
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده:ریاضی

فیلترهای فازی تعمیم یافته درمشبکه های باقیمانده

دانشجو:زین العابدین محمدی

اساتیدراهنما:

دکترمهدی هاشمی و دکترمحمودبخشی

استادمشاور:

دکتراحمدزیره

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

مهر ماه: ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : ریاضی

گروه : جبر

پایان نامه کارشناسی ارشد (رساله دکتری) آقای: زین العابدین محمدی

تحت عنوان: فیلترهای فازی تعمیم یافته در مشبکه های باقیمانده

در تاریخ ۹۱/۷/۵ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد .... مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر حیدر جعفری		نام و نام خانوادگی :دکتر مهدی ایان منش	
نام و نام خانوادگی : دکتر نصر آزادانی			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر ابراهیم هاشمی		نام و نام خانوادگی : دکتر احمد زیره	
نام و نام خانوادگی : دکتر محمود بخشی		نام و نام خانوادگی :	

تقدیم به: روح بلند نبی اسلام حضرت محمد (ص) و

مرحومه همسرم شهربانو امین زاده ومادرم ودودخترانم زهراومهلا که باتمام قدرت دراین راه مرایاری کردند.

تقدیر و تشکر

در اینجا لازم است از کلیه کسانی که در طول مدت تحصیل مرا یاری نموده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. ابتدا از خانواده‌ام تشکر می کنم که عزم مرا در ادامه تحصیل جزم کردند .

و نیز لازم است که از جناب آقای دکتر احمد زیره و رئیس دانشکده علوم پایه دانشگاه صنعتی شاهرودکه به حق راهنما و مشوق بنده در قعرمشکلات بودند وهمچنین از اساتید محترم جناب دکتر محمود بخشی و آقای دکتر دهقان وسرکار خانم دکتر محمدزاده ازاساتید دانشگاه بجنورد که کمک شایانی را در ادامه تحصیل وکارم داشتند از صمیم قلب قدردانی و تشکرمی کنم و سپاس‌گذارهستم .

از مسئولین و کارکنان محترم آموزش دانشکده علوم پایه دانشگاه صنعتی شاهرود که نهایت دلسوزی را در برخورد با اینجانب داشته اند و نیز تمامی کارمندان محترم آموزش دانشگاه بجنورد که الحق و والانصاف زحمات زیادی را ازجانب بنده متقبل شدندکمال تشکروقدردانی را دارم و از خداوند برای همه آرزوی سلامتی وتن درستی دارم.

در پایان از دوستان عزیزم آقایان سعید آدینه پور و مهندس حسن مرادی و هادی قاسمی نیز تقدیر و تشکر می کنم .

زین العابدین محمدی

تعهد نامه

اینجانب زین العابدین محمدی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض - جبر

دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه فیلتر های فازی

تعمیم یافته در مشبکه های باقیمانده تحت راهنمائی دکتر ابراهیم هاشمی دکتر محمود بخشی متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۱۳۹۱/۷/۱۸

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .

چکیده

درفصل اول ابتدا تعریف مشبکه و ویژگی هایی از مشبکه ها را مورد برسی قرار می دهیم. سپس مشبکه مانده ای و انواع مانده ها و رابطه بین آنها و ویژگیهای مهم آنها را مطالعه می کنیم. همچنین تعریف فیلتر و خواص فیلترها و انواع فیلترها مورد بررسی قرار می دهیم.

درفصل دوم فیلترهای $(\alpha,\beta)_{\mathrm{T}}$- فازی درمشبکه های مانده ای را تعریف کرده و انواع فیلترهای$(\alpha,\beta)_{\mathrm{T}}$- فازی به همراه ویژگی هایی از آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم.

در فصل سوم فیلتر استلزامی $(\alpha,\beta)_{\mathrm{T}}$- فازی و فیلتر استلزامی مثبت $(\alpha,\beta)_{\mathrm{T}}$- فازی و فیلترهای بولی $(\alpha,\beta)_{\mathrm{T}}$- فازی را با الگو برداری از تعرف فیلتر استلزامی و فیلتر استلزامی مثبت و فیلتر بولی و فیلتر $(\alpha,\beta)_{\mathrm{T}}$- فازی تعریف کرده ایم و در ادامه بحث تحت عنوان چند قضیه و نتیجه ویژگیهایی از این نوع فیلترهای فازی جدید را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

در فصل چهارم شرایط معادل دیگری برای فیلترهای استلزامی $(\in,\in\vee q)_T$- فازی ، $(\in,\beta)_T$ - فازی ، $(\alpha,\beta)_{\mathrm{T}}$– فازی، $(q,\in\vee q)_T$ - فازی $(\in\wedge q,\beta)_{\mathrm{T}}$ - فازی ، $(\in\wedge q,\in)_{\mathrm{T}}$- فازی و $(q,\beta)_T$ فازی را به کمک تعاریف و قضایای مطرح شده در فصول قبلی بررسی کرده ایم. تمامی مطالب فصول ۳ و۴ توسط محقق ارائه شده اند.

واژگان کلیدی: مشبکه باقیمانده- فیلتر- فیلتر فازی

فهرست مطالب صفحات

مقدمه

در نظریه حلقه های تعویض ناپذیر زیرحلقه ها و ایده آلهای یک طرفه نقش مهمی را در مطالعه این نوع حلقه ها ایفا می کنند.برای روشن شدن این مطلب فرض کنیم R یک حلقه تعویض ناپذیر و $\mathcal{I}$ مجموعه تمام ایده آلهای دو طرفه R باشد. میدانیم که $\mathcal{I}$ به همراه رابطه شمول یک مجموعه مرتب جزئی است. بعلاوه $\mathcal{I}$ نسبت به اشتراک دلخواه اعضایش بسته است، به عبارتی اشتراک هر دو ایده آل همواره یک ایده آل است.فرض کنیم I و J دو ایده آل از حلقه R باشند. ایده آل تولید شده توسط اجتماع این ایده آلها را با $I \vee J$ نشان دهیم در اینصورت $\mathcal{I}$ به همراه $\cap$ و $\vee$ تشکیل یک مشبکه می دهد.

فرض کنیم R حلقه ای تعویض ناپذیر و در شرط زنجیر افزایشی روی ایده آلهای راست صدق کند و I و J ایده آلهایی از R باشند.در اینصورت ضرب ایده آلهای I و J را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$IJ = < I \cup J >$$

عمل ضرب فوق روی $\mathcal{I}$ دارای خواص زیر است:

۱) ضرب هر دو ایده آل، یک ایده آل است .

۲) اگر $I_۱ = I_۲$ ، آنگاه برای هر $J \in \mathcal{I}$، $I_۱J = I_۲J$ و $JI_۱ = JI_۲$.

۳) $(\mathrm{I}_۱\mathrm{I}_۲)\mathrm{I}_۳ = \mathrm{I}_۱(\mathrm{I}_۲\mathrm{I}_۳)$.

۴) $(I_۱ \vee I_۲)J = I_۱J \vee I_۲J$ و $J(I_۱ \vee I_۲) = JI_۱ \vee JI_۲$.

بعلاوه الف) $(\mathcal{I}, \cap, \vee, \{0\}, R)$ یک مشبکه کراندار است،بدین معنی که ایده آلهای $\{0\}$ و R به ترتیب کوچکترین و بزرگترین عناصر $\mathcal{I}$ نسبت به رابطه شمول هستند.

ب) $(\mathcal{I}, ., \mathrm{R})$یک تکواره تعویض ناپذیر است.

ج) به ازای هر دو ایده آل I_1 و I_2 مجموعه $X=\{J\in\mathcal{I}: I_1 J\subset I_2\}$ ، طبق خاصیت زنجیر افزایشی دارای عنصر ماکزیممی مانند J_0 در $\mathcal{I}$ است که به صورت $\mathrm{J}_0=I_1^{-1}I_2$ نمایش داده و آن را مانده چپ I_2 نسبت به I_1 می نامیم.

این مفاهیم منجر به معرفی ساختار جدیدی به نام مشبکه های مانده ای گردید. مشبکه های مانده ای ابتدا در حالت تعویض پذیر توسط دیل ورث[1] و سپس توسط ورث در حالت تعویض ناپذیر بررسی شدند.این در حالی بود که قبل از آن کرول[2] مطالعه چنین ساختاری به تجزیه مولفه ای ایده آلها را انجام داده بود.

از عمده ترین مثالها می توان به MV- جبرها و BL- جبرها اشاره کرد. که به ترتیب توسط چانگ[3] و هایک[4] معرفی شدند.

در سال ۲۰۰۲ راکونک[5] و جورجسکو[6] و دیگران به طور مستقل MV- جبرها را تعمیم داده و مفهوم شبه MV- جبرها را معرفی کردند.البته راکونک آن را MV- جبر تعویض ناپذیر نامید.

ایزکی[7] و تاناکا[8] در سال ۱۹۷۶،نظریه ایده آلهای استلزامی در BCK- جبرها را معرفی کردند.سپس هو[9] و سسا[10] در سال ۱۹۹۴،نظریه ایده آلهای بولی در MV- جبرها را معرفی و همچنین ثابت کردند که ایده آل های استلزامی و ایده آلهای بولی در یک MV- جبر معادلند.

---

[1]- R.P.DILWORTH
[2]-W.Krull
[3]-Chang
[4]-Hajek
[5]-Rachunek
[6]-Georgescu
[7]-Iseki
[8]-Tanaka
[9]-Hoo
[10]-Sessa

تورنن[1]در سال ۲۰۰۱، نظریه فیلترهای استلزامی و فیلترهای بولی در$BL-$ جبرها را معرفی کرد. او آنها را سیستمهای استلزامی استنتاجی و سیستمهای استنتاجی بولی نامید.و ثابت کردکه درBL - جبرها فیلترهای استلزامی و فیلترهای بولی معادلند.

لی[2]و لیو[3]در سال۲۰۰۷، مفهوم فیلترهای بولی و فیلترهای استلزامی در مشبکه های مانده ای را معرفی کردند و همچنین ثابت کردند که این دو مفهوم هم ارزند.

اولین بار ،پرفسور عسگر لطفی زاده در سال ۱۹۶۵ منطق فازی و تئوری مجموعه های فازی را معرفی کرد. او از این روش برای مدل سازی ابهامات و عدم قطعیت موجود در تصمیم گیری استفاده کرد.

ایده اصلی فازی ساده است؛ عبارات، فقط "صحیح "یا"غلط" نیستند .بلکه می تواند تا حدی درست باشند و تا حدی غلط .بعد از گسترش نظریه مجموعه های فازی و منطق فازی ، محققان تحلیلگر سیستم های فازی دریافتند که این منطق، ابزار مناسبی برای مدل سازی است .روشهای بهینه سازی فازی،سیستم های استنتاج فازی و تلفیق روشهای فازی با تکنیک های دیگر مانند تلفیق هوش مصنوعی از کاربردهای مهم این تئوری است .مثالهای از این کاربردها را می توان در کارهای هوانگ[4]و ساد[5]و همکاران در سال۱۹۹۶و فونتان[6]و همکاران در سال۱۹۹۷ ، ملاحظه کرد.

هو و سسا در سال ۱۹۹۴، این ایده را درMV- جبرها به کاربسته و مفهوم ایده آلهای فازی اول و ایده آلهای فازی ماکسیمال و ایده آلهای فازی بولی معرفی نمودند.

همچنین لی و لیو در سال۲۰۰۵، نظریه مجموعه فازی را درBL- جبرها بکاربستند و مفهوم فیلترهای فازی و فیلترهای اول را معرفی کردند و ثابت کردند که BL- جبرها ی خارج قسمتی القا شده توسط

---

[1]-Turunen
[2]-Li
[3]-Liu
[4]-Hung
[5]-Saad
[6]-Fontane

فیلترهای فازی اول یک BL - جبر مرتب است.آنها همچنین مفاهیم فیلترهای فازی بولی و فیلترهای استلزامی مثبت درBL - جبرها را معرفی کرده و نتایج مهمی به دست آوردند.

فصل اول

مفاهیم مقدماتی

در این فصل مفاهیم مقدماتی از مشبکه ها و مشبکه های مانده ای را ارائه خواهیم کرد.همچنین مفهوم فیلترها و ویژگیهایی از آنها را مورد مطالعه قرار میدهیم .برای مطالعه جزئیات بیشتربه[۲]و[۳] و[۷] و[۱۳] و[۱۴] و [۱۵]مراجعه نمایید.

۱-۱ مشبکه های مانده ای

تعریف۱-۱-۲ یک **مشبکه** یک مجموعه مرتب جزئی مانند $(C,\leq)$ است، که هردو عضو آن دارای سوپریمم و اینفیمم در C باشند.

قرارداد ۱-۱-۲برای هردو عنصر $x,y\in C$ سوپریمم و اینفیمم آنها را به ترتیب $\sup\{x,y\}=x\vee y,\inf\{x,y\}=x\wedge y$ نمایش میدهیم.

تعریف۱-۱-۳ مشبکه C را **کراندار** گوییم هرگاه دارای کوچکترین و بزرگترین عضو باشد، یعنی وجود داشته باشد $\mathbf{0},۱\in C$ بطوریکه برای هر $x\in C$ داشته باشیم:$\mathbf{0}\leq x\leq ۱$.

تعریف۱-۱-۴منظور از یک **ضرب** روی مشبکه C یک عمل دوتایی مانندab است که دارای خواص M۱ وM۲ وM۳ و M۴ که در زیر می آیند باشد:

M۱) به ازای هر $a,b\in C$،$ab\in C$.

M۲) اگر $a=b$ و $c\in C$،آنگاه$ca=cb$ و $ac=bc$.

M۳) به ازای هر $a,b,c\in C$ ، $(a\vee \mathrm{b})\mathrm{c}=ac\vee \mathrm{bc}$و $a(\mathrm{b}\vee \mathrm{c})=ab\vee ac$.

M۴) به ازای هر $a,b,c\in C$ ، $a(\mathrm{bc})=(ab)\mathrm{c}$.

ازاصول فوق نتیجه می شود که:

۱) اگر $b\leq a$ ، آنگاه $bc\leq ac$ و $cb\leq ca$.

۲) $(a\wedge c)b\leq ab\wedge cb$و $a(b\wedge c)\leq ab\wedge ac$.

اگر C در اصول (M۱) و(M۲) فوق و(M۵)که به صورت زیر تعریف می شود صدق کند، آنگاه C یک مشبکه**ایده آل چپ**می نامیم.

M۵) به ازای هر $a, b \in C$ داشته باشیم:$ba \leq a$.

به طورمشابه اگر C در شرطهای (M۱) و(M۲) فوق و(M′۵) که به صورت زیرتعریف می شود، صدق کند،Cرا یک مشبکه **ایده آل راست** می نامیم.

M′۵) $ab \leq a$.

تعریف۱-۱-۵ اگریک مشبکه، هم مشبکه ایده آل چپ و هم مشبکه ایده آل راست باشد، آن را **مشبکه ایده آل دو طرفه**،یا به طورخلاصه **مشبکه ایده آل**می نامیم.

تعریف۱-۱-۶ گوئیم مشبکه C نسبت به عمل ضرب دارای عنصریکه u است، اگر در شرایط (M۱) و(M۴) فوق و(M۶) که به صورت زیر بیان می شود صدق کند:

M۶) به ازای عنصر $u \in C$ و عنصر دلخواه $a \in C$، $ua = au = a$.

تعریف۱-۱-۷یک مشبکه ایده ال که دارای عنصر یکه باشد، مشبکه ایده آل با عنصر یکه نامیده می شود.

تعریف۱-۱- ۸مشبکه C **تعویض پذیر**گفته می شود هرگاه:

M۷) برای هر $a, b \in C$ ، $ab = ba$.

تعریف۱-۱-۹مشبکه C دارای شرط **زنجیر افزایشی** است، اگر هر زنجیر افزایشی مانند $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$ متوقف شود یعنی عدد طبیعی n وجود داشته باشد که برای هر $i \geq n$، $a_i = a_n$.

تعریف۱-۱-۱۰مشبکه C دارای خاصیت **زنجیرنزولی(کاهشی)** است، اگر هر زنجیر کاهشی مانند$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq$.... متوقف شود.یا به عبارت دیگر عدد طبیعی n وجود داشته باشد که برای هر $n \leq i$ ، $a_i = a_n$.

حال مشبکه ایده ال C با خاصیت زنجیر افزایشی را در نظر می گیریم.

تعریف۱-۱-۱۱فرض کنیم a و b دو عضودلخواه از C باشد و$X = \{x \in C : xb \leq a\}$.

ثابت می شود X ناتهی است و نسبت به عمل$\vee$بسته است.بنابراین براساس شـرط زنجیـر افزایشـی، X دارای عنصر ماکسیمم یکه $ab^{-۱}$ است.عنصر $ab^{-۱}$را مانده چپ a نسبت به b می نامیم.

مانده چپ $ab^{-۱}$ دارای ویژگی های زیر است:

R۱) $(ab^{-۱})b \leq a$،

R۲) اگر $xb \leq a$ ، آنگاه $x \leq ab^{-۱}$.

به طور مشابه **مانده راست**$b^{-۱}a$تعریف می شود،که دارای خواص زیر است:

R'۱) $b(b^{-۱}a) \leq a$،

R'۲) اگر $bx \leq a$، آنگاه $x \leq b^{-۱}a$.

ارتباط بین دو مانده چپ و راست چنین است:

۱)$(a^{-۱}b)c^{-۱} = a^{-۱}(bc^{-۱})$.

رابطه مانده با عمل دوتایی ضرب توسط فرمولهای زیر بیان می شود:

۲)$a \leq (ab)b^{-۱}$ و $b \leq a^{-۱}(ab)$.

۳) $a(bc)^{-۱} = (ac^{-۱})b^{-۱}$ و $(ab)^{-۱}c = b^{-۱}(a^{-۱}c)$.

بعضی از مهمترین خواص مانده ها:

۴) $a \vee b \leq (ab^{-۱})^{-۱}a$ و $a \vee b \leq a(b^{-۱}a)^{-۱}$.

۵) $(a \wedge b)c^{-۱} = ac^{-۱} \wedge bc^{-۱}$ و $a^{-۱}(b \wedge c) = a^{-۱}b \wedge a^{-۱}c$.

۶) $a(b \vee c)^{-۱} = ab^{-۱} \wedge ac^{-۱}$ و $(a \vee b)^{-۱}c = a^{-۱}c \wedge a^{-۱}c$.

۷) $ac^{-۱} \vee bc^{-۱} \leq (a \vee b)c^{-۱}$ و $a^{-۱}b \vee a^{-۱}c \leq a^{-۱}(b \vee c)$.

۸) اگر $b \leq a$ ، آنگاه $bc^{-۱} \leq ac^{-۱}$ و $c^{-۱}b \leq c^{-۱}a$.

۹) اگر $b \leq a$، آنگاه $a^{-۱}c \leq b^{-۱}c$ و $ca^{-۱} \leq cb^{-۱}$.

۱۰)$a \leq ab^{-۱}$ و $a \leq b^{-۱}a$.

۱۱) $b \leq c^{-۱}a$ اگر و تنها اگر $c \leq ab^{-۱}$.

حال به معرفی مفهوم مشبکه مانده ای می پردازیم.برای اطلاعات بیشتر از جزئیات به مراجع [۲]و[۳] و [۷] و[۱۴] و [۱۵] و [۱۶] مراجعه نمائید.

تعریف۱-۱-۱۲یک **مشبکه مانده ای**ساختار جبری مانند$L = (L,\wedge,\vee,\odot,\rightarrow,\hookrightarrow,\mathbf{0},1)$ از نوع (۰،۰ ،۲،۲،۲،۲،۲،۲)است، که در شرایط L۱ وL۲ وL۳ که به صورت زیر بیان شده اند صدق کند:

L۱) $(L,\wedge,\vee,\mathbf{0},1)$ یک مشبکه کراندار باشد.

L۲)$(L,\odot,1)$ یک تکواره باشد.

L۳) برای هر$x,y,z \in L$، $x \odot y \leq z$ اگر و تنها اگر $y \leq x \hookrightarrow z$ اگر وتنها اگر $x \leq y \rightarrow z$.

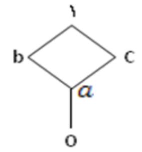
مثال۱-۱-۱۳فرض می کنیم،$L = \{\mathbf{0}, a, b, c, 1\}$ یک مشبکه باشد،به طوری که نمودار هاسه آن مطابق شکل ۱-۱-۱۳داده شده باشد و عملگرهای$\odot$و$\rightarrow$و$\hookrightarrow$به وسیله جدولهای ۱-۱-۱۳تعریف شده باشند:

جداول ۱-۱-۱۳

$\rightarrow$	0	a	b	c	۱
0	۱	۱	۱	۱	۱
a	c	۱	۱	۱	۱
b	c	c	۱	c	۱
c	0	b	b	۱	۱
۱	0	b	b	c	۱

$\odot$	0	a	b	c	۱
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	a	a
b	0	a	b	a	b
c	0	0	0	c	c
۱	0	a	b	c	۱

$\hookrightarrow$	0	a	b	c	۱
0	۱	۱	۱	۱	۱
a	b	۱	۱	۱	۱
b	0	c	۱	c	۱
c	b	b	b	۱	۱
۱	0	b	b	c	۱



شکل ۱-۱-۱۳

می توان تحقیق کردکه $L = (L,\wedge,\vee,\odot,\to,\hookrightarrow,\mathbf{0},1)$ یک مشبکه مانده ای است.

تعریف۱-۱-۱۴فرض کنیمL یک مشبکه مانده ای باشد.

الف)L یک **شبه $\boldsymbol{MTL}$ -جبر** نامیده می شود اگر در خواص(L۱) و(L۲) فوق و(L۴) که در زیر می آید صدق کند.

L۴) $(x \to y) \odot x = x \odot (x \hookrightarrow y) = x \wedge y$، برای هر $x, y \in L$.

ب) L یک **شبه $\boldsymbol{BL}$ - جبر** نامیده می شود اگر در خواص(L۱) و(L۲) و(L۳) و(L۴) فوق و(L۵) صدق کند.

L۵) $(x \to y) \vee (y \to x) = (x \hookrightarrow y) \vee (y \hookrightarrow x) = 1$، برای هر $x, y \in L$.

تعریف۱-۱-۱۵مشبکه مانده ایL**تعویض پذیر**گفته می شود، اگر عمل$\odot$تعویض پذیر باشد.

تبصره۱-۱-۱۶در سرتا سر این پایان نامهL بیانگر یک مشبکه مانده ای است، مگر خلاف آن ذکر شود.

تبصره۱-۱-۱۷

۱- یک مشبکه مانده ایL تعویض پذیراست، اگر و تنها اگر برای هرL $x, y \in$ داشته باشیم:

$$x \to y = x \hookrightarrow y$$

۲-هر مشبکه مانده که یک زنجیر باشد یک شبهMTL- جبراست.

در مشبکه مانده ای$L = (L,\wedge,\vee,\to,\hookrightarrow,\odot,0,1)$ به ازای هر$x \in L$ تعریف می کنیم:

$$x^{-} = x \to \mathbf{0} \quad \text{و} \quad x^{\sim} = x \hookrightarrow \mathbf{0}$$

قضیه۱-۱-۱۵خواص زیر در مشبکه های مانده ای برقرارند:

C۱) $x \to (y \to z) = (x \odot y) \to z$،

C۲) $x \hookrightarrow (y \hookrightarrow z) = (y \odot x) \hookrightarrow z$،

C۳) $x \le y$ اگر و تنها اگر $x \hookrightarrow y = 1$ اگر و تنها اگر $x \to y = 1$،

C۴) $x \to x = x \hookrightarrow x = 1$،

C۵) $x \to 1 = x \hookrightarrow 1 = 1$ و $1 \to x = x = 1 \hookrightarrow x$. بالاخص، $0 = 1^{\sim} = 1^{-}$،

C۶) $0 \to x = 0 \hookrightarrow x = 1$. بالاخص ، $0^{-} = 0^{\sim} = 1$،

C۷) $x \odot y \le x \wedge y$ و بالاخص ، $x \odot 0 = 0 \odot x = 0$،

C۸) $x \le y \to (x \odot y)$ و $x \le y \hookrightarrow (y \odot x)$،

C۹) $(x \to y) \odot x \le y$ و $x \odot (x \hookrightarrow y) \le y$ ،

C۱۰) اگر $x \le y$، آنگاه $x \odot z \le y \odot z$ و $z \odot x \le z \odot y$ ،

C۱۱) $(x \to y) \odot x \le x \wedge y$ و بالاخص، $x^{-} \odot x = 0$،

C۱۲) $x \odot (x \hookrightarrow y) \le x \wedge y$ و بالاخص، $x \odot x^{\sim} = 0$،

C۱۳) اگر $x \le y$، آنگاه $z \hookrightarrow x \le z \hookrightarrow y$ و $z \to x \le z \to y$،

C۱۴) اگر $x \le y$، آنگاه $y \hookrightarrow z \le x \hookrightarrow z$ و بالاخص، $y^{\sim} \le x^{\sim}$ ،

C۱۵) اگر $x \le y$،آنگاه $y \to z \le x \to z$ و بالاخص، $y^{-} \le x^{-}$،

C۱۶) $x \to y \le (y \to z) \hookrightarrow (x \to z)$ و بالاخص ، $x \to y \le y^{-} \to x^{-}$،

C۱۷) $x \hookrightarrow y \le (y \hookrightarrow z) \to (x \hookrightarrow z)$ و بالاخص، $x \hookrightarrow y \le y^{\sim} \hookrightarrow x^{\sim}$،

C۱۸) $x \to y \le (z \to x) \hookrightarrow (z \to y)$ ،

C۱۹) $x \hookrightarrow y \le (z \hookrightarrow x) \to (z \hookrightarrow y)$ ،

C۲۰) $z \odot (x \wedge y) \le (z \odot x) \wedge (z \odot y)$،

C۲۱) $(x \wedge y) \odot z \le (x \odot z) \wedge (y \odot z)$،

C۲۲) $x \to y \le (x \odot z) \to (y \odot z)$، C۲۳) $x \hookrightarrow y \leq (z \odot x) \hookrightarrow (z \odot y)$،

C۲۴) $(x \hookrightarrow y) \odot (y \hookrightarrow z) \leq x \hookrightarrow z$،

C۲۵) $(y \to z) \odot (x \to y) \leq x \to z$،

C۲۶) $x \odot (y \to z) \leq y \to (x \odot z)$،

C۲۷) $(y \hookrightarrow z) \odot x \leq y \hookrightarrow (x \odot z)$،

C۲۸) $(x \to y) \odot (x' \to y') \leq (x \vee x') \to (y \vee y')$،

C۲۹) $(x \hookrightarrow y) \odot (x' \hookrightarrow y') \leq (x \vee x') \hookrightarrow (y \vee y')$،

C۳۰) $(x \to y) \odot (x' \to y') \leq (x \wedge x') \to (y \wedge y')$،

C۳۱) $(x \hookrightarrow y) \odot (x' \hookrightarrow y') \leq (x \wedge x') \hookrightarrow (y \wedge y')$،

C۳۲) $x \leq x^{\sim -}$ و $x \leq x^{- \sim}$،

C۳۳) $x \leq x^{-} \hookrightarrow y$ و $x \leq x^{\sim} \to y$،

C۳۴) $x \hookrightarrow y \leq y^{\sim} \to x^{\sim}$ و $x \to y \leq y^{-} \hookrightarrow x^{-}$،

C۳۵) $x^{- \sim -} = x^{-}$ و $x^{\sim - \sim} = x^{\sim}$،

C۳۶) $x \odot (\bigvee_{i \in I} y_i) = \bigvee_{i \in I} (x \odot y_i)$،

C۳۷) $(\bigvee_{i \in I} y_i) \odot x = \bigvee_{i \in I} (y_i \odot x)$،

C۳۸) $(\bigvee_{i \in I} x_i) \hookrightarrow y = \bigwedge_{i \in I} (x_i \hookrightarrow y)$،

C۳۹) $(\bigvee_{i \in I} x_i) \to y = \bigwedge_{i \in I} (x_i \to y)$،

C۴۰) $y \hookrightarrow (\bigwedge_{i \in I} x_i) = \bigwedge_{i \in I} (y \hookrightarrow x_i)$،

C۴۱) $y \to (\bigwedge_{i \in I} x_i) = \bigwedge_{i \in I} (y \to x_i)$،

C۴۲) $(x \vee y)^{\sim} = x^{\sim} \wedge y^{\sim}$ و $(x \vee y)^{-} = x^{-} \wedge y^{-}$،

C۴۳) $(x \wedge y)^{\sim} \geq x^{\sim} \vee y^{\sim}$ و $(x \wedge y)^{-} \geq x^{-} \vee y^{-}$،

C۴۴) $y^{-} \hookrightarrow x^{-} = x^{- \sim} \to y^{- \sim} = x \to y^{- \sim}$، C۴۵) $y^{\sim} \to x^{\sim} = x^{\sim -} \hookrightarrow y^{\sim -} = x \hookrightarrow y^{\sim -}$،

C۴۶) $x \vee y \leq [(x \to y) \hookrightarrow y] \wedge [(y \hookrightarrow x) \to x])$ ،

C۴۷) $x \vee y \leq [(x \hookrightarrow y) \to y] \wedge [(y \to x) \hookrightarrow x]$،

C۴۸) $x \vee y \leq [(x \to y) \hookrightarrow y] \wedge [(y \to x) \hookrightarrow x]$،

C۴۹) $x \vee y \leq [(x \hookrightarrow y) \to y] \wedge [(y \hookrightarrow x) \to x]$،

C۵۰) اگر $x \vee y = ۱$ ، آنگاه $x \to y = x \hookrightarrow y$.

۱-۲ فیلترها و فیلترهای نرمال

در این بخش ابتدا تعریف فیلتر در یک مشبکه مانده ای را معرفی کرده و سپس در ادامه چند نوع فیلتر و ویژگیها و روابط بین فیلترها را ارائه خواهیم کرد.برای جزئیات بیشتر به [۲] مراجعه نمائید.

تعریف۱-۲-۱ فرض کنیم، Lیک مشبکه مانده ای وF زیر مجموعه ای ناتهی ازL باشد.F را یک **فیلتر** از L می نامیم،هرگاه برای هر $x, y \in L$ داشته باشیم:

F۱) به ازای هر $x, y \in F$، $x \odot y \in \mathrm{F}$ و $y \odot x \in \mathrm{F}$ ،

F۲)اگر$x \leq y$ و $x \in \mathrm{F}$، آنگاه$y \in \mathrm{F}$.

بوضوح {۱}وL دو فیلتر ازL هستند.

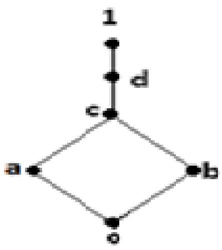
مثال۱-۲-۲ فرض کنیم$\mathrm{L} = \{ 0, a, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, ۱\}$یک مشبکه باشدکه نمودار ها سه آن در شکل ۱-۲-۲ آمده است.همچنین فرض کنیم عملهای$\odot, \to, \hookrightarrow$ طبق جداول۱-۲-۲داده شده باشند. در اینصورت $(L, \odot, \vee, \wedge, \to, \hookrightarrow, 0, ۱)$ یک مشبکه مانده ای است و$\{۱, d\}$یک فیلتر از L است.

جداول ۱-۲-۲

$\odot$	0	a	b	c	d	۱
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a	a
b	0	0	0	0	b	b
c	0	0	0	0	c	c
d	0	0	0	0	d	d
۱	0	a	b	c	d	۱

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	۱
0	۱	۱	۱	۱	۱	۱
a	d	۱	d	۱	۱	۱
b	d	d	۱	۱	۱	۱
c	d	d	d	۱	۱	۱
d	0	a	b	c	۱	۱
۱	0	a	b	c	d	۱

$\hookrightarrow$	0	a	b	c	d	۱
0	۱	۱	۱	۱	۱	۱
a	c	۱	c	۱	۱	۱
b	c	c	۱	۱	۱	۱
c	c	c	c	۱	۱	۱
d	c	c	c	c	۱	۱
۱	0	a	b	c	d	۱



شکل ۱-۲-۲

قضیه ۱-۲-۳ فرض کنیم F زیر مجموعه ای ناتهی از L باشد.در اینصورت F یک فیلتر از L است اگر و تنها اگر گزاره های F۳ یا F۴ زیر برای هر $x, y \in L$ برقرار باشند:

F۳) $۱ \in F$، $x \in F$ و $x \rightarrow y \in F$ نتیجه دهند $y \in F$،

F۴) $۱ \in F$ و $x \in F$ و $x \hookrightarrow y \in F$ نتیجه دهند $y \in F$.

قضیه ۱-۲-۴ فرض کنیم F زیر مجموعه ای ناتهی از L باشد.در اینصورت F یک فیلتر از L است، اگر و تنها اگر گزاره زیر برقرارباشد:

F۵) برای هر $x,y,z \in L$ اگر $x,y \in F$ و $x \odot y \leq z$ ، آنگاه $z \in F$.

تعریف۱-۲-۵ فرض کنیم F یک فیلتر از L باشد. F را **نرمال** می نامیم،هرگاه به ازای هر $x,y \in L$،داشته باشیم $x \to y \in \mathrm{F}$ اگر و تنها اگر $x \hookrightarrow y \in \mathrm{F}$.

بوضوح $\{۱\}$ و L فیلترهای نرمالی از L هستند.

مثال۱-۲-۶ فرض می کنیم $L = \{\mathbf{0}, a, b, c, ۱\}$ یک مشبکه بوده به طوریکه $\mathbf{0} < a < b < c < ۱$ و عملهای $\odot$ و $\to$ و $\hookrightarrow$ مطابق جداول ۱-۲-۶ داده شده باشند.در این صورت $(L,\odot,\vee,\wedge,\to,\hookrightarrow,\mathbf{0},۱)$ $L =$ یک مشبکه مانده ای بوده می توان تحقیق کرد که در آن $\{b, c, ۱\}$ یک فیلتر نرمال از L است.

جداول ۱-۲-۶

$\odot$	$\mathbf{0}$	a	b	c	۱
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
a	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	a
b	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	b	b	b
c	$\mathbf{0}$	a	b	c	c
۱	$\mathbf{0}$	a	b	c	۱

$\to$	$\mathbf{0}$	a	b	c	۱
$\mathbf{0}$	۱	۱	۱	۱	۱
a	b	۱	۱	۱	۱
b	a	a	۱	۱	۱
c	a	a	b	۱	۱
۱	$\mathbf{0}$	a	b	c	۱

$\hookrightarrow$	$\mathbf{0}$	a	b	c	۱
$\mathbf{0}$	۱	۱	۱	۱	۱
a	c	۱	۱	۱	۱
b	a	a	۱	۱	۱
c	$\mathbf{0}$	a	b	۱	۱
۱	$\mathbf{0}$	a	b	c	۱

فرض کنیم F یک فیلتر نرمال از مشبکه L باشد.رابطه $\equiv_{\mathrm{F}}$ روی L را به صورت زیرتعریف می کنیم:

$$x \equiv_F y \Leftrightarrow (x \hookrightarrow y \in \mathrm{F} \text{ و } y \hookrightarrow x \in F)$$

در این صورت $\equiv_{\mathrm{F}}$ یک رابطه همنهشتی روی L است.

فرض کنیم L/F مجموعه تمام کلاس های هم ارزی رابطه هم ارزی$\equiv_{\mathrm{F}}$ باشد .در اینصورت L/F به همراه عملهای تعریف شده در زیر یک مشبکه مانده ای است ، که مشبکه مانده ای خارج قسمتی نامیده میشود .

$$[x] \leq [y] \Leftrightarrow x \to y \in F \ \Leftrightarrow x \hookrightarrow y \in F$$
$$[x] \odot [y] = [x \odot y]$$
$$[x] \vee [y] = [x \vee y]$$
$$[x] \wedge [y] = [x \wedge y]$$
$$[x] \to [y] = [x \to y]$$
$$[x] \hookrightarrow [y] = [x \hookrightarrow y]$$

۱-۳فیلترهای بولی و فیلترهای استلزامی

مطالب این قسمت از منابع [۴]و[۱۱]و[۱۸] گرفته شده اند.

تعریف۱-۳-۱فرض کنیمFیک فیلتر ازL باشد، Fرا **فیلتر بولی** گوئیم هرگاه برای هر $x \in L$ داشته باشیم: $x \vee x^{-} \in F$ و $x^{\sim} \vee x \in F$.

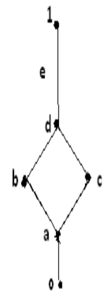
مثال۱-۳-۲فرض می کنیم$\mathrm{L}=\{0, a, b, c, d, e, ۱\}$یک مشبکه باشد که نمودار هاسه آن طبق شکل ۱-۳-۲داده شده است و نیز فرض کنیم عمل های دوتائی$\odot$و$\to$و$\hookrightarrow$ طبق جداول ۱-۳-۲ تعریف شده باشند. در این صورت $(L,\wedge,\vee,\odot,\to,\hookrightarrow,۰,۱)$یک مشبکه مانده ای است و همچنین می توان تحقیق کرد$\{۱, e, d, c, b, a\}$ یک فیلتر بولی از L است.

جدول ۱-۳-۲

$\to$	0	a	b	c	d	e	۱
0	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
a	0	۱	۱	۱	۱	۱	۱
b	0	d	۱	d	۱	۱	۱
c	0	b	b	۱	۱	۱	۱
d	0	b	b	d	۱	۱	۱
e	0	b	b	d	d	۱	۱
۱	0	a	b	c	d	e	۱

$\odot$	0	a	b	c	d	e	۱
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a	a	a
b	0	a	a	a	a	a	b
c	0	a	a	c	c	c	c
d	0	a	a	c	c	c	d
e	0	a	b	c	d	e	e
۱	0	a	b	c	d	e	۱

$\hookrightarrow$	0	a	b	c	d	e	۱
0	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
a	0	۱	۱	۱	۱	۱	۱
b	0	e	۱	e	۱	۱	۱
c	0	b	b	۱	۱	۱	۱
d	0	b	b	e	۱	۱	۱
e	0	a	b	c	d	۱	۱
۱	0	a	b	c	d	e	۱



شکل ۱-۳-۲

برای مطالعه بیشتر در فیلترهای بولی به [۱۲] مراجعه نمائید.

تعریف۱-۳-۳ فرض کنیم F فیلتری ازLباشدFرا **فیلتر استلزامی** می نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in L$،

IF۱) اگر $y \hookrightarrow z \in F$ و $(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in F$،آنگاه $x \hookrightarrow z \in F$.

IF۲) اگر $y \to z \in \mathrm{F}$ و $(z^{-} \odot x) \to y \in F$ ، آنگاه $x \to z \in \mathrm{F}$.

به آسانی می توان بررسی کرد که فیلتر$\{۱, e, d, c, b, a\}$در مثال ۱-۳-۲یک فیلتر استلزامی است.

قضیه۱-۳-۴فرض کنیم Fیک فیلتر ازL باشد.در اینصورتF استلزامی است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in L$ شرایط زیر بر قرار باشند:

IF۳) اگر $(x \odot y^{\sim}) \hookrightarrow y \in F$ ، آنگاه $x \hookrightarrow y \in F$ ،

IF۴) اگر $(y^{-} \odot x) \to y \in F$، آنگاه $x \to y \in F$.

نتیجه۱-۳-۵ فرض کنیم F یک فیلتر از L باشد در اینصورت Fیک فیلتر استلزامی است اگر و تنها اگر برای هر $x, y, z \in L$ ،

IF۵) هر گاه $(y^{\sim} \hookrightarrow (x \hookrightarrow y)) \in F$، آنگاه $x \hookrightarrow y \in F$ ،

IF۶) هرگاه $(y^{-} \rightarrow (x \rightarrow y)) \in F$ ، آنگاه $x \rightarrow y \in F$.

قضیه۱-۳-۶فرض کنیم F و G دو فیلتر از L باشند ، به طوریکه F ⊂ G.اگر F فیلتر استلزامی باشد، آنگاهG نیز فیلتر استلزامی است.

۱- ۴ فیلترهای استلزامی مثبت[۱۲]

تعریف ۱-۴-۱زیر مجموعه ناتهی F از مشبکه مانده ایL را یک **فیلتراستلزامی مثبت** می نامیم،هرگاه به ازای هر $x, y, z \in L$ داشته باشیم:

PIF۱) $۱ \in F$

PIF۲) $x \hookrightarrow y \in F$ و $(x \odot y) \hookrightarrow z \in F$، نتیجه دهد $x \hookrightarrow z \in F$ ،

PIF۳) $x \rightarrow y \in F$ و $(y \odot x) \rightarrow z \in F$، نتیجه دهد $x \rightarrow z \in F$.

مثال۱-۴-۲در مثال ۱-۳-۲ ، می توان تحقیق کرد که $\{۱, e, d, c, b, a\}$ و $\{۱, e, d, c\}$ فیلترهای استلزامی مثبت هستند.

قضیه۱-۴-۳هر فیلتر استلزامی مثبت،یک فیلتر است.

نکته۱-۴-۴ عکس قضیه۱-۴-۳ممکن است در حالت کلی درست نباشد.در مثال۱-۲-۲می توان تحقیق کرد که $\{۱, d\}$ فیلتری از L است ولی فیلتر استلزامی مثبت نیست.زیرا ، مثلا $a \hookrightarrow \mathbf{0} = c \notin \{۱, d\}$ در حالی که:

$$a \hookrightarrow a = ۱ \in \{۱, d\} \text{ و } (a \odot a) \hookrightarrow \mathbf{0} = ۱ \in \{۱, d\}$$

قضیه۱-۴-۵ فرض کنیم Fیک فیلتر ازLباشد.در اینصورت F یک فیلتر استلزامی مثبت است اگر و تنها اگربرای هر$x, y \in L$شرایط زیر بر قرار باشند:

PIF۴) $(x \odot x) \hookrightarrow y \in F$، نتیجه دهد$x \hookrightarrow y \in F$ ،

PIF۵) $(x \odot x) \rightarrow y \in F$، نتیجه دهد$x \rightarrow y \in F$.

نتیجه۱-۴-۶ فرض کنیم F یک فیلتر از L باشد.در اینصورت F یک فیلتر استلزامی مثبت است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in L$ داشته باشیم:

PIF۶) $x \hookrightarrow (x \hookrightarrow y) \in F$، نتیجه دهد$x \hookrightarrow y \in F$ ،

PIF۷) $x \rightarrow (x \rightarrow y) \in F$، نتیجه دهد$x \rightarrow y \in F$.

لم۱-۴-۷ فرض کنیدFیک فیلترنرمال از L باشد.در اینصورت برای هر$x, y, z \in L$ گزاره های زیر معادلند:

۱) اگر $x \hookrightarrow y \in F$ و $(x \odot y) \hookrightarrow z \in F$، آنگاه $x \hookrightarrow z \in F$.

۲) اگر $x \rightarrow y \in F$ و $(y \odot x) \rightarrow z \in F$، آنگاه $x \rightarrow z \in F$.

قضیه۱-۴-۸ فرض کنیمFیک فیلترنرمال باشد، در اینصورتF فیلتر استلزامی است اگر و تنها اگر برای هر$a \in L$ ، $F_a = \{x \in L: a \hookrightarrow x \in F\}$یک فیلترباشد($F_a$رافیلترتولیدشده توسط$a$وF می نامند).

قضیه۱-۴-۹فرض کنیمF و G دوفیلتر ازLباشند به طوریکه:$F \subset G$ اگر F فیلتر استلزامی مثبت باشد.در اینصورت G نیز یک فیلتر استلزامی مثبت است.

فصل ۲

فیلترهای $(\alpha,\beta)_T-$ فازی درمشبکه های ماندهای

تعویض ناپذیر

مفهوم مجموعه فازی اولین بارتوسط پروفسور زاده دانشمند ایرانی، در سال ۱۹۶۵مطرح شد.همچنین روزنفلد[۱] که پدر جبر مجرد نام گرفته است نظریه زیر مجموعه های فازی را در مجموعه های با کران پائین مورد استفاده قرار دادند. از طرفی دیگر در سال۱۹۹۸ موردسون[۲] در ادامه راه دانشمندان دیگـر این علم، موفق به انتشارکتاب جبرفازی تعویض پذیر شد.در این مبحث ابتـدا بـه طورمختصـر تعریـف مجموعــه فــازی و ســپس تعریــف t- نــرم و انــواع آنهــا را بیــان خــواهیم کــرد. ســپس مفهــوم فیلترهای$(\alpha,\beta)_T$ فازی و چندنوع از آنها را بیان می کنیم.

۲-۱ فیلترهای$(\alpha,\beta)_{\mathrm{T}}$- فازی و چندنوع مهم آنها

تعریف[۹] **۲-۱-۱** تابع $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ یکt- نرم نامیده می شود هرگاه به ازای هر $x,y,z\in[0,1]$ ویژگی های زیر برقرار باشند:

T_1) $T(x,1)=x$

T_2) اگر $y\le z$، آنگاه $T(x,y)\le T(x,z)$

T_3) $T(x,y)=T(y,x)$

T_4) $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$

اساسی ترینt- نرم ها عبارتند از:

(۱) $$T_D(x,y)=\begin{cases} x\wedge y & : x\vee y=1 \\ 0 & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

(۲) $$T_L(x,y)=0\vee(x+y-1)$$

(۳) $$T_P(x,y)=xy$$

(۴) $$T_M(x,y)=x\wedge y$$

برای دو t- نرمT_1 و T_2 را میگوئیم T_1 از T_2 کوچکتر است و به صورت $T_1\le T_2$ نمایش مـی دهـیم اگر برای هر$(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$، داشته باشیم : $T_1(x,y)\le T_2(x,y)$.

۱-Azriel Rosenfeld

۲-John N Mordeson

$T_۲ < T_۱$ یعنی $T_۱ \leq T_۲$ و $T_۱ \neq T_۲$.

رابطه این چهارt- نرم نسبت به هم عبارت است از:$T_D < T_L < T_P < T_M$.

تعریف۲-۱-۲فرض کنیم $r \in]۰,۱]$ و $x \in L$.زیر مجموعه فازی μ از مجموعه L با ضابطه $\mu(x) = \mathrm{r}$ و برای هر$y \in L - \{x\}$ ، $\mu(y) = ۰$. یک **نقطه فازی**نامیده می شود و آن را با x_r نمایش می دهیم.

قرارداد۲-۱-۳فرض کنیم $x \in L$، $r \in]۰,۱]$ و μ یک زیر مجموعه فازی از L باشد. در این صورت:

۱)$x_r \in \mu$ یعنی $\mu(x) \geq r$.

۲)$x_r q \mu$ یعنی $\mu(x) + r > ۱$.

۳)$x_r \in\wedge q\mu$ یعنی $x_r \in \mu$و$x_r q\mu$.یا به عبارت دیگر $\mu(x)$=Max{r,۱-r} .

۴)$x_r \in\vee q\mu$ یعنی $x_r \in \mu$ یا $x_r q\mu$.یا به عبارت دیگر $\mu(x)$=Min{r,۱-r} .

۵)$x_r \overline{\alpha} \mu$ یعنی $x_r \alpha \mu$ برقرار نیست که $\alpha \in \{\in, q, \in\wedge q, \in\vee q\}$.

تعریف۲-۱-۴فرض کنیم Tیک t- نرم وμ زیر مجموعه فازی ازL باشد. μ را یک **فیلتر$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})_T$– فازی**گوئیم اگر به ازای هر$\mathrm{r, s} \in]۰,۱]$ و $x, y, z \in L$گزاره های زیر برقرار باشند:

($\alpha, \beta \in \{\in, q, \in\wedge q, \in\vee q\}$)

۱) اگر $x_r \alpha \mu$ و$y_s \alpha \mu$، آنگاه $(x \odot y)_{\mathrm{T(r,s)}} \beta \mu$ و $(y \odot x)_{T(r,s)} \beta \mu$.

۲) اگر $x \leq y$ و $x_r \alpha \mu$، آنگاه $y_r \beta \mu$.

قرارداد۲-۱-۵ اگر$\mathrm{T} = \wedge$،به جای$(\alpha, \beta)_T$ از نماد(α, β) استفاده می کنیم.به عنوان اولین نتیجه ارتباط بین یک فیلتر و تابع مشخصه آن را بیان می کنیم .

قضیه۲-۱-۶ زیر مجموعه ناتهیF ازL یک فیلتر است اگر و تنها اگرχ_F یک فیلتر $(\alpha, \beta)_T$- فازی باشد.

برهان$\Leftarrow$ ابتدا فرض می کنیم χ_F یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی بوده و $x,y\in F$.در اینصورت داریم:

$\chi_F(x)=۱$ و $\chi_F(y)=۱$ و لذا به ازای هر $r,s\in]۰,۱]$ داریم $\chi_F(x)\geq r$ و $\chi_F(y)\geq s$

در نتیجه $x_r\in\chi_F$ و $y_s\in\chi_F$ در اینصورت $(x\odot y)_{T(r,s)}\in\chi_F$ و همچنین

$(y\odot x)_{T(r,s)}\in\chi_F$ پس $\chi_F(x\odot y)\geq T(r,s)>۰$ و $\chi_F(y\odot x)\geq T(r,s)>۰$.

و لذا $\chi_F(x\odot y)=۱$ و $\chi_F(y\odot x)=۱$.بنابراین $x\odot y\in F$ و $y\odot x\in F$.

حال اگر $x\leq y$ و $x\in F$، آنگاه $\chi_F(x)=۱\geq r$ که از آنجا داریم $x_r\in\chi_F$.در نتیجه $y_r\in\chi_F$ یعنی $y\in F$.

$\Rightarrow$ حال فرض می کنیم F یک فیلتر از L باشد و $x_r\alpha\chi_F$ و $y_s\alpha\chi_F$.دو حالت زیر را برای α در نظر می گیریم:

الف) α =∈. در اینصورت داریم $x_r\in\chi_F(x)$ و $y_s\in\chi_F(x)$ و لذا $\chi_F(x)\geq r>۰$ و $\chi_F(y)\geq s>۰$ در نتیجه $\chi_F(x)=۱$ و $\chi_F(y)=۱$.در نتیجه $x,y\in F$.پس $x\odot y\in F$ و $y\odot x\in F$. از اینرو $\chi_F(x\odot y)=۱\geq T(r,s)$ و $\chi_F(y\odot x)=۱\geq T(r,s)$ و این یعنی $(x\odot y)_{T(r,s)}\in\chi_F$ و $(y\odot x)_{T(r,s)}\in\chi_F$.

حال اگر $x_r\in\chi_F$ و $x\leq y$، آنگاه $\chi_F(x)\geq r>۰$ در نتیجه $x\in F$ که ایجاب می کند $y\in F$.

پس داریم: $\chi_F(y)=۱\geq s$ و لذا $y_r\in\chi_F(x)$.

ب) $\alpha=q$.در اینصورت $x_r q\chi_F$ و $y_s q\chi_F$ در نتیجه $\chi_F(x)+r>۱$ و $\chi_F(y)+s>۱$.

بنابراین $\chi_F(x)>۱-r>۰$ و $\chi_F(y)>۱-s>۰$ در نتیجه $x,y\in F$ و لذا $x\odot y\in F$ و $y\odot x\in F$.پس $\chi_F(x\odot y)+T(r,s)>۱$ و $\chi_F(y\odot x)+T(r,s)>۱$ که نشان می دهد:

$(x\odot y)_{T(r,s)}q\chi_F$ و $(y\odot x)_{T(r,s)}q\chi_F$. بنابراین $(x\odot y)_{T(r,s)}\beta\chi_F$ و $(y\odot x)_{T(r,s)}\beta\chi_F$، برای هر $\beta\in\{\in,q,\in\wedge q,\in\vee q\}$.

همانند قسمت الف می توان ثابت کرد که اگر $x_{\text{r}}q\chi_{\text{F}}$ و $x \leq y$، آنگاه $y_{\text{s}}q\chi_{\text{F}}$.

حالتهای $q \wedge \in = \alpha$ و $q \vee \in = \alpha$ نیز مانند دو حالت فوق ثابت می شوند.

تعریف۲-۱-۷زیر مجموعه فازیμ ازLیک**سیستم استنتاجی** $(\alpha,\beta)_T$- فازی نامیده می شود

هرگاه:

۱) $۱_r\alpha\mu$،

۲)$x_{\text{r}}\alpha\mu$ و $(x \hookrightarrow y)_s\alpha\mu$یا $(x \to y)_s\alpha\mu$، نتیجه دهد $y_{T(r,s)}\beta\mu$.

قضیه۲-۱-۸ هر فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازیμ از L در شرایط زیر صدق می کند:

(۱) اگر $z \geq x \odot y \wedge y \odot x$، آنگاه $z_{T(r,s)}\beta\mu$،

(۲) اگر $۱_r\alpha\mu$ و$x_r\alpha\mu$ و$y_s\alpha\mu$ برای هر $z \in L$ که $x \to (y \to z) = ۱$ یا

$x \hookrightarrow (y \hookrightarrow z) = ۱$،آنگاه $z_{T(r,s)}\beta\mu$.

(۳) μ یک سیستم استنتاجی$(\alpha,\beta)_T$– فازی است.

برهان: درستی(۱) از تعریف فیلتر$(\alpha,\beta)_T$- فازی نتیجه می شود.

(۲) فرض کنیم$x_r\alpha\mu$ و $y_s\alpha\mu$ در نتیجه بنابر تعریف $(x \odot y)_{\text{T(r,s)}}\beta\mu$و

$(y \odot x)_{T(r,s)}\beta\mu$.اگر$z \in \text{L}$ چنان باشد که$x \to (y \to z) = ۱$، آنگاه

$(x \odot y) \to z = ۱$ و لذا $x \odot y \leq z$ و$z \geq x \odot y \wedge y \odot x$ که از آنجا طبق (۱)،

$z_{T(r,s)}\beta\mu$.

به همین ترتیب اگر$x \hookrightarrow (y \hookrightarrow z) = ۱$، آنگاه$(y \odot x) \hookrightarrow z = ۱$ و لذا

$y \odot x \leq z$ در نتیجه $z_{T(r,s)}\beta\mu$.

درستی(۳) از (۲) و اینکه$(y \to x) \to (y \to x) = ۱ = (y \hookrightarrow x) \hookrightarrow (y \hookrightarrow x)$

نتیجه می شود.

نتیجه۲-۱-۹برای هر فیلتر $(\alpha,\beta)_T$ - فازی μ ازLگزاره های زیر برقرارند:

۱) $\mu_{\alpha r}$ ۱ برای هر $r \in]0,1]$ ،

۲) اگر $\mu_{\alpha s}(y \hookrightarrow z)$ و $\mu_{\alpha r}(x \hookrightarrow y)$ ،آنگاه $\mu_{\beta T(r,s)}(x \hookrightarrow z)$،

۳) اگر $\mu_{\alpha r}(x \to y)$ و $\mu_{\alpha s}(y \to z)$ ، آنگاه $\mu_{\beta T(r,s)}(x \to z)$،

۴) اگر $\mu_{\alpha r}y$ و $\mu_{\alpha s}y^{-}$ یا $\mu_{\alpha s}y^{\sim}$ ، آنگاه $\mu_{\beta T(r,S)}0$.

برهان: درستی(۱) از قضیه ۲-۱-۸ نتیجه می شود.

(۲) با فرض $\mu_{\alpha r}(x \hookrightarrow y)$ و $\mu_{\alpha s}(y \hookrightarrow z)$ نتیجه می شودکه:

$\mu_{\beta T(r,s)}((x \hookrightarrow y) \odot (y \hookrightarrow z))$.از طرفی طبق(C۲۵) داریم:

$(x \hookrightarrow y) \odot (y \hookrightarrow z) \leq x \hookrightarrow z$ لذا $\mu_{\beta T(r,s)}(x \hookrightarrow z)$.

درستی نیز (۳) همانند (۲) بررسی می شود.

(۴) فرض کنیم $\mu_{\alpha r}y$ و $\mu_{\alpha s}y^{-}$ یا $\mu_{\alpha s}y^{\sim}$.در نتیجه $y \odot y^{-} = 0$ و $y^{\sim} \odot y = 0$ لذا طبق قضیه ۲-۱-۸ (۲) داریم $\mu_{\beta T(r,S)}0$.

قضیه۲-۱-۱۰ در هر مشبکه مانده ای گزاره های زیر همواره برقرارند:

۱) هر فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی یک فیلتر $(\alpha, \in\vee q)_T$- فازی است.

۲) هر فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی یک فیلتر $(\in\wedge q, \in\vee q)_T$- فازی است.

۳) هر فیلتر $(\in\vee q, \in\vee q)_T$- فازی یک فیلتر $(\alpha, \in\vee q)_T$ - فازی است.

۴) هر فیلتر $(\alpha, \in\wedge q)_T$ - فازی یک فیلتر $(\alpha, \in)_T$ - فازی و فیلتر $(\alpha, q)_T$ - فازی است.

برهان. مستقیما ازتعریف نتیجه میشود.

قضیه۲-۱-۱۱ به ازای هر فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی μ در L،

$\mathrm{supp}(\mu) = \{x \in L : \mu(x) > 0\}$ یک فیلتر از L است.($\alpha \neq \in\wedge q$)

برهان: فرض کنیم $x, y \in \mathrm{supp}(\mu)$. در نتیجه $\mu(x) > 0$ و $\mu(y) > 0$. دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

الف) $\alpha \in \{\in, \in \vee q\}$. پس $x_{\mu(x)} \alpha \mu$ و $y_{\mu(y)} \alpha \mu$ بنابراین $(x \odot y)_{T(\mu(x),\mu(y))} \beta \mu$.

الف۱)فرض می کنیم $\beta = \in$،در اینصورت $\mu(x \odot y) \geq T(\mu(x), \mu(y)) > ۰$ که نتیجه می شود $x \odot y \in supp(\mu)$.

الف۲) اگر $\beta = q$ ، در اینصورت $\mu(x \odot y) + T(\mu(x), \mu(y)) > ۱$ و همچنین $\mu(x \odot y) > ۱ - T(\mu(x), \mu(y)) > ۰$ که از آنجا نتیجه می شود $x \odot y \in supp(\mu)$.

ب) $\alpha = q$ ، از $x_۱ q\mu$ و $y_۱ q\mu$ نتیجه می شود که $(x \odot y)_۱ \mu\beta$.شبیه حالت الف می توان ثابت کرد $x \odot y \in supp(\mu)$.

ج) $\alpha = \in \vee q$. درستی این قسمت از دو حالت قبلی نتیجه می شود.

نکته۲-۱-۱۲فرض کنید μ یک فیلترفازی از L باشد، به طوریکه به ازای هر $x \in L$ داشته باشیم:$\mu(x) \leq ۱/۲$ در اینصورت :

اگر $x_r \in \wedge q \mu$، آنگاه $\mu(x) \geq r$ و $\mu(x) + r > ۱$ که از آنجا

$۱ < \mu(x) + r \leq \mu(x) + \mu(x) = ۲\mu(x)$ و لذا $\mu(x) > ۱/۲$، که یک تناقض است.

بنابراین در تعریف۲-۱-۴حالت $\alpha = \in \wedge q$ در نظرگرفته نمی شود.

قضیه۲-۱-۱۳فرض کنیم μ یک زیر مجموعه فازی از L باشد بطوریکه به ازای هر $x \in supp(\mu)$ داشته باشیم $\mu(x) = ۱$ در اینصورت μ یک فیلتر (α, β)- فازی است. ($\alpha \neq \in \wedge q$).

برهان.ثابت می کنیم که μ یک فیلتر $(\in, \in \wedge q)$- فازی از L است.

برای این منظور فرض کنیم، $x_r \in \mu$ و $y_s \in \mu$، که $x, y \in L, r, s \in]۰,۱]$.در نتیجه:

$\mu(x) \geq r > ۰$ و $\mu(y) \geq s > ۰$ و لذا $x, y \in supp(\mu)$. در نتیجه $x \odot y \in supp(\mu)$ و لذا: $\mu(x \odot y) = ۱ \geq r \wedge s$ و $\mu(x \odot y) = ۱ \geq r \wedge s$

که از آنجا نتیجه می شود: $(x \odot y)_{r\wedge s} \in\wedge q$.

اکنون فرض می کنیم $x \leq y$ و $y_r \in \mu$، آنگاه $\mu(y) \geq r > ۰$ که ایجاب می کند $y \in \mathrm{supp}(\mu)$. چون $\mathrm{supp}(\mu)$ یک فیلتر از L است لذا $x \in \mathrm{supp}(\mu)$. از اینرو $\mu(x) = ۱$. در نتیجه برای هر $r \in]۰,۱]$ داریم $\mu(x) + r > ۱$ و $\mu(x) \geq r$ و لذا $x_r \in\wedge q\mu$، که نشان می دهد μ یک فیلتر $(\in, \in\wedge q)$- فازی است .

اثبات حالت های دیگرمشابها انجام می شود.

تعریف۲-۱-۱۴ فرض می کنیم μ یک زیرمجموعه فازی از L باشد و $r \in]۰,۱]$. در اینصورت زیر مجموعه های $\mu_r^{\in}$ و μ_r^{q} و $\mu_r^{\in\vee q}$ از L را چنین تعریف می کنیم :

$$\mu_r^{\in}=\{x\in L: x_r \in \mu\}$$

$$\mu_r^{q} = \{x \in L: x_r q\mu\}$$

$$\mu_r^{\in\vee q} = \{x \in L: x_r \in\vee q\mu\}$$

نکته: بوضوح $\mu_r^{\in}\cup\mu_r^{q} = \mu_r^{\in\vee q}$ و $\mu_r^{\in} = \mu_r$

در ادامه انواع $(\alpha, \beta)_{\mathrm{T}}$- فیلترهای فازی را مورد مطالعه قرار میدهیم .

۲-۲ فیلترهای $(\in, \in)_T$- فازی

تعریف۲-۲-۱ یک زیر مجموعه فازی μ از L را یک **فیلتر $(\in, \in)_T$-فازی** گوئیم هرگاه به ازای هر $x, y \in L$ و $r, s \in [۰,۱]$ دو شرط زیر برقرار باشند:

(۱) اگر $x_r \in \mu$ و $y_s \in \mu$، آنگاه $(x \odot y)_{T(r,s)} \in \mu$ و $(y \odot x)_{T(r,s)} \in \mu$،

(۲) اگر $x \leq y$ و $x_r \in \mu$ ، آنگاه $y_r \in \mu$.

مثال۲-۲-۲ فرض می کنیم $L = \{۰, a, b, c, d, ۱\}$ مشبکه مانده ای مثال ۱-۲-۲ باشد

زیر مجموعه فازی γ از L را طوری تعریف می کنیم که:

$$\gamma(۰) = \gamma(a) = \gamma(b) = \gamma(c) = \frac{۱}{۲} \text{ و } \gamma(d) = \frac{۴}{۵} \text{ و } \gamma(۱) = ۱$$

در اینصورت γ یک فیلتر $(\in,\in)_M$– فازی از L است.

قضیه۲-۲-۳ هر زیر مجموعه فازی μ از L که در یکی از شرایط قضیه۲-۱-۸ صدق می کند.برای $\in = \beta = \alpha$ و T=∧ یک فیلتر (∈,∈)- فازی است.

برهان: فرض می کنیم μ یک سیستم استنتاجی $(\in,\in)$- فازی باشد و $x_r \in \mu$ و $x \leq y$. در اینصورت $x \to y = ۱$. بنابراین $(x \to y)_r \in \mu$ و از اینرو $y_r \in \mu$.

حال فرض می کنیم $x_r \in \mu$ و $y_s \in \mu$. از اینکه

$x = x \odot (y \to y) \leq y \to (x \odot y)$ نتیجه می شود، که $(y \to (x \odot y))_r \in \mu$.

بنابراین $(x \odot y)_{r \wedge s} \in \mu$. اثبات دیگر حالتها به طور مشابه انجام می شود.

قضیه۲-۲-۴ هرفیلتر $(\in,\in)_T$- فازی μ از L در شرایط زیر صدق می کند.

(۱) برای هر $x, y \in L$، $\mu(x \odot y) \geq T(\mu(x),\mu(y))$،

(۲) برای هر $x, y \in L$ اگر $y \geq x$، آنگاه $\mu(y) \geq \mu(x)$.

بعلاوه عکس قضیه برای حالت T=∧ درست است.

برهان⇐ فرض می کنیم μ یک فیلتر $(\in,\in)_T$- فازی باشد. دو حالت زیرا در نظر می گیریم:

الف) $T(\mu(x),\mu(y)) < ۱/۲$، برای هر $x, y \in L$. در اینصورت،

$\mu(x \odot y) < T(\mu(x),\mu(y)) < ۱/۲$ لذا $t \in]0, ۱/۲[$ چنان موجود است، که $\mu(x \odot y) < T(t,t) \leq t < T(\mu(x),\mu(y))$ و $\mu(x) > t$ و $\mu(y) > t$.درنتیجه $x_t \in \mu$ و $y_t \in \mu$،در حالی که $\mu(x \odot y) < t$،یعنی $(x \odot y)_{T(t,t)} \overline{\in} \mu$ و این با فرض مسئله در تناقض است.

ب) $T(\mu(x),\mu(y)) \geq ۱/۲$ برای هر $x, y \in L$. در اینصورت $\mu(x) \geq ۱/۲$ و $\mu(y) \geq ۱/۲$.

اگر $\mu(x \odot y) < ۱/۲$، آنگاه به ازای $t \in]0, ۱/۲]$ که

$1/2 > t \geq T(t,t) > \mu(x \odot y)$ داریم $x_t \in \mu$ و $y_t \in \mu$ ، لذا $\mu(x \odot y)_{T(t,t)} \overline{\in} \mu$

که یک تناقض است بنابراین (۱) برقرار است.

(۲) دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

الف) $\mu(x) < 1/2$ برای $x \in L$. اگر $y \in L$ وجود داشته باشد به طوری که $y \geq x$ و $\mu(y) < T(\mu(x), 1/2)$، آنگاه $\mu(y) < \mu(x)$.فرض کنیم $t \in]0,1]$ چنان باشد که $\mu(y) < t < \mu(x)$ در نتیجه $x_t \in \mu$ ،در حالی که $y_t \overline{\in} \mu$ که این با فرض مسئله در تناقض است.

ب) $\mu(x) \geq 1/2$ به ازای $x \in L$.

اگر $y \in L$ چنان وجود داشته باشد که $y \geq x$ و $\mu(y) < 1/2$ در اینصورت $y_{1/2} \overline{\in} \mu$.این در حالی است که $x_{1/2} \in \mu$ بنابراین (۲) صحیح است .

$\Rightarrow$ فرض کنیم به ازای $r, t \in]0,1]$، $x_r \in \mu$ و $y_t \in \mu$.

در این صورت ، $\mu(x \odot y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \geq r \wedge t$،لذا $(x \odot y)_{r \wedge t} \in \mu$.

حال فرض کنیم $x_r \in \mu$ و $y \geq x$ ،در نتیجه $\mu(y) \geq \mu(x)$ که نشان می دهد $y_r \in \mu$. بنابراین μ یک فیلتر $(\in, \in)$- فازی است.

قضیه۲-۲-۵ فرض کنیم μ یک زیر مجموعه فازی از L باشد.اگر هر زیرمجموعه ناتهی μ_r ($r \in]0,1]$)یک فیلتر از L باشد،آنگاه μ یک فیلتر $(\in, \in)_T$- فازی از L است.عکس قضیه برای $T = \wedge$ درست است.

برهان:فرض کنیم برای هر $x, y \in L$ ، $x_r \in \mu$ و $y_s \in \mu$ که $r, s \in]0,1]$. در اینصورت $x \in \mu_r \subset \mu_{T(r,s)}$ و $y \in \mu_s \subset \mu_{T(r,s)}$ و لذا

$x \odot y \in \mu_{T(r,s)}$ و $y \odot x \in \mu_{T(r,s)}$ یعنی $x \odot y_{T(r,s)} \in \mu$ و $y \odot x_{T(r,s)} \in \mu$.

حال فرض می کنیم $x_r \in \mu$ و $x \leq y$،در نتیجه $x \in \mu_r$ و $y \in \mu_r$ یعنی $y_r \in \mu$. پس μ یک فیلتر $(\in, \in)_T$- فازی از L است .اثبات عکس براحتی قابل انجام است.

لم۲-۲-۶ فرض کنیمμ یک زیر مجموعه فازی ازL باشد،در اینصورت احکام زیر معادلند:

(۱) μ یک فیلتر$(\in, \in)$- فازی است.

(۲) اگر$x \odot y \leq z$ یا $y \odot x \leq z$، آنگاه$\mu(z) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$.

(۳) اگر$x \to (y \to z) = ۱$ یا$y \hookrightarrow (x \hookrightarrow z) = ۱$، آنگاه $\mu(z) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$.

(۴) به ازای هر$x, y \in \mathrm{L}$ داریم:$\mu(x) \geq \mu(y) \wedge \mu(y \to x)$ یا

$\mu(x) \geq \mu(y) \wedge \mu(y \hookrightarrow x)$.

اثبات(۱)⇐ (۲) نتیجه مستقیم از (۱) است.

(۲)⇐(۳) اگر $x \to (y \to z) = ۱$،آنگاه$x \odot y \leq \ z$ و از اینرو طبق (۲)

$\mu(z) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$.

(۳)⇐ (۴) اگر $(x \to z) \to (x \to z) = ۱$ یا$y \hookrightarrow (x \hookrightarrow z) = ۱$ کافی است درشرط(۳)

$z = x$ را قرار دهیم لذا داریم:

$\mu(x) \geq \mu(x) \wedge \mu(y \to x)$ یا $\mu(x) \geq \mu(y) \wedge \mu(y \hookrightarrow x)$.

(۴)⇐ (۱) فرض کنیم به ازای هر$x, y \in L$ که $x \leq y$ داشته باشیم:

$x \to y = x \hookrightarrow y = ۱$. در نتیجه $\mu(y) \geq \mu(x) \wedge \mu(x \to y) = \mu(x)$ یا

$\mu(y) \geq \mu(x) \wedge \mu(x \hookrightarrow y) = \mu(x)$.

حال اگر$\mu(x) \geq \mu(y) \wedge \mu(y \hookrightarrow x)$ با عوض کردنx به وسیله$x \odot y$ بدست خواهیم آورد:

$$\begin{gathered}\mu(x \odot y) \geq \\ \mu(y) \wedge \mu\big(y \to (x \odot y)\big) \geq \\ \mu(y) \wedge \mu(x \odot (y \to y)) = \\ \mu(x) \wedge \mu(y)\end{gathered}$$

و به طور مشابه اگر $\mu(x) \geq \mu(y) \wedge \mu(y \hookrightarrow x)$، با جایگزین کردن x با $y \odot x$ داریم:

$$\mu(y \odot x) \geq$$
$$\mu(y) \wedge \mu\big(y \hookrightarrow (y \odot x)\big) \geq$$
$$\mu(y) \wedge \mu\big((y \hookrightarrow y) \odot x\big) =$$
$$\mu(y) \wedge \mu(x)$$

نتیجه۲-۲-۷در هر فیلتر$(\in, \in)$- فازی μ از L گزاره های زیر بر قرارند:

(۱) اگر $\mu(x \to y) = ۱$ یا $\mu(x \hookrightarrow y) = ۱$، آنگاه $\mu(x) \leq \mu(y)$،

(۲) $\mu(x \to z) \geq \mu(x \to y) \wedge \mu(y \to z)$ ،

(۳) $\mu(x \hookrightarrow z) \geq \mu(x \hookrightarrow y) \wedge \mu(y \hookrightarrow z)$ ،

(۴) $\mu(x) \wedge \mu(x^{\sim}) = \mu(\mathbf{o}) = \mu(x) \wedge \mu(x^{-})$،

(۵) $\mu(x \odot y) = \mu(x \wedge y) = \mu(x) \wedge \mu(y)$.

۲-۳ فیلتر های $(\boldsymbol{\alpha}, \in \vee\, \boldsymbol{q})_T$- فازی

قضیه۲-۳-۱فرض کنیم μ یک زیر مجموعه فازی از L باشد.اگر μ یک فیلتر $(\in, \in \vee\, q)_T$- فازی باشد، آنگاه:

۱) برای هر $x, y \in L$ ، $\mu(x \odot y) \geq \mathrm{T}(\mu(x), \mu(y), ۱/۲)$.

۲) برای هر $y \geq x$ ، $\mu(y) \geq T(\mu(x), ۱/۲)$.

عکس این قضیه درحالتی که $T = \wedge$ درست است.

برهان$(\Leftarrow)$ (۱) فرض کنیم μ یک فیلتر $(\in, \in \vee\, q)_T$- فازی باشد.دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

الف) $T(\mu(x), \mu(y)) < ۱/۲$، برای $x, y \in L$.اگر $\mu(x \odot y) < T(\mu(x), \mu(y), ۱/۲)$ ، آنگاه $\mu(x \odot y) < T(\mu(x), \mu(y))$. لذا $t \in]\mathbf{o},۱]$ چنان وجود دارد که

$\mu(x \odot y) < T(t,t) \leq t < T(\mu(x),\mu(y))$.بنابراین $t < ۱/۲$ و $\mu(x) > t$

و $\mu(y) > t$ و لذا $x_t \in \mu$ و $y_t \in \mu$ ،درحالیکه:

$$\mu(x \odot y) + T(t,t) \leq \mu(x \odot y) + t < t + t < ۱$$

یعنی $(x \odot y)_{T(t,t)} \overline{\in \vee q} \mu$، که با فرض مسئله در تناقض است.

ب) $T(\mu(x),\mu(y)) \geq ۱/۲$ برای $x, y \in L$،در اینصورت $\mu(x) \geq ۱/۲$ و $\mu(y) \geq ۱/۲$.

اگر $\mu(x \odot y) < ۱/۲$، آنگاه به ازای $t \in]۰, ۱/۲]$ که $\mu(x \odot y) < T(t,t) \leq t < ۱/۲$.

داریم: $x_t \in \mu$ و $y_t \in \mu$.این در حالی است که $(x \odot y)_{T(t,t)} \overline{\in \vee q} \mu$ که یک تناقض است.لذا

(۱) برقرار است.

(۲) دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

الف) $\mu(x) < ۱/۲$ برای $x \in L$. اگر $y \in L$ وجود داشته باشد به طوریکه $y \geq x$ و

$\mu(y) < T(\mu(x), ۱/۲)$ ، آنگاه $\mu(y) < \mu(x)$. فرض می کنیم $t \in]۰,۱]$ چنان باشد که

$\mu(y) < t < \mu(x)$. در نتیجه $x_t \in \mu$ ،در حالی که $\mu(y) + t < ۲t < ۱$ یعنی

$y_t \overline{\in \vee q} \mu$، که یک تناقض است.

ب) $\mu(x) \geq ۱/۲$ به ازای $x \in L$.

اگر $y \in L$ چنان وجود داشته باشدکه $y \geq x$ و $\mu(y) < ۱/۲$، آنگاه $y_{\frac{۱}{۲}} \overline{\in \vee q} \mu$.این در حالی

است که $x_{۱/۲} \in \mu$ ،بنابراین (۲) صحیح است.

($\Rightarrow$) فرض می کنیم برای $r, t \in]۰,۱]$ ، $x_r \in \mu$ و $y_t \in \mu$.در نتیجه

$\mu(x \odot y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge ۱/۲ \geq r \wedge t \wedge ۱/۲$.

اگر $r \wedge t > ۱/۲$،آنگاه $\mu(x \odot y) + r \wedge t > ۱$،یعنی $(x \odot y)_{r \wedge t} q \mu$.

اگر $r \wedge t \leq ۱/۲$، آنگاه $\mu(x \odot y) \geq r \wedge t$ و همچنین $(x \odot y)_{r \wedge t} \in \mu$.از اینرو

$(x \odot y)_{r \wedge t} \in \vee q \mu$.

حال فرض کنیم $x_r \in \mu$ و $y \geq x$ ،در نتیجه$\mu(y) \geq \mu(x) \wedge ۱/۲ \geq r \wedge ۱/۲$.

اگر$r > ۱/۲$، آنگاه$\mu(y) + r > \mu(y) + ۱/۲ > ۱$ و $y_r q \mu$.

اگر $r \leq ۱/۲$، آنگاه$\mu(y) \geq r$ و $y_r \in \mu$ و لذا$y_r \in \vee q \mu$.بنابراین μ یک فیلتر $(\in, \in\vee q)_T$- فازی است.

نتیجه۲-۳-۲ هر فیلتر$(\in, \beta)_T$- فازی در شرایط زیر صدق می کند:

(۱) برای هر$x, y \in L$ ، $\mu(x \odot y) \geq T(\mu(x), \mu(y), ۱/۲)$.

(۲)برای هر$x, y \in L$ که$y \geq x$ داریم: $\mu(y) \geq T(\mu(x), ۱/۲)$.

برهان.بنابر قضیه ۲-۱-۱۰ هر فیلتر$(\in, \beta)_T$-فازی یک فیلتر $(\in, \in\vee q)_T$- فازی است. پس بنابر قضیه ۲-۳-۱ حکم برقرار است.

مثال۲-۳- ۳فرض کنیم$L = \{\mathbf{0}, a, b, c, d, ۱\}$یک مشبکه باشدکه نمودار هاسه آن در شکل ۲-۳-۳ آمده است همچنین فرض می کنیم عملگرهای دوتایی$\hookrightarrow$ و $\rightarrow$ و $\odot$ مطابق جدولهای۲-۳-۳ داده شده باشند . در اینصورت می توان تحقیق کرد که $(L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \hookrightarrow, \mathbf{0}, ۱)$ یک مشبکه مانده ای است. و زیرمجموعه فازیμکه با ضابطه ،

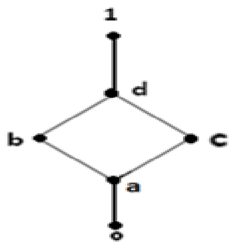
$\mu(\mathbf{0}) = ۰/۰۱۶, \mu(a) = \frac{۱}{۵}$ و $\mu(b) = \mu(c) = \frac{۱}{۹}$ و $\mu(d) = \frac{۱}{۱۰}$ و $\mu(۱) = ۱$ تعریف شده است.در شرایط قضیه۲-۳-۱صدق می کند اما μ یک $(\in, \in\vee q)_P$- فیلترفازی نیست. زیرا $b_{\frac{۱}{۹}} \in \mu$,$c_{\frac{۱}{۹}} \in \mu$ درحالیکه$(b \odot c)_{P(\frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۹})} = \mathbf{0}_{\frac{۱}{۸۱}} \overline{\in\vee q} \mu$.

جداول ۲-۳-۳

$\to$	0	a	b	c	d	۱
0	۱	۱	۱	۱	۱	۱
a	b	۱	d	۱	۱	۱
b	0	c	۱	c	۱	۱
c	b	b	b	۱	۱	۱
d	0	a	b	c	۱	۱
۱	0	a	b	c	d	۱

$\odot$	0	a	b	c	d	۱
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	a	0	a	a
b	0	0	b	0	b	b
c	0	a	a	c	c	c
d	0	a	b	c	d	d
۱	0	a	b	c	d	۱

$\hookrightarrow$	0	a	b	c	d	۱
0	۱	۱	۱	۱	۱	۱
a	c	۱	۱	۱	۱	۱
b	c	c	۱	c	۱	۱
c	0	b	b	۱	۱	۱
d	0	a	b	c	۱	۱
۱	0	a	b	c		۱



شکل ۲-۳-۳

قضیه ۲-۳-۴ فرض کنیم μ یک زیرمجموعه فازی از L باشد و $t \in]۱/۲,۱]$. اگر $\mu_t \neq \emptyset$ یک فیلتر از L باشد، آنگاه:

(۱) $T(\mu(x),\mu(y)) \leq \mu(x \odot y) \vee ۱/۲$ برای هر $x,y \in L$،

(۲) $\mu(x) \leq \mu(y) \vee ۱/۲$ برای هر $x,y \in L$ که $y \geq x$.

برهان . (۱) فرض کنیم برا ی هر $t \in]۱/۲,۱]$، $\mu_t \neq \emptyset$ فیلتری از L باشد. اگر $x,y \in L$ وجود داشته باشند که $\mu(x \odot y) \vee ۱/۲ < T(\mu(x),\mu(y)) = t$، آنگاه $t > ۱/۲$ و

$x,y\in\mu_t$بنابر فرض داریم: $x\odot y\in\mu_t$ و همینطور $\mu(x\odot y)\geq t$.از اینرو

$\mu(x\odot y)\vee ۱/۲>t$ ،که یک تناقض است .بنابر این(۱) برقرار است.

(۲)اگر $y\in L$ وجود داشته باشدکه $y\geq x$ و $t=\mu(x)>\mu(y)\vee ۱/۲$، آنگاه $x\in\mu_t$ و $t>۱/۲$. بنابراین $y\in\mu_t$ و همچنین $\mu(y)\geq t>۱/۲$ و $\mu(y)\vee ۱/۲>t\vee ۱/۲=t$ که یک تناقض است بنابراین (۲) نیز برقرار است .

قضیه۲-۳-۵فرض کنیمFیک زیرمجموعه ناتهی از L و μ یک زیرمجموعه فازی ازL باشد که چنین تعریف شده است:

$$\mu(x)=\begin{cases}\mu(x)\geq ۱/۲ : x\in F\\ \mu(x)=۰ \quad \text{درغیراینصورت}\end{cases}$$

در اینصورت μ یک فیلتر$(\alpha,\in\vee q)_T$- فازی است.اگر و تنها اگرF یک فیلترازL باشد(α ≠∈∧ q).

برهان(⇐) فرض کنیم برای$x,y\in L$ ، $x_r\alpha\mu$ و $y_s\alpha\mu$.دو حالت زیر را درنظر می گیریم:

الف) α =∈، در نتیجه$\mu(x)\geq r$ و $\mu(y)\geq s$ وهمچنین $\mu(x)\geq ۱/۲$ و $\mu(y)\geq ۱/۲$ یعنی $x,y\in F$. بنابراین $x\odot y\in F$ و همچنین $\mu(x\odot y)\geq ۱/۲$.اکنون اگر $T(r,s)\leq ۱/۲$، آنگاه$\mu(x\odot y)\geq T(r,s)$ و لذا $(x\odot y)_{T(r,s)}\in\mu$.

اگر$T(r,s)>۱/۲$، $\mu(x\odot y)+T(r,s)>۱$، آنگاه $(x\odot y)_{T(r,s)}q\mu$، بنابراین $(x\odot y)_{T(r,s)}\in\vee q\mu$.

ب) α = q ، در نتیجه : $\mu(x)+r>۱$و $\mu(y)+s>۱$ که از آنجا $\mu(x)>۱-r\geq ۰$ و $\mu(y)>۱-s\geq ۰$، پس $\mu(x)\geq ۱/۲$ و $\mu(y)\geq ۱/۲$ و لذا بنابر فرض $x,y\in F$.در نتیجه$x\odot y\in F$. بنابراین $\mu(x\odot y)\geq ۱/۲$.

حال اگر $T(r,s)\leq ۱/۲$، آنگاه $\mu(x\odot y)\geq T(r,s)$. اگر$T(r,s)>۱/۲$، آنگاه $\mu(x\odot y)+T(r,s)>۱$ و از اینرو $(x\odot y)_{\mathrm{T(r,s)}}\in\vee q\mu$.

حالت $\alpha = \in\vee q$ را از الف و ب می توان نتیجه گرفت .به طور مشابه اگر $x \leq y$ و $x_r \alpha \mu$ ،

می توان ثابت کرد که $y_r \in\vee q\mu$.

$(\Rightarrow)$ اگر μ یک فیلتر $(\alpha, \in\vee q)_T$- فازی باشد و $\alpha \in \{\in, q, \in\vee q\}$، در اینصورت

$F = Supp(\mu)$ لذا طبق قضیه ۲-۱-۱۰ F یک فیلتر است.

قضیه۲-۳-۶ هر فیلتر $(q, \in\vee q)_T$–فازی در شرایط (۱) و (۲) قضیه۲-۳-۱صدق می کند.

برهان.فرض کنیم μ یک فیلتر $(q, \in\vee q)_T$– فازی در L باشد.اگر $x, y \in L$ وجود داشته باشند به

طوریکه $\mu(x \odot y) < T(\mu(x), \mu(y), ۱/۲)$ ، به ازای $r \in]۰,۱]$ که

$۱ - T(\mu(x), \mu(y), ۱/۲) < T(r, r) \leq r < ۱ - \mu(x \odot y)$، آنگاه:

$۱ - \mu(x) \leq ۱ - T(\mu(x), \mu(y), ۱/۲) < r$ ،

$۱ - \mu(y) \leq ۱ - T(\mu(x), \mu(y), ۱/۲) < r$

که از آنجا $\mu(x) + r > ۱$ و $\mu(y) + r > ۱$ یعنی $x_r q\mu$ و $y_r q\mu$.

از طرفی: $\mu(x \odot y) + T(r, r) \leq \mu(x \odot y) + r < ۱$ و

$\mu(x \odot y) < T(\mu(x), \mu(y), ۱/۲) \leq ۱/۲ < T(r, r)$

یعنی $(x \odot y)_{T(r,r)} \overline{\in\vee q}\mu$ ،که یک تناقض است.از اینرو برای هر $x, y \in L$ ،

$\mu(x \odot y) \geq T(\mu(x), \mu(y), ۱/۲)$.مشابها می توان ثابت کرد که برای هر $x, y \in L$ اگر

$y \geq x$، آنگاه $\mu(y) \geq T(\mu(x), ۱/۲)$.

قضیه۲-۳-۷فرض کنیم μ یک زیرمجموعه فازی از L باشد.اگر به ازای هر $r \in]۰, ۱/۲]$ ،

$\mu_r \neq \emptyset$ یک فیلتر باشد ،آنگاه μ یک فیلتر $(\in, \in\vee q)_T$- فازی از L است.

بعلاوه عکس قضیه برای $T = \wedge$ برقرار است.

برهان⇐ فرض کنیم برای هر $r,s \in]0,1/2]$ و $x,y \in L$ داشته باشیم: $x_r \in \mu$ و $y_s \in \mu$ در اینصورت $x \in \mu_r \subseteq \mu_{T(r,s)}$ و $y \in \mu_s \subseteq \mu_{T(r,s)}$. چون بنابر فرض $\mu_{T(r,s)}$ یک فیلتر است، لذا $x \odot y \in \mu_{T(r,s)}$ یعنی $(x \odot y)_{T(r,s)} \in \mu$. بنابراین $(x \odot y)_{T(r,s)} \in\vee q\mu$.

حال اگر $x \le y$ و به ازای $r \in]0,1/2]$، $x_r \in \mu$، آنگاه $x \in \mu_r$. پس $y \in \mu_r \subseteq \mu_r^{\in\vee q}$ که نتیجه می دهد $y_r \in\vee q\mu$. بنابراین μ یک فیلتر $(\in,\in\vee q)_T$- فازی است.

($\Rightarrow$) فرض کنیم $t \in]0,1/2]$ و $x,y \in \mu_t$. در نتیجه $\mu(x \odot y) \ge \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge 1/2 \ge t$، که نشان می دهد $x \odot y \in \mu_t$.

حال فرض کنیم $x \in \mu_t$ و $x \le y$ در اینصورت $t \le 1/2 \wedge \mu(x) \le \mu(y)$ و لذا $y \in \mu_t$.

بنابراین μ_t یک فیلتر از L است.

قضیه ۲-۳-۸ اگر μ یک فیلتر $(\in\wedge q,\beta)$- فازی از L باشد، آنگاه $\mu_{\widehat{1/2}} \ne \emptyset$ فیلتری از L است، که $\mu_{\widehat{1/2}} = \{x \in L : \mu(x) > 1/2\}$.

برهان. فرض کنیم $\mu_{\widehat{1/2}} \ne \emptyset$ پس $x,y \in \mu_{\widehat{1/2}}$. در نتیجه $\mu(x) > 1/2$ و $\mu(y) > 1/2$.

دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

الف) $\beta \in \{\in,\in\wedge q\}$. در اینصورت به ازای $r \in]0,1]$ که $\mu(x) \wedge \mu(y) > r > 1/2$ داریم: $x_r \in \mu$ و $y_r \in \mu$ و $\mu(x) + r > 1$ و $\mu(y) + r > 1$. که نشان می دهد $x_r \in\wedge q\mu$ و $y_r \in\wedge q\mu$ پس $(x \odot y)_r \in \mu$، یعنی $x \odot y \in \mu_r$.

ب) $\beta = q$. از $\mu(x) > 1/2$ و $\mu(y) > 1/2$ نتیجه می شود که $x_{1/2} \in\wedge q\mu$ و $y_{1/2} \in\wedge q\mu$، که نشان می دهد $(x \odot y)_{1/2} q\mu$، یعنی $\mu(x \odot y) > 1/2$ و لذا $x \odot y \in \mu_{\widehat{1/2}}$.

ج) $\beta = \in\vee q$. مانند قسمتهای الف وب اثبات می شود.

حال فرض کنیم $x \leq y$ و $x \in \mu_{\widehat{1/2}}$ در نتیجه $\mu(x) > 1/2$. حالتهای زیر را درنظر می گیریم:

$\beta \in \{\in, \in\wedge q\}$. از $\mu(x) > r > 1/2$ نتیجه می شود که $x_r \in\wedge q\mu$. پس $y_r \in \mu$. بنابراین

$\mu(y) \geq r > 1/2$ و لذا $y \in \mu_{\widehat{1/2}}$.

$\beta = q$. از $\mu(x) > 1/2$ نتیجه می شود که $x_{1/2} \in\wedge q\mu$ بنابراین $y_{1/2} q\mu$ و همچنین

$\mu(y) > 1/2$، یعنی $y \in \mu_{\widehat{1/2}}$.

$\beta = \in\vee q$. مانند قسمتهای(۱) و(۲) اثبات می شود . بنابراین $\mu_{\widehat{1/2}}$ یک فیلتر از L است.

قضیه۲-۳-۹ هر فیلتر $(\in\wedge q, q)$- فازی در شرایط زیر صدق می کند،

(۱) برای هر $x, y \in L$، $\mu(x) \wedge \mu(y) \leq \mu(x \odot y) \vee 1/2$،

(۲) برای هر $x, y \in L$، اگر $y \geq x$، آنگاه $\mu(x) \leq \mu(y) \vee 1/2$.

برهان. فرض کنیم که برای $x, y \in L$ ، $\mu(x) \wedge \mu(y) > \mu(x \odot y) \vee 1/2$. برای $r \in]0,1]$ که $1 - \mu(x \odot y) \vee 1/2 > r > 1 - \mu(x) \wedge \mu(y)$ داریم: $r > 1 - \mu(x)$ و $r > 1 - \mu(y)$ و $r < 1/2$ و $1 - \mu(x \odot y) > r$.

از اینرو $\mu(x) > 1 - r > 1/2 > r$ و $\mu(y) > 1 - r > 1/2 > r$ یعنی $x_r \in\wedge q\mu$ و $y_r \in\wedge q\mu$. در حالیکه $\mu(x \odot y) + r < 1$ لذا $(x \odot y)_r \bar{q}\mu$. این با فرض مسئله در تناقض است. شرط (۲) نیز به طور مشابه ثابت می شود.

قضیه ۲-۳-۱۰ اگر μ یک فیلتر $(\in\wedge q, q)$- فازی باشد، آنگاه μ روی $\mu_{\widehat{1/2}}$ ثابت است.

برهان. فرض کنیم μ روی $\mu_{\widehat{1/2}}$ ثابت نباشد(فرض خلف). در این صورت وجود دارند $x, y \in \mu_{\widehat{1/2}}$ به طوری که $\mu(x) \neq \mu(y)$.

دو حالت در نظر می گیریم:

(۱) $\mu(x) > \mu(y)$. از قضیه ۲-۳-۹ نتیجه می شود که:

$\mu(y) > 1/2$ = $\mu(x) \wedge \mu(y) < \mu(x \odot y) \vee 1/2$ و لذا $\mu(x \odot y) > 1/2$.

حال برای هر $r \in]0,۱]$ که $۱/۲ > ۱ - \mu(y) > r > ۱ - \mu(x)$داریم: $x_r \in \wedge\, q\mu$

و$y_{۱/۲} \in \wedge\, q\mu$،در حالیکه $(x \odot y)_{r\wedge ۱/۲} = (x \odot y)_r \bar{q} \mu$،که یک تناقض است.

(۲) $\mu(y) > \mu(x)$.کافی است در اثبات حالت (۱)، x را بهy تبدیل کنیم.

قضیه۲-۳-۱۱ اگر μ یک فیلتر $(\in\wedge\, q, q)$- فازی باشد،آنگاه $\mu_r^q \neq \emptyset$ یک فیلتر از L است.

(برای هر $r \in]0, ۱/۲]$).

برهان .فرض کنیم $x, y \in \mu_r^q$ در نتیجه $\mu(x) + r > ۱$ و $\mu(y) + r > ۱$که نشان

می دهد$r \geq ۱/۲ \geq ۱ - r < \mu(x)$ و $r \geq ۱/۲ \geq ۱ - r < \mu(y)$.

بنابراین $x_r \in \wedge\, q\mu$ و$y_r \in \wedge\, q\mu$.و لذا بنابر فرض داریم:$(x \odot y)_r q\mu$ و این یعنی

$x \odot y \in \mu_r^q$.

حال فرض کنیم $x \in \mu_r^q$ و $x \leq y$. در نتیجه $x_r q\mu$ و از آنجا $\mu(x) > ۱ - r \geq ۱/۲ > r$

که ایجاب می کند $x_r \in \wedge\, q\mu$.از اینرو طبق فرض داریم: $y_r \in q\mu$ یعنی $y \in \mu_r^q$.بنابراین μ_r^q

یک فیلتر است.

قضیه۲-۳-۱۲هر فیلتر $(\in\wedge\, q, \in)$- فازیμ ازL در دو شرط زیر صدق می کند:

(۱) برای هر $x, y \in L$، $\mu(x) \wedge \mu(y) \leq \mu(x \odot y) \vee ۱/۲$ ،

(۲)برای هر $x, y \in L$ اگر $x \geq y$ ، آنگاه$\mu(x) \leq \mu(y) \vee ۱/۲$.

برهان(۱) فرض کنیم μ یک $(\in\wedge\, q, \in)$- فیلترفازی ازL باشد.به برهان خلف فرض می کنیم که

$x, y \in L$ وجود داشته باشند به طوریکه:

$۱/۲ \vee \mu(x \odot y) \leq \mu(x) \wedge \mu(y) = r$.در نتیجه$\mu(x) \geq r$ و $\mu(y) \geq r$ ،

$r > ۱/۲$ و $۱ > ۲r > \mu(x) + r$، $\mu(y) + r > ۱$ و $\mu(x \odot y) < r$.

بنابراین $x_r \in \wedge\, q\mu$ و $y_r \in \wedge\, q\mu$در حالیکه $(x \odot y)_r \,\overline{\in}\, \mu$که یک تناقض است.لذا فرض خلف

باطل و حکم (۱) درست است.

۳) به فرض خلف فرض می کنیم $x, y \in L$ وجود داشته باشند به طوری که $x \leq y$ ولی $r = \mu(x) > \mu(y) \vee ۱/۲$، در اینصورت $r > ۱/۲$ و $\mu(x) + r > ۱$ یعنی $x_r \in\wedge q\mu$ در صورتی که $\mu(y) < r$ یعنی $x_r \in\wedge q\mu$ و این در حالی است که $y_r \overline{\in} \mu$، که یک تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم(۲) برقرار است.

قضیه۲-۳-۱۳ فرض می کنیم μ یک زیرمجموعه فازی از L باشد.اگر μ یک فیلتر $(\in\wedge q, \in)$- فازی باشد، آنگاه برای هر $r \in]۱/۲, ۱]$، $\mu_r \neq \emptyset$ یک فیلتر از L است.

بعکس اگر برای هر $r \in]۰,۱] - ۱/۲$، $\mu_r \neq \emptyset$ یک فیلتر از L باشد، آنگاه μ یک $(\in\wedge q, \in)$- فیلترفازی از L است .

برهان $\Leftarrow$ فرض می کنیم μ یک فیلتر $(\in\wedge q, \in)$- فازی بوده و $x, y \in \mu_r$، که $r \in]۱/۲, ۱]$

در نتیجه $\mu(x) \geq r$ و $\mu(y) \geq r$ که از آنجا طبق قضیه ۲-۳-۱۲داریم:

$$\mu(x \odot y) \vee \frac{۱}{۲} \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \geq r$$

از طرفی چون $r > ۱/۲$ پس $\mu(x \odot y) \geq r$ و این یعنی $x \odot y \in \mu_r$.

حال فرض کنیم $x \leq y$ و $x \in \mu_r$ به ازای $r \in]۱/۲, ۱]$،

$\mu(y) \vee ۱/۲ \geq \mu(x) \geq r > ۱/۲$، که ایجاب می کند $\mu(y) \geq r$ یعنی $y \in \mu_r$. بنابراین μ_r یک فیلتر از L است.

($\Rightarrow$) فرض می کنیم $x_r \in\wedge q\mu$ و $y_s \in\wedge q\mu$ به ازای $r, s \in]۰,۱] - ۱/۲$، $\mu(x) \geq r$ و $\mu(x) + r > ۱$ و $\mu(y) \geq s$ و $\mu(y) + s > ۱$.از آنجاییکه $r \neq ۱/۲$ و $s \neq ۱/۲$، لذا اگر $r > ۱/۲$ و $s > ۱/۲$، آنگاه $r \wedge s > ۱/۲$ و از اینکه $x, y \in \mu_{r\wedge s}$، لذا طبق فرض $x \odot y \in \mu_{r\wedge s}$،یعنی $(x \odot y)_{r\wedge s} \in \mu$.اگر $r < ۱/۲$ یا $s < ۱/۲$، آنگاه $r \wedge s < ۱/۲$

چون بنابر فرض $\mu_{r\wedge s}$ یک فیلتر از L است لذا از اینکه $x \in \mu_r$ و $y \in \mu_s$ نتیجه می شود $x, y \in \mu_{r\wedge s}$،لذا $x \odot y \in \mu_{r\wedge s}$ یعنی $(x \odot y)_{r\wedge s} \in \mu$.

به طور مشابه می توان ثابت کرد که اگر $y \leq x$ و $x_r \in\wedge q\mu$، آنگاه $y_r \in \mu$ لذا μ یک فیلتر $(\in\wedge q, \in)$- فازی از L است.

۲-۴فیلترهای (q, β)- فازی

قضیه۲-۴-۱یک زیرمجموعه فازی μ از L یک فیلتر $(q, \in)$- فازی ازL است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in \mathrm{supp}(\mu)$ داشته باشیم: $\mu(x) = ۱$.

برهان:فرض کنیم μ یک فیلتر $(q, \in)$- فازی ازL باشد به طوریکه به ازای $x \in \mathrm{supp}(\mu)$ ، $\mu(x) < ۱$ (فرض خلف).در اینصورت برای هر $y \in \mathrm{supp}(\mu)$ اگر $x \leq y$، آنگاه $\mu(y) > ۰$. همچنین $y_۱ q\mu$که از آنجا $x_۱ \in \mu$ یعنی $\mu(x) \geq ۱$ که یک تناقض است.لذا فرض خلف باطل و $\mu(x) = ۱$ درست است.

اثبات عکس این قضیه از۲-۱-۱۲نتیجه می شود.

قضیه۲-۴-۲یک زیرمجموعه فازی ازL ،یک فیلتر $(q, \in)$- فازی است.اگر و تنها اگر یک فیلتر $(q, \in\wedge q)$- فازی باشد.

برهان:به وضوح هرفیلتر $(q, \in\wedge q)$- فازی یک فیلتر $(q, \in)$- فازی است.حال فرض کنیم μ یک فیلتر $(q, \in)$-فازی بوده و $x_r q\mu$ و $y_s q\mu$ به ازای $x, y \in L$ و $r, s \in]۰,۱]$.در نتیجه $\mu(x) > ۱ - r \geq ۰$ و $\mu(y) > ۱ - s \geq ۰$ که ایجاب می کند $x, y \in \mathrm{supp}(\mu)$.از اینرو طبق قضیه های۲-۱-۱۱و۲-۴-۱داریم: $\mu(x \odot y) = ۱$ که از آنجا نتیجه می شود: $\mu(x \odot y) \geq r \wedge s$ و $\mu(x \odot y) + r \wedge s > ۱$ و این یعنی $(x \odot y)_{r\wedge s} \in\wedge q\mu$.

حال فرض می کنیم $x \leq y$ و $x_r q\mu$.در نتیجه $\mu(x) > ۱ - r \geq ۰$ که ایجاب می کند: $x \in \mathrm{supp}(\mu)$.چون $\mathrm{supp}(\mu)$ یک فیلتر از L است لذا $y \in \mathrm{supp}(\mu)$.پس

$r \geq ۱ = \mu(y)$ و $\mu(y) + r > ۱$ یعنی $y \in \wedge q\mu$.بنـابراین μ یـک فیلتـر $(\in, \in \wedge q)$- فـازی است.

نتیجه۲-۴-۳هر فیلتر $(q, \in)$- فازی یک فیلتر (q, q)- فازی است.

برهان.چون هر فیلتر $(q, \in \wedge q)$- فازی ، یک فیلتر (q, q)- فازی است لذا از قضیه قبل نتیجه حاصل می شود.

قضیه ۲-۴-۴اگر μ یک فیلتر $(q, \in)$-فازی از L باشد،آنگاه $\mu_r^\alpha \neq \emptyset$ یا μ_r^α یک فیلتر از L است.که $x, y \in L$ و $r \in]۱/۲,۱]$ و $\alpha \in \{\in, q\}$.

برهـان:فـرض مـی کنـیم $\mu_r \neq \emptyset$ و $x, y \in \mu_r$. بنـابرتعریف داریـم $\mu(x) \geq r$ و $\mu(y) > r$.

همچنین $\mu(x) + r \geq r + r > ۱$ و مشابها $\mu(y) > ۱$.

از این نتیجه می شود که $x_r q\mu$ و $y_r q\mu$ که از آنجا داریم: $(x \odot y)_r \in \mu$ یعنی $x \odot y \in \mu_r^\in$

به طور مشابه ثابت میشود،که اگر $x \leq y$ و $x \in \mu_r$،آنگاه $y \in \mu_r$.پس μ_r یک فیلتر از L است.

به روش مشابه ثابت مـی شـود کـه بـه ازای هـر $r \in]۱/۲,۱]$ ، $\mu_r^q \neq \emptyset$ یـک فیلتـر از L اسـت.

فصل ۳

فیلترهای استلزامی$(\alpha, \beta)_T-$ فازی

در این فصل ابتدا مفهوم فیلتراستلزامی$(\alpha,\beta)_T$- فازی را با الگو گرفتن از تعریف فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی تعریف کرده سپس در قالب چند قضیه خواصی از این فیلترهای استلزامی$(\alpha,\beta)_T$- فازی را بیان کرده سپس درقالب چند قضیه دیگر خواصی از این نوع فیلترها را بررسی می کنیم در ادامه مفهوم فیلتر بولی $(\alpha,\beta)_T$- فازی و فیلتر استلزامی مثبت $(\alpha,\beta)_T$- فازی و چند خاصیت آنها و سپس ارتباط بین آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم.تمام مطالب این فصل به صورت جدید توسط مولف ارائه شده اند.

۳-۱فیلترهای استلزامی $(\alpha,\beta)_T$- فازی

تعریف ۳-۱-۱فیلتر$(\alpha,\beta)_T$- فازی μ ازLرا یک**فیلتراستلزامی$(\alpha,\beta)_T$- فازی** گوئیم، هرگاه برای هر$x,y,z\in L$و$r,s\in]0,1]$ داشته باشیم:

(FIF۱) اگر $((x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y)_r\alpha\mu$ و$(y\hookrightarrow z)_s\alpha\mu$، آنگاه $(x\hookrightarrow z)_{T(r,s)}\beta\mu$

(FIF۲) اگر$((z^{-}\odot x)\rightarrow y)_r\alpha\mu$ و $(y\rightarrow z)_s\beta\mu$، آنگاه $(x\rightarrow z)_{T(r,s)}\beta\mu$

قضیه ۳-۱-۲فرض کنیم μ یک فیلتر$(\alpha,\beta)_T$- فازی از L باشد. در اینصورت μ یک فیلتر استلزامی$(\alpha,\beta)_T$- فازی است اگر و تنها اگر برای هر$x,y\in L$ و $r,s\in]0,1]$،

(FIF۳) $((x\odot y^{\sim})\hookrightarrow y)_r\alpha\mu$ نتیجه دهد $(x\hookrightarrow y)_{T(r,s)}\beta\mu$،

(FIF۴) $((y^{-}\odot x)\rightarrow y)_r\alpha\mu$ نتیجه دهد $(x\rightarrow y)_{T(r,s)}\beta\mu$.

برهان$\Leftarrow$ ابتدا فرض می کنیم μ یک فیلتر استلزامی$(\alpha,\beta)_T$- فازی باشد.با جایگزاری $z=y$ در(FIF۱) داریم $((x\odot y^{\sim})\hookrightarrow y)_r\alpha\mu$ و $(y\hookrightarrow y)_s\alpha\mu$ که چون μ یک فیلتر استلزامی$(\alpha,\beta)_T$-فازی است لذا $1_s\alpha\mu$و$(x\hookrightarrow y)_{T(r,s)}\beta\mu$. به طورمشابه با جایگزاری $z=y$ در(FIF۲) و(FIF۴) به دست می آید.

($\Rightarrow$) فرض کنیم (FIF۳) و (FIF۴) برقرار بوده و به ازای $x,y,z\in L$ و $r,s\in]0,1]$ ، $((x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y)_r\alpha\mu$ و$(y\hookrightarrow z)_s\alpha\mu$ در اینصورت،بنابر نتیجه ۲-۱-۹ داریم:

$(x \hookrightarrow z)_{T(r,s)}\beta\mu$. که از آنجا طبق(FIF۳) داریم: $((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow z)_{T(r,s)}\beta\mu$

مشابها ثابت می شود که(FIF۲) نیز برقرار است.

نتیجه۳-۱- ۳فرض کنیم μ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$ - فازی باشد در اینصورت μ یک فیلتر

$(\alpha,\beta)_T$ -فازی استلزامی است اگر و تنها اگر

(FIF۵) $((y^{\sim} \hookrightarrow (x \hookrightarrow y))_r\alpha\mu$ نتیجه دهد $(x \hookrightarrow y)_T\beta\mu$،

(FIF۶ $\left((y^{-} \to (x \to y)\right)_r\alpha\mu$ نتیجه دهد $(x \to y)_T\beta\mu$.

برهان. از قضیه ۳-۱-۲و اینکه $\tilde{y} \hookrightarrow (x \hookrightarrow y) = (x \odot y^{\sim}) \hookrightarrow y$ و

$y^{-} \to (x \to y)= (y^{-} \odot x) \to y$ بدست می آید.

تعریف۳-۱-۴ فرض کنیم μ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی باشد.μ را یک**فیلتر بولی**

$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_T$- **فازی**می نامیم هرگاه به ازای هر $x \in L$ و$r \in]$**۰**$,۱]$ ،

$(x \vee x^{\sim})_r\alpha\mu$و$(x \vee x^{-})_r\alpha\mu$.

قضیه ۳-۱-۵ فرض کنیم μ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی ازL باشد،در اینصورت μ یک فیلتر

بولی$(\alpha,\beta)_T$- فازی است اگر و تنها اگر برای هر $x \in L$ و$r \in]$**۰**$,۱]$ ، دو شرط زیر برقرار باشند:

(۱) $(x^{\sim} \hookrightarrow x)_r\alpha\mu$ نتیجه دهد $x_{T(r,s)}\beta\mu$ ،برای هر$s \in]$**۰**$,۱]$،

(۲) $(x^{-} \to x)_r\alpha\mu$ نتیجه دهد $x_{T(r,s)}\beta\mu$ ،برای هر$s \in]$**۰**$,۱]$.

برهان$(\Leftarrow)$ ابتدا فرض کنیم μ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی بولی بوده و به ازای$x \in L$،داشته باشیم:

$(x^{\sim} \hookrightarrow x)_r\alpha\mu$.میدانیم که:

$$((x \vee x^{\sim}) \hookrightarrow x)_r\alpha\mu =$$
$$((x \hookrightarrow x) \wedge (x^{\sim} \hookrightarrow x))_r\alpha\mu =$$
$$(x^{\sim} \hookrightarrow x)_r\alpha\mu$$

چون طبق فرض μ یک فیلتر بولی$(\alpha,\beta)_T$- فازی است، از اینرو برای هر$s \in]$**۰**$,۱]$ ،

لذا $(x \vee x^{\sim})_{s}\alpha\mu$ داریم:$x_{T(r,s)}\beta\mu$. بالاخص، به ازای $s = ۱$ داریم:$x_{r}\beta\mu$.

مشابها اگر$(x^{-} \rightarrow x)_{r}\alpha\mu$ می توان ثابت کرد که$x_{T(r,s)}\beta\mu$.

($\Rightarrow$)فرض کنیم μ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_{T}$- فازی باشد که در شرایط(۱) و (۲) صدق کند.چون

$$((x \vee x^{\sim})^{\sim} \hookrightarrow (x \vee x^{\sim}))_{r}\alpha\mu =$$
$$((x^{\sim} \wedge x^{\sim\sim}) \hookrightarrow (x \vee x^{\sim}))_{r}\alpha\mu = ۱_{\mathrm{r}}\alpha\mu$$

لذا از(۱) نتیجه می شود که $(x \vee x^{\sim})_{T(r,s)}\alpha\mu$،برای هر$s \in]۰,۱]$ بالاخص با فرض $s = ۱$ داریم:$(x \vee x^{\sim})_{\mathrm{r}}\beta\mu$. به همین شکل می توان ثابت کرد که $(x \vee x^{-})_{r}\alpha\mu$.بنابراین μ یک فیلتر بولی $(\alpha,\beta)_{T}$- فازی ازL است.

قضیه ۳-۱- ۶فرض کنیم μ یک فیلتر$(\alpha,\beta)_{\mathrm{T}}$- فازی ازLباشد.μ یک فیلتر بولی $(\alpha,\beta)_{T}$- فازی است اگر و تنها اگر

(۱) $((x \hookrightarrow y) \hookrightarrow x)_{\mathrm{r}}\alpha\mu$ نتیجه دهد $x_{T(r,s)}\beta\mu$، برای هر $s \in]۰,۱]$،

(۲) $((x \rightarrow y) \rightarrow x)_{\mathrm{r}}\alpha\mu$ نتیجه دهد $x_{T(r,s)}\beta\mu$، برای هر $s \in]۰,۱]$.

برهان($\Leftarrow$) فرض کنیم μ یک فیلتر بولی$(\alpha,\beta)_{T}$- فازی باشد و به ازای $x, y \in L$ و$r \in]۰,۱]$ ، داشته باشیم: $((x \hookrightarrow y) \hookrightarrow x)_{\mathrm{r}}\alpha\mu$. چون $x^{\sim} \leq x \hookrightarrow y$ لذا $(x \hookrightarrow y) \hookrightarrow x \leq x^{\sim} \hookrightarrow x$. `پس طبق فرض داریم: $(x^{\sim} \hookrightarrow x)_{r}\alpha\mu$. از اینرو طبق قضیه ۳-۱-۵ ، داریم: $x_{T(r,s)}\beta\mu$.پس(۱) برقرار است.

(۲) فرض می کنیم به ازای $x, y \in L$ و$r \in]۰,۱]$ ، داشته باشیم $((x \rightarrow y) \rightarrow x)_{\mathrm{r}}\alpha\mu$.

چون $x^{-} \leq x \rightarrow y$ لذا $(x \rightarrow y) \rightarrow x \leq x^{-} \rightarrow x$. پس طبق فرض داریم: $(x^{-} \rightarrow x)_{r}\alpha\mu$ از اینرو طبق قضیه ۳-۱-۵،داریم: $x_{T(r,s)}\beta\mu$.پس(۲) برقرار است.

($\Rightarrow$) با فرض$y = ۰$ در(۱) و(۲) و استفاده از قضیه ۳-۱-۵ بدست می آید.

قضیه۳-۱-۷فرض کنیم μ یک فیلتر$(\alpha,\beta)_{T}$- فازی ازL باشد در اینصورت دو گزاره زیر معادلند:

(۱) μ یک فیلتربولی $(\alpha,\beta)_T$- فازی است.

(۲) μ یک فیلتر استلزامی $(\alpha,\beta)_T$- فازی است.

برهان (۱)⇐ (۲) فرض کنیم $(y^{\sim} \hookrightarrow (x \hookrightarrow y))_r \alpha\mu$،به ازای $x,y \in L$ و $r \in]0,1]$.

از $y \le x \hookrightarrow y$ داریم: $(x \hookrightarrow y)^{\sim} \le y^{\sim}$ و $y^{\sim} \hookrightarrow (x \hookrightarrow y) \le (x \hookrightarrow y)^{\sim} \hookrightarrow (x \hookrightarrow y$.

چون μ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی است لذا $((x \hookrightarrow y)^{\sim} \hookrightarrow (x \hookrightarrow y))_r \alpha\mu$، که از آنجا طبق قضیه۳-۱-۶، داریم: $(x \hookrightarrow y)_{T(r,s)} \beta\mu$ ، برای هر $s \in]0,1]$.لذا (FIF۵) برقرار است و مشابها ثابت می شود (FIF۶) نیز بر قرار است. بنابراین μ یک فیلتر استلزامی $(\alpha,\beta)_T$- فازی است.

(۲)⇐ (۱) فرض کنیم μ یک فیلتر استلزامی $(\alpha,\beta)_T$- فازی بوده و $(x^{\sim} \hookrightarrow x)_r \alpha\mu$، به ازای $x \in L$ و $r \in]0,1]$.در نتیجه $((1 \odot x^{\sim}) \hookrightarrow x)_r = (x^{\sim} \hookrightarrow x)_r \alpha\mu$.

چون μ یک فیلتراستلزامی $(\alpha,\beta)_T$- فازی است طبق قضیه۳-۱-۲داریم:

$x_{T(r,s)} = (1 \hookrightarrow x)_{T(r,s)} \beta\mu$. مشابها ثابت می شود که اگر $(x^{-} \to x)_r \alpha\mu$، آنگاه $x_{T(r,s)} = (1 \to x)_{T(r,s)} \beta\mu$.

بنابراین μ یک فیلتر بولی $\boldsymbol{(\alpha,\beta)_T}$- فازی است.

۳-۲ فیلترهای استلزامی مثبت $\boldsymbol{(\alpha,\beta)_T}$- فازی

در این بخش ابتدا تعریف فیلترفازی استلزامی مثبت را بیان نموده و چند خاصیت از این نوع فیلترها و رابطه بین آنها با فیلترهای بولی را مورد بررسی قرار میدهیم.

تعریف ۳-۲-۱ فیلتر $(\alpha,\beta)_{\mathrm{T}}$- فازی μ را یک **فیلتراستلزامی مثبت $\boldsymbol{(\alpha,\beta)_T}$- فازی**می نامیم هرگاه به ازای هر $x,y,z \in L$و $r,s \in]0,1]$داشته باشیم:

(PIF۱) $1_r \alpha\mu$،

(PIF۲) $(x \hookrightarrow y)_s \alpha\mu$ و $((x \odot y) \hookrightarrow z)_r \alpha\mu$، نتیجه دهد $(x \hookrightarrow z)_{T(r,s)} \beta\mu$،

(PIF۳) $(x \to y)_s \alpha\mu$ و $((y \odot x) \to z)_r \alpha\mu$، نتیجه دهد$(x \to z)_{T(r,s)} \beta\mu$.

قضیه ۳-۲-۲ فرض کنیم μ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی از L باشد. در اینصورت μ یک فیلتر استلزامی مثبت $(\alpha,\beta)_T$- فازی است. اگر و تنها اگر

(PIF۴) $((x \odot x) \hookrightarrow y)_r \alpha\mu$، نتیجه دهد $(x \hookrightarrow y)_s \beta\mu$

(PIF۵) $((x \odot x) \rightarrow y)_r \alpha\mu$، نتیجه دهد $(x \rightarrow y)_s \beta\mu$

برهان: ($\Leftarrow$) فرض کنیم $((x \odot x) \hookrightarrow y)_r \alpha\mu$، به ازای $x, y \in L$ و $r \in]0,1]$. در تعریف ۳-۲-۱ با جایگزاری $z = y$ در (PIF۲) و (PIF۳) داریم: $((x \odot x) \hookrightarrow y)_r \alpha\mu$ و $(x \hookrightarrow x)_s \alpha\mu = 1_s$. لذا طبق (PIF۲) داریم: $(x \hookrightarrow y)_{T(r,s)} \beta\mu$، به ازای هر $s \in]0,1]$.

یعنی (PIF۴) درست است.

به همین ترتیب می توان ثابت کرد. (PIF۵) نیز برقرار است.

($\Rightarrow$) نشان میدهیم (PIF۲) و (PIF۳) برقرارند. فرض کنیم به ازای $x, y, z \in L$ و $r, s \in]0,1]$ داشته باشیم: $((x \odot y) \hookrightarrow z)_r \alpha\mu$ و $(x \hookrightarrow y)_s \alpha\mu$. چون μ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی است، پس؛ $((x \hookrightarrow y) \odot ((x \odot y) \hookrightarrow z)_{T(r,s)} \beta\mu$

از طرفی می دانیم که:

$$(x \hookrightarrow y) \odot ((x \odot y) \hookrightarrow z) = (x \hookrightarrow y) \odot (y \hookrightarrow (x \hookrightarrow z) \leq$$
$$\big(x \hookrightarrow (x \hookrightarrow z)\big) = ((x \odot x) \hookrightarrow z))$$

پس $((x \odot x) \hookrightarrow z\,)_T \beta\mu$ و از آنجا طبق (PIF۴) داریم:

$(x \hookrightarrow z)_T \beta\mu$. بنابراین (PIF۲) درست است. مشابها می توان ثابت کرد که (PIF۳) نیز درست است.

بنابراین μ یک فیلتر استلزامی مثبت $(\alpha,\beta)_T$- فازی است.

نتیجه ۳-۲-۳ فرض کنیم μ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی از L باشد. μ یک فیلتر استلزامی مثبت $(\alpha,\beta)_T$- فازی است اگر و تنها اگر

(PIF۶) $(x \hookrightarrow (x \hookrightarrow y))_r \alpha\mu$، نتیجه دهد $(x \hookrightarrow y)_s \beta\mu$ ، (PIF۷) $(x \to (x \to y))_r \alpha\mu$، نتیجه دهد $(x \to y)_s \beta\mu$.

برهان.با در نظر گرفتن روابط $(x \odot x) \hookrightarrow y = x \hookrightarrow (x \hookrightarrow y)$ و

$(x \odot x) \to y = x \to (x \to y)$ و استفاده از قضیه۳-۲-۲بدست می آید.

قضیه۳-۲-۴فرض کنیم μ و ϑ دو فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی ازL باشند، به طوریکه $\mu \subset \vartheta$. اگر μ یک فیلتر استلزامی مثبت $(\alpha,\beta)_T$-فازی باشد، آنگاه ϑ نیز یک فیلتر استلزامی مثبت $(\alpha,\beta)_T$- فازی است.

برهان. فرض کنیم ϑ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی از L باشدو $((x \odot x) \hookrightarrow y)_r \alpha\vartheta$. قرار میدهیم $u = (x \odot x) \hookrightarrow y$.در اینصورت $u_r \alpha\vartheta$ و از اینرو

$$((x \odot x) \hookrightarrow (u \to y))_r \alpha\mu = (u \to ((x \odot x) \hookrightarrow y))_r \alpha\mu = 1_r \alpha\mu$$

چون μ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی است داریم: $(x \hookrightarrow (u \to y))_r \alpha\mu$، یعنی:

$(u \to (x \hookrightarrow y))_r \alpha\mu$. چون $\mu \subset \vartheta$ پس $(u \to (x \hookrightarrow y))_r \alpha\vartheta$.

از اینرو $(x \hookrightarrow y)_r \beta\vartheta$ پس (PIF۴) برقرار است. مشابها می توان ثابت کرد (PIF۵) نیز برقرار است.در نتیجه بنابر قضیه ۳-۲-۲، ϑ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی ازL است.

فصل ۴

نتایجی دیگر درباب فیلترهای‌استلزامی$(\alpha, \beta)_{\mathrm{T}}-$ فازی

در این فصل شرایط معادل دیگری برای فیلترهای استلزامی$(\alpha,\beta)_{\mathrm{T}}$- فازی ارائه را بر اساس فصل سوم ارائه می دهیم.مطالب این فصل نیز توسط مولف تهیه وتدوین شده اند.

قضیه۴-۱-۱فرض کنیم μ یک فیلتر$(\in,\in\vee q)_T$- فازی ازL باشد. در اینصورت μ یک فیلتر استلزامی$(\in,\in\vee q)_T$- فازی است اگر به ازای هر$x,y\in \mathrm{L}$ گزاره های زیر برقرار باشند:

(۱) $\mu(x\hookrightarrow z)\geq T(\mu((x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y),\mu(y\hookrightarrow z),۱/۲)$.

(۲) $\mu(x\rightarrow z)\geq T(\mu((x\odot z^{-})\rightarrow y),\mu(y\rightarrow z),۱/۲)$.

بعلاوه عکس قضیه در صورتی که $T=\wedge$درست است.

برهان($\Leftarrow$)فرض کنیم μ یک فیلتر$(\in,\in\vee q)_T$- فازی باشد ولی (۱) برقرار نباشد(فرض خلـف).در اینصورت $x,y,z\in L$ وجود دارند بطوریکه:

$$\mu(x\hookrightarrow z)<\mathrm{T}((\mu\,(x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y),\mu(y\hookrightarrow z),۱/۲)\ (*)$$

این ایجاب می کند که:

$$\mu(x\hookrightarrow z)<T(\mu(x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y),\mu(y\hookrightarrow z)).$$

دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

الف) $T(\mu(x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y),\mu(y\hookrightarrow z))<۱/۲$.

در اینصورت می توان$t\in\,]۰,۱[$ را چنان انتخاب نمود که

$$\mu(x\hookrightarrow z)<T(t,t)\leq t<T(\mu(x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y),\mu(y\hookrightarrow z)).$$

پس $t<۱/۲$، $\mu((x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y)>t$ و $\mu(y\hookrightarrow z)>t$.لذا $(x\odot z^{\sim}\hookrightarrow y)_t\in\mu$ و $(y\hookrightarrow z)_{\mathrm{t}}\in\mu$،در حالی که $\mu(x\hookrightarrow z)+T(t,t)\leq t+t<۱$ یعنی $(x\hookrightarrow z)_{T(t,t)}\,\overline{\in\vee q}\mu$ ، که یک تناقض است.

ب) فرض کنیم، $T(\mu(x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y),\mu(y\hookrightarrow z))\geq ۱/۲$. چون طبق (*) $\mu(x\hookrightarrow z)<۱/۲$، برای $t\in\,]۰,۱/۲]$ بطوریکه:

$\mu(x \hookrightarrow z) < T(t,t) \leq t < ۱/۲$ داریـم: $((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y)_t \in \mu$ و $(y \hookrightarrow z)_t \in \mu$ در حالی که $\overline{\in\vee q}\mu$ $(x \hookrightarrow z)_{T(t,t)}$ و این یک تناقض است.پس فرض خلف باطل و حکم (۱) برقرار است.مشابها می توان (۲) را نیز ثابت کرد.

($\Leftarrow$) فرض کنیم μ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی بوده که درگزاره های (۱) و(۲) صدق کند، و به ازای $s,t \in]0,۱]$ داشته باشیم $((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y)_r \in \mu$ و $(y \hookrightarrow z)_t \in \mu$.در این صورت

$$\mu(x \hookrightarrow z) \geq \mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y) \wedge \mu(y \hookrightarrow z) \wedge ۱/۲ \geq \mathrm{r} \wedge \mathrm{s} \wedge ۱/۲$$

اگر $\mathrm{r} \wedge \mathrm{s} > ۱/۲$ ، آنگاه $\mu(x \hookrightarrow z) + r \wedge s > ۱$ لذا $(x \hookrightarrow \mathrm{z})_{\mathrm{r}\wedge\mathrm{s}} q\mu$.

اگر $\mathrm{r} \wedge \mathrm{s} \leq ۱/۲$، آنگاه $\mu(x \hookrightarrow z) \geq r \wedge s$ و لذا $(x \hookrightarrow z)_{r\wedge s} \in \mu$. پس در هر صورت $(x \hookrightarrow z)_{r\wedge s} \in\vee q\mu$.

به همین ترتیب می توان ثابت کرد که اگر $((x \odot z^{-}) \to y)_r \in \mu \,, (y \to z)_t \in \mu$، آنگاه $(x \to z)_{r\wedge s} \in\vee q\mu$ بنابراین μ یک فیلتر استلزامی $(\in, \in\vee q)_T$- فازی است .

نتیجه۴-۱-۲ هر فیلتر استلزامی $(\in,\beta)_T$- فازی در شرایط(۱) و (۲) از قضیه ۴-۱-۱ صدق میکند.

برهان:بنابر قضیه۲-۱-۹ ، هر فیلتر $(\in,\beta)_T$- فازی یک فیلتر $(\in, \in\vee q)_T$- فازی اسـت. از طرفـی طبق قضیه۴-۱-۱، هر فیلتر استلزامی $(\in, \in\vee q)_T$- فازی نیز در دو شرط(۱) و (۲) صدق می کند.پس اثبات تمام است.

قضیه۴-۱-۳فرض کنیم μ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_T$- فازی از L باشد.اگر $\mu_t \neq \emptyset$ ($t \in [۱/۲,۱]$) یک فیلتر استلزامی باشد ، آنگاه به ازای هر $x,y,z \in \mathrm{L}$ داریم:

(۱) $\mu(x \hookrightarrow z) \vee ۱/۲ \geq T(\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y), \mu(y \hookrightarrow z))$ ،

(۲) $\mu(x \to z) \vee ۱/۲ \geq T(\mu((z^{-} \odot x) \to y), \mu(y \to z))$.

بعلاوه عکس قضیه برای$\mathrm{T}=\wedge$درست است.

برهان. (۱) فرض کنیم (۱) برقرار نباشد(فرض خلف) . پس وجود دارند $x, y, z \in L$ به طوریکه

$\mu(x \hookrightarrow z) \vee ۱/۲ < T(\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y), \mu(y \hookrightarrow z))$. عدد حقیقی مانند

t∈ [۰,۱] چنان وجود داردکه:

$$\mu(x \hookrightarrow z) \vee ۱/۲ < t < T((\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y), \mu(y \hookrightarrow z))$$

در نتیجه t ≥ ۱/۲ ، $\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y) > t$ و $\mu(y \hookrightarrow z) > t$ که ایجاب می کند $(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in \mu_t$ و $(y \hookrightarrow z) \in \mu_t$ و از آنجا داریم: $x \hookrightarrow z \in \mu_t$ و این یعنی $\mu(x \hookrightarrow z) > t$ که تناقض است . لذا فرض خلف باطل و حکم (۱) برقرار است.

مشابها میتوان (۲) را نیز ثابت کرد.

(⇒) فرض کنیم (۱) و(۲) برقرار باشند. و[۱ ,۱/۲) ∋ t و $x, y, z \in L$ چنان باشندکه

$(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in \mu_t$ و $y \hookrightarrow z \in \mu_t$ در نتیجه $\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y) \geq t$ و

$\mu(y \hookrightarrow z) \geq t$.این ایجاب می کند که؛

$\mu(x \hookrightarrow z) \vee ۱/۲ \geq \mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y) \wedge \mu(y \hookrightarrow z) \geq t$.از آنجا که $t > ۱/۲$ پس

$\mu(x \hookrightarrow z) \geq t$ ، یعنی $(x \hookrightarrow z) \in \mu_t$.

به همین صورت می توان ثابت کرد که اگر $(z^{-} \odot x) \to y \in \mu_t$ و $y \to z \in \mu_t$، آنگاه

$x \to z \in \mu_t$.

در نتیجه به ازای [۱,۱/۲) ∋ t ، μ_t یک فیلتر استلزامی است.

قضیه۴-۱- ۴فرض کنیم F زیرمجموعه ای ناتهی ازL باشد. زیرمجموعه فازی μ از L را چنین تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} \mu(x) \geq ۱/۲ ، x \in F \\ \mu(x) = ۰ \quad .x \notin F \end{cases}$$

در اینصورت μ یک فیلتر استلزامی $(\alpha, \in\vee q)_T$- فازی است. اگر و تنها اگر F یک فیلتر استلزامی باشد.$(\alpha \neq\in\wedge q)$

برهان($\Leftarrow$) ابتدا فرض می کنیم F یک فیلتر استلزامی از L باشد و $((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y)_r \alpha\mu$ و $(y \hookrightarrow z)_s \alpha\mu$.نشان میدهیم $(x \hookrightarrow z)_{T(r,s)} \beta\mu$.برای این منظور دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

الف)$\alpha =\in$. در اینصورت $\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y) \geq r$ و $\mu(y \hookrightarrow z) \geq s$ که از آنجا طبق تعریف μ داریم: $\mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) \geq ۱/۲$ و $\mu(y \hookrightarrow z) \geq ۱/۲$.

پس $(x \hookrightarrow z^{\sim}) \hookrightarrow y \in F$ و $y \hookrightarrow z \in F$.

چون F فیلتر استلزامی است ، پس $x \hookrightarrow z \in F$ و در نتیجه $\mu(x \hookrightarrow z) \geq ۱/۲$.

حال اگر $T(r,s) \leq ۱/۲$، آنگاه $\mu(x \hookrightarrow z) \geq T(r,s)$ و لذا $(x \hookrightarrow z)_{T(r,s)} \in \mu$.

اگر $T(r,s) > ۱/۲$، آنگاه $\mu(x \hookrightarrow z) + T(r,s) > ۱$.در نتیجه $(x \hookrightarrow z)_{T(r,s)} q\mu$.

در هر صورت $(x \hookrightarrow z)_{T(r,s)} \in\vee q\mu$.

ب) اگر $\alpha = q$، آنگاه :

$\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y) + r > ۱$ و $\mu(y \hookrightarrow z) + s > ۱$.

در نتیجه: $\mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) > ۱ - r \geq ۰$ و $\mu(y \hookrightarrow z) > ۱ - s \geq ۰$.

لذا از تعریف μ نتیجه می شود که $\mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) \geq ۱/۲$ و $\mu(y \hookrightarrow z) \geq ۱/۲$.

در نتیجه $(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in F$ و $y \hookrightarrow z \in F$ چون F فیلتر استلزامی است، لذا $x \hookrightarrow z \in F$. از اینرو $\mu(x \hookrightarrow z) \geq ۱/۲$.

حال اگر $T(r,s) \leq ۱/۲$، آنگاه $\mu(x \hookrightarrow z) \geq T(r,s)$ و اگر $T(r,s) > ۱/۲$، آنگاه:

$\mu(x \hookrightarrow z) + T(r,s) > ۱$ از اینرو $(x \hookrightarrow z)_{T(r,s)} \in\vee q\mu$.

حالت $\alpha =\in\vee q\mu$ از حالتهای(۱) و (۲) نتیجه می شود.

بطور مشابه می توان ثابت کرد که اگر $((z^{-} \odot x) \to y)_{\mathrm{r}}\alpha\mu$ و $(y \to z)_{s}\alpha\mu$، آنگاه

$(x \to z)_{T(r,s)} \in\vee q\mu$. پس μ یک فیلتر استلزامی $(\alpha, \in\vee q)_T$ - فازی از L است.

($\Rightarrow$) اگر μ یک فیلتر $(\alpha, \in\vee q)_T$ - فازی از L باشد($\alpha \in \{\in, q, \in\vee q\}$)، آنگاه

$F = \mathrm{Supp}(\mu)$. ازطرفی طبق قضیه ۲-۱-۱۰ ، F نیز یک فیلتر استلزامی ازL است.

قضیه۴-۱- ۵ هر فیلتر استلزامی $(q, \in\vee q)_T$- فازی در شرایط زیر صدق می کند:

(۱) $\mu(x \hookrightarrow z) \geq \mathrm{T}(\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y), \mu(y \hookrightarrow z), ۱/۲)$

(۲) $\mu(x \to z) \geq T(\mu((\bar{z} \odot x) \to y), \mu(y \to z), ۱/۲)$

برهان(۱)فرض کنیم μ یک فیلتر استلزامی $(q, \in\vee q)_T$- فازی از L باشد. ولی عناصری مانند

$x, y, z \in \mathrm{L}$ وجود داشته باشند که:

$\mu(x \hookrightarrow z) < T(\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y), \mu(y \hookrightarrow z), \frac{۱}{۲})$(فـرض خلـف).در ایـن صـورت وجـود

دارد$r \in]۰,۱]$ به طوریکه

$$۱ - T(\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y), \mu(y \hookrightarrow z), ۱/۲) < T(r, r) \leq r < ۱ - \mu(x \hookrightarrow z)$$

در این صورت داریم:

$۱ - \mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y) < r$ و

$۱ - \mu(y \hookrightarrow z) < r$

به عبارتی $\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y) + r > ۱$ و $\mu(y \hookrightarrow z) + r > ۱$.از اینرو

$((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y)_r q\mu$ و $(y \hookrightarrow z)_{\mathrm{r}} q\mu$.

از طرفی: $\mu(x \hookrightarrow z) + T(r, r) < ۱$ و $\mu(x \hookrightarrow z) < T(r, r)$ و این یعنی

$(x \hookrightarrow z)_{T(r,r)} \overline{\in\vee q}\ \mu$ که با فرض مسئله درتناقض است.پس فرض خلف باطل است و شرط(۱)

برقرار است. مشابها ثابت می شود، شرط(۲) نیز درست است.

قضیه ۴-۱- ۶ فرض کنیم μ یک فیلتر $(\alpha,\beta)_{\mathrm{T}}$- فازی از L باشد:

الف) اگر $\mu_{\mathrm{r}} \neq \emptyset$ یک فیلتر استلزامی از L باشد، آنگاه μ یک فیلتر استلزامی $(\in, \in\vee q)_T$- فازی است. (برای هر $r \in]۰,۱/۲]$)

بعلاوه عکس این قضیه در صورتی که $\mathrm{T}=\wedge$ درست است.

ب) اگر $\mu_{\mathrm{r}}^{\mathrm{q}} \neq \emptyset$ یک فیلتر استلزامی از L باشد، آنگاه μ یک فیلتر استلزامی $(\in, q)_T$- فازی از L است. (برای هر $r \in]۱/۲,۱]$)

بعلاوه عکس این قضیه در حالتی که $T=\wedge$ درست است.

ج) اگر $\mu_{\mathrm{r}}^{\in\vee\mathrm{q}} \neq \emptyset$ یک فیلتر استلزامی از L باشد، آنگاه μ یک فیلتر استلزامی $(\in, \in\vee q)_T$- فازی است .($\mathrm{r} \in]۰,۱]$) .

عکس قضیه برای $T=\wedge$ درست است.

برهان. الف)($\Leftarrow$) فرض کنیم $((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y)_r \in \mu$ و $(y \hookrightarrow z)_s \in \mu$، به ازای $x,y,z \in L$ و $r,s \in]۰,۱/۲]$. در این صورت،

$(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in \mu_r \subseteq \mu_{T(r,s)}$ و $y \hookrightarrow z \in \mu_{\mathrm{s}} \subseteq \mu_{\mathrm{T(r,s)}}$.

چون $\mu_{T(r,s)}$ فیلتر استلزامی است پس $x \hookrightarrow z \in \mu_{\mathrm{T(r,s)}}$ که نشان می دهد

$(x \hookrightarrow z)_{T(r,s)} \in \mu$ و $(x \hookrightarrow z)_{T(r,s)} \in\vee q\mu$.

به همین صورت میتوان ثابت کرد که اگر $((z^{-} \odot x) \to y)_r \in \mu$ و $(y \to z)_{\mathrm{s}} \in \mu$، آنگاه $(x \to z)_{T(r,s)} \in\vee q\mu$. در نتیجه μ یک فیلتر استلزامی $(\in, \in\vee q)_T$- فازی است.

الف) ($\Rightarrow$) فرض کنیم $t \in]۰,۱/۲]$ و $(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in \mu_{\mathrm{t}}$ و $y \hookrightarrow z \in \mu_t$. در اینصورت

$t = t \wedge \frac{۱}{۲} \geq \mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y) \wedge \mu(y \hookrightarrow z) \wedge \frac{۱}{۲} \leq \mu(x \hookrightarrow z)$، و لذا $x \hookrightarrow z \in \mu_t$.

با چنین استدلالی می توان نشان داد که اگر $(z^{-} \odot x) \to y \in \mu_t$ و $y \to z \in \mu_t$، آنگاه $x \to z \in \mu_t$. در نتیجه μ یک فیلتر استلزامی است.

ب)($\Leftarrow$)فرض کنیم $\mu_r^q \neq \emptyset$ یک فیلتر استلزامی از L بوده و به ازای $x, y, z \in L$ داشته باشیم:

$\mu \in {}_r((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y)$ و $(y \hookrightarrow z)_s \in \mu$، در نتیجه $\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y) \geq r$ و

$\mu(y \hookrightarrow z) \geq s$. پس $\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y) + r > r + r > ۱$ و

$\mu(y \hookrightarrow z) + s \geq s + s > ۱$ یعنی $(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in \mu_r^q$ و $y \hookrightarrow z \in \mu_s^q$.

چون $\mu_s^q \subseteq \mu_{T(r,s)}^q$ و $\mu_r^q \subseteq \mu_{T(r,s)}^q$ در نتیجه $x \hookrightarrow z \in \mu_{T(r,s)}^q$ و این یعنی

$\mu(x \hookrightarrow z) + T(r,s) > ۱$. ازطرفی چون $T(r,s) \geq$ $\mu(x \hookrightarrow z) > ۱ - T(r,s)$،

پس $(x \hookrightarrow z)_{T(r,s)} q\mu$.

با فرض $((z^{-} \odot x) \hookrightarrow y)_r \in \mu$ و $(y \hookrightarrow z)_s \in \mu$ می توان ثابت کرد که

$(x \hookrightarrow z)_T q\mu$، که نشان می دهد μ یک فیلتر $(\in, q)_T$- فازی استلزامی است.

ب)($\Rightarrow$) مانند قسمت الف انجام می شود.

ج)($\Leftarrow$)فرض می کنیم $\mu_r^{\in\vee q}$ یک فیلتر استلزامی از L باشد و $\left((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\right)_r \in \mu$ و

$(y \hookrightarrow z)_s \in \mu$ به ازای $x, y, z \in L$ و $r, s \in]۰,۱]$. در اینصورت:

$(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in \mu_r \subseteq \mu_{T(r,s)} \subseteq \mu_{T(r,s)}^{\in\vee q}$ و $y \hookrightarrow z \in \mu_s \subseteq \mu_{T(r,s)}^{\in\vee q}$. در نتیجه

$(x \hookrightarrow z) \in \mu_{T(r,s)}^{\in\vee q}$. بنابراین $(x \hookrightarrow z)_{T(r,s)} \in\vee q\mu$.

با چنین استدلالی درستی دومین ویژگی از تعریف فیلتر استلزامی $(\in, \in\vee q)_T$- فازی را میتوان بررسی کرد.

پس μ یک فیلتر استلزامی $(\in, \in\vee q)_T$- فازی از L است.

ج) ($\Rightarrow$)درستی این قسمت از قضیه ۴-۱-۶ نتیجه می شود.

۴- ۲فیلترهای استلزامی $(\in\wedge q, \beta)_T$ - فازی

قضیه۴-۲-۱ اگر μ یک فیلتر استلزامی $(\in\wedge q, \beta)$- فازی از L باشد ، آنگاه $\mu_{\widehat{۱/۲}} \neq \emptyset$ یک فیلتر استلزامی از L است، که $\mu_{\widehat{۱/۲}} = \{x \in L: \mu(x) > ۱/۲\}$ و $\beta \in \{\in\wedge q, \in\}$.

اثبـــات:فـرض مـی کنـیم کـه$\mu_{\widehat{1/2}} \neq \emptyset$ و$(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in \mu_{\widehat{1/2}}$ و $y \hookrightarrow z \in \mu_{\widehat{1/2}}$.در

نتیجه$\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y) > 1/2$ و $\mu(y \hookrightarrow z) > 1/2$ و

$\mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) + 1/2 > 1$ و $\mu(y \hookrightarrow z) + 1/2 > 1$ ،و این یعنی

$((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y)_{1/2} \in\wedge q\mu$ و $(y \hookrightarrow z)_{1/2} \in\wedge q\mu$.چون طبق فرض داریم:

$(x \hookrightarrow z)_{1/2}\beta\mu$، در نتیجه $(x \hookrightarrow z) \in \mu_{\widehat{1/2}}$.

مشابها می توان ثابت کرد که اگر$(z^{-} \odot x) \rightarrow y \in \mu_{\widehat{1/2}}$ و $y \rightarrow z \in \mu_{\widehat{1/2}}$،آنگاه

$x \rightarrow z \in \mu_{\widehat{1/2}}$. در نتیجه $\mu_{\widehat{1/2}}$ یک فیلتر استلزامی است .

قضیه۴-۲- ۲ هر فیلتر استلزامی$(\in\wedge q, \in)$- فازی در شرایط زیر صدق می کند .

(۱) $\mu((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y) \wedge \mu(y \hookrightarrow z) \leq \mu(x \hookrightarrow z) \vee 1/2$.

(۲) $\mu((z^{-} \odot x) \rightarrow y) \wedge \mu(y \rightarrow z) \leq \mu(x \rightarrow z) \vee 1/2$.

برهان. (۱) فرض کنیم$x, y, z \in L$ چنان وجود داشته باشند که:

$\mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) \wedge \mu(y \hookrightarrow z) = r > \mu(x \hookrightarrow z) \vee 1/2$(فرض خلف).

در نتیجه $r > 1/2$، $\mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) \geq r$ و $\mu(y \hookrightarrow z) \geq r$ و$\mu(x \hookrightarrow z) < r$.

از اینرو$\mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) + r \geq 2r > 1$ و $\mu(y \hookrightarrow z) + r \geq 2r > 1$.پس

$((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y)_r \in\wedge q\mu$ و $(y \hookrightarrow z)_r \in\wedge q\mu$،اما $(x \hookrightarrow z) \,\overline{\in}\, \mu$ ،

که یک تناقض است.پس فرض خلف باطل وگزاره(۱) درست است.

با استدلالی مشابه درستی (۲) را نیز میتوان تحقیق کرد.

قضیه۴-۲-۳ فرض کنیم μ زیرمجموعه فازی ازL باشد. اگرμ یک فیلتراستلزامی$(\in\wedge q, \in)$- فازی

باشد، آنگاه$\mu_r \neq \emptyset$ ($r \in]1/2,1]$)یک فیلتر استلزامی ازL است ، و اگر$\mu_r \neq \emptyset$

$(r \in]0,1] - 1/2)$ یک فیلتر استلزامی باشد، آنگاه μ یـک فیلتـر اسـتلزامی$(\in\wedge q, \in)$- فـازی

است.

برهان(⇐)فرض کنیم برای $x,y,z \in \mathrm{L}$ و $\mathrm{r} \in]۱/۲,۱]$ داشته باشیم:

$(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in \mu_r$ و $y \hookrightarrow z \in \mu_r$. در نتیجه $\mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) \geq r$ و

$\mu(y \hookrightarrow z) \geq r$ و $\mu(y \hookrightarrow z) \geq r$.طبق قضیه ۴-۲-۲ داریم:

$\mu(x \hookrightarrow z) \vee ۱/۲ \geq \mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) \wedge \mu(y \hookrightarrow z) \geq r$.

از طرفی چون $\mathrm{r} > ۱/۲$ لذا $\mu(x \hookrightarrow z) \geq r$. در نتیجه $x \hookrightarrow z \in \mu_r$.

و به همین شکل می توان ثابت کرد اگر $(z^{-} \odot x) \rightarrow y \in \mu_r$ و $y \rightarrow z \in \mu_r$ ، آنگاه

$x \rightarrow z \in \mu_r$. پس μ_r یک فیلتر استلزامی است.

(⇒) فرض کنیم $r \in]\mathbf{0},۱] - ۱/۲$ و $\mu_r \neq \emptyset$ یک فیلتر استلزامی از L باشد، و

$((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y)_{\mathrm{r}} \in \wedge\, \mathrm{q}\mu$ و $(y \hookrightarrow z)_{\mathrm{s}} \in \wedge \mathrm{q}\mu$

در اینصورت $\mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) \geq r$ ،$\mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) + r > ۱$،

$\mu(y \hookrightarrow z) \geq s$ و $\mu(y \hookrightarrow z) + s > ۱$. $(r,s \neq ۱/۲)$

اگر $\mathrm{r,s} > ۱/۲$، آنگاه $r \wedge s > ۱/۲$ و لذا $(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in \mu_{r \wedge s}$ و $y \hookrightarrow z \in \mu_{r\wedge s}$

چون $\mu_{r\wedge s}$ یک فیلتر استلزامی است،در نتیجه $(x \hookrightarrow z)_{r\wedge s} \in \mu$.

مشابها اگر $((z^{-} \odot x) \rightarrow y)_r \in \wedge \mathrm{q}\mu$ و $(y \rightarrow z)_s \in \wedge\, q\mu$، می توان ثابت کرد که:

$x \rightarrow z \in \mu_{r\wedge s}$.

حال اگر $r,s < ۱/۲$، آنگاه $\mathrm{r} \wedge \mathrm{s} < ۱/۲$ و چون $\mu_{r\wedge s}$ یک فیلتر استلزامی است.

پس از $(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in \mu_r$ و $y \hookrightarrow z \in \mu_s$ نتیجه می شود $(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in \mu_{\mathrm{r}\wedge\mathrm{s}}$،

و $y \hookrightarrow z \in \mu_{\mathrm{r}\wedge\mathrm{s}}$ در نتیجه $x \hookrightarrow z \in \mu_{\mathrm{r}\wedge\mathrm{s}}$، یعنی $(x \hookrightarrow z)_{r\wedge s} \in \mu$.

همچنین می توان ثابت کردکه اگر $(z^{-} \odot x) \rightarrow y \in \mu_{\mathrm{r}}$ و $y \rightarrow z \in \mu_s)$، آنگاه

$(\bar{z} \odot x) \rightarrow y \in \mu_{\mathrm{r}\wedge\mathrm{s}}$ و $y \rightarrow z \in \mu_{\mathrm{r}\wedge\mathrm{s}}$ و لذا $x \rightarrow z \in \mu_{\mathrm{r}\wedge\mathrm{s}}$. بنابراین

$(x \rightarrow z)_{r\wedge s} \in \mu$.در نتیجه μ یک فیلتر استلزامی$(\in\wedge\, \mathrm{q},\in)$- فازی است .

۴-۳ فیلترهای ا ستلزامی (q,β)- فازی

قضیه۴-۳-۱ فرض کنیم μ یک فیلتر استلزامی $(q,\in)$ - فازی از L باشد. در اینصورت $\mu_r^\alpha=\emptyset$ یا μ_r^α یک فیلتر استلزامی از L است که $r\in\,]۱/۲,۱]$ و $\alpha\in\{\in,q\}$.

برهان:فرض می کنیم $\mu_r\neq\emptyset\ ,\ \ r\in\,]۱/۲,۱]$ و به ازای $x,y,\mathrm{z}\in\mathrm{L}$

$(x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y\in\mu_{\mathrm{r}}$ و $y\hookrightarrow z\in\mu_{\mathrm{r}}$. پس $\mu\big((x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y\big)\geq r$ و $\mu(y\hookrightarrow z)\geq r$ و چون $\mathrm{r}>۱/۲$ لذا $\mu\big((x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y\big)+r\geq r+r>۱$ و $\mu(y\hookrightarrow z)+r>۱$.در نتیجه $((x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y)_r q\mu$ و $(y\hookrightarrow z)_{\mathrm{r}} q\mu$ که نشان می دهد$(x\hookrightarrow z)_r\in\mu$، یعنی $x\hookrightarrow z\in\mu_{\mathrm{r}}$.

به طورمشابه ثابت می شود که اگر $(x\odot z^{-})\!\rightarrow y\in\mu_r$ و $y\rightarrow z\in\mu_r$ ، آنگاه $x\rightarrow z\in\mu_r$.

حال چون$r>۱/۲$ لذا از $\mu(x)\geq r$ نتیجه می شود $\mu(x)+r\geq ۲r>۱$ ، یعنی اگر $x\in\mu_r$ ، آنگاه $x\in\mu_r^q$.بنابراین $\mu_{\mathrm{r}}^{\in}\subseteq\mu_{\mathrm{r}}^{\mathrm{q}}$.از اینرو بنابر قضیه ۱-۳-۶ $\mu_{\mathrm{r}}^{\mathrm{q}}$ نیز یک فیلتر استلزامی است.

قضیه ۴-۳-۲ اگر μ یک فیلتر استلزامی $(\mathrm{q},\in)$- فازی باشد، آنگاه $Supp\mu$ فیلتر استلزامی است.

برهان. فرض کنیم $(x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y\in Supp\mu$ و $y\hookrightarrow z\in Supp\mu$. در نتیجه:

$\mu\big((x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y\big)>۰$ و $\mu(y\hookrightarrow z)>۰$. بنابراین وجود دارند $r,s\in\,]۰,۱]$ به طوریکه $\mu\big((x\odot z^{\sim})\hookrightarrow y\big)+r>۱$ و $\mu(y\hookrightarrow z)+s>۱$ ، پس $x\hookrightarrow z\in\mu_{r\wedge s}$، یعنی $\mu(x\hookrightarrow z)>r\wedge s>۰$. در نتیجه $x\hookrightarrow z\in Supp\mu$.به طور مشابه می توان ثابت کرد اگر $(z^{-}\odot x)\rightarrow y\in Supp$ و $y\rightarrow z\in Supp\mu$ ، آنگاه $x\rightarrow z\in Supp\mu$.

قضیه۴-۳-۳ زیرمجموعه فازی μ از L یک فیلتر استلزامی$(\mathrm{q},\in)$- فازی است اگر و تنها اگر به ازای هر $x\in Supp(\mu)$ داشته باشیم: $\mu(x)=۱$.

برهان$\Leftarrow$فرض کنیم μ یک فیلتر استلزامی$(q,\in)$- فازی بوده و $x \in \mathrm{Supp}(\mu)$ چنان وجود داشته باشد که$\mu(x) < ۱$.در نتیجه برای هر $y \in \mathrm{Supp}(\mu)$ اگر $y \le x$، آنگاه $\mu(y) > ۰$ و همچنین $y_۱ q\mu$ ، در حالیکه $x_۱ \overline{\in} \mu$،که یک تناقض است.پس به ازای هر $x \in Supp(\mu)$ ، $\mu(x) = ۱$.

($\Rightarrow$) فرض کنیم $((x \odot \tilde{z}) \hookrightarrow y)_r q\mu$ و$(y \hookrightarrow z)_s q\mu$. در اینصورت

$\mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) > ۱ - r > ۰$ و $\mu(y \hookrightarrow z) > ۱ - s > ۰$. پس

$(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in Supp(\mu)$ و $y \hookrightarrow z \in Supp(\mu)$ و لذا طبق فرض داریم:

$\mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) = ۱ = \mu(y \hookrightarrow z)$،چون $Supp(\mu)$ یک فیلتر استلزامی از L است لذا $x \hookrightarrow z \in \mathrm{Supp}(\mu)$. پس$\mu(x \hookrightarrow z) = ۱ > r \wedge s > ۰$. بنابراین $(x \hookrightarrow z)_{r\wedge s} \in \mu$.بطور مشابه می توان ثابت نمود که اگر$((z^{-} \odot x) \rightarrow y)_r q\mu$ و $(y \rightarrow z)_s q\mu$، آنگاه $(x \rightarrow z)_{T(r,s)} \in \mu$.در نتیجه μ یک فیلتر استلزامی$(q,\in)$- فازی است.

قضیه۴-۳-۴ زیرمجموعه فازی μ ازL یک فیلتر استلزامی$(q,\in)$- فازی است اگر و تنها اگر یک فیلتر استلزامی$(q,\in\wedge q)$- فازی از L باشد.

برهان($\Leftarrow$) به وضوح هرفیلتر$(q,\in\wedge q)$- استلزامی یک فیلتر استلزامی $(q,\in)$- فازي است.

($\Rightarrow$) فرض کنیم μ یک فیلتر استلزامی$(q,\in)$- فازی ازL باشد و به ازای$r,s \in]۰,۱]$ و $x,y,z \in L$ ، $(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y)_r q\mu$ و $(y \hookrightarrow z)_s q\mu$. در نتیجه

$\mu\big((x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y\big) > ۱ - r \ge ۰$و $\mu(y \hookrightarrow z) > ۱ - s \ge ۰$.که نشان می دهد$(x \odot z^{\sim}) \hookrightarrow y \in Supp(\mu)$و $y \hookrightarrow z \in Supp(\mu)$.پس $x \hookrightarrow z \in Supp(\mu)$ و در نتیجه$\mu(x \hookrightarrow z) = ۱$.

بنابراین$\mu(x \hookrightarrow z) \ge r \wedge s$ و $\mu(x \hookrightarrow z) + r \wedge s > ۱$ و این یعنی$(x \hookrightarrow z)_{r\wedge s} \in\wedge q\mu$.

مشابها می توان نشان داد که اگر$(z^{-} \odot x) \to y)_r q\mu$ و$(y \to z)_s \mathrm{q}\mu$، آنگاه

$(x \hookrightarrow z)_{T(r,s)} \mathrm{q}\mu$.

نتیجه۴-۳-۵ هر فیلتر استلزامی$(q, \in)$- فازی یک فیلتر استلزامی(q, q)- فازی است.

برهان.می دانیم هر فیلتر استلزامی$(q, \in \wedge\, q)$ -فازی یک فیلتر استلزامی(q, q)- فازی است.از طرفی هر فیلتر استلزامی$(\mathrm{q}, \in)$- فازی نیزیک فیلتر استلزامی$(\mathrm{q}, \in \wedge\, \mathrm{q})$- فازی است پس حکم مسئله محقق است.

منابع

[۱] Bardossy.A.and Duckstein,L.(۱۹۹۵).Fuzzy rule-based modeling wit application to geophysical. InBiological and engineering system . ۱^{s}Ed,CRC and Boca Raton, Fl,USA

[۲] P.Bahls,J.Cole,N.Galatos,P.Jipsen,C.Tsinakis,Cancellative residuated lattices,Algebra Universalis ۵۰(۲۰۰۳),۸۳-۱۰۶

[۳] D.Busneag,D.Piciu,on the lattice of filters of a pseudo BL-algebra,Journal of Multiple Valued Logic and SoftComputing,vol.X(۲۰۰۶),۱-۳۲

[۴]G.Geargescu,L.Leus tean,some classes of pseudo BL-algebras,J.Aust Math.۷۳(۲۰۰۲)۱۲۷-۱۵۳

[۵] C.S.Hoo,S.Sessa,Implicative and Boolean ideal in MV- algebras. Math,Jap.۳۹(۱۹۹۴)۲۱۵-۲۱۹

[۶] A.Iorgescu,Classes of pseudo BCK—algebras,Part۱-۵,IMAR,(۲۰۰۴)

[۷] K.Iseki, S.Tanaka,Ideal theory of BCK-algebras,Math.Jap.۲۱(۱۹۷۶)۳۵۱-۳۶۶

[۸] W.Krull,Mathematische Zeitschrift,vol.۲۸(۱۹۲۸),pp.۴۸۱-۵۰۳

[۹] E.P.Klement and R.Mesiar, Logical,Algebraic, Analitic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms.Netherlands,۲۰۰۵

[۱۰]Ksko.B.(۱۹۹۲).Neural networks and Fuzzy systems.۱^{s}Ed.,prentice- Hall, Englewood cliffs,N.J

[۱۱]L.Z.Liu,K.T.Li,Fuzzy Boolean and positive implicative filters of BL-algebras,Fuzzy sets syst.۱۵۲(۲۰۰۵)۳۳۳-۳۴۸

[۱۲]L.Liu,K.Li,Boolean filters and positive implicative filters of residuated lattices.Iform Sci.۱۷۷(۲۰۰۷)۵۷۲۵-۵۷۳۸

[۱۳] A.Di Nola,G.Georgescu,A.Iorgelescu,pseudo BL-algebras,PartI,mult. Val.Logic ۸ (۲۰۰۲)۶۷۳-۷۱۶

[۱۴] A.Di Nola,G.Georgescu,A.Iorgulescu,Pseudo BL-algebras,Part I ,Multiple Valued Logic ۸(۲۰۰۲),۶۷۳-۷۱۴

[۱۵] H.One,Sstructural logics and residuated lattices,an introduction,۵۰ Years of Studia Logica,Trednds in Logic,Kluwer Academic Publischer,۲۱(۲۰۰۳),۱۹۳-۲۲۸

[۱۶] J.Rachunek,A non-commutative generalization of MV- algebra,Czech.Math J.۵۲(۱۲۷)(۲۰۰۲)۲۲۵-۲۷۳

[۱۷] Russel,S.O,and Campbell,P.F.(۱۹۹۶)."Reservoir operating rules with fuzzy programming."J.Water Resour.plan,Manage.,۱۲۳(۳),۱۶۵-۱۷۰

[۱۸]E.Turunen,Boolean dedective systems of BL-algebras,Arch.Math. Logic۴۰(۲۰۰۱)۴۶۷-۴۷۳

[۱۹] M.Ward.R.P.Dilworth,Residuated lattices,Transactions of the American Mathematical Sciety ۴۵(۱۹۳۹),۳۳۵-۳۵۴

[۲۰]تشنه لب . م.،صفارپور،وافیونی،د.(۱۳۷۸)-سیستم های فازی وکنترل فازی ،دانشگاه خواجه نصیر طوسی ، تهران

واژه نامه ریاضی

Associative	شرکت پذیر
Absolute	مطلق
Algebraic multiplication	ضرب جبری
Add	جمع کردن
Boolean	بولی
Binary operation	عملگردوتائی
Boundary	کرانه
Bivariant	دومتغییری
Closure	بستار
Common factor	عامل مشترک
Commutative	جابجایی
Corollary	نتیجه
Complete	کامل
Decomposable	تجزیه پذیر
Decrease	نزول
Denumerable	قابل شمارش

Directly	مستقیما
Distribution	توزیع پذیری
Element of set	عنصر مجموع
Embed	نشاندن
Empty	تهی
Enumerably infinite	نامتناهی شمارش پذیر
Equality	برابری
Factor	عامل
Finite	متناهی
First element	عنصر ابتدا
Fix	ثابت
Formula	فرمول
Function	تابع
Fuzzy point	نقطه فازی
Fuzzy subset	زیرمجموعه فازی
Ideal	ایده آل
Infinity	بی نهایت
Largest	بزرگترین
Least amount	کوچکترین مقدار
Negative numbers	اعداد منفی
Satisfy	صدق کردن
Set of values	مجموعه مقادیر

Table	جدول
Weak	خفيف – ضعيف

Abstract

This thesis organized of four chapters.

The first chapter defines the basice definitions and the results on residuated lattices.

It also discusses some of its properties.

Capter tow discusses $(\alpha,\beta)_T$-fuzzy filters on residuated lattices and introduces some of its properties that we are use.

Capther three of this research studies $(\alpha,\beta)_T - fuzzy\ implicative\ and$ $(\alpha,\beta)_T$-fuzzy positive implicative and$(\alpha,\beta)_T$ -fuzzy Boolean filters by using paterns of implicative filters and positive implicative filters and Boolean filters and presenents some basic properties of this fuzzy filters.

In the following parts of chapter three and chapter for of this mentioned.

Properties are presented by the researcher.

Key words: residuated lattice, filter, fuzzy filter

Shahrood University of Technology

Faculty math

Group pure math

generalized fuzzy filters in residuated lattices

Zeinolabedin Mohammadi

Supervisors:Dr.Ebrahim Hashemi and Dr.Mahmod Bakhshi

Date:autumn 2012