ & ۰.۱۰۶۴ \\ ۰.۰۵۱۵ & -۰.۰۸۲۴ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه حلقه – بسته متناظر برابر

$$\sigma(A_۱+B_۱K\,C_۱) = \{-۰.۸۷۷۹ + ۳.۰۵۷۹i, -۰.۸۷۷۹ - ۳.۰۵۷۹i, -۸.۷۶۸۹\}$$

$$\sigma(A_۲+B_۲K\,C_۲) = \{-۰.۴۱۷۳ + ۷.۸۰۱۰i, -۰.۴۱۷۳ - ۷.۸۰۱۰i, -۱۱.۵۸۸۲, -۰.۲۳۷۸\}$$

می‌باشد. بنابراین K مشترک، دو سیستم (A_i, B_i, C_i) را به صورت همزمان پایدار می‌کند.

۵-۲- روشی جدید و پارامتری جهت محاسبه‌ی ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان از طریق تبدیلات تشابهی

یک مجموعه از p سیستم زمان ثابت به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = A_k x_k(t) + B_k u_k(t) \\ y_k(t) = C_k x_k(t) \end{cases} \qquad (۱۶.۵)$$

که در آن $x_k \in \Re^n$ بردار حالت، $u_k \in \Re^m$ بردار ورودی و $y_k \in \Re^r$ بردار خروجی سیستم k ام می‌باشد. که A_k و B_k و C_k ماتریس‌هایی ثابت (ناوردای زمانی) هستند که به ترتیب دارای اندازه‌های $n\times n$، $n\times m$، $r\times n$ هستند. هدف طراحی یک ماتریس کنترل‌گر پس‌خورد خروجی همزمان با اندازه‌ی $m\times r$ برای این p سیستم می‌باشد به گونه‌ای که بتواند مقادیر ویژه‌ی خاصی را به سیستم حلقه- بسته زیر اختصاص دهد.

$$\Gamma_{kc} = A_k + B_k K C_k \qquad (۱۷.۵)$$

سیستم حلقه – بسته‌ی بالا دارای قانون کنترل

$$u_k(t) = F_k x_k(t) \qquad (۱۸.۵)$$

می‌باشد که F_k ماتریس پس‌خورد حالت k امین سیستم است و مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه – بسته (۱۷.۵) در طیف از پیش تعیین شده‌ی زیر قرار دارد:

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C} / \alpha \leq real\,(s) \leq \beta, -\gamma \leq imag\,(s) \leq \gamma\} \qquad (۱۹.۵)$$

فرض کنید

$$u_k(t) = Ky_k(t) \qquad (۲۰.۵)$$

که در آن K به گونه‌ای انتخاب می‌شود که مقادیر ویژه‌ی سیستم

$$\dot{x}_k(t) = (A_k + B_k K C_k)x_k(t) = \Gamma_{kc} x_k(t) \qquad (۲۱.۵)$$

در طیف $\Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kn}\}$ قرار بگیرد.

از طرف دیگر طبق رابطه‌ی (۱۶.۵) و قانون کنترل (۱۸.۵) داریم:

$$\dot{x}_k(t) = (A_k + B_k F_k)x_k(t) = \Gamma_{kc} x_k(t) \qquad (۲۲.۵)$$

حال با مقایسه‌ی روابط (۲۱.۵) و (۲۲.۵) داریم:

$$F_k = KC_k \qquad (۲۳.۵)$$

برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان K ابتدا باید فرم همدم برداری $(\tilde{B}_k, \tilde{A}_k)$ را با انجام عملیات تشابهی بر روی زوج قابل کنترل (B_k, A_k) به‌دست آوریم. [۱۱]

همان طور که می‌دانیم ماتریس پس‌خورد حالت سیستم (۱۶.۵) به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_k = B_{k.}^{-1}\left(-G_{k.} + G_{k\lambda}\right)T_k^{-1} \quad , k = 1,2 \dots, p \qquad (۲۴.۵)$$

که در آن $B_{k.}^{-1}$، $G_{k.}$ و T_k^{-1} ماتریس‌های بلوکی هستند که ازفرم همدم برداری زیر به‌دست می‌آیند:

$$\tilde{B}_k = \begin{bmatrix} B_{k.} \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix}, \tilde{A}_k = \begin{bmatrix} G_{k.} \\ I_{n-m} \quad O_{n-m,m} \end{bmatrix} \qquad (۲۵.۵)$$

در رابطه‌ی (۲۴.۵)، $G_{k\lambda}$ یک ماتریس پارامتری $m \times n$ می‌باشد که از ماتریس $\tilde{\Gamma}_{k\lambda}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{\Gamma}_{k\lambda} = \begin{bmatrix} & G_{k\lambda} \\ I_{n-m} & O_{n-m,m} \end{bmatrix}, G_{k\lambda} = \begin{bmatrix} g_{k11} & \cdots & g_{k1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{km1} & \cdots & g_{kmn} \end{bmatrix} \qquad (۲۶.۵)$$

توجه داشته باشید که مقادیر ویژه‌ی $\bar{\Gamma}_{k\lambda}$ درون طیف مقادیر ویژه‌ی $\Lambda_k = \{ \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kn} \}$ قرار دارد.

عناصر مجهول ماتریس $G_{k\lambda}$ از یک دستگاه معادلات و نامعادلات به‌دست می‌آیند. برای به‌دست آوردن این دستگاه معادلات روابط زیر را خواهیم داشت:

با محاسبه‌ی مستقیم $P_{kn}(\lambda_k) = det(\bar{\Gamma}_{k\lambda} - \lambda I) = (-1)^n \left(\lambda^n{}_k + C_{k1}\lambda^{n-1}{}_k + \cdots + C_{k(n-1)}\lambda_k + C_{kn}\right)$

یک دستگاه معادلات غیرخطی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f_{k1}\left(g_{k11}, \dots, g_{k1n}, \dots, g_{kmn}\right) = C_{k1} \\ \vdots \\ f_{kn}\left(g_{k11}, \dots, g_{k1n}, \dots, g_{kmn}\right) = C_{kn} \end{cases} \qquad (۲۷.۵)$$

که g_{kij} عناصر ماتریس $G_{k\lambda}$ می‌باشند.

از طرف دیگر $F_k = KC_k$ می‌توان با انجام عملیات ستونی مقدماتی بر روی ماتریس C_k و تبدیل آن به ماتریس I_n ، ماتریس E_k را به‌دست آورد که یک ماتریس $n \times n$ و دارای رتبه کامل می‌باشد به گونه‌ای که $C_k E_k = \left[I_{kr}, O_{kr,n-r}\right]$. [۱۲]

بنابراین:

$$\begin{gathered} F_k E_k = B_{k.}^{-1}\left(-G_{k.} + G_{k\lambda}\right)T_k^{-1}E_k = \\ KC_kE_k = K\left[I_{kr}, O_{kr\ n-r}\right] = \left[K, O_{kr\ n-r}\right] \end{gathered} \qquad (۲۸.۵)$$

از آنجایی که به دنبال یافتن یک ماتریس پس‌خورد خروجی برای این p سیستم هستیم، r ستون اول روابط

$$B_{k.}^{-1}\left(-G_{k.} + G_{k\lambda}\right)T_k^{-1}E_k, k = 1,2 \dots, p \qquad (۲۹.۵)$$

را برابر یکدیگر قرار می‌دهیم.

برای برقراری رابطه‌ی (۲۸.۵)، $n\text{-}r$ ستون آخر این رابطه را برابر صفر قرار می‌دهیم. در پایان، $mr+m(n-r)p$ معادله و mnp مجهول (عناصر $G_{k\lambda}$) خواهیم داشت. توسط معادلات (۲۷.۵) می‌توان مقادیر ویژه‌ی خاصی را به سیستم (۱۶.۵) تخصیص داد. پس برای پایداری سیستم می‌بایست با توجه به طیف (۱۹.۵) محدودیت‌های زیر را در نظرگرفت: [۱۹]

$$\begin{cases} f_{k1}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) - C_{1max} \le 0 \\ f_{k2}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{km}\right) - C_{2max} \le 0 \\ \vdots \\ f_{kn}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) - C_{nmax} \le 0 \\ -f_{k1}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) + C_{1min} \le 0 \\ \vdots \\ -f_{kn}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) + C_{nmin} \le 0 \end{cases} \qquad (۳۰.۵)$$

که در آن:

$$\begin{cases} C_{1\,max} = -n(\lambda_{max}) \\ \vdots \\ C_{n\,max} = \left(-1\right)^{n}(\lambda_{max}^{n}) \\ C_{1\,min} = -n(\lambda_{min}) \\ \vdots \\ C_{n\,min} = (-1)^{n}(\lambda_{min}^{n}) \end{cases} \qquad (۳۱.۵)$$

که $\alpha = \lambda_{max}$ و $\beta = \lambda_{min}$.

حال با حل همزمان دستگاه معادلات (۲۸.۵) و نامعادلات به‌دست آمده‌ی (۳۰.۵)، می‌توان عناصر مجهول g_{kij} را به‌دست آورد و در معادله‌ی $B_{k.}^{-1}\left(-G_{k.} + G_{k\lambda}\right)T_{k}^{-1}E_{k}$ قرار داد، r ستون اول این معادله‌ی به‌دست آمده، همان ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان این p سیستم می‌باشد.

برای فهم بهتر این روش، ۲ مثال در ذیل آمده است که مثال اول اثر بخشی این روش را نشان می‌دهد و مثال دوم، همان مثال ارائه شده در بخش قبل می باشد که برای مقایسه‌ی این دو روش ارائه شده است.

مثال ۵-۲- دو سیستم قابل کنترل زیر را در نظر بگیرید. هدف به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان برای این دو سیستم می‌باشد.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -4 \\ 4 & -21 & -18 \\ -32 & -4 & 34.5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -43 & 24 & -4 \\ -98 & 33 & 20 \\ 49 & 49 & -94 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} -4 & -8 & 12 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

حال با انجام عملیات تشابهی، فرم همدم برداری این دو سیستم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} -25.2 & 221.62 & 124.06 \\ 0 & 34.7 & 56.1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{10}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3.6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3333 & 0.0667 & -0.5167 \\ 0.25 & 0.05 & -0.15 \\ -0.0833 & -0.0167 & -0.0333 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} -285 & -1414 & -52674 \\ 0 & 181 & 6740 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{20}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^{-1} = \begin{bmatrix} -28 & 10 & 3 \\ -125 & 54 & 8 \\ 3.5 & -1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

با انجام عملیات ستونی مقدماتی بر روی ماتریس‌های C_1 و C_2، ماتریس‌های E_1 و E_2 به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & -1 \\ -0.25 & -0.125 & 0.875 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

قرار می‌دهیم:

$$G_{1\lambda} = \begin{bmatrix} g_{111} & g_{112} & g_{113} \\ g_{121} & g_{122} & g_{123} \end{bmatrix},\ G_{2\lambda} = \begin{bmatrix} g_{211} & g_{212} & g_{213} \\ g_{221} & g_{222} & g_{223} \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس‌های به‌دست آمده‌ی بالا و جایگذاری آن‌ها در رابطه‌ی

$$B_{10}^{-1}\left(-G_{10} + G_{1\lambda}\right)T_1^{-1}E_1 = B_{20}^{-1}\left(-G_{20} + G_{2\lambda}\right)T_2^{-1}E_2$$

معادلات زیر به‌دست می‌آیند به گونه‌ای که ۴ معادله‌ی اول از مساوی قرار دادن عناصر ۲ ستون اول رابطه‌ی بالا با یکدیگر و ۴ معادله‌ی دوم از مساوی قرار دادن عناصر ستون آخر رابطه‌ی بالا با صفر به‌دست آمده است.

$$0.0667g_{111} + 0.05g_{112} - 0.0167g_{113} - 0.2401g_{121} - 0.18\,g_{122} + 0.0601\,g_{123}$$
$$-1.0417g_{211} - 0.9444\,g_{212} - 0.1389\,g_{213} - 1.7940\,g_{221} - 1.6264g_{222}$$
$$-0.2392g_{223} + 15.4296 = 0$$

$$0.7499g_{111} + 0.05g_{112} - 0.0999g_{113} - 2.6996g_{121} - 0.18g_{122} + 0.3596\,g_{123}$$
$$-0.8333g_{211} - 0.8403g_{212} - 0.1181g_{213} - 1.4351g_{221} - 1.4472g_{222}$$
$$-0.2034g_{223} + 22.4065 = 0$$

$$0.0667g_{121} + 0.05g_{122} - 0.0167g_{123} - 1.0417g_{221} - 0.9444g_{222}$$
$$-0.1389g_{223} + 6.4115 = 0$$

$$0.7499g_{121} + 0.05\,g_{122} - 0.0999\,g_{123} - 0.8333\,g_{221} - 0.8403\,g_{222}$$
$$-0.1181g_{223} + 9.79 = 0$$

$$-۲.۸۳۳۱g_{۱۱۱} - ۰.۳۵g_{۱۱۲} + ۰.۲۸۳۱\,g_{۱۱۳} + ۱۰.۱۹۹۲g_{۱۲۱} + ۱.۲۶\,g_{۱۲۲} - ۱.۰۱۹۲\,g_{۱۲۳}$$

$$-۱۵.۴۹۵۶ = ۰$$

$$-۴.۱۸۰۶g_{۲۱۱} - ۳.۷۴۳۱\,g_{۲۱۲} - ۰.۵۴۸۶\,g_{۲۱۳} - ۷.۱۹۹۸\,g_{۲۲۱} - ۶.۴۴۶۴\,g_{۲۲۲}$$

$$-۰.۹۴۴۸g_{۲۲۳} + ۸۰.۵۱۶۵ = ۰$$

$$-۲.۸۳۳۱g_{۱۲۱} - ۰.۳۵\,g_{۱۲۲} + ۰.۲۸۳۱\,g_{۱۲۳} - ۳.۷۳۶۹ = ۰$$

$$-۴.۱۸۰۶g_{۲۲۱} - ۳.۷۴۳۱\,g_{۲۲۲} - ۰.۵۴۸۶g_{۲۲۳} + ۲۸.۴۰۱۶ = ۰$$

طیف مقادیر ویژه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C} / -۲۵ \le real\,(s) \le -۰.۰۹, -۳۱ \le imag(s) \le ۳۱\}$$

حال با توجه به این طیف، محدودیت‌های زیر را خواهیم داشت:

$$-g_{۱۱۱} - g_{۱۲۲} - ۷۵ \le ۰$$

$$g_{۱۱۱}g_{۱۲۲} - g_{۱۱۲}g_{۱۲۱} - g_{۱۱۳} - ۶۲۵ \le ۰$$

$$g_{۱۱۳}g_{۱۲۲} - g_{۱۱۲}g_{۱۲۳} - ۱۵۶۲۵ \le ۰$$

$$g_{۱۱۱} + g_{۱۲۲} + ۰.۲۷ \le ۰$$

$$g_{۱۱۲}g_{۱۲۱} + g_{۱۱۳} - g_{۱۱۱}g_{۱۲۲} + ۰.۰۰۸۱ \le ۰$$

$$g_{۱۱۲}g_{۱۲۳} - g_{۱۱۳}g_{۱۲۲} + ۰.۰۰۰۷۲۹ \le ۰$$

$$-g_{۲۱۱} - g_{۲۲۲} - ۷۵ \le ۰$$

$$g_{۲۱۱}g_{۲۲۲} - g_{۲۱۲}g_{۲۲۱} - g_{۲۱۳} - ۶۲۵ \le ۰$$

$$g_{۲۱۳}g_{۲۲۲} - g_{۲۱۲}g_{۲۲۳} - ۱۵۶۲۵ \le ۰$$

$$g_{۲۱۱} + g_{۲۲۲} + ۰.۲۷ \le ۰$$

$$g_{۲۱۲}g_{۲۲۱} + g_{۲۱۳} - g_{۲۱۱}g_{۲۲۲} + ۰.۰۰۸۱ \le ۰$$

$$g_{۲۱۲}g_{۲۲۳} - g_{۲۱۳}g_{۲۲۲} + ۰.۰۰۰۷۲۹ \le ۰$$

با حل دستگاه معادلات و نامعادلات بالا و حل همزمان آن‌ها توسط نرم افزار *Lingo*، مجهولات مساله به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$g_{111} = -8.8613 \qquad g_{112} = 0 \qquad g_{113} = -0.000011$$

$$g_{121} = 0 \qquad g_{222} = -66.1386 \qquad g_{223} = -72.1816$$

$$g_{211} = -67.2147 \qquad g_{212} = -826.6973 \qquad g_{213} = -75458.90$$

$$g_{221} = -91.1893 \qquad g_{222} = -7.7852 \qquad g_{223} = -710.6169$$

باجایگذاری ماتریس‌ها و مجهولات به‌دست آمده در رابطه‌ی (۲۸.۵) داریم:

$$\left[K, O_{2,1}\right] = B_{10}^{-1}\left(-G_{10} + G_{1\lambda}\right)T_1^{-1}E_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3.6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 25.2 & -221.62 & -124.06 \\ 0 & -34.7 & -56.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8.8613 & 0 & -0.000011 \\ 0 & -66.1386 & -72.1816 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1.3333 & 0.0667 & -0.5167 \\ 0.25 & 0.05 & -0.15 \\ -0.0833 & -0.0167 & -0.0333 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6670 & -12.7713 & 0 \\ -2.8996 & 7.7734 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان برای این دو سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$K = \begin{bmatrix} 2.6670 & -12.7713 \\ -2.8996 & 7.7734 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه – بسته با پس‌خورد خروجی به‌دست آمده به شرح ذیل می‌باشد:

$$v_1 = \{-67.4129, -10.5553, -6.2521\}$$

$$v_2 = \{-0.0698, -0.0003 - 1.1772i, -0.0003 + 1.1772i\}$$

مثال ۵-۳- دو سیستم کنترل‌پذیر زیر را با اندازه‌های مختلف در نظر بگیرید. هدف به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان برای این دو سیستم می‌باشد.

$$A_{۱}=\begin{bmatrix}-۲.۹۰۹۵ & ۰.۶۳۵۹ & -۰.۲۳۸۴\\ -۴.۴۰۱۴ & -۷.۰۵۳۷ & ۰.۴۸۵۵\\ ۱۰.۲۵۷۴ & ۱۰.۹۱۶۶ & ۲.۷۱۷۵\end{bmatrix},B_{۱}=\begin{bmatrix}-۱.۹۳۱۴ & ۰.۹۳۶۴\\ ۱.۰۵۳۰ & ۳.۷۴۸۱\\ ۴.۵۵۴۱ & ۱.۵۱۴۵\end{bmatrix}$$

$$C_{۱}=\begin{bmatrix}۲.۹۶۴۱ & -۰.۱۷۶۳ & ۴.۸۸۰۲\\ -۰.۴۳۷۲ & -۶.۶۸۲۷ & -۰.۱۰۹۲\end{bmatrix}$$

$$A_{۲}=\begin{bmatrix}-۳.۲۱۶۹ & -۷.۱۰۴۰ & -۰.۹۹۷۹ & ۳.۸۸۴۲\\ ۴.۰۷۹۱ & -۷.۴۴۸۹ & -۵.۴۵۶۳ & -۵.۰۵۳۱\\ ۰.۷۷۹۹ & ۱.۶۱۸۰ & ۱.۰۷۴۳ & -۰.۰۷۱۴\\ -۷.۱۵۶۰ & -۳.۶۹۰۵ & -۱.۹۶۵۹ & -۵.۰۸۴۳\end{bmatrix}$$

$$B_{۲}=\begin{bmatrix}۳.۶۲۲۳ & ۳.۷۳۷۵\\ -۳.۷۵۲۹ & ۲.۴۸۵۰\\ -۰.۱۷۳۱ & -۵.۸۲۶۹\\ ۱.۸۱۰۷ & ۵.۱۵۱۱\end{bmatrix}$$

$$C_{۲}=\begin{bmatrix}-۱.۲۱۱۶ & ۱.۴۸۷۲ & ۱.۸۴۷۲ & -۰.۲۸۳۵\\ ۱.۳۷۴۱ & -۰.۲۱۲۸ & -۰.۳۸۴۹ & ۳.۴۱۸۸\end{bmatrix}$$

حال با انجام عملیات تشابهی، فرم همدم برداری این دو سیستم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{A}_{۱}=\begin{bmatrix}۱۰.۲۴۱۲ & -۱۱۵.۰۸۳۲ & -۱۷۲.۴۷۷۶\\ ۰ & -۱۷.۴۸۶۹ & -۲۶.۸۶۹۸\\ ۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix},B_{۱۰}^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & -۷.۲۳۱۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$T_{۱}^{-۱}=\begin{bmatrix}۰.۷۸۶۲ & ۱.۶۶۵۰ & ۰.۱۶۸۰\\ -۰.۱۱۸۳ & ۰.۳۴۹۳ & -۰.۱۳۰۹\\ ۰.۱۷۱۴ & -۰.۰۷۹۶ & ۰.۰۹۱۱\end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{۲}=\begin{bmatrix}-۷.۰۶۱۷ & -۰.۰۹۸۰ & -۵۵.۴۳۲۳ & -۶۴.۱۰۶۳\\ ۳.۷۴۱۴ & -۷.۶۱۴۱ & -۵.۹۹۸۱ & ۰.۷۰۶۲\\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$B_{۲.}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$T_{۲}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰.۰۲۸۷ & -۰.۲۴۰۵ & -۰.۰۹۵۴ & -۰.۰۱۲۷ \\ ۰.۰۸۶۸ & ۰.۱۵۳۲ & ۰.۰۸۳۶ & ۰.۱۵۱۸ \\ ۰.۰۱۹۸ & ۰.۰۱۸۰ & ۰.۰۱۹۹ & -۰.۰۰۰۵ \\ -۰.۰۰۳۹ & -۰.۰۱۲۴ & -۰.۰۲۵۷ & -۰.۰۲۰۲ \end{bmatrix}$$

با انجام عملیات ستونی مقدماتی بر روی ماتریس‌های $C_{۱}$ و $C_{۲}$، ماتریس‌های $E_{۱}$ و $E_{۲}$ به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$E_{۱} = \begin{bmatrix} ۰.۳۳۶۱ & ۰ & -۱.۶۴۰۲ \\ -۰.۰۲۲ & -۰.۱۴۹۶ & ۰.۰۹۱۱ \\ ۰ & -۰.۰۰۵۴ & ۰.۹۹۹۵ \end{bmatrix}$$

$$E_{۲} = \begin{bmatrix} ۰.۱۱۹۲ & ۰ & -۰.۲۲۰۲ & ۰.۰۳۳۸ \\ ۰.۷۶۹۵ & ۱۰.۲۹۸۷ & ۲.۵۴۲۶ & -۳۴.۹۹۱۰ \\ ۰ & -۸.۲۹۱۵ & -۲.۱۹۱۴ & ۲۸.۳۴۷۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

قرار می‌دهیم:

$$G_{۱\lambda} = \begin{bmatrix} g_{۱۱۱} & g_{۱۱۲} & g_{۱۱۳} \\ g_{۱۲۱} & g_{۱۲۲} & g_{۱۲۳} \end{bmatrix}, G_{۲\lambda} = \begin{bmatrix} g_{۲۱۱} & g_{۲۱۲} & g_{۲۱۳} \\ g_{۲۲۱} & g_{۲۲۲} & g_{۲۲۳} \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس‌های به‌دست آمده‌ی بالا و جایگذاری آن‌ها در رابطه‌ی

$$B_{۱.}^{-۱}\left(-G_{۱.} + G_{۱\lambda}\right)T_{۱}^{-۱}E_{۱} = B_{۲.}^{-۱}\left(-G_{۲.} + G_{۲\lambda}\right)T_{۲}^{-۱}E_{۲}$$

معادلات زیر به‌دست می‌آیند به گونه‌ای که ۴ معادله‌ی اول از مساوی قرار دادن عناصر ۲ ستون اول رابطه‌ی بالا با یکدیگر و ۴ معادله ی دوم از مساوی قرار دادن عناصر ستون آخر رابطه‌ی بالا با صفر به‌دست آمده است.

$$۰.۲۲۷۶\,g_{۱۱۱} - ۰.۰۴۷۴g_{۱۱۲} + ۰.۰۵۹۴\,g_{۱۱۳} - ۱.۶۴۵۸g_{۱۲۱} + ۰.۳۴۲۸g_{۱۲۲}$$
$$-۰.۴۲۹۵g_{۱۲۳} + ۰.۱۸۱۶g_{۲۱۱} - ۰.۱۲۸۲g_{۲۱۲} - ۰.۰۱۶۲g_{۲۱۳} + ۰.۰۱g_{۲۱۴}$$
$$-۲.۰۷۵۳ = ۰$$

$$-۰.۲۵g_{۱۱۱} - ۰.۰۵۱۵g_{۱۱۲} + ۰.۰۱۱۴g_{۱۱۳} + ۱.۸۰۷۸g_{۱۲۱} + ۰.۳۷۲۴g_{۱۲۲}$$

$$-۰.۰۸۲۴g_{۱۲۳} + ۱.۶۸۵۸g_{۲۱۱} - ۰.۸۸۴۶g_{۲۱۲} - ۰.۰۲۰۴\ g_{۲۱۳} - ۰.۰۸۵۴g_{۲۱۴}$$

$$+۸.۱۰۹۲ = ۰$$

$$۰.۲۲۷۶\, g_{۱۲۱} - ۰.۰۴۷۴\ g_{۱۲۲} + ۰.۰۵۹۴g_{۱۲۳} + ۰.۱۸۱۶g_{۲۲۱} - ۰.۱۲۸۲\ g_{۲۲۲}$$

$$-۰.۰۱۶۲g_{۲۲۳} + ۰.۰۱g_{۲۲۴} - ۰.۹۹۲۶ = ۰$$

$$-۰.۲۵\, g_{۱۲۱} - ۰.۰۵۱۵g_{۱۲۲} + ۰.۰۱۱۴g_{۱۲۳} + ۱.۶۸۵۸g_{۲۲۱} - ۰.۸۸۴۶\ \ g_{۲۲۲}$$

$$-۰.۰۲۰۴\, g_{۲۲۳} - ۰.۰۸۵۴g_{۲۲۴} - ۱۳.۶۹۹۱ = ۰$$

$$-۰.۹۶۹۹\, g_{۱۱۱} + ۰.۰۹۵g_{۱۱۲} - ۰.۱۹۷۳g_{۱۱۳} + ۷.۰۱۳۴g_{۱۲۱} - ۰.۶۸۷۰g_{۱۲۲} +$$

$$۱.۴۲۶۷g_{۱۲۳} + ۱۳.۱۵۸۳ = ۰$$

$$-۰.۹۶۹۹\, g_{۲۲۱} + ۰.۰۹۵۰g_{۲۲۲} - ۰.۱۹۷۳\, g_{۲۲۳} - ۳.۶۴۰۱ = ۰$$

$$-۰.۴۰۸۸\, g_{۲۱۱} + ۰.۱۸۷۲\, g_{۲۱۲} - ۰.۰۰۲۲g_{۲۱۳} + ۰.۰۲۵۶g_{۲۱۴} - ۱.۳۴۹۴ = ۰$$

$$-۰.۴۰۸۸g_{۲۲۱} + ۰.۱۸۷۲\, g_{۲۲۲} - ۰.۰۰۲۲g_{۲۲۳} + ۰.۰۲۵۶g_{۲۲۴} + ۲.۹۲۳۶ = ۰$$

طیف مقادیر ویژه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Omega = \{s\in ₵/-۲۵ \ \le\ real\ (s)\ \le -۰.۰۹, -۳۱ \le imag(s) \le ۳۱\}$$

حال با توجه به طیف در نظر گرفته شده، محدودیت‌های زیر را خواهیم داشت:

$$-g_{۱۱۱} - g_{۱۲۲} - ۷۵ \le ۰$$

$$g_{۱۱۱}g_{۱۲۲} - g_{۱۱۲}g_{۱۲۱} - g_{۱۱۳} - ۶۲۵ \le ۰$$

$$g_{۱۱۳}g_{۱۲۲} - g_{۱۱۲}g_{۱۲۳} - ۱۵۶۲۵ \le ۰$$

$$g_{۱۱۱} + g_{۱۲۲} + ۰.۲۷ \le ۰$$

$$g_{۱۱۲}g_{۱۲۱} + g_{۱۱۳} - g_{۱۱۱}g_{۱۲۲} + ۰.۰۰۸۱ \le ۰$$

$$g_{۱۱۲}g_{۱۲۳} - g_{۱۱۳}g_{۱۲۲} + ۰.۰۰۰۷۲۹ \le ۰$$

$$-g_{۲۱۱} - g_{۲۲۲} - ۱۰۰ \le ۰$$

$$g_{۲۱۱}g_{۲۲۲} - g_{۲۱۲}g_{۲۲۱} - g_{۲۱۳} - g_{۲۱۴} - ۶۲۵ \le ۰$$

$$g_{۲۱۳}g_{۲۲۲} - g_{۲۱۲}g_{۲۲۳} + g_{۲۱۱}g_{۲۲۴} - g_{۲۱۴}g_{۲۲۱} - ۱۵۶۲۵ \le ۰$$

$$g_{۲۱۳}g_{۲۲۴} - g_{۲۱۴}g_{۲۲۳} - ۳۹۰۶۲۵ \leq ۰$$

$$g_{۲۱۱} + g_{۲۲۲} + ۰.۳۶ \leq ۰$$

$$g_{۲۱۲}g_{۲۲۱} + g_{۲۱۳} + g_{۲۱۴} - g_{۲۱۱}g_{۲۲۲} + ۰.۰۰۸۱ \leq ۰$$

$$g_{۲۱۲}g_{۲۲۳} + g_{۲۱۴}g_{۲۲۱} - g_{۲۱۳}g_{۲۲۲} - g_{۲۱۱}g_{۲۲۴} + ۰.۰۰۰۷۲۹ \leq ۰$$

$$g_{۲۱۴}g_{۲۲۳} - g_{۲۱۳}g_{۲۲۴} + ۰.۰۰۰۰۶۵۶۱۰ \leq ۰$$

با حل دستگاه معادلات و نامعادلات بالا توسط نرم افزار *Lingo* مجهولات مساله به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$g_{۱۱۱} = ۰ \qquad g_{۱۱۲} = ۰ \qquad g_{۱۱۳} = -۶۶.۵۴۷۴۳$$

$$g_{۱۲۱} = -۰.۱۱۹۴۸۹۰ \qquad g_{۲۲۲} = -۹.۰۴۷۱۱۳ \qquad g_{۲۲۳} = -۲۲.۱۹۵۳۳$$

$$g_{۲۱۱} = -۳.۳۱۷۳۵۷ \qquad g_{۲۱۲} = ۰ \qquad g_{۲۱۳} = ۰ \qquad g_{۲۱۴} = ۰$$

$$g_{۲۲۱} = ۰ \qquad g_{۲۲۲} = -۱۴.۹۶۶۲۶ \qquad g_{۲۲۳} = ۰ \qquad g_{۲۲۴} = -۲.۷۰۳۷۵۶$$

با جایگذاری ماتریس‌ها و مجهولات به‌دست آمده در رابطه‌ی (۲۸.۵) داریم:

$$\left[K\,,O_{۲,۱}\right] = B_{۱۰}^{-۱}\left(-G_{۱۰} + G_{۱\lambda}\right)T_{۱}^{-۱}E_{۱} =$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۷.۲۳۱۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -۱۰.۲۴۱۲ & ۱۱۵.۰۸۳۲ & ۱۷۲.۴۷۷۶ \\ ۰ & ۱۷.۴۸۶۹ & ۲۶.۸۶۹۸ \end{bmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۶۶.۵۴۷۴۳ \\ -۰.۱۱۹۴۸۹۰ & -۹.۰۴۷۱۱۳ & -۲۲.۱۹۵۳۳ \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} ۰.۷۸۶۲ & ۱.۶۶۵۰ & ۰.۱۶۸۰ \\ -۰.۱۱۸۳ & ۰.۳۴۹۳ & -۰.۱۳۰۹ \\ ۰.۱۷۱۴ & -۰.۰۷۹۶ & ۰.۰۹۱۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰.۳۳۶۱ & ۰ & -۱.۶۴۰۲ \\ -۰.۰۲۲ & -۰.۱۴۹۶ & ۰.۰۹۱۱ \\ ۰ & -۰.۰۰۵۴ & ۰.۹۹۹۵ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۰.۱۴۲۰ & ۰.۳۸۲۸ & ۰ \\ -۰.۱۴۹۶ & -۰.۳۵۱۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس پس‌خورد خروجی همزمان برای این دو سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$K = \begin{bmatrix} -۰.۱۴۲۰ & ۰.۳۸۲۸ \\ -۰.۱۴۹۶ & -۰.۳۵۱۵ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه – بسته با پس‌خورد خروجی به‌دست آمده به شرح ذیل می‌باشد:

$$v_۱ = \{-۸.۹۵۲۴, -۰.۰۰۱ - ۸.۱۳۸۶i, -۰.۰۰۱ + ۸.۱۳۸۶i\}$$

$$v_۲ = \{-۲۱.۱۱۸۷, -۰.۴۹۲۰, -۰.۲۱۸۳ - ۷.۳۸۶۰i, -۰.۲۱۸۳ + ۷.۳۸۶۰i\}$$

از مقایسه‌ی روش ۱.۵ با روش ۲.۵ توسط این مثال ارائه شده، این نتیجه به‌دست می‌آید که در روش تغییرات مختصات با پارامترهای آزاد، طیفی در نظر گرفته نمی‌شود و همه چیز بستگی به انتخاب Y_i دارد که انتخاب این ماتریس بسیار دشوار می‌باشد و وجود این ماتریس، شدنی بودن ماتریس نابرابری خطی را تضمین می‌کند که حل ماتریس نابرابری خطی نیز مساله‌ای پیچیده می‌باشد ولی در روشی که در بخش دوم ارائه شد طیفی از پیش تعیین شده و دلخواه در نظر گرفته می‌شود و با توجه به این طیف و پارامتری بودن مساله می‌توان ماتریس پس‌خورد خروجی با مینیمم نرم را به‌دست آورد.

فصل ۶

روشی جدید برای کنترل همزمان سیستم‌های تاخیری گسسته زمانی خطی با پس‌خورد حالت

فصل ۶- روشی جدید برای کنترل همزمان سیستم‌های تاخیری گسسته زمانی خطی با پس‌خورد حالت

۶-۱- مقدمه

معمولا تاخیر زمان[1] در بسیاری از سیستم‌های دینامیکی در مسیری بین ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم اتفاق می‌افتد. محققان بسیاری از جمله کورزویل[2] ، کوبییک[3] بر روی مساله‌ی کنترل سیستم‌های تاخیر زمان کار کرده‌اند.

سیستم‌های چند متغیره تاخیری گسسته زمانی[4] خطی به سه دسته تقسیم می‌شوند:

دسته‌ی اول شامل سیستم‌هایی است که در آن تمامی ورودی ها دارای مقدار یکسان یا منفاوتی تاخیر می‌باشند که این به سیستم‌های تاخیر ورودی موسوم است.

دسته‌ی دوم شامل سیستم‌هایی است که در آن حالت‌ها دارای مقدار یکسان یا منفاوتی تاخیر می‌باشند که این به سیستم‌های تاخیر حالت موسوم است.

دسته‌ی سوم شامل سیستم‌هایی است که در آن حالت ها و ورودی ها دارای مقدار یکسان یا منفاوتی تاخیر می‌باشند. که در اینجا با سیستم‌های تاخیر حالت سر و کار داریم.

۶-۲- محاسبه ماتریس پس خورد حالت همزمان برای سیستم‌های تاخیری

یک مجموعه از p سیستم زمان گسسته با حالت تاخیر زمان را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$x_i(k+1) = A_i . x_i(k) + \sum_{j=1}^{r} A_{ij}\, x_i(k-j) + B_i u_i(k) , \qquad i = 1,..,p \qquad (1.6)$$

[1] Time - delay
[2] Kurzweil
[3] koepcke
[4] discrete- time

که در آن $x_i \in \Re^n$، $u_i \in \Re^m$ و $A_{i.}$ و A_{ij} ماتریس‌های $n\times n$ ثابت و B_i یک ماتریس ثابت $n\times m$ می‌باشد. [۱] هدف به‌دست آوردن یک ماتریس پس‌خورد همزمان F برای کنترل همزمان این p سیستم می‌باشد به گونه‌ای که در حداقل زمان به مرحله پایداری صفر برسد.

بردار افزوده‌ی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$x_{i_1}(k+1) = \begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ x_i(k) \end{bmatrix} \qquad (۲.۶)$$

پس رابطه‌ی (۲.۶) به فرم غیرتاخیری $x_{i_1}\left(k+1\right) = \bar{A}_i x_{i_1}(k) + \bar{B}_i u_i(k)$ بیان می‌شود.

که در آن $\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_{i.} & A_{i1} \\ I_{in} & O_i \end{bmatrix}$ یک ماتریس $2n\times 2n$ و $\bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ O_i \end{bmatrix}$ یک ماتریس $2n\times m$ می‌باشد.

حال برای به‌دست آوردن پس‌خورد حالت همزمان این p سیستم می‌بایست $\bar{A}_i$ و $\bar{B}_i$ را برای هر سیستم به صورت بالا در نظر گرفت و فرم همدم برداری زوج ($\bar{A}_i$ و $\bar{B}_i$) را به‌دست آورد و در رابطه‌ی زیر قرار داد:

$$F = B_{k.}^{-1}\left(-G_{k.} + G_{k\lambda}\right)T_k^{-1}, k = 1,2,\dots,p \qquad (۳.۶)$$

که $B_{k.}$، $G_{k.}$ و T_k^{-1} به ترتیب ماتریس‌هایی با اندازه های $r\times n$، $n\times m$ و $n\times n$ هستند و فرم همدم برداری به صورت [T_k^{-1} و $\tilde{A}_k$ و $\tilde{B}_k$] می‌باشد که:

$$\tilde{A}_k = \begin{bmatrix} & G_{k.} & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m} \end{bmatrix}, \tilde{B}_k = \begin{bmatrix} B_{k.} \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix} \qquad (۴.۶)$$

و $G_{k\lambda}$ در آن یک ماتریس پارامتری $m\times n$ است و از m سطر اول ماتریس $\tilde{\Gamma}_{k\lambda}$ به‌دست می‌آید به صورت زیر:

$$\tilde{\Gamma}_{k\lambda} = \begin{bmatrix} & G_{k\lambda} & \\ I_{n-m} & \text{و} & O_{n-m,m} \end{bmatrix}, G_{k\lambda} = \begin{bmatrix} g_{k11} & \cdots & g_{k1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{km1} & \cdots & g_{kmn} \end{bmatrix} \qquad (۵.۶)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳.۶)، p معادله به‌دست می‌آید که با مساوی قرار دادن آن‌ها با یکدیگر معادلات زیر به‌دست می‌آیند:

برای مثال اگر $k = i\,,j$ باشد: $B_{i.}^{-1}\left(-G_{i.} + G_{i\lambda}\right)T_i^{-1} = B_{j.}^{-1}(-G_{j.} + G_{j\lambda})T_j^{-1}$

که این معادله به صورت $(-G_{i.} + G_{i\lambda}) = B_{i.}B_{j.}^{-1}(-G_{j.} + G_{j\lambda})T_j^{-1}T_i$ ساده می‌شود.

در نتیجه:

$$G_{i\lambda} - B_{i.}B_{j.}^{-1}G_{j\lambda}T_j^{-1}T_i = G_{i.} - B_{i.}B_{j.}^{-1}G_{j.}T_j^{-1}T_i \qquad (۶.۶)$$

سرانجام معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$G_{i\lambda} - B_{i.}B_{j.}^{-1}G_{j\lambda}T_j^{-1}T_i - G_{i.} + B_{i.}B_{j.}^{-1}G_{j.}T_j^{-1}T_i = ۰ \qquad (۷.۶)$$

برای تضمین پایداری سیستم می‌بایست با توجه به طیف مقادیر ویژه‌ی

$$\Omega = \{s \in ₵ / \alpha \leq real\,(s) \leq \beta, \_\gamma \leq imag\,(s) \leq \gamma\} \qquad (۸.۶)$$

محدودیت‌هایی را در نظر گرفت. [۱۹]

با محاسبه‌ی مستقیم رابطه‌ی

$$\begin{aligned} det(\bar{\Gamma}_{k\lambda} - \lambda_k I) = P_{kn}(\lambda_k) = \\ (-۱)^n(\lambda_k^n + C_{k۱}\lambda_k^{n-۱} + \ldots + C_{k(n-۱)}\lambda_k + C_{kn}) \end{aligned} \qquad (۹.۶)$$

به صورت پارامتری و داشتن ضرائب چند جمله‌ای مشخصه بالا یک دستگاه معادلات غیرخطی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} f_{k۱}\left(g_{k۱۱}, \ldots, g_{k۱n}, \ldots, g_{kmn}\right) = C_{k۱} \\ \vdots \\ f_{kn}\left(g_{k۱۱}, \ldots, g_{k۱n}, \ldots, g_{kmn}\right) = C_{kn} \end{cases} \qquad (۱۰.۶)$$

که در آن g_{kij} عناصر مجهول $G_{k\lambda}$ و C_{ki} ضرائب چند جمله‌ای مشخصه‌ی (۹.۶) هستند.

معادلات (۱۰.۶) مقادیر ویژه سیستم‌های (۱.۶) را در طیفی مشخص قرار می‌دهد.

بنابراین کران بالا و کران پایین برای طرف چپ معادله (۱۰.۶) در نظر گرفته می‌شود به طوری که $C_{i\,max}$ کران‌های بالا و $C_{i\,min}, i = 1, \dots, n$ کران‌های پایین هستند به گونه‌ای که:

$$\begin{cases} C_{1\,max} = -n(\lambda_{max}) \\ \vdots \\ C_{n\,max} = (-1)^n\,(\lambda_{max}^n) \\ C_{1\,min} = -n(\lambda_{min}) \\ \vdots \\ C_{n\,min} = (-1)^n(\lambda_{min}^n) \end{cases} \qquad (۱۱.۶)$$

و در آن $\alpha = \lambda_{max}$ و $\beta = \lambda_{min}$ که α و β درطیف مقادیر ویژه‌ی Ω معرفی شدند.

پس معادلات (۱۰.۶) به نامعادلات زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} C_{1\,min} \le f_{k1}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) \le C_{1max} \\ \vdots \\ C_{n\,min} \le f_{kn}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) \le C_{n\,max} \end{cases} \qquad (۱۲.۶)$$

که این نامعادلات را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\begin{cases} f_{k1}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) - C_{1max} \le 0 \\ f_{k2}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{km}\right) - C_{2max} \le 0 \\ \vdots \\ f_{kn}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) - C_{nmax} \le 0 \\ -f_{k1}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) + C_{1min} \le 0 \\ \vdots \\ -f_{kn}\left(g_{k11}, g_{k12}, \dots, g_{k1n}, g_{k21}, \dots, g_{km1}, \dots, g_{kmn}\right) + C_{nmin} \le 0 \end{cases} \qquad (۱۳.۶)$$

که $2np$ نامعادله و mnp مجهول به‌دست می‌آید. با استفاده از دستگاه معادلات (۷.۶) و نامعادلات به دست آمده‌ی بالا و حل همزمان آن ها توسط نرم افزار *Lingo*، می‌توان عناصر $G_{k\lambda}$ را به‌دست آورد و در رابطه‌ی (۳.۶) قرار داد و ماتریس پس‌خورد حالت همزمان برای این p سیستم را به‌دست آورد.

مثال ۶-۱- سیستم‌های زمان گسسته‌ی زیر را با یک حالت ورودی در نظر بگیرید. هدف به‌دست آوردن یک ماتریس پس‌خورد ورودی همزمان برای این سیستم‌هاست به گونه‌ای که مقادیر ویژه‌ی خاصی را بتوان به آن اختصاص داد تا سیستم پایدار باقی بماند.

$$x(k+1) = A_{11}x(k) + A_{12}x(k-1) + B_1u(k)$$
$$x(k+1) = A_{21}x(k) + A_{22}x(k-1) + B_2u(k)$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

قرار می‌دهیم:

$$x_1(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$x_1(k+1) = \bar{A}_1x_1(k) + \bar{B}_1u(k)$$
$$x_1(k+1) = \bar{A}_2x_1(k) + \bar{B}_2u(k)$$

به گونه‌ای که:

$$\bar{A}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad و \quad \bar{B}_۱ = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۸ & ۶ \\ ۳ & ۴ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad و \quad \bar{B}_۲ = \begin{bmatrix} ۹ \\ ۲ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

حال با انجام عملیات تشابهی بر روی زوج های $(\bar{A}_۱,\bar{B}_۱)$ و $(\bar{A}_۲,\bar{B}_۲)$ نتایج زیر به‌دست می‌آید:

$$G_{۱۰} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۵ & ۶ \end{bmatrix} \quad و \quad B_{۱۰}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix}$$

$$T_۱^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰.۰۰۴۲ & ۰.۱۹۶۶ & ۰.۱۹۹۳ & -۰.۲۷۴۱ \\ -۰.۱۲۴۶ & ۰.۰۹۹۷ & -۰.۰۷۰۵ & ۰.۰۹۷۰ \\ ۰.۰۴۴۱ & -۰.۰۳۵۳ & -۰.۰۹۸۱ & ۰.۱۳۴۹ \\ ۰.۰۶۱۳ & -۰.۰۴۹۱ & ۰.۰۸۰۹ & ۰.۰۱۳۸ \end{bmatrix}$$

$$G_{۱\lambda} = \begin{bmatrix} g_{۱۱۱} & g_{۱۱۲} & g_{۱۱۳} & g_{۱۱۴} \end{bmatrix}$$

$$G_{۲۰} = \begin{bmatrix} ۶ & ۱۵ & ۱ & ۱۸ \end{bmatrix} \quad و \quad B_{۲۰}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix}$$

$$T_۲^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰.۰۹۱۰ & ۰.۰۹۰۷ & ۰.۰۴۰۹ & -۰.۰۴۴۶ \\ -۰.۰۰۷۴ & ۰.۰۳۳۵ & ۰.۰۰۵۵ & -۰.۰۰۶۰ \\ -۰.۰۰۱۰ & ۰.۰۰۴۵ & -۰.۰۱۸۸ & ۰.۰۲۰۶ \\ ۰.۰۰۳۴ & -۰.۰۱۵۴ & ۰.۰۳۸۴ & ۰.۰۴۹۰ \end{bmatrix}$$

$$G_{۲\lambda} = \begin{bmatrix} g_{۲۱۱} & g_{۲۱۲} & g_{۲۱۳} & g_{۲۱۴} \end{bmatrix}$$

چون هدف به‌دست آوردن یک ماتریس پس‌خورد حالت برای این دوسیستم می‌باشد پس رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$B_{۱۰}^{-۱}\left(-G_{۱۰} + G_{۱\lambda}\right)T_۱^{-۱} = B_{۲۰}^{-۱}(-G_{۲۰} + G_{۲\lambda})T_۲^{-۱}$$

حال با جایگذاری ماتریس‌های به‌دست آمده در رابطه‌ی بالا، ۴ معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$۰.۰۰۴۲g_{۱۱۱} - ۰.۱۲۴۶\,g_{۱۱۲} + ۰.۰۴۴۱\,g_{۱۱۳} + ۰.۰۶۱۳g_{۱۱۴} - ۰.۰۹۱۰g_{۲۱۱}$$

$$+۰.۰۰۷۴g_{۲۱۲} + ۰.۰۰۱۰g_{۲۱۳} - ۰.۰۰۳۴\,g_{۲۱۴} - ۰.۱۰۱۵ = ۰$$

$$۰.۱۹۶۶g_{۱۱۱} + ۰.۰۹۹۷\,g_{۱۱۲} - ۰.۰۳۵۳g_{۱۱۳} - ۰.۰۴۹۱g_{۱۱۴} - ۰.۰۹۰۷g_{۲۱۱} - ۰.۰۳۳۵g_{۲۱۲}$$

$$-\,۰.۰۰۴۵g_{۲۱۳} + ۰.۰۱۵۴\,g_{۲۱۴} + ۰.۸۵۱۹ = ۰$$

$$۰.۱۹۹۳g_{۱۱۱} - ۰.۰۷۰۵\,g_{۱۱۲} - ۰.۰۹۸۱\,g_{۱۱۳} + ۰.۰۸۰۹g_{۱۱۴} - ۰.۰۴۰۹g_{۲۱۱} - ۰.۰۰۵۵g_{۲۱۲}$$

$$+\,۰.۰۱۸۸g_{۲۱۳} - ۰.۰۳۸۴\,g_{۲۱۴} + ۰.۶۰۶۵ = ۰$$

$$-۰.۲۷۴۱g_{۱۱۱} + ۰.۰۹۷۰\,g_{۱۱۲} + ۰.۱۳۴۹\,g_{۱۱۳} + ۰.۰۱۳۸g_{۱۱۴} + ۰.۰۴۴۶g_{۲۱۱} + ۰.۰۰۶۰g_{۲۱۲}$$

$$-\,۰.۰۲۰۶g_{۲۱۳} - ۰.۰۴۹۰\,g_{۲۱۴} + ۰.۳۳۵۹ = ۰$$

طیف مقادیر ویژه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C} / -۲۰ \le real(s) \le -۰.۱, -۱۸ \le imag(s) \le ۱۸\}$$

حال با توجه به این طیف، محدودیت‌های زیر را خواهیم داشت:

$$-g_{۱۱۲} - ۴۰۰ \le ۰ \quad \text{و} \quad -g_{۱۱۱} - ۸۰ \le ۰$$

$$-g_{۱۱۴} - ۱۶۰۰۰۰ \le ۰ \quad \text{و} \quad -g_{۱۱۳} - ۸۰۰۰ \le ۰$$

$$-g_{۲۱۲} - ۴۰۰ \le ۰ \quad \text{و} \quad -g_{۲۱۱} - ۸۰ \le ۰$$

$$-g_{۲۱۴} - ۱۶۰۰۰۰ \le ۰ \quad \text{و} \quad -g_{۲۱۳} - ۸۰۰۰ \le ۰$$

با حل دستگاه معادلات و نامعادلات بالا و حل همزمان آن‌ها توسط نرم افزار *Lingo* مجهولات مساله به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$g_{۱۱۱} = -۴.۳۵۳۸ \qquad g_{۱۱۲} = -۶.۹۷۹۹ \qquad g_{۱۱۳} = -۵.۲۷۱۱ \qquad g_{۱۱۴} = -۹.۳۷۹۲$$

$$g_{۲۱۱} = -۰.۵۵۳۴ \qquad g_{۲۱۲} = -۰.۰۱ \qquad g_{۲۱۳} = -۰.۶۳۱۳ \qquad g_{۲۱۴} = -۰.۰۰۰۱$$

با جایگذاری ماتریس‌ها و مجهولات به‌دست آمده در رابطه‌ی (۳.۶) داریم:

$$B_{۱۰}^{-۱}\left(-G_{۱۰}+G_{۱\lambda}\right)T_{۱}^{-۱} =$$

$$\begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} ۴.۳۵۳۸ & ۶.۹۷۹۹ & ۵.۲۷۱۱ & ۹.۳۷۹۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} ۰.۰۰۴۲ & ۰.۱۹۶۶ & ۰.۱۹۹۳ & -۰.۲۷۴۱ \\ -۰.۱۲۴۶ & ۰.۰۹۹۷ & -۰.۰۷۰۵ & ۰.۰۹۷۰ \\ ۰.۰۴۴۱ & -۰.۰۳۵۳ & -۰.۰۹۸۱ & ۰.۱۳۴۹ \\ ۰.۰۶۱۳ & -۰.۰۴۹۱ & ۰.۰۸۰۹ & ۰.۰۱۳۸ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۰.۵ & -۰.۹ & -۱.۰۲ & -۰.۵۳ \end{bmatrix}$$

پس ماتریس پس‌خورد ورودی همزمان این دو سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$F = \begin{bmatrix} -۰.۵ & -۰.۹ & -۱.۰۲ & -۰.۵۳ \end{bmatrix}$$

و مقادیر ویژه‌ی این سیستم حلقه – بسته با پس‌خورد ورودی به‌دست آمده به شرح ذیل می‌باشد:

$$v_{۱} = \{-۰.۰۵۲۰-۱.۷۰۰۸i, -۰.۰۵۲۰+۱.۷۰۰۸i, -۰.۰۹۸۰-۰.۱۲۰۷i, -۰.۰۹۸۰+۰.۱۲۰۷i\}$$

$$v_{۲} = \{-۰.۰۰۰۱-۱.۲۷۱۸i, -۰.۰۰۰۱+۱.۲۷۱۸i, -۲.۲۴۹۹-۲.۰۴۹۳i, -۲.۲۴۹۹+۲.۰۴۹۳i\}$$

فصل ۷

روشی جدید برای کنترل همزمان سیستم‌های توسیع یافته با پس‌خورد حالت

فصل ۷- روشی جدید برای کنترل همزمان سیستم‌های توسیع یافته با پس‌خورد حالت

۷-۱- مقدمه

در این فصل روشی جدید برای کنترل مجموعه‌ای از سیستم‌های توسیع یافته‌ی خطی با پس‌خورد حالت با استفاده از روش طراحی کنترل‌گرهای پس‌خورد حالت – مشتق بیان می‌شود که قبلا این روش برای یک سیستم ارائه شده بود [۶] که در اینجا این روش را برای مجموعه‌ای از سیستم‌ها به کار برده‌ایم به گونه‌ای که بتوان این سیستم‌ها را به صورت همزمان پایدار نمود و مقادیر ویژه‌ی خاصی را به این مجموعه از سیستم‌ها اختصاص داد.

۷-۲- بیان مسئله

سیستم‌های توسیع یافته‌ی خطی قابل کنترل زیر را در نظر بگیرید:

$$E_k\dot{x}_k(t) = A_k x_k(t) + B_k u_k(t) \quad , \qquad k = 1,2,\dots,p \qquad (1.7)$$

که در آن که $E_k \in \Re^{n\times n}$ و $x_k(t) \in \Re^n$ بردار حالت و $u_k(t) \in \Re^m$ بردار ورودی است و $B_k \in \Re^{n\times m}$ و $A_k \in \Re^{n\times n}$ ماتریس‌های زمان ثابت (ناوردای زمانی) می‌باشند. توجه داشته باشید که در این رابطه $1 \le m \le n$.

حال کنترل پس‌خورد حالت - مشتق

$$u_k(t) = -K_{kd}\dot{x}_k(t) \qquad (2.7)$$

را در نظر بگیرید. در این فصل، هدف به‌دست آوردن یک پس‌خورد حالت همزمان K_d برای این p سیستم می‌باشد به گونه‌ای که قطب‌های قابل کنترل سیستم (۱.۷) و (۲.۷) به طور دلخواه در مجموعه‌ی $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ قرار بگیرند که $\lambda_i \in \mathbb{C}$ و $\lambda_i \neq 0$، $i = 1, \dots, n$. از (۲.۷) نتیجه می‌گیریم که سیستم (۱.۷) را می‌توان به صورت سیستم استاندارد خطی زیر بازنویسی کرد:

$$E_k\dot{x}_k(t) = A_k x_k(t) - B_k K_{kd}\dot{x}_k(t) \;,\; k = ۱,۲,\ldots,p \qquad (۳.۷)$$

$$\dot{x}_k(t) = (E_k + B_k K_{kd})^{-۱} A_k x_k(t) \;,\; k = ۱,۲,\ldots,p \qquad (۴.۷)$$

لم ۷-۱- ماتریس $Z\in\Re^{n\times n}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $rank(Z) = n$ و Z دارای مقادیر ویژه‌ی $\lambda_۱,\ldots,\lambda_n$ باشد در نتیجه مقادیر ویژه‌ی $Z^{-۱}$ به صورت $\lambda_۱^{-۱},\ldots,\lambda_n^{-۱}$ خواهد بود. [۶]

اثبات:

برای هر مقدار ویژه‌ی $\lambda \in \{\lambda_۱,\ldots,\lambda_n\}$ از ماتریس Z یک بردار ویژه‌ی v وجود دارد به قسمی که:

$$Zv = \lambda v \qquad (۵.۷)$$

و از این که $rank(Z) = n$ می‌باشد نتیجه می‌شود $\lambda \neq ۰$. پس بنا بر رابطه‌ی (۵.۷) داریم:

$$v = Z^{-۱} v\lambda \rightarrow \lambda^{-۱} v = Z^{-۱} v \qquad (۶.۷)$$

در نتیجه $\lambda^{-۱}$ یک مقدار ویژه برای ماتریس $Z^{-۱}$ خواهد بود.

تبصره۷-۱- فرض کنید که $\lambda = a + j\,b$ یک مقدار ویژه برای ماتریس Z باشد. از لم۷-۱ نتیجه می‌شود که $\lambda^{-۱} = (a + j\,b)^{-۱} = \frac{a}{a^۲+b^۲} - j\frac{b}{a^۲+b^۲}$ یک مقدار ویژه برای ماتریس $Z^{-۱}$ می‌باشد. توجه داشته باشید که قسمت های حقیقی λ و $\lambda^{-۱}$ هم علامت هستند پس اگر Z یک ماتریس هورویتز[1] باشد (تمامی مقادیر ویژه‌ی آن دارای قسمت حقیقی منفی باشند) آنگاه $Z^{-۱}$ نیز هورویتز می‌باشد. [۶]

تئوری ۷-۱- ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A_{kn} = A_k^{-۱} E_k \;,\quad B_{kn} = -A_k^{-۱} B_k \quad k = ۱,۲,\ldots,p \qquad (۷.۷)$$

و فرض کنید که $(A_{kn}\,,\,B_{kn})$ قابل کنترل باشند. ماتریس پس‌خورد حالت - مشتق K_{kd} را چنان در نظر بگیرید که $\{\lambda_۱^{-۱},\ldots,\lambda_n^{-۱}\}$ قطب‌های سیستم حلقه – بسته‌ی زیر باشد.

[1] Hurwitz

$$\dot{x}_{kn}(t) = A_{kn}x_{kn}(t) + B_{kn}u_{kn}(t) \quad , \quad k = ۱,۲,\dots,p \qquad (۸.۷)$$

$$u_{kn}(t) = -K_{kd}\dot{x}_{kn}(t) \qquad (۹.۷)$$

در اینجا $\lambda_i \in ℂ$ و $\lambda_i \neq ۰$، $i = ۱ , \dots , n$ و به دلخواه انتخاب شده‌اند.

پس برای این K_{kd} مقادیر ویژه‌ی $\{\lambda_۱, \dots, \lambda_n\}$ قطب‌های سیستم تعریف شده‌ی (۱.۷) و (۲.۷) می‌باشند. [۶]

برهان:

فرض کنید (A_{kn} , B_{kn}) قابل کنترل باشد سیستم قابل کنترل (۸.۷) و (۹.۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{x}_{kn}(t) = (A_{kn} - B_{kn}K_{kd})x_{kn}(t) \quad , \quad k = ۱,۲,\dots,p \qquad (۱۰.۷)$$

که دارای قطب‌های $\{\lambda_۱^{-۱}, \dots, \lambda_n^{-۱}\}$ می‌باشد. حال از این که

$$A_{kn} = A_k^{-۱}E_k \ , \ B_{kn} = -A_k^{-۱}B_k$$

و $\lambda_i \neq ۰$، $i = ۱ , \dots , n$ داریم:

$$\begin{aligned}(A_{kn} - B_{kn}K_{kd})^{-۱} &= [A_k^{-۱}(E_k + B_kK_{kd})]^{-۱} \\ &= (E_k + B_kK_{kd})^{-۱}A_k\end{aligned} \qquad (۱۱.۷)$$

از (۱۱.۷) و لم (۱.۷) نتیجه می‌شود که $\{\lambda_۱, \dots, \lambda_n\}$ مقادیر ویژه‌ی $(E_k + B_kK_{kd})^{-۱}A_k$ می‌باشند.

هدف ما در این فصل به‌دست آوردن یک K_d می‌باشد که بتوان این p سیستم توسیع یافته را به صورت همزمان پایدار نمود برای این کار ابتدا باید تبدیلات (۷.۷) را برای همه‌ی این p سیستم انجام داد سپس با انجام عملیات تشابهی بر روی زوج‌های (A_{kn} , B_{kn})، $\tilde{A}_{kn}$، $B_{kn.}^{-۱}$ و $T_{kn}^{-۱}$ را به‌دست آورد. چون هدف به‌دست آوردن یک پس‌خورد حالت می‌باشد پس باید رابطه‌ی زیر را داشته باشیم:

$$F = B_{k.}^{-۱}\left(-G_{k.} + G_{k\lambda}\right)T_k^{-۱}, \qquad k = ۱,۲,\dots,p \qquad (۱۲.۷)$$

برای مثال اگر $k = i, j$ باشد: $B_{i.}^{-1}\left(-G_{i.} + G_{i\lambda}\right)T_i^{-1} = B_{j.}^{-1}(-G_{j.} + G_{j\lambda})T_j^{-1}$

که این معادله به صورت $(-G_{i.} + G_{i\lambda}) = B_{i.}B_{j.}^{-1}(-G_{j.} + G_{j\lambda})T_j^{-1}T_i$ ساده می‌شود.

در نتیجه:

$$G_{i\lambda} - B_{i.}B_{j.}^{-1}G_{j\lambda}T_j^{-1}T_i = G_{i.} - B_{i.}B_{j.}^{-1}G_{j.}T_j^{-1}T_i \qquad (۱۳.۷)$$

سرانجام معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$G_{i\lambda} - B_{i.}B_{j.}^{-1}G_{j\lambda}T_j^{-1}T_i - G_{i.} + B_{i.}B_{j.}^{-1}G_{j.}T_j^{-1}T_i = ۰ \qquad (۱۴.۷)$$

برای تضمین پایداری سیستم می‌بایست با توجه به طیف مقادیر ویژه‌ی

$$\Omega = \{s\in ₵/\alpha \leq real(s) \leq \beta, -\gamma \leq imag(s) \leq \gamma\} \qquad (۱۵.۷)$$

محدودیت‌هایی را در نظر گرفت که همانند مطالبی که در فصل‌های گذشته بیان شد محدودیت‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f_{k۱}\left(g_{k۱۱}, g_{k۱۲}, \dots, g_{k۱n}, g_{k۲۱}, \dots, g_{km۱}, \dots, g_{kmn}\right) - C_{۱max} \leq ۰ \\ f_{k۲}\left(g_{k۱۱}, g_{k۱۲}, \dots, g_{k۱n}, g_{k۲۱}, \dots, g_{km۱}, \dots, g_{km}\right) - C_{۲max} \leq ۰ \\ \vdots \\ f_{kn}\left(g_{k۱۱}, g_{k۱۲}, \dots, g_{k۱n}, g_{k۲۱}, \dots, g_{km۱}, \dots, g_{kmn}\right) - C_{nmax} \leq ۰ \\ -f_{k۱}\left(g_{k۱۱}, g_{k۱۲}, \dots, g_{k۱n}, g_{k۲۱}, \dots, g_{km۱}, \dots, g_{kmn}\right) + C_{۱min} \leq ۰ \\ \vdots \\ -f_{kn}\left(g_{k۱۱}, g_{k۱۲}, \dots, g_{k۱n}, g_{k۲۱}, \dots, g_{km۱}, \dots, g_{kmn}\right) + C_{nmin} \leq ۰ \end{cases} \qquad (۱۶.۷)$$

پس $۲np$ نامعادله و mnp مجهول به‌دست می‌آید. حال با حل همزمان دستگاه معادلات و نامعادلات به‌دست آمده توسط نرم افزار *Lingo* و مطالب گفته شده در فصل‌های گذشته می‌توان ماتریس پس‌خورد حالت همزمان برای این p سیستم را به‌دست آورد.

مثال ۷-۱- دو سیستم خطی توسیع یافته‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_۱(t) \\ \dot{x}_۲(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۱۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱(t) \\ x_۲(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ -۳ \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_۱(t) \\ \dot{x}_۲(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۶ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱(t) \\ x_۲(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ ۹ \end{bmatrix} u(t)$$

پس در این مثال:

$$E_۱ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \text{و}\ B_۱ = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۳ \end{bmatrix} \text{و}\ A_۱ = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$E_۲ = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \text{و}\ B_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۹ \end{bmatrix} \text{و}\ A_۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۶ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix}$$

حال با توجه به رابطه‌ی (۷.۷) داریم:

$$B_{۱n} = \begin{bmatrix} -۲.۱۴۲۹ \\ ۰.۸۵۷۱ \end{bmatrix} \text{و}\ A_{۱n} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰.۱۴۲۹ \\ ۰ & ۰.۱۴۲۹ \end{bmatrix}$$

$$B_{۲n} = \begin{bmatrix} -۴.۸۳۳۳ \\ -۰.۱۶۶۷ \end{bmatrix} \text{و}\ A_{۲n} = \begin{bmatrix} ۱ & -۰.۳۳۳۳ \\ ۰.۵ & -۰.۱۶۶۷ \end{bmatrix}$$

با انجام عملیات تشابهی بر روی زوج‌های $(A_{۱n}, B_{۱n})$ و $(A_{۲n}, B_{۲n})$ داریم:

$$\tilde{A}_{۱n} = \begin{bmatrix} ۰.۱۴۲۹ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix},\ B_{۱n.}^{-۱} = [۱],\ T_{۱n}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱.۱۶۶۷ \\ ۲.۳۳۲۶ & ۵.۸۳۲۰ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{۲n} = \begin{bmatrix} ۰.۸۳۳۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix},\ B_{۲n.}^{-۱} = [۱],\ T_{۲n}^{-۱} = \begin{bmatrix} -۰.۲۰۹۳ & ۰.۰۶۹۸ \\ ۰.۰۱۵۵ & -۰.۴۴۹۶ \end{bmatrix}$$

$$G_{۱n\lambda} = [g_{۱۱۱} \quad g_{۱۱۲}],\quad G_{۲n\lambda} = [g_{۲۱۱} \quad g_{۲۱۲}]$$

چون هدف به‌دست آوردن یک پس‌خورد حالت برای این دو سیستم می‌باشد پس باید قرار دهیم:

$$B_{۱n.}^{-۱}\left(-G_{۱n.} + G_{۱n\lambda}\right)T_{۱n}^{-۱} = B_{۲n.}^{-۱}(-G_{۲n.} + G_{۲n\lambda})T_{۲n}^{-۱}$$

با جایگذاری ماتریس‌های به‌دست آمده در رابطه‌ی بالا دو معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$۲.۳۳۲۶\, g_{۱۱۲} + ۰.۲۰۹۳ g_{۲۱۱} - ۰.۰۱۵۵ g_{۲۱۲} - ۰.۱۷۴۴ = ۰$$

$$۱.۱۶۶۷g_{۱۱۱} + ۵.۸۳۲۰g_{۱۱۲} - ۰.۰۶۹۸g_{۲۱۱} + ۰.۴۴۹۶g_{۲۱۲} - ۰.۱۰۸۵ = ۰$$

طیف مقادیر ویژه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Omega = \{s\in\mathbb{C}/-۲۵ \le real(s) \le -۰.۰۹, -۱۸ \le imag(s) \le ۱۸\}$$

حال با توجه به این طیف، محدودیت‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\lambda_{min} = -۰.۰۹\ , \quad \lambda_{max} = -۲۵$$

$$C_{۲max} = ۶۲۵ \text{ و } C_{۱max} = ۵۰ \text{ و } C_{۲min} = ۰.۰۰۱۸ \text{ و } C_{۱min} = ۰.۱۸$$

$$-g_{۱۱۱} - ۵۰ \le ۰ \quad , -g_{۱۱۲} - ۶۲۵ \le ۰$$

$$g_{۱۱۱} + ۰.۱۸ \le ۰ \quad , g_{۱۱۲} + ۰.۰۰۱۸ \le ۰$$

$$-g_{۲۱۱} - ۵۰ \le ۰ \quad , \quad -g_{۲۱۲} - ۶۲۵ \le ۰$$

$$g_{۲۱۱} + ۰.۱۸ \le ۰ \quad , \quad g_{۲۱۲} + ۰.۰۰۱۸ \le ۰$$

با حل دستگاه معادلات و نامعادلات بالا و حل همزمان آن‌ها توسط نرم افزار *Lingo* مجهولات مساله به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$g_{۱۱۱} = -۰.۱۸ \quad g_{۱۱۲} = -۰.۰۰۱۸ \quad g_{۲۱۱} = -۰.۲۹ \quad g_{۲۱۲} = -۰.۰۰۱۹$$

در نتیجه:

$$B_{۱n.}^{-۱}\left(-G_{۱n.} + G_{۱n\lambda}\right)T_{۱n}^{-۱} =$$

$$\begin{bmatrix}۱\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-۰.۱۴۲۹ & ۰\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-۰.۱۸ & -۰.۰۰۱۸\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}۰ & ۱.۱۶۶۷\\ ۲.۳۳۲۶ & ۵.۸۳۲۰\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۰.۰۱۸۹ & -۰.۴۲۴۰\end{bmatrix}$$

پس ماتریس پس‌خورد حالت همزمان این دو سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$F = \begin{bmatrix}-۰.۰۱۸۹ & -۰.۴۲۴۰\end{bmatrix}$$

و مقادیر ویژه‌ی این سیستم حلقه – بسته با پس‌خورد حالت به‌دست آمده به شرح ذیل می‌باشد:

$$v_{۱} = \{-۰.۰۹ - ۰.۰۰۰۷i, -۰.۰۹ + ۰.۰۰۰۷i\}$$

$$v_{۲} = \{-۰.۰۰۰۸ - ۰.۱۴۹۴i, -۰.۰۰۰۸ + ۰.۱۴۹۴i\}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید قسمت حقیقی مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه – بسته با توجه به ماتریس پس خورد حالت به دست آمده منفی می‌باشد یعنی ماتریس پس خورد به دست آمده می‌تواند این دو سیستم توسیع یافته را به صورت همزمان پایدار کند.

فصل ۸

نتیجه گیری و پیشنهادات برای کارهای آتی

فصل ۸- نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای کارهای آتی

همانطور که ملاحظه گردید در فصل ۳ کنترل همزمان سیستم‌های خطی با پس خورد حالت را مورد بررسی قرار دادیم. در فصل ۴ روشی پارامتری جهت محاسبه‌ی ماتریس پس خورد خروجی به منظور تخصیص مقادیر ویژه‌ی از پیش تعیین شده ارائه شد. که در فصل ۵ با استفاده از مطالب فصل ۳ و ۴ و ترکیب این دو روش، روشی پارامتری و جدید جهت محاسبه‌ی ماتریس پس خورد خروجی همزمان برای مجموعه‌ای از سیستم‌ها ارائه گردید و یکی از مزیت‌های این روش آن است که به دلیل پارامتری بودنش امکان ایجاد ماتریس پس خورد خروجی همزمان با مینیمم نرم وجود دارد و این روش با روش پایداری همزمان پس خورد خروجی ایستا از طریق تغییرات مختصات با پارامترهای آزاد مورد مقایسه قرار گرفت. در فصل ۶ با استفاده از مطالب فصل ۳ و بردار افزوده که برای به دست آوردن ماتریس پس خورد حالت در سیستم‌های تاخیر زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد، روشی جدید جهت محاسبه‌ی ماتریس پس خورد حالت همزمان برای مجموعه‌ای از سیستم‌های تاخیر زمانی ارائه شد. در فصل ۷ با استفاده از مطالب فصل ۳ و کنترل پس خورد حالت – مشتق که برای سیستم‌های توسیع یافته مورد استفاده قرار می‌گیرد، روشی جدید جهت محاسبه‌ی ماتریس پس خورد حالت همزمان برای مجموعه‌ای از سیستم‌های توسیع یافته بیان گردید . هدف ما در کلیه‌ی مسائل بیان شده در این پایان نامه، پایداری سیستم‌ها با توجه به پس خورد به دست آمده می‌باشد یعنی باید با توجه به ماتریس پس خورد به دست آمده، مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه – بسته سمت چپ صفحه‌ی مختلط قرار گیرد. روش‌های بیان شده برای سیستم‌های کنترل ناوردای زمانی مورد استفاده قرار گرفت، شاید بتوان این روش‌ها را برای سیستم‌های کنترلی که ناوردای زمانی نباشند نیز مورد استفاده قرار داد. یا بتوان روشی جدید و پارامتری جهت محاسبه‌ی ماتریس پس خورد خروجی برای مجموعه‌ای از سیستم‌های تاخیر زمانی یا سیستم‌های توسیع یافته ارائه داد.

مراجع

[1] H. Ahsani Tehrani, "Time-optimal control of discrete-time linear systems with state time-delays, Department of Mathematics", Nonlinear analysis and optimization conference,Esfehan,2009.

[2] A.T. Alexandridis, "Design of output feedback controllers and output observers", IEE Proc, 146 , 108-11,1999.

[3] A.T. Alexandridis, P.N. Paraskevopulos,"A new approach to eigenstructure assignment by output feedback", IEEE Trans Automat Control, 41, 1046-1050,1996.

[4] A. Bunse-Gerstner, R. Byers, V. M. & Nichols, " Feedback design for regularizing descriptor systems", in Linear Algebra and its Applications, 119-151,1999.

[5] H.-B. Shi L. Qi," Static output feedback simultaneous stabilisation via coordinates transformations with free variables",journal of Control Theory and Applications,2009.

[6] Rodrigo Cardim, Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção and Flávio A. Faria, "Control Designs for Linear Systems Using State-Derivative Feedback", UNESP - São Paulo State University, Department of Electrical Engineering Brazil,2007.

[7] G.D. Howitt, R. Luus," Simultaneous stabilization of linear single input systems by linear state feedback control", International journal of control,54, 1015-1039,1991.

[8] A. Ichikawa, H. Katayama, "The design of deadbeat controllers by state transition graph", IEEE Trans Automat Control ,36 , 752-756,1991.

[9] Karl Johan A° ström ,Richard M. Murray," Feedback Systems",Princeton University Press, New Jersey,9-408,2008.

[10] P.T. Kabamba, C. Yang, "Simultaneous controller design for linear time-invariant systems", IEEE Trans Automat Control ,36, 106-110,1991.

[11] S.M. Karbassi, H.A. Tehrani," Parameterization of the state feedback controllers for linear multivariable systems", International journal of Computers and Mathematics with Applications ,44,1057-1065,2002.

[12] S.M. Karbassi, F.Saadatjou," A parametric approach for eigenvalue assignment by static output feedback", Journal of the Franklin Institute, 346 , 289–300,2009.

[13] S. Karbassi. , D. J. Bell. "Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback", International journal of control, 57, 817-830, 1993.

[14] S.M. Karbassi, H.A. Tehrani," Non-linear state feedback controllers for linear multi-variable systems", journal of Computers and Mathematics with Applications, 41 , 1057-1065,2002.

[15] R.W. Koepcke, "On the control of linear systems with pure time-delay",Trans ASME J. of Basic Eng,87, 74-80, 1965.

[16] F. Kurzweil," The control of multivariable processes in the presence of the pure transport delays", IEEE Trans Automatic control, 8,27-35,1963.

[17] D.P. Looze," A dual optimization procedure for linear quadratic robust control problem", Automatica, 19, 299-302,1983.

[18] I.R. Petersen, "A procedure for simultaneous stabilizing a collection of single input near systems using nonlinear state feedback control", Automatica, 23, 33-40,1987.

[19] F. Saadatjoo, Vali Derhamib, S.M. Karbassi," Simultaneous control of linear systems by state feedback", journal of Computers and Mathematics with Applications ,58, 154-160, 2009.

[20] Abdelaziz, T. H. S. & Valášek, M," Direct Algorithm for Pole Placement by State-Derivative Feedback for Multi-Input Linear Systems - Nonsingular Case",Kybernetika ,41, 637-660,2005.

ضمیمه برنامه‌های کامپیوتری

```
% program for assigning eigenvalues,eigen.m
        % ****************************************
       % D=[-1 0 0 0 0 ;0 -2  1 0 0 ;0 -1 -2 0 0; 0 0 0 -3
1 ;0 0 0 -1 -3]
        D=[];
       for j=1:n
                    landa(j)=input                 (['Enter
landa(',int2str(j),')=']);
                     end
         %landa=[ 0   0   0  ]

        for i=1:n
               D(i,i)=  landa(i);
           end
       % D
        %if c==0
               Acap=A1;
               Bcap=B1;
               newF=Fp ;
        %end
        ac=Acap+Bcap*F1;
        ac1=ac+D;
        bc1=Bcap*bo;

        Qc=[bc1 ac1];
%A=[0.95 0.49 0.46;0.23 0.89 0.02;0.61 0.76 0.82]
        % The vector companion form
        for  i=n:-1:m+1
                 for  k=1:r
                         if Qc(i,k)==1
                                 for j=k+1:r
                                      t=Qc(i,j);
                                      Qc(:,j)=Qc(:,j)-
t*Qc(:,k);
                                      Qc(k-m,:)=Qc(k-
m,:)+t*Qc(j-m,:);
                                end
                                break
                           end
                    end
        end
        G2=Qc(1:m,m+1:r);
        glanda=Qc(:,m+1:r);
        Fc=bo*G2*T1;
```

```
        disp('        The  feedback  matrix  which  gives  the
desired eigenvalues')
        disp('
*******************************************************')
        Kp=newF+Fc
%        disp('       with the closed-loop matrix ')
 %       disp('       *************************  ')
        gamac=A+B*Kp;
        disp('       checking the eigen values ')
        disp('       ************************* ')
        v=eig(gamac)'
        [u1,v1]=eig(gamac);
        c2=cond(u1)
        disp('      Frobenius norm of feedback matrix ')
        disp('      ********************************* ')
        Normkp=norm(Kp,'fro')
%       disp('             frobenious norm of closed-loop
matrix ')
 %                                                   disp('
************************************* ')
  %     Normgama=norm(gamac,'fro')


%       End of program for eigen
 -----------------------------------------------------------
-----
% Given an n by m matrix B , an n by n matrix A
% This program obtains :
% (1)- The Standard form
% (2)- The primary vector companion form
% (3)- The feedback matrix F
% (4)- The transformation matrix T
% (5)- The Kronecker invariants
% **************************************************
%
t0=cputime;
        disp('          This is the given plant matrix A')
%line 1
        disp('          ********************************')
%line 2
                  A
%line 3
        disp('          This is the given input matrix B')
%line 4
        disp('          ********************************')
%line 5
                  B
%line 6
```

```
        [n,m]=size(B);
%line 7
        r=n+m;
        Q=[B,A];
        T1=eye(n);
%line 10
        % The Echelon form of Q
        % ----------------------
        i=1;j=1; tol=1e-6;
        while ( i<=n ) & ( j<=r )
               [q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
               if  (q<=tol)
                       Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
                       j=j+1;
               else
                      % perform the similarity operations
                      % swap i-th row with k-th row:

                        o1
                      % divide the pivot row

                         o2
                      % subtract multiples of the pivot row

                          o3
               i=i+1 ;
               j=j+1;
              end
       end
       % *********************************************
       % Now compute the Standard echelon form        !
       % ---------------------------------------------
       s=1;
       while s < n
               i=s+1 ;
               for j=i:r
                       if Q(i,j)~=0
                               for k=1:s
                                       if Q(k,j)~=0
                                            t=Q(k,j);
                                            Q(k,:)=Q(k,:)-
t*Q(i,:);

T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);

Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                                      end
                               end
                      break
                     end
```

```
                end
            s=s+1;
        end
        %
************************************************************
******
%               choice=input(' do you want the kronecker
invariants displayed,y/n %','s')
  %      if choice=='y'
                kronk3
   %     end
        %
************************************************************
******
        % The vector companion form
        for i=n:-1:m+1
                 for  k=i:r
                          if Q(i,k)==1
                                  for  j=k+1:r
                                           t=Q(i,j);
                                           Q(:,j)=Q(:,j)-
t*Q(:,k);
                                           Q(k-m,:)=Q(k-
m,:)+t*Q(j-m,:);
                                           T1(k-m,:)=T1(k-
m,:)+t*T1(j-m,:);
                                       end
                                       break
                                end
                         end
          end
         %
************************************************************
****
   % choice=input('do you want the prim. vec comp form
displayed,y/n%','s')
   %     if  choice=='y'
    %    disp('    The standard Vector Companion form ')
     %   disp('    *********************************** ')
                   Q
      %   end
         %
..................................................................
        disp('                    This is the transformation
matrix,T1')
        disp('
*************************************')

                                          T1
```

```
         %                          disp(' press any key to
continue')
        %
****************************************************
       % pause
        % The Feed-back matrix , F
        B1=Q(:,[1:m]);A1=Q(:,[m+1:r])
        B0=Q(1:m,1:m);bo=inv(B0)
        G=Q(1:m,m+1:r);F1=-bo*G;G0=G;
        Fp=F1*T1;
        %
***********************************************************
***
        disp('        This is the primdry feedback law ')
        disp('        ******************************** ')

        Fp
        %
***********************************************************
***
        %disp('        The closed loop matrix A+B*F ')
        %disp('        **************************** ')
        gama=A+B*Fp
        %
***********************************************************
***
        %choice=input('      do  you  want  to  check  the
resultfeed,y/n ','s')
        %if choice=='y'
         %     g=gama^p(1);
          %     for i=1:n
           %           for j=1:n
            %                 if abs(g(i,j))<tol
             %                       g(i,j)=0;
              %                  end
               %           end
                %   end
        %end
        %fprintf('       This is g=(A+B*F)^%g',p(1))
        %disp('        **************************')
        %g
        %
***********************************************************
***
        % generating parametric feed-back laws
         %       q=fix(n/m);
          %      if p(1)==q
           %              disp('        The feed-back law
is unique ! ')
```

```
            %                                        disp('
****************************** ')
             %              disp('          The kronecker
invariants are all equal ')
             %disp('
*************************************** ')
              %     else
               %          allfeeds
                %   end
         %
*************************************************************
***
t1=cputime-t0
 ------------------------------------------------------------
-
-----

%           o1.m
%       Swap i-th row with k-th row
        if i~=k
                Q([i,k],:)=Q([k,i],:);
                T1([i,k],:)=T1([k,i],:);
                Q(:,[i+m,k+m])=Q(:,[k+m,i+m]);
        End
 ------------------------------------------------------------
-
-----

%                   o2.m
%       Divide the pivot row

        t=Q(i,j);
%       if t~=0
                Q(i,:)=Q(i,:)/t;
                Q(:,i+m)=Q(:,i+m)*t;
                T1(i,:)=T1(i,:)/t;
%       end
 ------------------------------------------------------------
-
-----

%                           o3.m
%       Subtract multiples of the pivot row

        if i~=n
                for k=i+1:n
                        t=Q(k,i);
                        if t~=0
                                Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                                T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
                        end
```

```
                  end
         end
 ------------------------------------------------------------
-----


Reg1
% Given an n by m matrix B , an n by n matrix A
% This program obtains :
% (1)- The Standard form
% (2)- The primary vector companion form
% (3)- The feedback matrix F
% (4)- The transformation matrix T
% (5)- The Kronecker invariants
% **************************************************
%
t0=cputime;
        disp('           This is the given plant matrix A')
%line 1
        disp('           ********************************')
%line 2
                  A
%line 3
        disp('           This is the given input matrix B')
%line 4
        disp('           ********************************')
%line 5
                  B
%line 6
        [n,m]=size(B);
%line 7
        r=n+m;
        Q=[B,A];
        T1=eye(n);
%line 10
        % The Echelon form of Q
        % ----------------------
        i=1;j=1; tol=1e-6;
        while ( i<=n ) & ( j<=r )
               [q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
               if  (q<=tol)
                      Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
                      j=j+1;
               else
                      % perform the similarity operations
                      % swap i-th row with k-th row:

                        o1
                      % divide the pivot row
```

```
                         o2
                      % subtract multiples of the pivot row

                          o3
              i=i+1 ;
              j=j+1;
             end
       end
       % *******************************************
       % Now compute the Standard echelon form        !
       % -------------------------------------------
       s=1;
       while s < n
              i=s+1 ;
              for j=i:r
                     if Q(i,j)~=0
                            for k=1:s
                                   if Q(k,j)~=0
                                       t=Q(k,j);
                                       Q(k,:)=Q(k,:)-
t*Q(i,:);

T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);

Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                                  end
                            end
                     break
                    end
              end
          s=s+1;
       end
       %
************************************************************
******
%             choice=input(' do you want the kronecker
invariants displayed,y/n %','s')
  %      if choice=='y'
              kronk3
   %     end
       %
************************************************************
******
       % The vector companion form
       for i=n:-1:m+1
               for  k=i:r
                      if Q(i,k)==1
                             for  j=k+1:r
                                    t=Q(i,j);
```

```
                                        Q(:,j)=Q(:,j)-
t*Q(:,k);
                                        Q(k-m,:)=Q(k-
m,:)+t*Q(j-m,:);
                                        T1(k-m,:)=T1(k-
m,:)+t*T1(j-m,:);
                                     end
                                     break
                              end
                       end
        end
       %
************************************************************
****
   % choice=input('do you want the prim. vec comp form
displayed,y/n%','s')
   %     if  choice=='y'
    %    disp('    The standard Vector Companion form ')
     %   disp('    ********************************** ')
                   Q
      %  end
       %
...........................................................
       disp('                This is the transformation
matrix,T1')
       disp('
*********************************')

                              T1
        %                         disp(' press any key to
continue')
       %
*****************************************************
      % pause
       % The Feed-back matrix , F
       B1=Q(:,[1:m]);A1=Q(:,[m+1:r])
       B0=Q(1:m,1:m);bo=inv(B0)
       G=Q(1:m,m+1:r);F1=-bo*G;G0=G;
       Fp=F1*T1;
       %
************************************************************
***
       disp('      This is the primdry feedback law ')
       disp('      ******************************** ')

       Fp
       %
************************************************************
***
       %disp('      The closed loop matrix A+B*F ')
```

```
        %disp('        ***************************** ')
        gama=A+B*Fp
        %
*************************************************************
***
        %choice=input('      do  you  want  to  check  the
resultfeed,y/n ','s')
        %if choice=='y'
         %     g=gama^p(1);
          %    for i=1:n
           %           for j=1:n
            %                 if abs(g(i,j))<tol
             %                        g(i,j)=0;
              %                    end
               %            end
                %  end
        %end
        %fprintf('       This is g=(A+B*F)^%g',p(1))
        %disp('        **************************')
        %g
        %
*************************************************************
***
        % generating parametric feed-back laws
         %       q=fix(n/m);
          %      if p(1)==q
           %              disp('         The feed-back law
is unique ! ')
            %                                      disp('
****************************** ')
             %               disp('         The kronecker
invariants are all equal ')
             %disp('
*************************************** ')
              %     else
               %          allfeeds
                %   end
        %
*************************************************************
***
t1=cputime-t0
```

Abstract

In this thesis, the stability of a set of linear systems with state feedback and output feedback of linear systems have been studied . Then by combining these two methods using softwares Lingo and Matlab, a new method is presented to calculate the parameter matrix output feedback of linear systems.

In addition, a new method for computing the state feedback for a set of systems with time-delay by augmentation technique is proposed . Further, by generalizing state-derivative feedback control from the descriptor systems, a new method to calculate the state feedback matrix for the set of systems is presented. For the stability of systems, it is necessary that the eigenvalues of the closed-loop systems lie inside a specified region in the left hand side of the complex plane. This aim is achieved by solving linear and nonlinear parametric systems of equations using nonlinear programming.

Keywords: *Augmentation technique - Output feedback– State feedback- Eigenvalue assignment- Time delay systems- Descriptor systems- Linear systems.*

Shahrood University of Technology
Facualty of Methematical Sciences
Department of Mathematics
M.Sc. Thesis

Simultaneous Control of Linear Systems by State Feedback

By:

Elham Arabyarmohammadi

Supervisor:
Dr. H.Ahsani Tehrani

Advisor:
Dr. M.Fateh

October 2012