

دکتر علیرضا ناظمی  
دکتر هادی بصیرزاده



دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته  
، گرایش

عنوان

# حل عددی مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی فازی

نگارنده

مریم ممینی

شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو:

نام: مریم ممبینی

عنوان: حل عددی مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی فازی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته:

گرایش:

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۹۱

تعداد صفحات: ۱۱۰

واژگان کلیدی: کنترل زمان بهینه، مجموعه فازی، اصل ماکزیمم، آونگ ریاضی

### چکیده

یک مسئله‌ی کنترل زمان بهینه را با عدم قطعیت مورد بررسی قرار می‌دهیم. دینامیک‌های مسئله کنترل بر اساس سیستم خطی قطعی از معادلات دیفرانسیل با وضعیت‌های آغازین و نهایی فازی بیان می‌شود. با تبدیل مسئله کنترل بهینه‌ی فازی به دو نوع مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی قطعی، پاسخ مسئله را به دست می‌آوریم. در فصل اول مجموعه‌های فازی را مرور و مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل دوم شرح جامعی از مسائل حساب تغییرات و کنترل بهینه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم دو نوع مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی قطعی را معرفی می‌کنیم و روش حل چنین مسائلی را تفسیر می‌کنیم. در نهایت مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی فازی را معرفی می‌کنیم و با تبدیل این مسئله به دو نوع از مسائل کنترل زمان بهینه آن را حل می‌کنیم.

تقدیم به

روح پدر و مادرم

تقدیم به

همسر مهربانم

که بایه شور و دلگرمی زندگیم و امن ترین تکیه گاهم برای پیمودن مسیر زندگی می باشد.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

## تقدیر و سپاس

پروردگارا، از این که در پرتو لطف عمیم و مهر ویژه تو علم را آموختم و بار سنگین این امانت را به دوش گرفتم، خاکسارانه ثنا و سپاس تو می گویم. مهربانا از تو می خواهم که به وسیله کرمات عطایی را به من عنایت کنی تا چشمم به آن روشن شود و آن قدر از امنیت به من عطا کنی تا جانم آرام گیرد و آن قدر از یقین به من عطا کنی تا مشکلات دنیا برایم آسان شود. به رحمت ای مهربان ترین مهربانان.

اینک که در پرتو بیکران خداوند نگارش این پایان نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم می دانم که از زحمات بی دریغ استاد فرزانه، جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی که بر من منت نهاد و راهنمایی اینجانب را به عهده گرفت، کمال تشکر و قدردانی داشته باشم. ایشان در آغاز و انجام این تحقیق همواره باشکیبایی، کوتاهی های مرا پوشش داده و با تشویق و رهنمود های دلسوزانه خود مایه قوت و آرامش من بودند.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر هادی بصیرزاده که در این رساله مرا مورد لطف خویش قرار دادند نیز تشکر می کنم. استادی که هیچ وقت متانت و گشاده رویی ایشان در کمک کردن به دانشجویان از نظرم دور نخواهد شد. مهربانی های پدران ایشان راهرگز فراموش نخواهم کرد. عزت و عافیت ایشان را از ایزد منان مسئلت دارم.

هزاران امتنان و تقدیر و تشکر و سپاس فراوان می گزارم زحمات بی دریغ همسرم را که در تمام مراحل انجام این تحقیق از هیچ تلاشی فروگذار نکرده و همواره شریک مشکلات اینجانب بوده است و هم چنین از برادر عزیزم نیز به خاطر این که مرا در انجام این پایان نامه همراهی کرد کمال تشکر را دارم.

در پایان، بر خود وظیفه می دانم از کلیه اساتید ارجمندم در دانشگاه شهید چمران اهواز و دانشگاه صنعتی شاهرود، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

مریم ممینی

شهریور ۱۳۹۱

# فهرست مطالب

۴	مجموعه‌های فازی	۱
۴	۱.۱ مقدمه	۱.۱
۵	۲.۱ تفکر فازی	۲.۱
۶	۳.۱ مجموعه‌های قاطع	۳.۱
۷	۴.۱ توابع مشخصه	۴.۱
۸	۵.۱ مفاهیم پایه‌ای نظریه مجموعه‌های فازی	۵.۱
۸	۶.۱ مجموعه‌های فازی و توابع عضویت	۶.۱
۱۰	۷.۱ نمادگذاری مجموعه‌های فازی	۷.۱
۱۱	۸.۱ توابع عضویت	۸.۱
۱۳	۹.۱ مجموعه‌های فازی متداول	۹.۱
۱۵	۱۰.۱ مجموعه‌های فازی نرمال، محدب و عدد اصلی آن‌ها	۱۰.۱
۱۸	۱۱.۱ عملیات اصلی مجموعه‌های فازی	۱۱.۱
۲۱	۱۲.۱ خصوصیات مجموعه‌های فازی	۱۲.۱
۲۴	۱۳.۱ تساوی و شمول مجموعه‌های فازی	۱۳.۱
۲۴	۱۴.۱ $\alpha$ -برشها و اصل تجزیه	۱۴.۱
۲۹	۱۵.۱ اعداد فازی	۱۵.۱
۳۴	حساب تغییرات و کنترل بهینه	۲
۳۵	۱.۲ حساب تغییرات	۱.۲
۳۹	۲.۲ تابعی‌های وابسته به یک تابع	۲.۲
۴۵	۳.۲ تابعی‌هایی که شامل چندین تابع مستقل باشند	۳.۲
۴۹	۴.۲ کنترل بهینه	۴.۲
۵۷	۵.۲ مسئله کلی	۵.۲
۶۲	حل مسئله کنترل زمان بهینه به روش فازی	۳
۶۳	۱.۳ مسئله کنترل زمان بهینه‌ی خطی کلاسیک نوع اول	۱.۳
۷۶	۲.۳ مسئله کنترل زمان بهینه‌ی کلاسیک نوع دوم	۲.۳
۸۵	۳.۳ مسئله کنترل زمان بهینه‌ی خطی فازی	۳.۳
۸۶	۴.۳ روش محاسبه‌ی زمان بهینه‌ی فازی با مثال	۴.۳

۱۰۰

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۱۰۱

مراجع

۱۰۲

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی





فصل ۱

مجموعه‌های فازی

## ۱.۱ مقدمه

تاریخچه‌ی کاربرد منطق فازی اولین بار در سال ۱۹۲۶ توسط یکی از فلاسفه به نام کرستین المالز بر می‌گردد که در کتاب فلسفه، کلیت و فرضیه مسیر تکامل را در رابطه با مفاهیم مبهم و غیر دقیق ارائه نمود. پس از آن در سال ۱۹۳۷ توسط ماکس بک<sup>۱</sup> فیلسوف کوانتوم مقاله‌ای تحت عنوان "ابهام" منتشر کرد که برای اولین بار منجر به تعریف تابع عضویت گردید [۹]. در سال ۱۹۶۵ پرفسور لطف‌علی عسگرزاده معروف به "زاده"<sup>۲</sup> استاد ایرانی الاصل دانشگاه برکلی کالیفرنیا اولین مقاله خود را تحت عنوان "مجموعه‌های فازی" در مجله‌ی اطلاعات و کنترل [۱۲] به چاپ رسانید. این مقاله گویا دو سال قبل از چاپ و انتشارش تدوین و تکمیل شده بود اما به خاطر نظرات و اندیشه‌های اساسی و ریشه‌ای ارائه شده در آن هیچ مجله‌ی علمی پژوهشی جرات پذیرش و چاپ آن را نداشت در آن دوره از زمان، قبول ابهام و عدم قطعیت در زمینه‌ی مسائل مهندسی دور از ذهن به نظر می‌رسید. تنها مجله‌ی اطلاعات و کنترل که سر دبیر آن خود لطفی زاده بود مبادرت به چاپ این مقاله نمود. چندی بعد زاده اندیشه‌ی الگوریتم فازی را که مبنایی برای منطق و استدلال فازی است ارائه کرد. در سال ۱۹۷۲ میلادی میشیوسوگنو<sup>۳</sup> از انستیتو توکیو نظرات زاده را با ارائه‌ی مفاهیم اندازه فازی و انتگرال فازی تعقیب نمود. سال ۱۹۷۴ میلادی نقطه‌ی عطفی برای منطق فازی بود. ابراهیم ممدانی<sup>۴</sup> از دانشگاه لندن برای نخستین بار منطق فازی را در زمینه‌ی کنترل یک موتور بخار ساده به کار گرفت [۷] اولین کاربرد صنعتی منطق فازی شش سال بعد محقق شد. در سال ۱۹۸۰ میلادی اسمیت<sup>۵</sup> از دانمارک برای نخستین بار از منطق فازی برای کنترل کوره‌ی سیمان استفاده کرد. در دهه‌ی ۱۹۸۰ میلادی، موسسه‌ی فوجی الکترونیک منطق فازی را برای کنترل یک فرآیند تصفیه‌ی آب به کار گرفت. متعاقب آن شرکت هیتاچی یک سیستم کنترل خودکار قطار را بر مبنای منطق فازی به کار برد. منطق فازی را می‌توان در ساخت بازی‌های رایانه‌ای، سیستم کنترل وسایل الکترونیکی از جمله وسایل خانگی مانند یخچال، پنکه و... نام برد.

در این فصل ابتدا به معرفی منطق فازی پرداخته، سپس مفاهیم اولیه‌ی منطق فازی را بیان می‌کنیم.

<sup>۱</sup>Max Bek<sup>۲</sup>Zadeh<sup>۳</sup>Mishiosogno<sup>۴</sup>Mamdani<sup>۵</sup>Smit

## ۲.۱ تفکر فازی

از آن زمان که انسان اندیشیدن را آغاز نمود همواره کلمات و عباراتی را بر زبان جاری ساخت که مرزهای روشنی نداشتند. کلماتی نظیر "زشت"، "بلند"، "قوی" و...

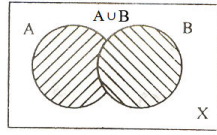
روشن است که نمی‌توان برای این کلمات مرز مشخصی یافت. برای مثال در گزاره‌ی "درخت سرو بلند است" یا "گل زیباست" نمی‌توان مرز مشخصی برای "بلند بودن" یا "زیبا بودن" در نظر گرفت. اما در بسیاری از علوم نظیر ریاضیات و منطق کلاسیک، فرض بر این است که مرزها و محدوده‌های دقیق تعریف شده‌ای وجود دارد و یک موضوع خاص، یا در محدوده آن مرز می‌گنجد یا نمی‌گنجد مواردی چون "زنده یا مرده"، "سفید یا سیاه"، "مرد یا زن" مفاهیمی در منطق کلاسیک هستند. در این علوم هر گزاره‌ای یا درست است یا نادرست. "زنده" هستند یا "مرده". این مجموعه‌های معمولی که به صورت دقیق بیان می‌شوند در نظریه مجموعه‌های فازی به "مجموعه‌های قاطع"<sup>۶</sup> معروف هستند.

در تفکر فازی مرز مشخصی وجود ندارد و تعلق عناصر مختلف به مفاهیم و موضوعات گوناگون نسبی است. به این ترتیب می‌توان دید که این تفکر تا چه اندازه با طبیعت و سرشت انسان و محیط جهان سازگار است. با رشد اندیشه انسانی و پیشرفت‌های علمی و تکنولوژی نیاز به ابزارهای مناسب‌تر علمی برای بیان مفاهیم پیچیده‌تر زندگی و محیط انسان آشکار شده است. مفاهیمی که دیگر نمایش آن با ریاضیات معمولی که بر معیارهای دو ارزشی استوار است، چندان مناسب و مقدر نیست.

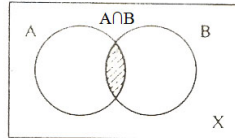
ریاضیات فازی پاسخگوی نیاز به کارگیری بیان مفاهیم چند ارزشی به جای مفاهیم دو ارزشی می‌باشد نیاز برای بیان واقعیت‌های جهان آن‌گونه که هست به جای بیان جهان در قالب‌هایی که چندان در آن نمی‌گنجد. در منطق فازی هر چیزی درجه‌ای از ابهام را دارد [۲۰] تا سعی در واضح و روشن کردن آن نکنید آن را درک نخواهید کرد.

ریاضیات کلاسیک در مواردی که با جهان دو ارزشی (۰، ۱) سرو کار داشته باشد، ابزار مناسبی برای بیان مفاهیم پیچیده در زندگی انسان است. اما همه‌ی نیازهای علمی را تامین نمی‌کند. منطق فازی توسعه یافته منطق کلاسیک برای بیان حقایق است.

<sup>۶</sup> Crip sets



شکل ۱.۱: اجتماع مجموعه‌های قاطع



شکل ۲.۱: اشتراک مجموعه‌های قاطع

### ۳.۱ مجموعه‌های قاطع

در نظریه‌ی مجموعه‌های قاطع، اجتماع، اشتراک و متمم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

فرض کنید  $A$  و  $B$  زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی مرجع  $X$  باشند در این صورت:

**تعریف ۱.۳.۱ (اجتماع).** اجتماع مجموعه‌های قاطع  $A$  و  $B$  را به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\} \quad (1.1)$$

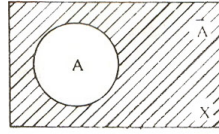
**تعریف ۲.۳.۱ (اشتراک).** اشتراک مجموعه‌های قاطع  $A$  و  $B$  به صورت زیر بیان می‌شود

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ و } x \in B\} \quad (2.1)$$

**تعریف ۳.۳.۱ (متمم).** متمم مجموعه‌ی قاطع  $A$  به صورت زیر بیان می‌شود

$$\bar{A} = \{x | x \notin A\} \quad (3.1)$$

شکل‌های مربوط به (۱) اجتماع، (۲) اشتراک و (۳) متمم مجموعه‌های قاطع:



شکل ۳.۱: متمم مجموعه‌های قاطع

## ۴.۱ توابع مشخصه

فرض کنید  $A$  بیانگر یک مجموعه‌ی قاطع بر روی مجموعه‌ی مرجع  $X$  باشد. تابع مشخصه<sup>۷</sup> مجموعه را می‌توان با نداشت زیر تعریف کرد:

$$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\} \quad (۴.۱)$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \quad (۵.۱)$$

رابطه‌ی (۵.۱) نشان می‌دهد که اگر عنصر  $x$  متعلق به  $A$  باشد آن‌گاه  $\chi_A = 1$  و در غیر این صورت  $\chi_A = 0$

تعاریف اجتماع، اشتراک و متمم مجموعه‌های قاطع با استفاده از تابع مشخصه ( $\mu$ ) می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad (۶.۱)$$

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad (۷.۱)$$

$$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A(x) \quad (۸.۱)$$

که در این رابطه‌ها ” $\vee$ ” بیانگر ماکزیمم و ” $\wedge$ ” بیانگر مینیمم می‌باشد.

## ۵.۱ مفاهیم پایه‌ای نظریه مجموعه‌های فازی

در نظریه‌ی مجموعه‌های قطعی که اساس ریاضیات مدرن را تشکیل می‌دهد، مجموعه؛ گردایه‌ای معین از اشیا است و در تعریف مجموعه بر لفظ معین تاکید می‌شود. به عبارت دیگر هر مجموعه

<sup>۷</sup>Characteristic function

با یک ویژگی خوش تعریف مشخص می‌شود. اگر شیئی دارای آن ویژگی باشد، عضو مجموعه و اگر نباشد، عضو مجموعه نیست.

مثلاً ویژگی "اعداد حقیقی بزرگتر از ۱۰۰" یک ویژگی خوش تعریف است و تشکیل یک مجموعه می‌دهد، چرا که به یقین می‌توان گفت که یک عدد حقیقی بزرگتر از ۱۰۰ هست یا نیست. ولی ویژگی "اعداد حقیقی نزدیک ۱۰۰" یک ویژگی روشن و دقیق و خوش تعریف نیست چرا که به یقین نمی‌توان گفت آیا یک عدد حقیقی مشخص (مثلاً ۱۱۱) در این ویژگی می‌گنجد یا نمی‌گنجد.

زاده پیشنهاد می‌کند که برای رفع این مشکل، مناسب است که به هر عدد از مجموعه‌ی اعداد حقیقی، عددی از بازه‌ی  $[0, 1]$  به عنوان درجه نزدیکی عدد به ۱۰۰ نسبت دهیم هر چه عدد به ۱۰۰ نزدیکتر بود، عدد متناظر برای عضویت آن در گردایه‌ی "اعداد حقیقی نزدیک به ۱۰۰"، به یک نزدیکتر می‌شود و برعکس هر چند عدد مورد نظر دورتر از ۱۰۰ باشد درجه‌ی عضویت آن در گردایه "اعداد حقیقی نزدیک ۱۰۰" به صفر نزدیک می‌شود. به این ترتیب بسیاری از مفاهیم ناخوش تعریف و بیگانه با مجموعه‌های قطعی وارد دنیای ریاضیات می‌شود و به تفکرات، زبان و منطق بشری در قالب یک ساختار ریاضی نظم و ترتیب می‌دهد. این ساختار ریاضی، نظریه‌ی مجموعه‌های فازی نامیده می‌شود.

## ۶.۱ مجموعه‌های فازی و توابع عضویت

یک مجموعه (زیر مجموعه) فازی  $A$  بر روی  $X$  به وسیله‌ی یک تابع عضویت  $\mu_A$  که بیانگر نداشت زیر است تعریف می‌شود:

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1] \quad (9.1)$$

در این جا مقدار  $\mu_A(x)$  عبارت از اندازه عضویت یا درجه‌ی عضویت  $x \in X$  است.

**تذکره ۱.۶.۱.** در این جا مجموعه‌های فازی  $A$  و  $B$  را با  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$  نمایش می‌دهیم.

**مثال ۲.۶.۱.** یک باشگاه تنیس که حسن به آن تعلق دارد دارای شش عضو است. اعضا باشگاه را در مجموعه‌ی مونث و دانشجو در نظر می‌گیریم.

$$X = \{\text{مریم، فاطمه، زهرا، علی، محمد، حسن}\}$$

<sup>^</sup>Membership function

$$A = \{\text{فاطمه، مریم، زهرا}\}$$

$$B = \{\text{علی، مریم، حسن}\}$$

$X$ : اعضا،  $A$ : اعضا مونث و  $B$ : اعضا دانشجو

در این مثال مجموعه‌های  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌های قاطع هستند مجموعه‌های فازی  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$  را جایگزین مجموعه‌های قاطع  $A$  و  $B$  می‌کنیم.

مجموعه‌ی افراد چاق:  $\tilde{A}$

مجموعه‌ی افراد میان قد:  $\tilde{B}$

بیان مجموعه‌های فازی به وسیله‌ی نمودار ون دشوار است. زیرا مفاهیم ”چاق” و ”میان قد” از نظر اشخاص مختلف متفاوت است و به موقعیت بستگی دارد. دسته بندی افراد به گروه‌های ”چاق” و ”غیر چاق” غیر عملی است. میزان ”چاقی” ممکن است از کمی سنگین وزن تا فوق‌العاده سنگین وزن تعبیر شود. بنابراین لازم است میزان و درجه‌ی چاقی تعریف شود. در این مثال، سعی می‌کنیم تا عددی بین ۰ تا ۱ به میزان یا درجه‌ی چاقی تخصیص دهیم.

درجه ۱: به معنی این است که شخص کاملاً به مجموعه افراد چاق تعلق دارد.

درجه ۰: بیانگر عدم تعلق شخص به این مجموعه است.

جدول ۱.۱ درجه‌ی ”چاقی” و ”طول قد” را بیان می‌کند:

مجموعه	علی	زهرا	فاطمه	مریم	محمد	حسن
چاق	.۴	.۵	.۹	.۳	.۷	.۶
میان قد	.۹	.۷	.۱	.۵	.۴	.۸

جدول ۱.۱:

توابع عضویت مجموعه‌های فازی، درجات نشان داده شده در جدول بالا را تعریف می‌کند. در توابع مشخصه‌ی مجموعه‌های قاطع باید در مورد تعلق یک عضو به مجموعه که یا ۰ است یا ۱ تصمیم بگیریم در حالی که توابع عضویت این امکان را به ما می‌دهد که میزان تعلق یا درجه را به صورت یک عدد حقیقی بین ۰ تا ۱ انتخاب کنیم [۲۰].

## ۷.۱ نمادگذاری مجموعه‌های فازی

روش‌های بیان مجموعه‌های فازی را می‌توان بنا به تعاریف زیر به دو دسته تقسیم کرد:

**تعریف ۱.۰.۷.۱.** بیان گسسته<sup>۹</sup> (وقتی مجموعه‌ی مرجع متناهی باشد):

فرض کنید مجموعه‌ی مرجع  $X$  به صورت زیر باشد

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

در این صورت یک مجموعه‌ی فازی مثل  $A$  بر روی  $X$  را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x_1)/x_1 + \mu_{\tilde{A}}(x_2)/x_2 + \dots + \mu_{\tilde{A}}(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i \quad (10.1)$$

که در این جا  $\sum$  مفهوم جمع را ندارد و برای بیان عناصر مجموعه استفاده می‌شود.

**تعریف ۲.۰.۷.۱.** بیان پیوسته<sup>۱۰</sup> (وقتی مجموعه‌ی مرجع نامتناهی باشد):

وقتی مجموعه‌ی مرجع  $X$  یک مجموعه‌ی پیوسته باشد، یک مجموعه‌ی فازی  $A$  بر روی  $X$

را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\tilde{A} = \int_x \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i \quad (11.1)$$

**تذکره ۳.۰.۷.۱.** نماد / در رابطه‌های (۱۰.۱) و (۱۱.۱) جدا کننده نامیده می‌شود. در سمت

راست جدا کننده عنصری از مجموعه‌ی مرجع و در سمت چپ مقدار عضویت عنصر در مجموعه‌ی

تعریف شده را می‌نویسیم.

هر عنصر از مجموعه را به همین صورت می‌نویسیم و برای مربوط کردن جملات به هم از نماد

”+“ استفاده می‌کنیم. توجه داشته باشیم که هر چند در ریاضیات معمولی نمادهای (+) به معنی

تقسیم و جمع به کار می‌روند اما معنی آن‌ها در تعریف مجموعه‌های فازی متفاوت است. اگر لازم

باشد تا جملات را در بیان گسسته جمع کنیم، از نماد  $\sum$  استفاده می‌کنیم.

**تذکره ۴.۰.۷.۱.** برای بیان گسسته دو قاعده دیگر نیز وجود دارد

(۱) هنگامی که درجه‌ی عضویت عنصری مثلاً  $x'$  صفر است، به عبارت دیگر وقتی  $\mu_A(x') = 0$

آن را حذف می‌کنیم و دیگر  $x'/0$  را نمی‌نویسیم.

<sup>۹</sup>Discrete expression

<sup>۱۰</sup>Continous expression



(۲) چنانچه بیش از یک مقدار به یک عنصر از مجموعه‌های مرجع متعلق باشد، می‌توانیم بزرگترین مقدار را به عنوان مقدار درجه‌ی عضویت در نظر بگیریم مثلاً برای  $x'$

$$0/5/x' + 0/8/x' + 0/2/x' \rightarrow 0/8/x'$$

**تذکره ۵.۷.۱.** در عبارت پیوسته، نماد  $f$  به عنوان توسیعی از  $\sum$  به دنیای پیوسته به کار گرفته شده و هیچ ارتباطی با انتگرال ندارد. در سمت راست پایین این نماد، نام مجموعه‌ی مرجع را می‌نویسیم تا مشخص شود که مجموعه‌های فازی نمایانگر کدام مجموعه‌ی مرجع است.

**مثال ۶.۷.۱.** مجموعه‌ی مرجع  $X = \{a, b, c, d, e\}$  را در نظر می‌گیریم. یک زیر مجموعه فازی  $\tilde{A}$  از  $X$  که نشان دهنده ویژگی بودن است را می‌توان با تابع عضویت به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x = a \\ 0/2 & x = b \\ 0/5 & x = c \\ 0/7 & x = d \\ 1 & x = e \end{cases}$$

$\tilde{A}$  را با استفاده از نمادهایی که در رابطه‌ی (۱۰.۱) اشاره شد، به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\tilde{A} = 0/1/b + 0/5/c + 0/7/d + 1/e$$

## ۸.۱ توابع عضویت

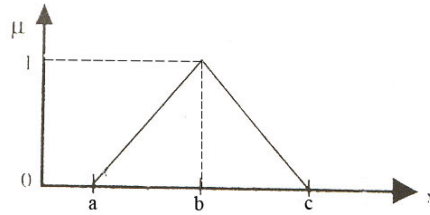
[۲] نحوه‌ی ایجاد مجموعه‌های فازی و توابع عضویت آن‌ها به زمینه و دامنه کاربرد آن‌ها بستگی دارد. تعریف یک مجموعه فازی برای مفهوم مورد نظر با تعریف یک تابع عضویت مناسب برای آن کامل می‌شود. تعریف تابع عضویت مناسب بسیار مهم است زیرا اگر تابع عضویت تعریف شده برای مجموعه‌ی فازی مناسب نباشد کلیه تحلیل و بررسی‌های پس از آن دچار انحراف می‌شوند. در مبحث نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، روش‌های مختلفی برای تعریف تابع عضویت معرفی شده‌اند.

**تعریف ۱۰.۸.۱ (تابع عضویت مثلثی).** تابع عضویت مثلثی<sup>۱۱</sup> توسط سه پارامتر  $\{a, b, c\}$  تعریف می‌شود که به صورت زیر است:

$$\text{trn}(x : a, b, c) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & , b \leq x \leq c \\ 0 & , x \geq 0 \end{cases} \quad (12.1)$$

شکل تابع عضویت مثلثی به صورت زیر است:

<sup>۱۱</sup>Triangular Membership Function

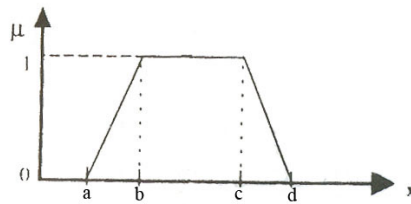


شکل ۴.۱: تابع عضویت مثلثی

تعریف ۲.۸.۱ (تابع عضویت ذوزنقه‌ای). تابع عضویت ذوزنقه‌ای<sup>۱۲</sup> توسط چهار پارامتر  $\{a, b, c, d\}$  به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$trp(x : a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x < b \\ 1 & , b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & , c \leq x < d \\ 0 & , x > d \end{cases} \quad (13.1)$$

که نمایش آن به صورت زیر است:



شکل ۵.۱: تابع عضویت ذوزنقه‌ای

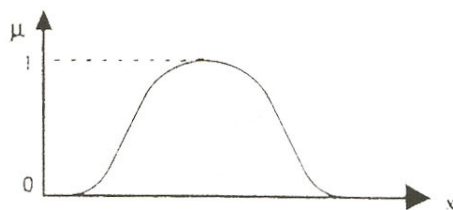
تعریف ۳.۸.۱ (تابع عضویت گوسی (نمایی)). تابع عضویت گوسی<sup>۱۳</sup> با دو پارامتر  $\{a, \sigma\}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$gsn(x : a, \sigma) = \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{\sigma^2}\right) \quad (14.1)$$

و نمایش آن طبق شکل زیر است:

<sup>۱۲</sup>Trapezoidal Membership Function

<sup>۱۳</sup>Gaussian Membership Function

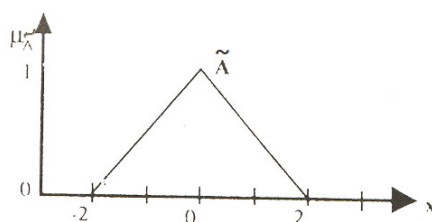


شکل ۶.۱: تابع عضویت گوسی

## ۹.۱ مجموعه‌های فازی متداول

در مثال زیر سه نوع مختلف از مجموعه‌های فازی را به نام‌های مثلثی،<sup>۱۴</sup> ذوزنقه‌ای،<sup>۱۵</sup> نمایی<sup>۱۶</sup> معرفی می‌کنیم.

**مثال ۱.۹.۱.** مجموعه‌های فازی مثلثی: شکل‌های (الف) و (ب) به ترتیب نمودار پیوسته و گسسته مجموعه‌های فازی مثلثی را با قاعده ۴ و ارتفاع ۱ نشان می‌دهد.



شکل ۷.۱: (الف) بیان نامتناهی (مثلثی)

بیان پیوسته‌ی مجموعه فازی شکل (الف) عبارت است از

$$\tilde{A} = \int_{-2}^0 \frac{(2+x)}{2} / x + \int_0^2 \frac{(2-x)}{2} / x$$

حال این عبارت را به کمک بیان گسسته مجدداً بازنویسی می‌کنیم.  
حالت اول: اگر مجموعه‌ی مرجع به صورت زیر داده شده باشد

$$X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

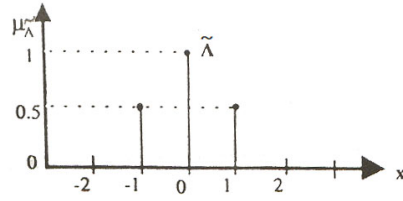
$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0.5}{-1} + \frac{1}{0} + \frac{0.5}{1} \right\}$$

حالت دوم: اگر مجموعه‌ی مرجع  $X$  پیچیده‌تر و به صورت زیر باشد

<sup>۱۴</sup>Tringular fuzzy sets

<sup>۱۵</sup>Tropezeidal fuzzy sets

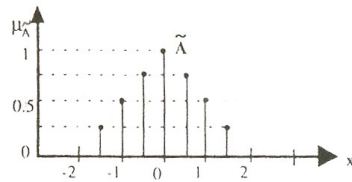
<sup>۱۶</sup>Exponextial fuzzy sets



شکل ۸.۱: (ب) بیان متناهی (حالت اول)

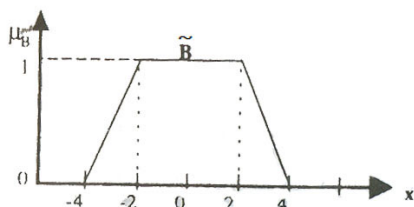
$$X = \{-2, -1/5, -1, -0/5, 0, 0/5, 1, 1/5, 2\}$$

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0/25}{-1/5} + \frac{0/5}{-1} + \frac{0/75}{-0/5} + \frac{1}{0} + \frac{0/75}{0/5} + \frac{0/5}{1} + \frac{0/25}{1/5} \right\}$$



شکل ۹.۱: (ب) بیان متناهی (حالت دوم)

**مثال ۲.۹.۱.** مجموعه‌های فازی ذوزنقه‌ای: شکل زیر مثالی از مجموعه‌های فازی ذوزنقه‌ای را نشان می‌دهد این مجموعه‌ی فازی ذوزنقه‌ای با بیان پیوسته زیر قابل ارائه است



شکل ۱۰.۱: مجموعه فازی ذوزنقه‌ای

$$\tilde{B} = \int_{-4}^{-2} \frac{(4+x)}{2} / x + \int_{-2}^2 1 / x + \int_2^4 \frac{(4-x)}{2} / x$$

حال چگونگی بیان گسسته مجموعه فازی ذوزنقه‌ای را بررسی می‌کنیم. اگر مجموعه‌ی مرجع  $X$  به صورت زیر باشد

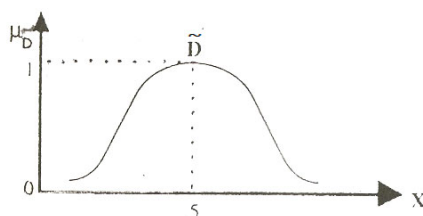
$$X = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

آن‌گاه بیان متناهی مجموعه‌ی فازی به صورت زیر خواهد بود

$$\tilde{B} = \frac{0.5}{-3} + \frac{1}{-2} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.5}{3}$$

**مثال ۳.۹.۱.** مجموعه‌های فازی نمایی: شکل زیر مثالی از مجموعه‌های فازی نمایی را نشان می‌دهد تابع عضویت این نوع مجموعه‌ی فازی به وسیله‌ی تابع نمایی بیان می‌شود. بیان نامتناهی این نوع از مجموعه‌ی فازی می‌تواند به صورت زیر باشد

$$\tilde{D} = \int_x e^{-0.5(x-5)^2} / x$$



شکل ۱۱.۱: مجموعه فازی نمایی

حال چگونگی بیان متناهی مجموعه‌های فازی نمایی را بررسی می‌کنیم. اگر مجموعه‌ی مرجع  $X$  به صورت زیر مفروض باشد

$$X = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

آن‌گاه بیان متناهی  $\tilde{D}$  به صورت زیر است

$$\tilde{D} = \frac{0.11}{2} + \frac{0.607}{4} + \frac{0.607}{6} + \frac{0.11}{8}$$

چون مقادیر عضویت ۰ و ۱۰ بسیار کوچک است و به صفر نزدیک است آن‌ها را از عبارت حذف کردیم

$$\mu_{\tilde{D}}(0) = \mu_{\tilde{D}}(10) = 3.37 \times 10^{-6} \simeq 0$$

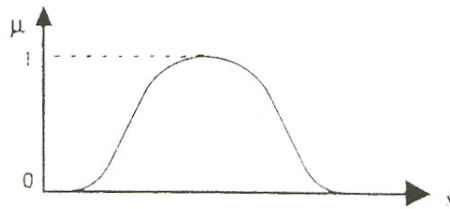
### ۱۰.۱ مجموعه‌های فازی نرمال، محدب و عدد اصلی آن‌ها

فرض کنیم  $\tilde{A}$  یک مجموعه‌ی فازی بر روی مجموعه‌ی مرجع  $X$  باشد، داریم:

مجموعه‌ی فازی نرمال:<sup>۱۷</sup>

مجموعه‌ی فازی  $\tilde{A}$  نرمال است هرگاه:

$$\max \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 \quad (15.1)$$



شکل ۱۲.۱: مجموعه فازی نرمال

مجموعه‌ی فازی محدب:<sup>۱۸</sup>

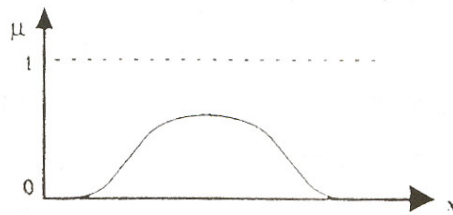
مجموعه‌ی فازی  $\tilde{A}$  محدب است هرگاه

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0, 1]$$

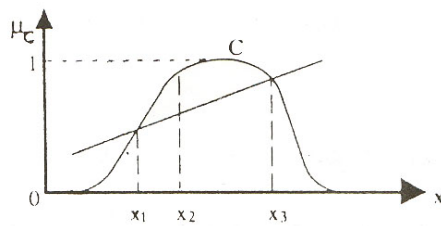
$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)) \quad (16.1)$$

<sup>۱۷</sup>Normal fuzzy set

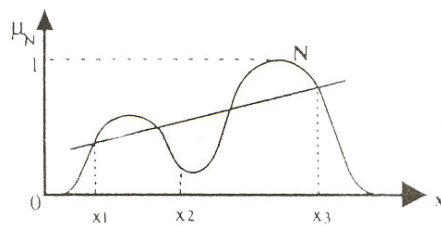
<sup>۱۸</sup>Convex fuzzy sets



شکل ۱۳.۱: مجموعه فازی غیر نرمال



شکل ۱۴.۱: مجموعه فازی محدب



شکل ۱۵.۱: مجموعه فازی غیر محدب

عدد اصلی: <sup>۱۹</sup>

وقتی  $X$  یک مجموعه‌ی متناهی است، عدد اصلی مجموعه‌ی فازی  $\tilde{A}$  بر  $X$  به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$|\tilde{A}| = \mu_{\tilde{A}}(x_1) + \mu_{\tilde{A}}(x_2) + \dots + \mu_{\tilde{A}}(x_n) = \sum_{x_i \in X} \mu_{\tilde{A}}(x_i) \quad (17.1)$$

تعداد نسبی عناصر:

تعداد نسبی عناصر مجموعه‌ی فازی  $\tilde{A}$  بر  $X$  عبارت است از:

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|} \quad (18.1)$$

که در آن  $|\tilde{A}|$  تعداد عناصر مجموعه‌ی  $\tilde{A}$  و  $|X|$  تعداد عناصر مجموعه‌ی مرجع  $X$  است.

<sup>۱۹</sup>Cardinality

ارتفاع مجموعه‌ی فازی  $\tilde{A}$ :

$$M = (\tilde{A}) \text{ ارتفاع} = \max_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) \quad (19.1)$$



تکیه‌گاه:

مجموعه عناصری از  $X$  که  $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$  باشد را تکیه‌گاه  $\tilde{A}$  نامیده می‌شود و با  $Supp\tilde{A}$  نشان داده می‌شود

$$Supp\tilde{A} = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (20.1)$$

بر این اساس، مجموعه فازی تهی مجموعه‌ای است که هیچ تکیه‌گاهی ندارد و درجه‌ی عضویت تمام عناصر آن برابر صفر است. نقطه‌ی گذر:

اگر برای عنصری مثل  $x$  در  $\tilde{A}$  داشته باشیم  $\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{4}$  آن‌گاه  $x$  را یک نقطه‌ی گذر (معبر) می‌گویند.

**مثال ۱.۱۰.۱.** مجموعه‌ی مرجع  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و مجموعه‌ی فازی  $\tilde{A}$  از  $X$  را در نظر می‌گیریم

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0.5 & x = 2 \\ 0.3 & x = 3 \\ 0 & x = 4, 5 \end{cases} \quad (21.1)$$

می‌خواهیم تکیه‌گاه، ارتفاع و نقطه‌ی گذر مجموعه‌ی  $\tilde{A}$  را به دست آوریم.  
حل:

$$Supp\tilde{A} = \{1, 2, 3\}$$

$$M = Supp\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

ارتفاع مجموعه‌ی  $\tilde{A}$  برابر ۱ است، بنابراین  $\tilde{A}$  یک مجموعه‌ی فازی نرمال است و نقطه  $x = 2$  با  $\mu_{\tilde{A}}(2) = \frac{1}{4}$  نقطه‌ی گذر  $\tilde{A}$  می‌باشد.

**مثال ۲.۱۰.۱.** فرض کنیم شما مدیر بخشی از سازمان "الف" باشید و مسئولیت اداره‌ی ۵ نفر را بر عهده دارید و میزان رضایت شما از عملکرد این ۵ نفر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0.8}{\text{زینب}}, \frac{0.4}{\text{علی}}, \frac{0.4}{\text{محمد}}, \frac{1}{\text{فاطمه}}, \frac{0.8}{\text{مریم}} \right\}$$

در این صورت عدد اصلی و عدد اصلی نسبی مجموعه‌ی  $\tilde{A}$  برابر است با:

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.8 + 0.4 + 0.4 + 1 + 0.8 = 3.4$$

$$\|A\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|} = \frac{۳/۴}{۵} = ۰/۶۸$$

## ۱۱.۱ عملیات اصلی مجموعه‌های فازی

تعریف ۱.۱۱.۱. (اجتماع مجموعه‌های فازی  $A$  و  $B$ ):

اجتماع مجموعه‌های فازی  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$  یعنی  $\tilde{A} \cup \tilde{B}$  به کمک تابع عضویت به صورت زیر تعریف

می‌شود:

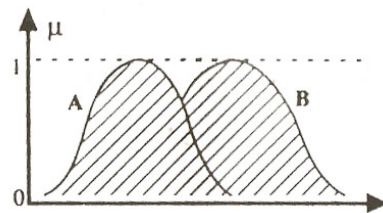
$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (۲۲.۱)$$

که در آن

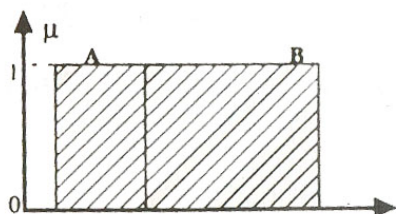
$$\mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x) & \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x) \\ \mu_{\tilde{B}}(x) & \mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x) \end{cases} \quad (۲۳.۱)$$

را می‌توان به صورت  $\max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$  نوشت.

شکل‌های زیر اجتماع مجموعه‌های فازی و قاطع را نشان می‌دهد.



شکل ۱۶.۱: اجتماع مجموعه‌های فازی



شکل ۱۷.۱: اجتماع مجموعه‌های قاطع

تعریف ۲.۱۱.۱. (اشتراک مجموعه‌های فازی  $A$  و  $B$ ):

اشتراک مجموعه‌های فازی  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$  یعنی  $\tilde{A} \cap \tilde{B}$  به کمک تابع عضویت به صورت زیر تعریف

می‌شود:

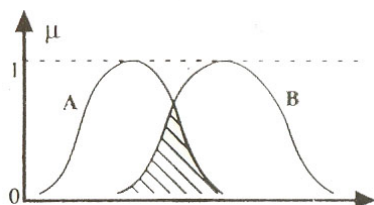
$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (24.1)$$

که در آن

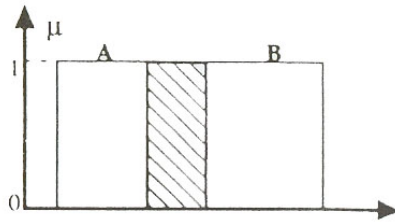
$$\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x) & \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \\ \mu_{\tilde{B}}(x) & \mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{\tilde{B}}(x) \end{cases} \quad (25.1)$$

را می‌توان به صورت  $\min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$  نوشت.

شکل‌های زیر اشتراک مجموعه‌های فازی و قاطع را نشان می‌دهد.



شکل ۱۸.۱: اشتراک مجموعه‌های فازی



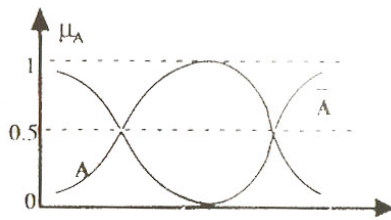
شکل ۱۹.۱: اشتراک مجموعه‌های قاطع

تعریف ۳.۱۱.۱. (متمم مجموعه فازی  $\bar{A}$ ):

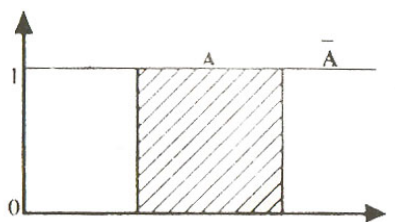
متمم مجموعه فازی  $\bar{A}$  یعنی  $\bar{\bar{A}}$  خود یک مجموعه‌ی فازی است که به وسیله‌ی تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (۲۶.۱)$$

شکل‌های زیر متمم مجموعه‌های فازی و نرمال را نشان می‌دهد.



شکل ۲۰.۱: متمم مجموعه‌های فازی



شکل ۲۱.۱: متمم مجموعه‌های قاطع

## ۱۲.۱ خصوصیات مجموعه‌های فازی

فرض کنید  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  و  $\bar{C}$  سه مجموعه فازی بر روی مجموعه مرجع  $X$  باشند

الف) خصوصیات مشترک بین مجموعه‌های قاطع و فازی:

(۱) قانون خود توانی:

$$\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}, \tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A} \quad (۲۷.۱)$$

(۲) قانون جابجایی:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}, \tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A} \quad (۲۸.۱)$$

(۳) قانون شرکت پذیری:

$$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap \tilde{C} \quad (۲۹.۱)$$

$$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup \tilde{C} \quad (۳۰.۱)$$

(۴) قانون توزیع پذیری:

$$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C}) \quad (۳۱.۱)$$

$$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C}) \quad (۳۲.۱)$$

(۵) قانون منفی مضاعف:

$$\tilde{A} = \overline{\overline{\tilde{A}}} \quad (۳۳.۱)$$

(۶) قوانین دمورگان:

$$\overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cap \overline{\tilde{B}} \quad (۳۴.۱)$$

$$\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cup \overline{\tilde{B}} \quad (۳۵.۱)$$

ب) خصوصیات که در مورد مجموعه قاطع صادق است ولی در حالت کلی برای مجموعه فازی صادق نیست:

(۱) قانون میانه‌ی غیر شمول:

$$\tilde{A} \cup \overline{\tilde{A}} \neq X \quad (۳۶.۱)$$

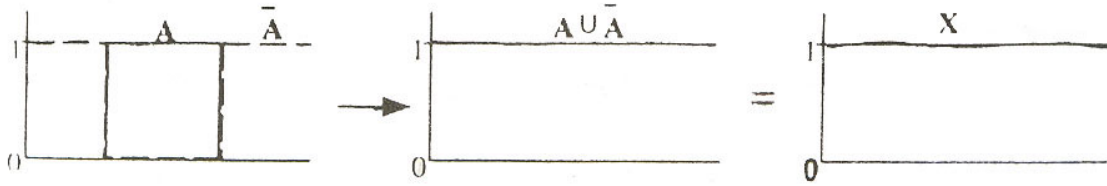
(۲) قانون تناقض:

$$\tilde{A} \cap \overline{\tilde{A}} \neq \emptyset \quad (۳۷.۱)$$

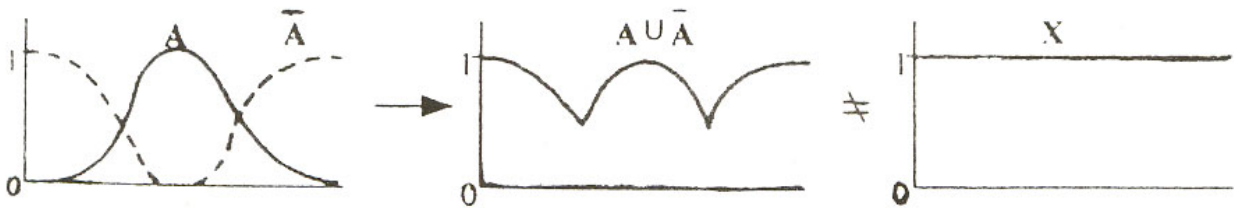
که در رابطه (۳۷.۱)،  $\emptyset$  به معنی مجموعه‌ی تهی می‌باشد [۵].

مثال ۱.۱۲.۱. (قوانین میانه‌ی غیر مشمول و تناقض):

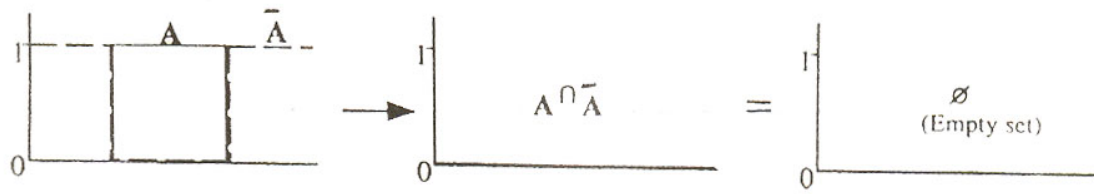
در این مثال نمونه‌هایی از قوانین میانه‌ی غیر مشمول و تناقض را ارائه می‌دهیم که در مورد مجموعه فازی برقرار نیست.



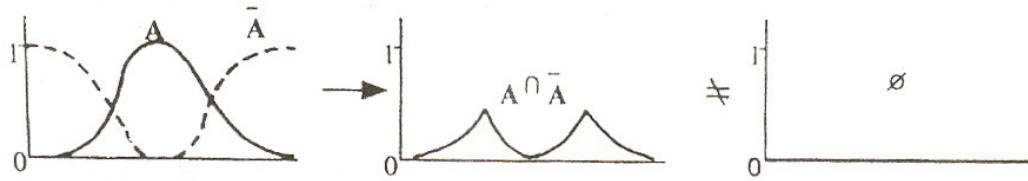
شکل ۲۲.۱: قانون میانه‌ی غیر مشمول برای مجموعه‌های قاطع



شکل ۲۳.۱: قانون میانه‌ی غیر مشمول برای مجموعه‌های فازی



شکل ۲۴.۱: قانون تناقض برای مجموعه‌های فازی



شکل ۲۵.۱: قانون تناقض برای مجموعه‌های فازی

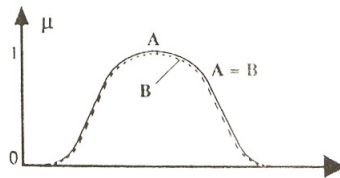
### ۱۳.۱ تساوی و شمول مجموعه‌های فازی

فرض کنید  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$  دو مجموعه فازی بر روی مجموعه مرجع  $X$  باشند.

**تعریف ۱.۱۳.۱.** (تساوی مجموعه‌های فازی):

تساوی مجموعه‌های فازی  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \quad , \quad \forall x \in X \quad (38.1)$$



شکل ۲۶.۱: تساوی مجموعه‌های فازی

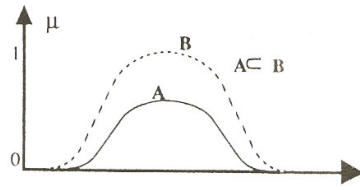
**تعریف ۲.۱۳.۱.** (شمول مجموعه‌های فازی):

شمول مجموعه فازی  $\tilde{A}$  در  $\tilde{B}$  یا زیرمجموعه بودن  $\tilde{A}$  در  $\tilde{B}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \quad , \quad \forall x \in X \quad (39.1)$$

مجموعه‌های فازی  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$  مساوی هستند هر گاه مقادیر عضویت آن‌ها یکی باشد و  $\tilde{A}$  مشمول  $\tilde{B}$  است اگر کلیه مقادیر عضویت مجموعه‌ی  $\tilde{B}$  مساوی یا بزرگتر از مقادیر عضویت متناظر از مجموعه  $\tilde{A}$  باشد.





شکل ۲۷.۱: شمول مجموعه‌های فازی

## ۱۴.۱ $\alpha$ -برشها و اصل تجزیه

تعریف ۱.۱۴.۱.  $\alpha$ -برش): <sup>۲۱</sup>

مجموعه‌ی مرجع  $X$  و زیرمجموعه‌ی فازی  $\tilde{A}$  از آن را در نظر بگیرید. مجموعه عناصری از  $X$  را که درجه‌ی عضویت آن‌ها در مجموعه‌ی فازی  $\tilde{A}$  حداقل به بزرگی  $1 > \alpha > 0$  باشد  $\alpha$ -برش  $\tilde{A}$  (یا مجموعه تراز  $\alpha$  از  $\tilde{A}$ ) گوییم و با  $\tilde{A}_\alpha$  نشان می‌دهیم؛ یعنی،

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \alpha \in (0, 1] \quad (40.1)$$

گاهی نیز از  $\alpha$ -برش قوی استفاده می‌شود که با  $\tilde{A}_{\bar{\alpha}}$  نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_{\bar{\alpha}} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}, \alpha \in [0, 1) \quad (41.1)$$

$\alpha$ -برشها، توصیفی از مجموعه فازی با استفاده از مجموعه‌های قطعی ارائه می‌دهد و دارای ویژگی‌های زیر هستند:

(۱) خانواده  $\{\tilde{A}_\alpha \mid \alpha \in (0, 1]\}$  یکنواست؛ یعنی،

$$0 < \alpha \leq \beta \leq 1 \Rightarrow \tilde{A}_\beta \subseteq \tilde{A}_\alpha \quad (42.1)$$

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A}_\alpha \subseteq \tilde{B}_\alpha \quad (43.1)$$

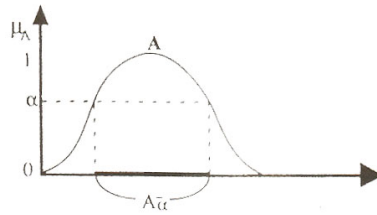
(۲)

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cup \tilde{B}_\alpha \quad (44.1)$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cap \tilde{B}_\alpha \quad (45.1)$$

شکل زیر مربوط به  $\alpha$ -برش می‌باشد

<sup>۲۱</sup>  $\alpha$ -cuts



شکل ۲۸.۱:  $\alpha$ -برش

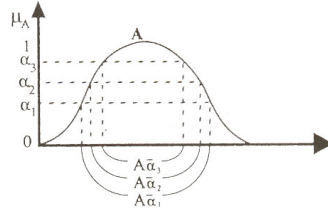
تعریف ۲.۰۱۴.۱. (اصل تجزیه): ۲۲

با استفاده از برش‌های  $\alpha$  می‌توانیم یک تابع عضویت،  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  را به تعداد نامتناهی توابع عضویت مستطیلی  $\alpha \wedge \chi_{\tilde{A}_\alpha}(x)$  یا  $\alpha \wedge \chi_{\tilde{A}_{\bar{\alpha}}}(x)$  تجزیه کنیم. وقتی این تابع عضویت مستطیلی را با یکدیگر جمع می‌کنیم و عمل  $\max$  را در مورد آن‌ها اجرا می‌کنیم، مجموعه‌ی فازی اولیه  $\tilde{A}$  را می‌توانیم به دست آوریم.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \max_{\alpha \in (0, 1]} [\alpha \wedge \chi_{\tilde{A}_\alpha}(x)] = \max_{\alpha \in [0, 1)} [\alpha \wedge \chi_{\tilde{A}_{\bar{\alpha}}}(x)] \quad (۴۶.۱)$$

که در آن  $\chi_{\tilde{A}_\alpha}(x)$  یک معادله مشخصه برای مجموعه  $\tilde{A}_\alpha$  است.

شکل زیر مربوط به اصل تجزیه می باشد



شکل ۲۹.۱: اصل تجزیه

شکل (۲۹.۱) ایده‌ی اصل تجزیه را تشریح می کند. فرض کنید تابع مشخصه‌ی یک  $\alpha$ -برش ضعیف  $\chi_{\tilde{A}_\alpha}(x)$  (به ازای  $\alpha \in (0, 1]$ ) باشد. یک تابع عضویت مستطیلی که در  $\alpha \wedge \chi_{\tilde{A}_\alpha}(x)$  صدق کند تعریف می کنیم. با تغییر مقدار  $\alpha$  در بازه‌ی  $\alpha \in (0, 1]$  عمل فوق را تکرار می کنیم و تعداد نامتناهی تابع عضویت مستطیلی به دست می آوریم. اصل تجزیه گویای این مطلب است که تابع عضویت مجموعه‌ی فازی اولیه یعنی  $\tilde{A}$  را می توان با انجام عمل  $\max$  بر روی تابع عضویت‌هایی که به روش پیش گفته حاصل آمده، به دست آورد. این را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \max_{\alpha \in (0, 1]} [\alpha \wedge \chi_{\tilde{A}_\alpha}(x)] \quad (47.1)$$

مثال ۳.۱۴.۱. مجموعه مرجع  $X = \{5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$  که بیانگر سن انسان‌ها است را در نظر می گیریم. مجموعه فازی  $\tilde{A}$  که نشان دهنده‌ی پیر بودن انسان است را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0}{50}, \frac{0}{60}, \frac{0}{70}, \frac{1}{80}, \frac{1}{90} \right\}$$

مجموعه تراز  $\tilde{A}_\alpha$  را برای مجموعه فازی  $\tilde{A}$  می توان به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{A}_{0.3} = \{50, 60, 70, 80, 90\}$$

$$\tilde{A}_{0.5} = \{60, 70, 80, 90\}$$

$$\tilde{A}_{0.8} = \{70, 80, 90\}$$

$$\tilde{A}_1 = \{80, 90\}$$

بر اساس اصل تجزیه می توان نوشت:

$$\cup \alpha \cdot \tilde{A}_\alpha = 0.3 \left\{ \frac{1}{50}, \frac{1}{60}, \frac{1}{70}, \frac{1}{80}, \frac{1}{90} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + 0/5 \left\{ \frac{1}{60}, \frac{1}{70}, \frac{1}{80}, \frac{1}{90} \right\} \\
 & + 0/8 \left\{ \frac{1}{70}, \frac{1}{80}, \frac{1}{90} \right\} + 1 \left\{ \frac{1}{80}, \frac{1}{90} \right\} \\
 & = \left\{ \frac{0/3}{50}, \frac{0/3}{60}, \frac{0/3}{70}, \frac{0/3}{80}, \frac{0/3}{90} \right\} \\
 & + \left\{ \frac{0/5}{60}, \frac{0/5}{70}, \frac{0/5}{80}, \frac{0/5}{90} \right\} \\
 & + \left\{ \frac{0/8}{70}, \frac{0/8}{80}, \frac{0/8}{90} \right\} + \left\{ \frac{1}{80}, \frac{1}{90} \right\} \\
 & = \left\{ \frac{0/3}{50}, \frac{0/5}{60}, \frac{0/8}{70}, \frac{1}{80}, \frac{1}{90} \right\} = \tilde{A}
 \end{aligned}$$

دقت شود که در رابطه‌ی فوق علامت "+" بیانگر اجتماع است و حاصل ضرب  $\alpha \in (0, 1]$  در مجموعه‌ی  $\tilde{A}_\alpha$  به صورت یک مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_\alpha \cdot \tilde{A}_\alpha(x) = \alpha \cdot \mu_{\tilde{A}_\alpha}(x) \quad (48.1)$$

**مثال ۴.۱۴.۱.** فرض کنیم یک مجموعه‌ی فازی مثل  $\tilde{A}$  به وسیله‌ی عبارت گسسته‌ی زیر تعریف شده باشد:

$$\tilde{A} = \frac{0/2}{1} + \frac{0/5}{2} + \frac{0/7}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0/8}{5} + \frac{0/4}{6} + \frac{0/2}{7}$$

اگر  $\alpha$ -برش ضعیف را به ازای  $\alpha \in (0, 1]$  از ۱ تا ۱ را با گام‌های به عرض ۱/۰ در مورد مجموعه‌های فوق به کار ببریم،  $\alpha$ -برش‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$\tilde{A}_{\frac{0/1}{1}} = \tilde{A}_{\frac{0/2}{2}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\tilde{A}_{\frac{0/3}{3}} = \tilde{A}_{\frac{0/4}{4}} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\tilde{A}_{\frac{0/5}{5}} = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$\tilde{A}_{\frac{0/6}{6}} = \tilde{A}_{\frac{0/7}{7}} = \{3, 4, 5\}$$

$$\tilde{A}_{\frac{0/8}{8}} = \{4, 5\}$$

$$\tilde{A}_{\frac{0/9}{9}} = \tilde{A}_1 = \{4\}$$

حال مجموعه‌ی فازی اولیه یعنی  $\tilde{A}$  را به کمک این  $\alpha$ -برش‌ها بازسازی می‌کنیم. نخست

$\alpha$ -برش‌ها را به وسیله‌ی بیان گسسته‌ی مجموعه‌های فازی به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\tilde{A}_{\frac{0/1}{1}} = \frac{1/0}{1} + \frac{1/0}{2} + \frac{1/0}{3} + \frac{1/0}{4} + \frac{1/0}{5} + \frac{1/0}{6} + \frac{1/0}{7}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\circ/7} &= \frac{1/0}{1} + \frac{1/0}{2} + \frac{1/0}{3} + \frac{1/0}{4} + \frac{1/0}{5} + \frac{1/0}{6} + \frac{1/0}{7} \\ \tilde{A}_{\circ/6} &= \frac{1/0}{2} + \frac{1/0}{3} + \frac{1/0}{4} + \frac{1/0}{5} + \frac{1/0}{6} \\ \tilde{A}_{\circ/4} &= \frac{1/0}{2} + \frac{1/0}{3} + \frac{1/0}{4} + \frac{1/0}{5} + \frac{1/0}{6} \\ \tilde{A}_{\circ/5} &= \frac{1/0}{2} + \frac{1/0}{3} + \frac{1/0}{4} + \frac{1/0}{5} \\ \tilde{A}_{\circ/6} &= \frac{1/0}{3} + \frac{1/0}{4} + \frac{1/0}{5} \\ \tilde{A}_{\circ/7} &= \frac{1/0}{3} + \frac{1/0}{4} + \frac{1/0}{5} \\ \tilde{A}_{\circ/8} &= \frac{1/0}{4} + \frac{1/0}{5} \\ \tilde{A}_{\circ/9} &= \frac{1/0}{4} \\ \tilde{A}_{\bar{1}} &= \frac{1/0}{4} \end{aligned}$$

در این جا چون  $\tilde{A}_{\circ/1}$  به صورت  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  داده شده هنگامی که مقدار  $1/0$  را به معادله‌ی مشخصه تخصیص می‌دهیم به دست می‌آوریم:

$$\tilde{A}_{\circ/1} = \frac{1/0}{1} + \frac{1/0}{2} + \frac{1/0}{3} + \frac{1/0}{4} + \frac{1/0}{5} + \frac{1/0}{6} + \frac{1/0}{7}$$

عمل مشابه، عبارت قبلی را از  $\tilde{A}_{\circ/2}$  تا  $\tilde{A}_{\bar{1}}$  به دست می‌آوریم. توجه کنیم که برای معادله‌ی مشخصه داریم:

$$\chi_{\tilde{A}_{\bar{\alpha}}}(1) = \chi_{\tilde{A}_{\bar{\alpha}}}(2) = \chi_{\tilde{A}_{\bar{\alpha}}}(3) = \dots = \chi_{\tilde{A}_{\bar{\alpha}}}(7) = 1, \alpha = 0/1, 0/2$$

اینک  $\alpha \wedge \chi_{\tilde{A}_{\bar{\alpha}}}(x)$  را محاسبه می‌کنیم. فرض کنیم

$$X_i = i, i = 1, 2, \dots, 7, X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4, X_5 = 5, X_6 = 6, X_7 = 7$$

اگر مجموعه‌ی فازی که مقدار عضویت آن  $\alpha \wedge \chi_{\tilde{A}_{\bar{\alpha}}}(x)$  است را با  $\tilde{A}_{\bar{\alpha}}^*$  نشان دهیم.  $\tilde{A}_{\bar{\alpha}}^*$  را می‌توانیم

به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\circ/1}^* &= \sum_{i=1}^{\vee} ([\circ/1 \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/1}}(x_i)]/x_i) \\ &= [\circ/1 \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/1}}(x_1)]/x_1 + [\circ/1 \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/1}}(x_2)]/x_2 \\ &+ [\circ/1 \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/1}}(x_3)]/x_3 + [\circ/1 \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/1}}(x_4)]/x_4 \\ &+ [\circ/1 \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/1}}(x_5)]/x_5 + [\circ/1 \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/1}}(x_6)]/x_6 \\ &+ [\circ/1 \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/1}}(x_7)]/x_7 \\ &= \frac{\circ/1}{1} + \frac{\circ/1}{2} + \frac{\circ/1}{3} + \frac{\circ/1}{4} + \frac{\circ/1}{5} + \frac{\circ/1}{6} + \frac{\circ/1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\circ/2}^* &= \sum_{i=1}^{\vee} ([\circ/2 \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/2}}(x_i)]/x_i) \\ &= \frac{\circ/2}{1} + \frac{\circ/2}{2} + \frac{\circ/2}{3} + \frac{\circ/2}{4} + \frac{\circ/2}{5} + \frac{\circ/2}{6} + \frac{\circ/2}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\circ/3}^* &= \sum_{i=1}^{\vee} ([\circ/3 \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/3}}(x_i)]/x_i) \\ &= \frac{\circ/3}{2} + \frac{\circ/3}{3} + \frac{\circ/3}{4} + \frac{\circ/3}{5} + \frac{\circ/3}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\circ/4}^* &= \sum_{i=1}^{\vee} ([\circ/4 \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/4}}(x_i)]/x_i) \\ &= \frac{\circ/4}{2} + \frac{\circ/4}{3} + \frac{\circ/4}{4} + \frac{\circ/4}{5} + \frac{\circ/4}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\circ/5}^* &= \sum_{i=1}^{\vee} ([\circ/5 \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/5}}(x_i)]/x_i) \\ &= \frac{\circ/5}{2} + \frac{\circ/5}{3} + \frac{\circ/5}{4} + \frac{\circ/5}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{\circ/\wp}^* &= \sum_{i=1}^{\vee} ([\circ/\wp \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/\wp}}(x_i)]/x_i) \\ &= \frac{\circ/\wp}{\wp} + \frac{\circ/\wp}{\wp} + \frac{\circ/\wp}{\wp}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{\circ/\vee}^* &= \sum_{i=1}^{\vee} ([\circ/\vee \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/\vee}}(x_i)]/x_i) \\ &= \frac{\circ/\vee}{\wp} + \frac{\circ/\vee}{\wp} + \frac{\circ/\vee}{\wp}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{\circ/\wedge}^* &= \sum_{i=1}^{\vee} ([\circ/\wedge \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/\wedge}}(x_i)]/x_i) \\ &= \frac{\circ/\wedge}{\wp} + \frac{\circ/\wedge}{\wp}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{\circ/\wp}^* &= \sum_{i=1}^{\vee} ([\circ/\wp \wedge \chi_{\tilde{A}_{\circ/\wp}}(x_i)]/x_i) \\ &= \frac{\circ/\wp}{\wp}\end{aligned}$$

$$\tilde{A}_{\vee/\circ}^* = \sum_{i=1}^{\vee} ([\vee/\circ \wedge \chi_{\tilde{A}_{\vee/\circ}}(x_i)]/x_i) = \frac{\vee/\circ}{\wp}$$

با محاسبه‌ی اجتماع مجموعه‌های فازی قبلی، مجموعه‌ی فازی اولیه یعنی  $\tilde{A}$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\bigcup_{\alpha \in (\circ, \vee]} \tilde{A}_{\alpha}^* &= \bigcup \left\{ \sum_{i=1}^{\vee} (\alpha \wedge \chi_{\tilde{A}_{\alpha}}(x_i)/x_i) \right\} \\ &= \frac{\circ/\wp}{\wp} + \frac{\circ/\wp}{\wp} + \frac{\circ/\wp}{\wp} + \frac{\vee/\circ}{\wp} + \frac{\circ/\wp}{\wp} + \frac{\circ/\wp}{\wp} + \frac{\circ/\wp}{\wp} = \tilde{A} \quad (49.1)\end{aligned}$$

رابطه‌ی (۴۹.۱) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \max_{\alpha \in (\circ, \vee]} [\alpha \wedge \chi_{\tilde{A}_{\alpha}}(x)] \quad (50.1)$$

لذا نتیجه می‌شود که با استفاده از برش‌های  $\alpha$  می‌توانیم تابع عضویت  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  را به تعداد نامتناهی توابع عضویت مستطیلی  $\alpha \wedge \chi_{\tilde{A}_\alpha}(x)$  تجزیه کنیم. که از جمع‌بندی این توابع و عمل max در مورد آن‌ها می‌توانیم مجموعه‌ی فازی اولیه،  $\tilde{A}$  را به دست آوریم.

**تذکره ۱۴.۵.۱.** عمل متمم‌گیری با عمل  $\alpha$ -برش بر یک مجموعه فازی، تعویض‌پذیر نیستند؛ یعنی، در حالت کلی  $(\tilde{A})_\alpha \neq (\tilde{A}_\alpha)$ . اما در این مورد داریم  $(\tilde{A}')_\alpha = (\tilde{A}_{1-\alpha})'$ ؛ یعنی،  $\alpha$ -برش مستقیم  $\tilde{A}$  برابر است با متمم  $(1 - \alpha)$ -برش قوی  $\tilde{A}$ .

## ۱۵.۱ اعداد فازی

همان‌طور که عدد، نقش اساسی در ریاضیات دارد، عدد فازی هم نقش اساسی در ریاضیات فازی دارد. البته اعداد فازی را بر حسب جایی که مورد استفاده قرار می‌دهند به صورت‌های گوناگون تعریف کرده‌اند یکی از رایج‌ترین این تعاریف، تعریفی است که زیمرمان<sup>۲۳</sup> از یک عدد فازی آورده است.

### تعریف ۱.۱۵.۱. (عدد فازی):

مجموعه فازی نرمال محدب  $\tilde{A}$  روی  $R$  را یک عدد فازی گوئیم اگر:

$$(۱) \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \text{ تک‌نمایی باشد، یعنی دقیقاً یک } x_0 \in R \text{ وجود داشته باشد که } \mu_{\tilde{A}}(x_0) = ۱.$$

$$(۲) \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \text{ قطعه قطعه پیوسته باشد.}$$

مجموعه تمام اعداد فازی را با  $F(R)$  نشان می‌دهیم.

**تذکره ۱۵.۲.۱.** عدد فازی  $\tilde{A}$  را مثبت (منفی) گوئیم اگر برای هر  $x < 0$ ،  $x > 0$  داشته باشیم

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$$

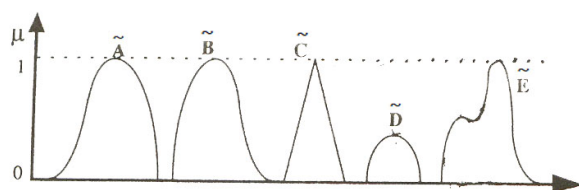
**مثال ۱۵.۳.۱.** در شکل (۳۰.۱) ملاحظه می‌شود  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$  و  $\tilde{C}$  اعداد فازی هستند و  $\tilde{D}$  و  $\tilde{E}$  اعداد فازی نیستند.

**تعریف ۱۵.۴.۱.** (اعداد فازی مسطح). اگر یک عدد فازی مانند  $\tilde{A}$  شرط زیر را دارا باشد، آن را یک عدد فازی مسطح می‌گوئیم.

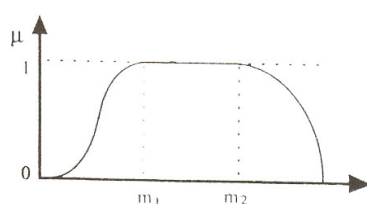
$$\exists [m_1, m_2] \subseteq \mathbb{R} \ni \forall x \in [m_1, m_2] \quad , \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

<sup>۲۳</sup>Zimmermann





شکل ۳۰.۱:



شکل ۳۱.۱: عدد فازی مسطح

**تعریف ۵.۱۵.۱.** یک عدد فازی دلخواه  $\tilde{A}$  را با یک زوج مرتب از توابع به فرم پارامتری  $(\underline{A}(r), \overline{A}(r))$ ،  $0 \leq r \leq 1$  نشان می‌دهیم در صورتی که در شرایط زیر صدق کند:

(۱)  $\underline{A}(r)$  تابع پیوسته از چپ، کراندار و غیر نزولی روی  $[0, 1]$  باشد.

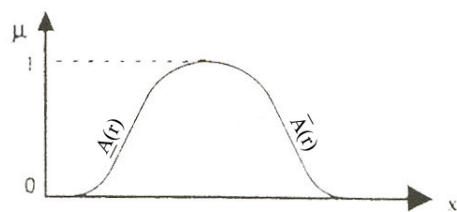
(۲)  $\overline{A}(r)$  تابع پیوسته از چپ، کراندار و غیر صعودی روی  $[0, 1]$  باشد.

$$\forall 0 \leq r \leq 1, \quad \underline{A}(r) \leq \overline{A}(r) \quad (۳)$$

تعریف فوق توسط حجاری<sup>۲۴</sup> و اللهویرانلو<sup>۲۵</sup> برای معرفی اعداد فازی استفاده شده است. با توجه به تعریف فوق، یک عدد اسکالر  $\alpha$  را می‌توان به صورت  $\underline{A}(r) = \overline{A}(r) = \alpha$ ،  $0 \leq r \leq 1$  نمایش داد. همچنین با توجه به تعریف فوق از یک عدد فازی،  $-\alpha$  برش از یک عدد فازی دلخواه  $\tilde{A}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\tilde{A}]_{\alpha} = \{S/\tilde{A}(x) \geq \alpha\} = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)] \quad , \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (۵۱.۱)$$

<sup>۲۴</sup>Hajari<sup>۲۵</sup>Allahviranolo



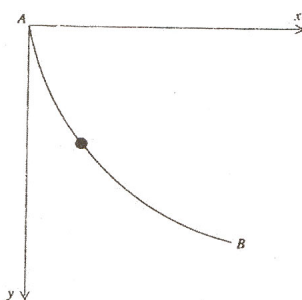
شکل ۳۲.۱: عدد فازی  $\tilde{A} = (\underline{A}(r), \bar{A}(r))$

فصل ۲

حساب تغییرات و کنترل بهینه

## مقدمه

حساب تغییرات<sup>۱</sup> رشته‌ای از ریاضیات است که در حل مسائل بهینه یابی بسیار مفید می‌باشد و به بهینه سازی انتگرال‌ها اطلاق شده است. ظاهراً دیدو<sup>۲</sup> ملکه کارتاژ اولین کسی بود که با چنین مسئله‌ای مواجه بود [۱۱]. به او قول داده شده بود که تمام زمینی را که با قطعه طنابی محدود کند، می‌تواند تصاحب نماید. برای این منظور او طناب را به رشته‌های نازک مختلف تقسیم و آن‌ها را به هم گره زد، آن‌گاه مسئله این بود که در بین سطوح هندسی مختلف که محیط ثابتی دارند کدام بزرگترین مساحت را خواهد داشت. می‌دانیم که او باید دایره را انتخاب می‌نمود. این حقیقت و نیز نتایج مهم‌تر دیگر در حساب تغییرات به اثبات می‌رسد [۸]. هر چند تاریخچه حساب تغییرات مربوط به یونانیان قدیم می‌باشد لیکن پیشرفت زیاد اروپای غربی در این زمینه تا قرن هفده میلادی به طول انجامید. اسحاق نیوتن از اصول تغییرات برای تعیین شکل جسم متحرک در هوا به طوری که کمترین مقاومت را در مقابل خود داشته باشد استفاده نمود. مسئله‌ی تاریخی جالب دیگر، مسئله‌ی بارچیستوچرون<sup>۳</sup> می‌باشد که در شکل (۱.۲) نشان داده شده است و در سال ۱۶۹۶ توسط جان برنولی ارائه گردید. (در این مثال) مهره‌ای تحت تاثیر نیروی جاذبه بر روی سیم بدون اصطکاکی با دو نقطه‌ی انتهایی ثابت  $A$  و  $B$  می‌لغزد. مسئله در این جا یافتن شکل سیم برای حالتی است که باعث شود حرکت مهره از  $A$  به  $B$  در حداقل زمان انجام گیرد. پاسخ، یک سیکلوئید در یک صفحه قائم است که به برادران برنولی (جان و جاکوب)، نیوتن و هوییتال نسبت داده شده است [۸].



شکل ۱.۲: مسئله بارچیستوچرون

در هر دو مسئله‌ی دیدو و بارچیستوچرون، منحنی‌هایی که مورد جستجو قرار می‌گیرند باعث

<sup>۱</sup>Calculus variations

<sup>۲</sup>Dido

<sup>۳</sup>barchistocheron

می‌شوند که معیاری نهایت<sup>۴</sup> خود را بپذیرد. اگر چه دانشمندان زیادی روی مسائل حساب تغییرات کار کرده و نتایج مفیدی را نیز به دست آوردند اما اوایلر<sup>۵</sup> و هامیلتون<sup>۶</sup> را باید از پایه‌گذاران اصلی دانست. اوایلر با یک ایده‌ی ماوراالطبیعه به این فکر افتاد که حساب تغییرات را ایجاد نماید و آن این بود که ”در پشت پدیده‌های در هم آشفته، سادگی‌های پنهانی وجود دارد” البته اوایلر با تلاش خود سعی نمود تا پرده از این حقایق بگشاید اما یک قرن بعد از اوایلر، هامیلتون (دانشمند ایرلندی) رویای او را به واقعیت بدل نمود.

البته لاگرانژ که معاصر اوایلر نیز بوده، سهم به سزایی در پیشبرد این بحث داشته و حتی روش ضرایب او به اوایلر کمک فراوانی در جواب دادن به سوالاتی که در ذهن او بود نمود. در این فصل سعی شده حساب تغییرات تا جایی که ممکن است به طرز ساده‌ای مورد بحث قرار گیرد و هر جا لازم است مثال‌هایی نیز برای فهم بیشتر آورده شود. اما سعی ما در آن بود که کنترل بهینه را با دقت بیشتری مورد بحث قرار دهیم.

حتی المقدور سعی کردیم که از پراکنده‌گویی دوری گزینیم و اگر جایی نیاز به دانستن قضیه‌های ریاضی مخصوصی می‌باشد که اثبات آن ضروری به نظر نمی‌رسد تنها به معرفی مرجع بسنده کنیم.

## ۱.۲ حساب تغییرات

قبل از بیان مسئله‌ی حساب تغییرات چند تعریف را مورد بررسی قرار می‌دهیم [۶].

**تعریف ۱.۱.۲** (نمویک تابعی). اگر  $x$  و  $x + \delta x$  تابع‌هایی باشند که برای آن‌ها تابع  $J$  تعریف شده باشد، آن‌گاه نمو  $J$  که به صورت  $\Delta J$  نشان داده می‌شود عبارتست از

$$\Delta J \triangleq J(x + \delta x) - J(x) \quad (1.2)$$

که برای صراحت بیشتر آن را به صورت  $\Delta J(x, \delta x)$  می‌نویسیم تا نشان دهیم که این نمو به  $x$  و  $\delta x$  بستگی دارد.  $\delta x$  را تغییرات<sup>۷</sup> تابع  $x$  می‌نامیم.

**تعریف ۲.۱.۲**. نمویک تابعی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J(x, \delta x) + g(x, \delta x) \cdot \|\delta x\| \quad (2.2)$$

<sup>۴</sup>Extremom

<sup>۵</sup>Euler

<sup>۶</sup>Hamilton

<sup>۷</sup>Variation

که در آن  $\delta J$  قسمت خطی بر حسب  $\delta x$  می‌باشد. اگر  $\lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} \{g(x, \delta x)\} = 0$ ، آن‌گاه  $J$  را دیفرانسیل‌پذیر بر حسب  $x$  گفته و  $\delta J$  تغییرات  $J$  می‌باشد که برای تابع  $x$  آورده شده است.

**تعریف ۳.۱.۲.** یک تابعی  $J$  با میدان تعریف  $\Omega$  دارای یک منحنی نهایت نسبی در  $x^*$  است اگر یک  $\varepsilon > 0$  وجود داشته باشد که به ازای هر  $x$  موجود در  $\Omega$  که در رابطه‌ی  $\|x - x^*\| < \varepsilon$  صدق می‌کند، نمو  $J$  دارای علامت مثبت باشد. اگر

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) \geq 0 \quad (3.2)$$

باشد  $J(x^*)$  را حداقل نسبی و اگر

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) \leq 0 \quad (4.2)$$

باشد  $J(x^*)$  را حداکثر نسبی می‌نامند.

اگر (۳.۲) برای یک  $\varepsilon$  اختیاری بزرگی صادق باشد آن‌گاه  $J(x^*)$  یک حداقل مطلق می‌باشد. و اگر (۴.۲) برای یک  $\varepsilon$  اختیاری بزرگی صادق باشد آن‌گاه  $J(x^*)$  یک حداکثر مطلق می‌باشد.  $x^*$  به نام منحنی نهایت <sup>۸</sup> و  $J(x^*)$  به نام نهایت تابعی <sup>۹</sup> نامیده می‌شوند.

**قضیه ۴.۱.۲** (قضیه اساسی حساب تغییرات). فرض کنید  $x$  تابع برداری از  $t$  در  $\Omega$  و  $J(x)$  تابعی دیفرانسیل‌پذیر از  $x$  باشد. فرض کنیم که توابع در  $\Omega$  محدود به هیچ حدی نباشند. قضیه اساسی حساب تغییرات به صورت زیر است:

اگر  $x^*$  یک منحنی نهایت باشد، تغییرات  $J$  روی  $x^*$  باید صفر باشد؛ یعنی،

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0 \quad \text{به ازای هر } \delta x \text{ قابل قبول}$$

(منظور از  $\delta x$  قابل قبول این است که  $x + \delta x$  باید عضوی از  $\Omega$  باشد. بنابراین اگر  $\Omega$  کلاس توابع پیوسته باشد لازم است که  $x$  و  $\delta x$  نیز پیوسته باشند.)

**برهان.** با استفاده از برهان خلف قضیه را ثابت می‌کنیم:

فرض کنید  $x^*$  یک منحنی نهایت بوده و  $\delta J(x^*, \delta x) \neq 0$ ، نشان می‌دهیم که این مفروضات ایجاب می‌کند که نمو  $\Delta J$ ، هر قدر هم که محدوده  $x^*$  کوچک باشد، تغییر علامت

<sup>۸</sup>External  
<sup>۹</sup>extremum

می‌دهد. نمو  $J$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\Delta J(x^*, \delta x) &= J(x^* + \delta x) - J(x^*) \\ &= \delta J(x^* + \delta x) + g(x^*, \delta x) \cdot \|\delta x\|\end{aligned}\quad (5.2)$$

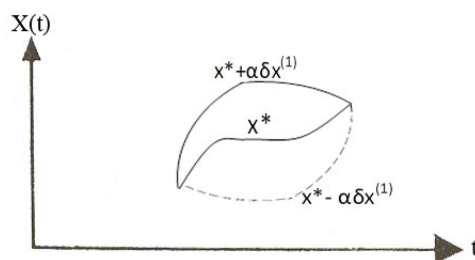
که در آن  $g(x^*, \delta x) \rightarrow 0$  وقتی که  $\|\delta x\| \rightarrow 0$ ، بنابراین محدوده کوچک  $\|\delta x\| < \varepsilon$  وجود دارد که در آن  $g(x^*, \delta x) \cdot \|\delta x\|$  به اندازه‌ی کافی کوچک می‌باشد به طوری که  $\delta J$  در رابطه  $\Delta J$  قسمت اصلی را تشکیل می‌دهد. حال تغییر

$$\delta x = \alpha \delta x^{(1)} \quad (6.2)$$

را که در شکل (۲.۲) داده شده است انتخاب می‌کنیم، که در آن  $\alpha > 0$  و  $\|\alpha \delta x^{(1)}\| < \varepsilon$ . فرض کنید  $\delta J(x^*, \alpha \delta x^{(1)}) < 0$  چون  $\delta J$  یک تابع خطی از  $\delta x$  است، اصل همگنی به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta J(x^*, \alpha \delta x^{(1)}) = \alpha \delta J(x^*, \delta x^{(1)}) < 0 \quad (7.2)$$

علامت  $\Delta J$  و  $\delta J$  در محدوده  $\|\delta x\| < \varepsilon$  یکسان می‌باشد، بنابراین  $\Delta J(x^*, \alpha \delta x^{(1)}) < 0$  تغییر زیر را که در شکل (۲.۲) نشان داده شده در نظر می‌گیریم.



شکل ۲.۲: یک منحنی نهایت و دو منحنی مجاور آن

طبق رابطه‌ی (۶.۲)،  $\|\alpha\delta x^{(1)}\| < \varepsilon$  ایجاب می‌کند که  $\|-\alpha\delta x^{(1)}\| < \varepsilon$  بنابراین علامت  $\Delta J(x^*, -\alpha\delta x^{(1)})$  و علامت  $\delta J(x^*, -\alpha\delta x^{(1)})$  یکسان است. حال اگر اصل همگنی را به کار ببریم، داریم:

$$\delta J(x^*, -\alpha\delta x^{(1)}) = -\alpha\delta J(x^*, \delta x^{(1)}) \quad (۸.۲)$$

بنابراین چون  $\delta J(x^*, \alpha\delta x^{(1)}) < 0$  و  $\delta J(x^*, -\alpha\delta x^{(1)}) > 0$  می‌باشد، این خود ایجاب می‌کند که  $\Delta J(x^*, -\alpha\delta x^{(1)}) > 0$  بنابراین نشان دادیم که اگر  $\delta J(x^*, \delta x) \neq 0$  باشد، آن‌گاه در یک محدوده کوچک اختیاری نزدیک به  $x$  داریم:

$$\Delta J(x^*, \alpha\delta x^{(1)}) < 0 \quad (۹.۲)$$

و

$$\Delta J(x^*, -\alpha\delta x^{(1)}) > 0 \quad (۱۰.۲)$$

بنابراین طبق تعریف ۳.۱.۲ تناقضی در فرض این که  $x^*$  یک منحنی نهایت باشد به وجود می‌آید. بنابراین اگر  $x^*$  یک منحنی نهایت باشد لازم است که به ازای کوچک اختیاری داشته باشیم  $\delta J(x^*, \delta x) = 0$ .  $\square$

**لم ۵.۱.۲** (لم اساسی حساب تغییرات). تابع  $\delta x$  را چنان در نظر بگیرید که مشتقات پیوسته داشته باشد و بر  $t_0 \leq t \leq t_f$  داشته باشیم  $\delta x(t_0) = 0$  و  $\delta x(t_f) = 0$  می‌توان نشان داد که اگر  $h$  تابعی پیوسته بوده و برای هر تابع پیوسته  $\delta x$  در محدوده‌ی  $[t_0, t_f]$  داشته باشیم:

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t)\delta x(t)dt = 0 \quad (۱۱.۲)$$

آن‌گاه  $h$  باید در تمام محدوده‌ی  $[t_0, t_f]$  صفر باشد.



**برهان.** با استفاده از برهان خلف قضیه را ثابت می‌کنیم:

فرض کنیم نقطه‌ای مانند  $t^*$  در بازه‌ی  $[t_0, t_f]$  وجود داشته باشد که به ازای آن  $h(t^*) \neq 0$  باشد. فرض کنیم در آن نقطه  $h > 0$  باشد. چون  $h$  پیوسته است در یک همسایگی از  $t^*$  مانند  $[t_1^*, t_2^*]$  داریم  $h > 0$  که در آن  $t_0 < t_1^* < t_2^* < t_f$ . تابع  $\delta x$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta x(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq t_1^* \\ (t - t_1^*)^2(t - t_2^*)^2, & t_1^* \leq t \leq t_2^* \\ 0, & t_2^* \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (12.2)$$

در این صورت  $\delta x(t)$  یک تابع مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t)\delta x(t)dt = \int_{t_1^*}^{t_2^*} h(t)(t - t_1^*)^2(t - t_2^*)^2 dt > 0 \quad (13.2)$$

بنابراین تابع زیر انتگرال بر  $[t_1^*, t_2^*]$  اکیدا مثبت است و به همین صورت برای فرض  $h < 0$  مشابه  $h > 0$  عمل می‌کنیم و داریم تابع زیر انتگرال کوچکتر از صفر، که این تناقض است و  $h = 0$ .  $\square$

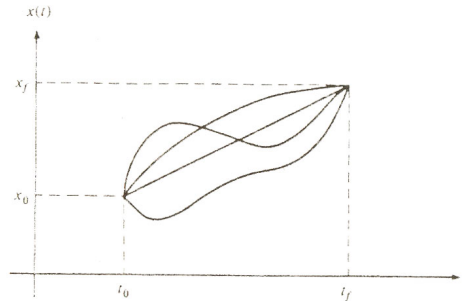
## ۲.۲ تابعی‌های وابسته به یک تابع

در این بخش می‌خواهیم با استفاده از قضیه‌ی اساسی، منحنی نهایت تابعی‌هایی که فقط وابسته به یک تابع باشند را پیدا کنیم. برای این منظور کافی است ابتدا معادله‌ی اوایلر را پیدا کنیم: فرض کنید  $x$  تابع اسکالر با مشتقات مرتبه اول پیوسته باشد. می‌خواهیم تابع  $x^*$  را چنان پیدا کنیم که تابعی

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t)dt \quad (14.2)$$

دارای یک نهایت نسبی باشد.  $J(x)$  بدین معنی است که  $J$  یک تابعی از تابع  $x$  می‌باشد، به عبارت دیگر  $g(x(t), x'(t), t)$  یک تابع است،  $g$  به هر نقطه  $(x(t), x'(t), t)$  یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد. فرض شده است که  $g$  دارای مشتقات نسبی مرتبه‌ی اول و دوم پیوسته نسبت به هر یک از متغیرهای خود بوده و  $t_0$  و  $t_f$  ثابت باشند و نقاط انتهایی منحنی به صورت  $x_0$  و  $x_f$  مشخص شده‌اند. منحنی‌های واقع در  $\Omega$  که در نقاط انتهایی نیز صدق می‌کنند منحنی‌های قابل قبول نامیده می‌شوند.

چند منحنی قابل قبول در شکل (۳.۲) نشان داده شده است.



شکل ۳.۲: منحنی‌های قابل قبول

در جستجوی منحنی‌ای هستیم (در صورت وجود) که  $J(x)$  را نهایت کند. با بررسی منحنی‌هایی که در شرایط قضیه اساسی صدق می‌کنند شروع می‌کنیم. فرض کنید که  $x$  منحنی‌ای در  $\Omega$  باشد. تغییرات  $\delta J(x, \delta x)$  را از روی نمودار زیر تعیین می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \Delta J(x, \delta x) &= J(x + \delta x) - J(x) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} g(x(t) + \delta x(t), x'(t) + \delta x'(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt \end{aligned} \quad (15.2)$$

از ترکیب انتگرال‌ها داریم:

$$\Delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} [g(x(t) + \delta x(t), x'(t) + \delta x'(t), t) - g(x(t), x'(t), t)] dt \quad (16.2)$$

توجه شود که در آرگومان  $\Delta J$  وابستگی آن به  $x'$  و  $\delta x'$  نشان داده نشده است، زیرا  $x$  و  $x'$  و  $\delta x$  و  $\delta x'$  مستقل نمی‌باشند.

$$x'(t) = \frac{d}{dt}[x(t)] \quad , \quad \delta x'(t) = \frac{d}{dt}[\delta x(t)] \quad (17.2)$$

نهایتاً  $\Delta J$  کاملاً بر حسب  $x$  و  $\delta x$  بیان خواهد شد.

اگر انتگرال معادله‌ی (۱۶.۲) را بر حسب سری تیلور در حوالی نقطه‌ی  $x(t)$  و  $x'(t)$  بسط

دهیم داریم:

$$\begin{aligned} \Delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \{g(x(t), x'(t), t) + [\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t)]\delta x(t) \\ & + [\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t)]\delta x'(t) + \frac{1}{2} [[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x(t), x'(t), t)] [\delta x(t)]^2 \\ & + 2 [\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x'}(x(t), x'(t), t)] \delta x(t) \delta x'(t) \\ & + [\frac{\partial^2 g}{\partial x'^2}(x(t), x'(t), t)] [\delta x'(t)]^2 \\ & + o([\delta x(t)]^2, [\delta x'(t)]^2) - g(x(t), x'(t), t)\} dt \end{aligned} \quad (18.2)$$

عبارت  $([\delta x(t)]^2, [\delta x'(t)]^2)$  نشان‌دهنده جملات از مرتبه سوم به بالا بر حسب  $\delta x(t)$  و  $\delta x'(t)$  بوده و این جملات وقتی که  $\delta x(t)$  و  $\delta x'(t)$  به سمت صفر میل می‌کنند از دامنه‌ی  $[\delta x(t)]^2$  و  $[\delta x'(t)]^2$  کوچکترند. از معادله‌ی (۱۸.۲) مشخص می‌شود که مشتقات نسبی در روی منحنی مسیر  $x$  و  $x'$  برآورد می‌شوند.

حال با جدا کردن جملاتی از  $\Delta J$  که بر حسب  $\delta x(t)$  و  $\delta x'(t)$  خطی می‌باشند تغییرات به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \{[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t)]\delta x(t) + [\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t)]\delta x'(t)\} dt \quad (19.2)$$

$\delta x(t)$  و  $\delta x'(t)$  توسط رابطه‌ی زیر به هم مربوط می‌باشند

$$\delta x(t) = \int_{t_0}^{t_f} \delta x'(t) dt + \delta x(t_0) \quad (20.2)$$

برای بیان (۱۹.۲) به‌طور کامل بر حسب  $\delta x$ ، جمله‌ی شامل  $\delta x'$  را با روش انتگرال‌گیری جزء به جزء به دست می‌آوریم، داریم:

$$\begin{aligned} \delta J(x, \delta x) = & [\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t)]\delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \{[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t)] \\ & - \frac{d}{dt} [\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t)]\} \delta x(t) dt \end{aligned} \quad (21.2)$$

چون  $x(t_0)$  و  $x(t_f)$  مشخص شده‌اند تمام منحنی‌های قابل قبول باید از این نقاط بگذرند، لذا  $\delta x(t_0) = 0$  و  $\delta x(t_f) = 0$  و جملات خارج انتگرال باید صفر باشند.

اگر منحنی نهایت را در نظر بگیریم با اعمال قضیه اساسی داریم:

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0 = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt \quad (22.2)$$

بنابراین انتگرال باید صفر شود. با به کارگیری لم اساسی در معادله‌ی (۲۲.۲) شرط لازم برای

این که  $x^*$  بتواند یک نهایت به ازای  $t \in [t_0, t_f]$  باشد به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] = 0 \quad (23.2)$$

معادله‌ی (۲۳.۲) به معادله‌ی اوایلر - لاگرانژ<sup>۱۰</sup> معروف است. وجود  $\frac{d}{dt}$  و یا  $x'^*(t)$  به معنی این است که معادله، معادله‌ی دیفرانسیل می‌باشد.

**مثال ۱۰.۲.۲.** تابعی زیر را در نظر می‌گیریم

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [x'^2(t) - x^2(t)] dt \quad (24.2)$$

با استفاده از دو شرط حدی  $x(0) = 0$  و  $x(\frac{\pi}{4}) = 1$  نهایت تابعی را به دست می‌آوریم.

حل: معادله‌ی اوایلر به صورت زیر است:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] = 0 \quad (25.2)$$

$$\Rightarrow -2x^*(t) - \frac{d}{dt} [2x'^*(t)] = 0 \quad (26.2)$$

$$\Rightarrow x''^*(t) + x^*(t) = 0 \quad (27.2)$$

برای به دست آوردن ریشه‌های مشخصه می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم

$$s^2 + 1 = 0 \Rightarrow s = \pm i \quad (28.2)$$

بنابراین پاسخ (۲۷.۲) به صورت زیر می‌باشد:

$$x^*(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \quad (29.2)$$

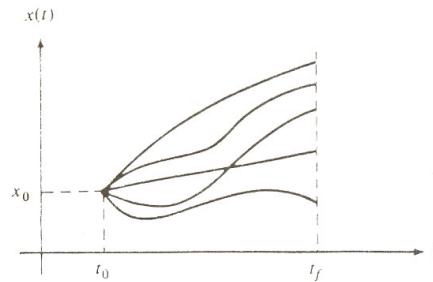
یا

$$x^*(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad (30.2)$$

که در آن  $c_1$  و  $c_2$  ثابت‌های انتگرال بوده و با استفاده از شرایط مرزی داریم:

$$0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) \Rightarrow c_1 = 0 \quad (31.2)$$

<sup>۱۰</sup> Euler-lagrang



شکل ۴.۲: منحنی‌های قابل قبول برای مسئله‌ی انتهای آزاد

$$1 = c_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow c_2 = 1 \quad (۳۲.۲)$$

پس جواب معادله‌ی اویلر به صورت زیر می‌باشد:

$$x^*(t) = \sin t \Rightarrow J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t dt = -\cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 \quad (۳۳.۲)$$

حال مسائلی که با نقطه‌ی انتهایی غیر ثابت می‌باشد را در نظر می‌گیریم.

زمان نهایی مشخص و  $x(t_f)$  آزاد یا غیر معین:

فرض کنید می‌خواهیم منحنی نهایی پیدا کنیم که تابعی زیر را اکستریم کند.

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt \quad (۳۴.۲)$$

که  $t_0$  و  $x(t_0)$  مشخص بوده و  $x(t_f)$  آزاد یا غیر معین است. تمام منحنی‌های قابل قبول از یک نقطه شروع و به یک خط عمودی مطابق شکل (۴.۲) ختم می‌شود. برای استفاده از قضیه اساسی، ابتدا مطابق حالت قبل تغییرات را پیدا می‌کنیم. آن‌گاه با انتگرال‌گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \partial J(x, \delta x) &= \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt \end{aligned} \quad (۳۵.۲)$$

به ازای هر منحنی قابل قبول  $\delta x(t_0) = 0$  است لیکن  $\delta x(t_f)$  اختیاری می‌باشد.

می‌دانیم برای منحنی نهایت  $x^*$  باید  $\delta J(x^*, \delta x)$  صفر باشد. سپس نشان می‌دهیم که انتگرال

موجود در (۳۵.۲) باید روی یک منحنی نهایت صفر باشد. فرض کنید که منحنی  $x^*$  شکل

(۵.۲) یک منحنی نهایت برای مسئله نقطه‌ی انتهایی غیر معین یا آزاد باشد، مقدار  $x^*(t_f) = x_f$

است. حال مسئله‌ی دیگری با نقطه‌ی انتهایی ثابت ولی با تابعی معیار مشخص شده در مسئله‌ی فوق را در نظر گرفته، زمان‌های شروع و پایان را مشخص فرض کرده و نقاط مرزی را نیز به صورت  $x(t_0) = x_0$  و  $x(t_f) = x_f$  نظیر نقاط مرزی منحنی نهایت  $x^*$ ، در مسئله‌ی نقطه‌ی انتهایی آزاد یا غیر معین در نظر می‌گیریم. منحنی  $x^*$  که در شکل (۵.۲) می‌بینیم باید منحنی نهایت برای مسئله با انتهای ثابت باشد. بنابراین  $x^*$  باید جوابی برای معادله‌ی اوایلر (۲۳.۲) بوده و جمله‌ی انتگرالی باید در روی یک منحنی نهایت صفر باشد. به عبارت دیگر، منحنی نهایت مسئله با نقطه‌ی انتهایی غیر معین، منحنی مسئله با نقطه‌ی انتهایی ثابت است به شرطی که نقاط انتهایی و تابعی معیار آن‌ها یکسان باشند. بنابراین صرف نظر از شرایط مرزی، معادله‌ی اوایلر - لاگرانژ باید برقرار گردد، چون به ازای هر  $t \in [t_0, t_f]$

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0 \quad (۳۶.۲)$$

و

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] = 0 \quad (۳۷.۲)$$

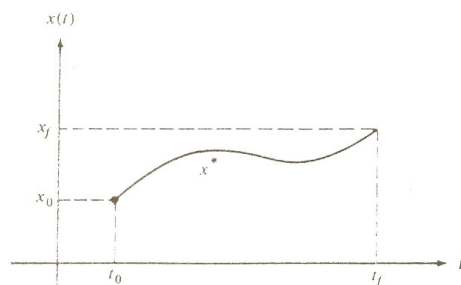
از معادله‌ی (۳۵.۲) داریم:

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x'^*(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) = 0 \quad (۳۸.۲)$$

اما چون  $x(t_f)$  غیر معین است  $\delta x(t_f)$  اختیاری بوده، بنابراین لازم است که:

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x'^*(t_f), t_f) = 0 \quad (۳۹.۲)$$

معادله‌ی اوایلر - لاگرانژ معادله‌ی مرتبه‌ی دوم است و معادله‌ی (۳۹.۲) دومین شرط مرزی لازم ( $x(t_0) = x_0$ ) شرط حدی دیگر می‌باشد) را در اختیار قرار می‌دهد. معادله‌ی (۳۹.۲) را شرط حدی طبیعی می‌نامیم.



شکل ۵.۲: یک منحنی نهایت برای مسئله‌ای با نقطه‌ی انتهایی غیر معین

مثال ۲.۲.۲. تابعی زیر را در نظر می‌گیریم

$$J(x) = \int_0^2 [x'^2(t) + 2x(t)x'(t) + 4x^2(t)] dt \quad (40.2)$$

منحنی نهایت تابعی (۴۰.۲) را در صورتی که  $x(0) = 1$  و  $x(2)$  آزاد یا غیر معین است، به دست می‌آوریم.

حل: داریم:

$$g(x) = x'^2(t) + 2x(t)x'(t) + 4x^2(t) \quad (41.2)$$

معادله‌ی اوایلر - لاگرانژ به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial x'} \right) = 0 \quad (42.2)$$

$$-x''(t) + 4x^*(t) = 0 \quad (43.2)$$

که پاسخ آن شکل زیر می‌باشد:

$$x^*(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} \quad (44.2)$$

برای تعیین ثابت‌های انتگرال، شرط مرزی  $x(0) = 1$  و شرط مرزی طبیعی

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(2), x'^*(2)) = 0 \quad (45.2)$$

را به کار می‌بریم. شرط فوق رابطه‌ی زیر را به دست می‌دهد:

$$x'^*(2) + x^*(2) = 0 \quad (46.2)$$

که جواب به صورت زیر خواهد داشت:

$$x'^*(t) = -2c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^{2t} \quad (47.2)$$

با جمع کردن معادلات (۴۴.۲) و (۴۷.۲) با اختصاص  $t = 2$  و با جایگزینی معادله‌ی (۴۶.۲)

خواهیم داشت:

$$-c_1 e^{-4} + 3c_2 e^4 = 0 \quad (48.2)$$

شرط مرزی  $x(0) = 1$  ایجاب می‌کند که  $c_1 + c_2 = 1$  باشد و حل هم‌زمان دستگاه معادلات

جبری برای  $c_1$  و  $c_2$  خواهیم داشت

$$c_1 = \frac{3e^4}{e^{-4} + 3e^4} \quad (49.2)$$

و

$$c_2 = \frac{e^{-4}}{e^{-4} + 3e^4} \quad (50.2)$$

### ۳.۲ تابعی‌هایی که شامل چندین تابع مستقل باشند

تاکنون تابعی‌هایی که مورد بررسی قرار دادیم فقط شامل یک تابع و مشتق اول آن بودند. حال می‌خواهیم بحث خود را کلیت داده و تابعی‌هایی که شامل چندین تابع مستقل و مشتقات مرتبه اول آن‌ها باشند را مورد بررسی قرار دهیم [۶].

الف) نقاط انتهایی ثابت:

مسئله ۱: تابعی زیر را در نظر می‌گیریم

$$J(x_1, \dots, x_n) = \int_{t_0}^{t_f} g(x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), t) dt \quad (51.2)$$

که در آن  $x_n, \dots, x_2, x_1$  توابع مستقل با مشتقات مرتبه اول پیوسته بوده و  $g$  دارای مشتقات مرتبه اول و دوم پیوسته بر حسب کلیه‌ی متغیرها می‌باشد.  $t_0$  و  $t_f$  مشخص بوده و شرایط مرزی عبارتند از:

$$x_1(t_0) = x_1, x_2(t_0) = x_2, \dots, x_n(t_0) = x_n \quad (52.2)$$

و

$$x_1(t_f) = x_1, x_2(t_f) = x_2, \dots, x_n(t_f) = x_n \quad (53.2)$$

با تحلیل مشابه بخش قبلی و با استفاده از قضیه اساسی،  $n$  معادله اوایلر - لاگرانژ به دست می‌آوریم که برای هر  $x_i$  ای معادله‌ی اوایلر - لاگرانژ به صورت زیر برقرار است:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i^*} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i^{*'}} \right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (54.2)$$

مثال ۱۰۳.۲. تابعی زیر را در نظر می‌گیریم

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [x_1^2(t) + 4x_2^2(t) + x_1'(t)x_2'(t)] dt \quad (55.2)$$

منحنی نهایت تابعی (۵۵.۲) را در صورتی که در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند به دست می‌آوریم

$$x_1(0) = 0, x_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, x_2(0) = 1, x_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (56.2)$$

حل: معادلات اوایلر - لاگرانژ را هم برای  $x_1^*$  و هم برای  $x_2^*$  به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$x_1^* : \frac{\partial g}{\partial x_1^*} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial x_1^{*'}} \right) = 0 \Rightarrow 2x_1^*(t) - x_2^{*''}(t) = 0 \quad (57.2)$$

$$x_2^* : \frac{\partial g}{\partial x_2^*} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial x_2^{*'}} \right) = 0 \Rightarrow 8x_2^*(t) - x_1^{*''}(t) = 0 \quad (58.2)$$



از حل معادلات (۵۷.۲) و جایگذاری در (۵۸.۲) به دست می‌آوریم:

$$x_2^{***}(t) = 2x_1^*(t) \quad (۵۹.۲)$$

$$x_2^{****}(t) = 2x_1'(t) \quad (۶۰.۲)$$

$$x_2^{*****}(t) = 2x_1''(t) \quad (۶۱.۲)$$

با جایگذاری در معادله‌ی (۵۸.۲) و حل آن داریم:

$$x_1^*(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t \quad (۶۲.۲)$$

که در آن  $c_1$  و  $c_2$  و  $c_3$  و  $c_4$  ثابت‌های انتگرال می‌باشند. با دو بار مشتق‌گیری از  $x_1^*(t)$  و جایگزینی در معادله‌ی (۵۸.۲) داریم:

$$x_2^*(t) = \frac{1}{4}c_1 e^{2t} + \frac{1}{4}c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}c_3 \cos 2t - \frac{1}{4}c_4 \sin 2t \quad (۶۳.۲)$$

با قرار دادن شرایط مرزی در معادلات (۶۲.۲) و (۶۳.۲) چهار معادله و چهار مجهول ایجاد می‌گردند؛ یعنی،

$$x_1^*(0) = 0, x_2^*(0) = 1, x_1^*\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, x_2^*\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (۶۴.۲)$$

با حل این معادلات برای ثابت‌های انتگرال داریم:

$$c_1 = \frac{-\frac{1}{4} + e^{-\frac{\pi}{4}}}{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}} \quad (۶۵.۲)$$

و

$$c_2 = \frac{\frac{1}{4} - e^{\frac{\pi}{4}}}{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}} \quad (۶۶.۲)$$

و

$$c_3 = -1, c_4 = \frac{1}{4} \quad (۶۷.۲)$$

(ب) مسائلی با نقاط انتهای آزاد یا غیر معین:

اگر بخواهیم منحنی نهایت تابعی زیر را به دست آوریم به شرطی که در بعضی از  $x_i$  ها آزاد یا نامعین باشد آن‌گاه از شرط انتهای آزاد استفاده می‌کنیم همانند بخش قبل.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), t) dt \quad (۶۸.۲)$$

ابتدا معادله‌ی اوایلر را برای هر  $x_i$  می‌نویسیم و سپس از شرط انتهای آزاد برای  $x_i$  های نامعین استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial x'} \right) = 0 \quad (۶۹.۲)$$

شرط انتهای آزاد:  $\frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$

مثال ۲.۳.۲. تابعی زیر را در نظر می‌گیریم

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [x_1^2(t), x_1'(t)x_2'(t) + x_2'^2(t)] dt \quad (70.2)$$

منحنی نهایت تابعی (۷۰.۲) را در صورتی که توابع  $x_1$  و  $x_2$  مستقل بوده و شرایط حدی عبارتند از:

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = \frac{3}{4}, x_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, x_2\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ آزاد} \quad (71.2)$$

به دست می‌آوریم.

حل: ابتدا معادلات اوایلر را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$x_1^* : 2x_1^*(t) - x_2^{**}(t) = 0 \quad (72.2)$$

$$x_2^* : -x_1^{**}(t) - 2x_2^{**}(t) = 0 \quad (73.2)$$

با دو برابر کردن معادله‌ی اول و کم کردن آن از معادله‌ی دوم خواهیم داشت:

$$x_1^{**}(t) + 4x_1^*(t) = 0 \quad (74.2)$$

که دارای جواب زیر است:

$$x_1^*(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \quad (75.2)$$

بنابراین

$$x_2^{**}(t) = 2c_1 \cos 2t + 2c_2 \sin 2t \quad (76.2)$$

با دو بار انتگرال‌گیری داریم:

$$x_2^*(t) = \frac{-c_1}{2} \cos 2t - \frac{-c_2}{2} \sin 2t + c_3 t + c_4 \quad (77.2)$$

با به کار بردن شرایط مرزی و استفاده از شرط انتهای آزاد در  $x_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$  داریم:

$$\frac{\partial g}{\partial x_2'}(x^*\left(\frac{\pi}{4}\right), x'^*\left(\frac{\pi}{4}\right)) = x_1'^*\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2x_2'^*\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2c_3 \quad (78.2)$$

پس  $c_3 = 0$  است و از شرایط مرزی داریم:

$$x_1(0) = 1 = c_1(1) + c_2(0) \Rightarrow c_1 = 1 \quad (79.2)$$

$$x_2(0) = \frac{3}{4} = \frac{-c_1}{2}(1) - \frac{-c_2}{2}(0) + c_3(0) + c_4 \Rightarrow c_4 = 1/5 + \frac{c_1}{2} = 2 \Rightarrow c_4 = 2 \quad (80.2)$$

$$x_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 = c_1(0) + c_2(1) \Rightarrow c_2 = 2 \quad (۸۱.۲)$$

لذا منحنی نهایت به صورت زیر است:

$$x_1^*(t) = \cos 2t + 2 \sin 2t \quad (۸۲.۲)$$

$$x_2^*(t) = \frac{-1}{4} \cos 2t - \sin 2t + 2 \quad (۸۳.۲)$$

## ۴.۲ کنترل بهینه

یک سیستم کنترلی مجموعه‌ای از دستگاه‌های قابل کنترل هماهنگ بوده که باعث می‌شود تا یک سری از عملیات مطابق دستورالعمل و یا هدف خاصی تحقق پذیرد. به عبارت دیگر یک سیستم کنترلی آن سیستمی است که خروجی مطلوب، به وسیله‌ی عملیاتی بر روی ورودی سیستم‌ها حاصل می‌شود. کنترل به معنی اعمال روش‌ها به وسیله‌هایی است که مورد استفاده قرار گرفته‌اند تا بر عملکرد یک سیستم یا دستگاه یا ماشین اثر بگذارد. نظریه کنترل کلاسیک معمولاً بر اساس تبدیلات لاپلاسی پی‌ریزی شده است و در مورد دستگاه‌های مستقل خطی به کار می‌رود که دارای ورودی اسکالر و خروجی اسکالر است. اما نظریه کنترل جدید فقط بر سیستم‌های مستقل خطی کاربرد ندارد، بلکه بر سیستم‌های متغیر زمانی نیز کاربرد دارد. در مسائل کنترلی، فضای حالت سیستم به صورت معادلات دیفرانسیلی بیان می‌گردد. برای مطالعه نظریه‌ی کنترل کلاسیک، زمینه ریاضی لازم، شامل موضوعاتی از قبیل نظریه‌ی متغیرهای مختلط، نظریه‌ی ماتریس‌ها، نظریه‌ی مجموعه‌ها، جبر و تبدیلات خطی، حساب تغییرات، برنامه ریزی ریاضی و سایر عناوین ریاضی پیشرفته می‌باشد.

در سال‌های اخیر سیستم‌های کنترلی اهمیت فزاینده‌ای در توسعه و پیشرفت تمدن و تکنولوژی جدید یافته‌اند. مثلاً در محدوده‌ی زندگی فردی، کنترل کننده‌های خودکار در سیستم‌های تهویه مطبوع، دما و رطوبت خانه‌ها را در حد مطلوب نگه می‌دارد.

روش‌های مناسب حساب تغییرات را می‌توان به آسانی به مسائل کنترل بهینه<sup>۱۱</sup> تعمیم داد که در آن بردار کنترل  $u$  می‌تواند کراندار یا بی‌کران باشد. نظریه کنترل بهینه، یک روش بهینه‌سازی ریاضی است، برای به دست آوردن سیاست‌گذاری‌های کنترلی و تعمیمی است بر حساب تغییرات.

<sup>۱۱</sup>Optimal control

این روش به وسیله‌ی لوپونتریاگین<sup>۱۲</sup> و همکارانش در شوروی و نیز ریچارد بلمن<sup>۱۳</sup> در آمریکا ابداع شد.

نظریه‌ی کنترل بهینه در پی یافتن قانون کنترل برای یک سیستم معین است به شکلی که ضابطه‌ی بهینگی خاصی به دست آید. مسئله‌ی کنترل، تابعی از متغیرهای کنترل و متغیرهای وضعیت است.

کنترل بهینه، در واقع مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل است که "مسیری" از متغیرهای کنترل، که تابع هزینه را مینیمم می‌کند، نشان می‌دهند. کنترل بهینه می‌تواند با استفاده از اصل حداکثرسازی پونتریاگین (شرط لازم) یا حل معادله‌ی هامیلتون<sup>۱۴</sup> (شرط کافی) به دست آید. به عنوان مثال، اتومبیلی را در نظر می‌گیریم که بر روی خط مستقیمی روی تپه همواری پیش می‌رود. مسئله آن است که راننده چطور پدال گاز را بفشارد که کل زمان مسافرت برای وی حداقل شود؟

قانون کنترل در این مثال، به طریقی که راننده گاز را می‌فشارد و دنده عوض می‌کند بر می‌گردد. سیستم، در این مثال، شامل جاده و اتومبیل است، ضابطه‌ی بهینگی در این مثال، حداقل سازی زمان مسافرت است. مسائل کنترل بهینه معمولاً شامل قیود فرعی است. قیود فرعی در این مثال، می‌تواند شامل حداکثر سوخت قابل دسترس، حداکثر سرعت و... باشد. "تابع هزینه" در این مثال عبارتی ریاضی است که زمان را به عنوان تابعی از سرعت، ملاحظات جغرافیایی و شرایط اولیه سیستم معرفی می‌کند.

معرفی مسئله‌ی کنترل بهینه:

معمولاً یک مسئله‌ی کنترل بهینه کلاسیک بر حسب سیستم‌های دینامیکی، شرایط مرزی، متغیرهای کنترل و معیار هزینه (تابع هدف) معرفی می‌شود.

سیستم‌های دینامیکی:

$$\text{سیستم‌های دینامیکی به صورت معادلات فضای حالت } x' = f(x, u, t) \text{ که در آن}$$

$$f = [f_1, \dots, f_n]^T, \quad x = [x_1, \dots, x_n]^T, \quad u = [u_1, \dots, u_m]^T \quad (۸۴.۲)$$

می‌باشد.

تابع  $f$  میدان برداری نامیده می‌شود و در حالت کلی فرض می‌شود که  $f$  دارای مشتقات جزئی

<sup>۱۲</sup>Lopontryagin

<sup>۱۳</sup>Richard Belman

<sup>۱۴</sup>Hamilton

پیوسته نسبت به  $t$  و  $x$  است. زمان‌های ابتدایی و انتهایی به ترتیب با  $t_0$  و  $t_1$  نشان داده می‌شود. بردار حالت به برقرار کردن شرایط مرزی  $x(t_1) \in M_1$  و  $x(t_0) \in M_0$  محدود می‌شود که مجموعه‌های  $M_0$  و  $M_1$  به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : g_k(x) = 0, k = 1, \dots, p\} \quad p < n \quad (۸۵.۲)$$

که رابطه‌ی  $g_k(x)$  معرف شرایط مسئله است.

متغیرهای کنترل:

متغیرهای کنترل به تابع‌های قطعه قطعه‌ای پیوسته که مقادیر را در یک مجموعه‌ی  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  می‌گیرند محدود می‌شوند. بیشترین انتخاب‌های عمومی برای  $u$  به صورت زیر است:

$$u \in \mathbb{R}^m, U = \{u \in \mathbb{R}^m : -1 \leq u_k \leq 1, k = 1, \dots, m\} \quad (۸۶.۲)$$

تابع هزینه:

تابع هزینه در حالت کلی شامل عبارت

$$\varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t) dt \quad (۸۷.۲)$$

است که در آن

$\varphi, f_0 \in C_1(R)$  است و

(i) هزینه پایانه  $\varphi(x(t_1))$  انحراف از بعضی حالات انتهایی قلمداد می‌شود.

(ii) قسمت انتگرالی هزینه، یک هزینه مرتبط با حالت‌ها و مسیرهای کنترل می‌باشد.

مسئله‌ی کنترل بهینه به فرم ریاضی به صورت زیر است:

$$\min J = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), u(t), t) dt \quad (۸۸.۲)$$

$$\text{S.t. } x' = f(x, u, t) \quad (۸۹.۲)$$

$$x(t_0) = p \quad (۹۰.۲)$$

$$x(t_1) = q \quad (۹۱.۲)$$

$$u \in U \quad (۹۲.۲)$$

که در آن  $u$  تابعی قطعه قطعه پیوسته و مشتق‌پذیر است.

کنترل قابل قبول و کنترل بهینه:

یک مسئله‌ی کنترل، قابل قبول<sup>۱۵</sup> نامیده می‌شود اگر قطعه قطعه پیوسته بوده و در محدودیت‌های (۹۲.۲) - (۸۸.۲) صدق کند یعنی  $u(t) \in U$  برای هر  $t \in [t_0, t_1]$  بتواند یک نقطه‌ی ابتدایی  $p$  را به یک نقطه‌ی انتهایی  $q$  با معادلات دینامیکی  $x' = f(x, u, t)$  انتقال دهد. تابع حالت  $x(t)$  متناظر با کنترل قابل قبول، نیز قابل قبول نامیده می‌شود.

<sup>۱۵</sup> Admissible

برای هر کنترل قابل قبول  $u(\cdot)$  و تابع حالت متناظر  $x(\cdot)$ ، تابع هزینه  $J(x(\cdot), u(\cdot), t)$  را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t) \quad (93.2)$$

مجموعه کنترل‌های قابل قبول به وسیله  $U$  مشخص شده،  $u \in U$  به معنی این است که منحنی  $u$  قابل قبول می‌باشد و با  $u^*$  نمایش می‌دهیم.  
مسیر قابل قبول:

منحنی مسیر متغیر وضعیت که در تمام مدت زمان  $[t_0, t_1]$  در محدودیت‌های متغیر وضعیت صدق نماید، منحنی مسیر قابل قبول<sup>۱۶</sup> نامیده می‌شود.

مجموعه مسیر متغیرهای وضعیت قابل قبول توسط  $X$  نشان داده شد. و  $x \in X$  به معنی این است که منحنی  $x$  قابل قبول است و با  $x^*$  نشان می‌دهیم.

پس یک زوج قابل قبول،  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  بهینه می‌باشد اگر و فقط اگر برای هر جفت قابل قبول  $(x(\cdot), u(\cdot))$  داشته باشیم.

$$J(x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \leq J(x(\cdot), u(\cdot)) \quad (94.2)$$

در اصل یک مسئله کنترل بهینه عبارتست از پیدا کردن کنترل قابل قبول  $u(t) \in U$  که حالت سیستم را از نقطه‌ی  $x(t_0)$  به نقطه  $x(t_1)$  انتقال می‌دهد به طوری که تابعی هزینه کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

حل مسئله کنترل بهینه:

در حل مسئله کنترل بهینه همانند حساب تغییرات از ضرایب لاگرانژ استفاده می‌شود و ضرایب لاگرانژ را هم برای  $x$  ها و هم برای  $u$  به کار می‌بریم.  
یعنی، اگر داشته باشیم:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(x, u, t) dt \quad (95.2)$$

$$\text{S.t. } x' = f(x, u, t) \quad (96.2)$$

$$x(t_0) = p \quad (97.2)$$

$$x(t_1) = q \quad (98.2)$$

<sup>۱۶</sup> Admissible trajectory

تابعی افزوده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F = f + \psi x' \quad (۹۹.۲)$$

$\psi$  ضریب لاگرانژ نامیده می‌شود. آن‌گاه از ضرایب لاگرانژ هم برای  $x$  و  $u$  به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0 \quad (۱۰۰.۲)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \quad (۱۰۱.۲)$$

مثال ۱۰۴.۲. تابعی زیر را در نظر می‌گیریم، مقادیر اکسترمم تابعی

$$J = \int_0^T (x^2 + u^2) dt \quad (۱۰۲.۲)$$

را به قسمی پیدا می‌کنیم که در آن  $x$  متغیر وضعیت و  $u$  متغیر کنترل باشد و در معادله‌ی دیفرانسیل

$$x' + x = u, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0 \quad (۱۰۳.۲)$$

صدق کند.

حل: روش مستقیم حل این مسئله جایگذاری  $u$  از معادله  $x' + x = u$  در معادله‌ی (۱۰۲.۲) است که آن را به یک مسئله‌ی حساب تغییرات تبدیل می‌کند. ولی در حالت کلی نمی‌توان متغیر کنترل را حذف کرد. لذا روش دیگر را بر مبنای ضرایب لاگرانژ برای بحث در قیدهای مسئله بسط خواهیم داد.

ضرایب لاگرانژ  $\psi$  را معرفی کرده و تابعی افزوده را تشکیل می‌دهیم.

$$J^* = \int_0^T [x^2 + u^2 + \psi(x' + x - u)] dt \quad (۱۰۴.۲)$$

تابع  $F = x^2 + u^2 + \psi(x' + x - u)$  تابعی از دو متغیر  $x$  و  $u$  است. معادله‌ی اوایلر را برای  $x$  و  $u$  محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) = 0 \rightarrow 2x + \psi - \psi' = 0 \quad (۱۰۵.۲)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \rightarrow 2u + \psi = 0 \rightarrow \psi = -2u \quad (۱۰۶.۲)$$

بنابراین  $u = \frac{-\psi}{2}$  و  $u' = \frac{-\psi'}{2}$

با جایگذاری  $\psi = -2u$  در معادله‌ی (۱۰۵.۲) داریم  $x + u - u' = 0$ .



به جای  $u$  قرار می‌دهیم  $u = x' + x$  بنابراین:

$$x + (x' + x) - (x'' + x') = 0 \Rightarrow 2x - x'' = 0 \Rightarrow x'' - 2x = 0 \Rightarrow x'' = 2x \quad (107.2)$$

$$\Rightarrow x = Ae^{\sqrt{2}t} + Be^{-\sqrt{2}t} \quad (108.2)$$

یا به عبارت دیگر داریم:

$$x = a \cos h\sqrt{2}t + b \sin h\sqrt{2}t \quad (109.2)$$

با استفاده از این بسط و شرایط اولیه  $x(0) = x_0$  و  $x(T) = 0$  داریم:

$$x_0 = a \quad (110.2)$$

$$x(T) = 0 \Rightarrow 0 = x_0 \cos h\sqrt{2}T + b \sin h\sqrt{2}T \quad (111.2)$$

$$x = x_0 \cos h\sqrt{2}t - x_0 \frac{\cos h\sqrt{2}T}{\sin h\sqrt{2}T} \sin h\sqrt{2}t \quad (112.2)$$

$$x = \frac{x_0 \sin h\sqrt{2}(T-t)}{\sin h\sqrt{2}T} \quad (113.2)$$

در این صورت کنترل بهینه برابر است با:

$$u = x + x' \rightarrow u = x_0 \frac{\sin h\sqrt{2}(T-t) - \sqrt{2} \cos h\sqrt{2}(T-t)}{\sin h\sqrt{2}T} \quad (114.2)$$

**تعریف ۲.۴.۲ (هامیلتونی).** استراتژی حل مسئله کنترل بهینه عموماً یافتن تابع هزینه با ضرایب  $\psi(t)$  می‌باشد که در برخی موارد و به ویژه در مسائل زمان پیوسته، می‌تواند صریح به دست آورده شود. یکی از روش‌های حل مسئله کنترل بهینه استفاده از روش هامیلتونی می‌باشد.

هامیلتونین<sup>۱۷</sup> در تئوری کنترل بهینه به وسیله پونتریاگین ابداع شد. وی اثبات کرد که یک شرط لازم برای حل مسئله کنترل بهینه این است که کنترل باید به گونه‌ای انتخاب شود که هامیلتونین را کمینه کند.

فرض کنیم مسئله کلی مینیم سازی به صورت زیر باشد:

$$\min J = \int_0^T f_0(x, u, t) dt \quad (115.2)$$

که با شرط معادله دیفرانسیل  $x' = f(x, u, t)$  و شرایط مرزی  $x(t_0) = p$  در نظر گرفته می‌شود.

با استفاده از ضریب لاگرانژ  $\psi$ ، تابعی افزوده زیر را تشکیل می‌دهیم

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} [f_0(x, u, t) + \psi f((x, u, t) - x')] dt \quad (116.2)$$

<sup>۱۷</sup>Hamiltonian

تابع انتگران  $F = f_0 + \psi(f - x')$  تابعی از دو متغیر  $x$  و  $u$  است و در نتیجه دو معادله‌ی اوایلر خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) = 0 \quad (117.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \quad (118.2)$$

با تعریف تابع هامیلتونی به صورت  $H = f_0 + \psi f$  معادله‌های (117.2) و (118.2) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\psi' = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (119.2)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} \quad (120.2)$$

تذکره ۳.۴.۲. اگر  $x$  در  $t = T$  نامعین باشد از شرط ”انتهای آزاد”  $\frac{\partial F}{\partial x'} = 0$ ؛ یعنی،  $\psi = 0$  در  $t = T$  استفاده می‌کنیم. اگر مسئله‌ی کنترل بهینه در حالت کلی به صورت زیر باشد:

$$\min J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t) dt \quad (121.2)$$

$$\text{S.t. } x_i' = f_i(x, u, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (122.2)$$

$$x(t_0) = p \quad (123.2)$$

$$x(t_1) = q \quad (124.2)$$

و یک مجموعه از کنترل‌های قابل قبول  $u(t)$  (قطعه قطعه پیوسته و محدود شده در ناحیه‌ی کراندار  $u$ ) می‌خواهیم کنترل بهینه‌ی  $u^*(t)$  و مسیر متناظرش  $x^*(t)$  که دستگاه را از  $p$  به  $q$  هدایت می‌کند بیابیم. بدون این که از کلیت مسئله کاسته شود فرض می‌کنیم  $n = 2$ . بنابراین دستگاه با زوجی از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول همراه می‌شود. پس اکنون معادلات حالت عبارتند از:

$$x_1' = f_1(x_1, x_2, u), \quad x_2' = f_2(x_1, x_2, u) \quad (125.2)$$

ابتدا تابع افزوده  $J^*$  را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} \psi_i(t)(x_i' - f_i(x_1, x_2, u)) \quad (126.2)$$

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} (f_0 + \psi_1(f_1 - x_1') + \psi_2(f_2 - x_2')) dt \quad (127.2)$$

$\psi_1$  و  $\psi_2$  ضرایب لاگرانژ می‌باشند.

بنابراین تابع انتگران

$$F = f_0 + \psi_1(f_1 - x_1') + \psi_2(f_2 - x_2') \quad (128.2)$$

تابعی از دو متغیر  $x_1$  و  $x_2$  و  $u$  می‌باشد. معادلات اویلر (۱۱۷.۲) و (۱۱۸.۲) را برای  $x_1$  و  $x_2$  و  $u$  می‌نویسیم.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1'} \right) = 0 \quad (129.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial x_2'} \right) = 0 \quad (130.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \quad (131.2)$$

حال با معرفی تابع هامیلتونی به صورت زیر داریم:

$$H = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 \quad (132.2)$$

که در آن  $\psi_i$  ها توابعی هستند که در معادلات زیر صدق می‌کنند

$$\psi_i' = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (133.2)$$

این معادلات را معادلات هم‌وضعیت، و به  $H$  تابع هامیلتونی گفته می‌شود. متذکر می‌شویم که شرط

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (134.2)$$

در هر نقطه از مسیر بهینه برقرار بوده و بیانگر این است که  $H$  باید اکسترمم خود را نسبت به  $u$  در هر نقطه مسیر بهینه برگزیند. این حقیقت که  $x_1$  و  $x_2$  وابسته به  $u$  هستند ارتباطی به این شرط ندارد. تنها وابستگی مستقیم و غیر ضمنی  $H$  به  $u$  است که در تشخیص مسیر بهینه مهم می‌باشد.

**مثال ۴.۴.۲. تابعی**

$$J = \int_0^1 (x^2 + u^2) dt \quad (135.2)$$

را در نظر می‌گیریم. با استفاده از روش هامیلتونی، کنترل بهینه  $u$  را به قسمی پیدا می‌کنیم که در شرایط زیر صدق کند

$$x' = u, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = \text{نامعین}$$

حل: ابتدا تابعی افزوده را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$J^* = \int_0^1 (x^2 + u^2) + \psi(u - x') \quad (136.2)$$

هامیلتونی عبارتست از:

$$H = \dot{x}^2 + u^2 + \psi u \quad (۱۳۷.۲)$$

معادله (۱۱۷.۲) به صورت:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow 2u + \psi = 0 \quad (۱۳۸.۲)$$

$$2u' + \psi' = 0 \quad (۱۳۹.۲)$$

$$\psi' = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \psi' = -2x \quad (۱۴۰.۲)$$

و پس از حذف  $\psi$  داریم:

$$u' = x \rightarrow x'' = u' = x \quad (۱۴۱.۲)$$

پس معادله‌ی  $x'' - x = 0$  را حل می‌کنیم.

$$x'' = x \rightarrow x = a \sin ht + b \cos ht \quad (۱۴۲.۲)$$

از شرط  $x(0) = 1$ ،  $b = 1$  به دست می‌آید. شرط دیگر  $x(1)$  نامعین است پس از شرط انتهایی آزاد استفاده می‌شود که در این صورت  $\psi = 0$ . در نتیجه  $2u + \psi = 0$  در  $t = 1$  داریم  $u = 0$

ولی

$$u = x' = a \cos ht + \sin ht \rightarrow 0 = a \cos h1 + \sin h1 \rightarrow a = \frac{-\sin h1}{\cos h1} \quad (۱۴۳.۲)$$

پس متغیر کنترل بهینه عبارتست از:

$$u^* = \frac{-\sin h1}{\cos h1} \cos ht + \sin ht = \frac{-\sin h(1-t)}{\cos h1} \quad (۱۴۴.۲)$$

و مسیر بهینه متناظر عبارتست از:

$$x^* = \frac{\cos h(1-t)}{\cos h1} \quad (۱۴۵.۲)$$

## ۵.۲ مسئله کلی

در این قسمت می‌توانیم مسئله کنترل بهینه کلی را در حالتی که کنترل‌ها پیوسته و بیکران هستند حل کنیم.

مسئله‌ی اساسی پیدا کردن کنترل‌های بهینه، مانند  $u$  است که مقادیر اکسترمم

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t) dt \quad (۱۴۶.۲)$$

را با قیود دیفرانسیل زیر نتیجه دهد.

$$x_i' = f_i(x, u, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

که در آن  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  و  $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ . با معرفی ضرایب لاگرانژ مانند  $\psi_i, (i = 1, 2, \dots, n)$  که معمولاً متغیرهای الحاقی نامیده می‌شوند تابع افزوده را تشکیل می‌دهیم.

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} [f_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - x_i')] dt \quad (147.2)$$

هم‌چنین هامیلتونی  $H$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H = f_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i f_i \quad (148.2)$$

در این صورت

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} (H - \sum_{i=1}^n \psi_i x_i') dt \quad (149.2)$$

تابع انتگرال

$$F = H - \sum_{i=1}^n \psi_i x_i' \quad (150.2)$$

به  $x$  و  $u$  و  $t$  بستگی دارد. حال  $(m+n)$  معادله‌ی اوایلر را تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i'} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (151.2)$$

یعنی:

$$\psi_i' = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (152.2)$$

که به معادلات الحاقی معروفند، و

$$\frac{\partial F}{\partial u_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial u_j'} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (153.2)$$

یا

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0 \quad (154.2)$$

جواب‌های بهینه  $x$  و  $u$  و  $\psi$  از  $(2n+m)$  معادله  $(146.2)$ ،  $(152.2)$  و  $(154.2)$  به دست می‌آیند. با استفاده از شرایط مرزی  $x_i(0)$ ،  $x_i(t_1)$  و  $x_i(0)$ ،  $i = 1, 2, \dots, n$  معلوم

خواهند بود و مقادیر باقیمانده  $x_{q+1}(T), \dots, x_n(T)$  آزادند و در نتیجه بایستی شرط انتهای آزاد را در نقطه‌ی  $t = t_1$  به کار ببریم.

$$\frac{\partial F}{\partial x_k'} = 0, \quad k = q + 1, \dots, n \quad (155.2)$$

با توجه به این مطلب داریم:

$$\psi_k(t_1) = 0, \quad k = q + 1, \dots, n \quad (156.2)$$

که آن را شرط موربی می‌گوییم.

## ۶.۲ اصل بیشینه پونتریاگین

در اوایل سال‌های ۱۹۶۰ پونتریاگین و همکاران روسی او یک اصل (به نام اصل ماکریمم یا مینیمم) را به چاپ رساندند که نه تنها درباره‌ی کنترل‌های پیوسته بلکه درباره‌ی کنترل‌های محدود و احتمالاً ناپیوسته نیز بحث می‌کرد.

دستگاه کنترلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_1' = f_1(x_1, x_2, u), \quad x_2' = f_2(x_1, x_2, u) \quad (157.2)$$

می‌خواهیم دستگاه را از  $(x_1', x_2')$  در زمان  $t = t_0$  به  $(x_1', x_2')$  در زمان غیر مشخص  $t_1$  و با استفاده از توابع کنترل قابل قبول  $u(t)$  که قطعه قطعه پیوسته و کراندار هستند، هدایت کنیم به طوری که

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, x_2, u) dt \quad (158.2)$$

نیز کمینه شده باشد. نظریه کلاسیک پیشنهاد می‌کند که ما رفتار تابع عددی

$$H = \psi_0 f_0(x_1, x_2, u) + \psi_1 f_1(x_1, x_2, u) + \psi_2 f_2(x_1, x_2, u) \quad (159.2)$$

را مورد بررسی قرار دهیم که  $\psi_i$  ها در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\psi_i' = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, 2 \quad (160.2)$$

**قضیه ۱.۰۶.۲ (اصل بیشینه پونتریاگین).** <sup>۱۸</sup> فرض کنید  $u^*(t)$  یک کنترل قابل قبول باشد و مسیر متناظر آن نیز  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  باشد که دستگاه را از نقطه‌ی  $x_0$  در زمان  $t = t_0$  به نقطه‌ی  $x_1$  در

<sup>۱۸</sup> Maximom principle Pontryagin

زمان غیر مشخص  $t_1$  هدایت می‌کند. برای این که  $u^*$  و  $x^*$  بهینه باشند (یعنی  $J$  را کمینه کنند) لازم است که بردار غیر صفر  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2)^T$  که در (۱۵۴.۲) صدق می‌کند و نیز تابع عددی

$$H(\psi, x, u) = \psi_0 f_0(x, u) + \psi_1 f_1(x, u) + \psi_2 f_2(x, u) \quad (161.2)$$

موجود باشند به طوری که

الف) به ازای هر  $t_0 \leq t \leq t_1$  به بیشینه خود نسبت به  $u$  در  $u = u^*(t)$  برسد.

ب)  $H(\psi^*, x^*, u^*) = 0$  و در  $t = t_1$   $\psi_0 \leq 0$  که  $\psi^*(t)$  جواب (۱۶۰.۲) به ازای  $u = u^*(t)$  می‌باشد.

به علاوه می‌توان نشان داد که،

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \text{عدد ثابت} \quad (162.2)$$

و نیز

$$\psi_0(t) = \text{عدد ثابت} \quad (163.2)$$

بنابراین به ازای هر نقطه روی مسیر بهینه،  $H = 0$  و  $\psi_0(t) \leq 0$ .

**تذکره ۲.۶.۲.** توجه کنید که معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به  $\psi$  بیان می‌کند که  $\psi$  عددی ثابت است. این مطلب همیشه چنین است زیرا  $H$  هرگز تابعی از متغیر هزینه  $x$  نیست. هم‌چنین توجه شود که معادلات هم‌وضعیت همواره طوری هستند که اگر بردار  $w$  یک جواب آن باشد، آن‌گاه  $cw$  نیز به ازای هر ثابت غیر صفر  $c$  یک جواب خواهد بود. بنابراین می‌توانیم هر مقداری را که بخواهیم برای  $\psi$  برگزینیم مشروط بر این که طبق قضیه  $\psi_0$  باید نامثبت شود بنابراین  $\psi_0 = -1$ .

**مثال ۲.۶.۳.** تابعی زیر را در نظر می‌گیریم، با استفاده از اصل ماکزیمم جواب آن را به دست می‌آوریم.

$$\min J = \frac{1}{4} \int_0^{t_1} u^2 dt \quad (164.2)$$

$$x' = -x + u \quad (165.2)$$

$$x_1(0) = a \quad (166.2)$$

$$x_1(t_1) = b \quad (167.2)$$

$$t_1 \text{ نامشخص} \quad (168.2)$$

حل: داریم:

$$f_0(x_1, x_2, u) = \frac{1}{4}u^2, \quad f_1(x_1, x_2, u) = -x_1 + u, \quad f_2(x_1, x_2, u) = 0 \quad (169.2)$$

قضیه بیان می‌کند که باید تابع اسکالر  $H$  و معادلاتی را که با متغیرهای هم‌وضعیت  $\psi_0$  و  $\psi_1$  بیان شده بنویسیم.

$$H = \psi_0 \frac{u^2}{4} + \psi_1(-x_1 + u) \quad (170.2)$$

معادلات هم‌وضعیت:

$$\psi_1' = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \psi_1 \quad (171.2)$$

$$\psi_0' = -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0 \quad (172.2)$$

اکنون می‌توانیم معادلات وضعیت را حل کنیم که نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \psi_0 = -1 \\ \psi_1 = Ae^t \end{cases} \quad (173.2)$$

$A$  عددی ثابت است.

اکنون  $H$  را مورد امتحان قرار می‌دهیم با نگاهی به بیشینه‌سازی آن به عنوان تابعی از  $u$ ، هیچ

قیدی بر  $u$  نیست. بنابراین به سادگی از  $H$  نسبت به  $u$  مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -u + \psi_1 \quad (174.2)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -1 \quad (175.2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (176.2)$$

پس  $H$  به عنوان تابعی از  $u$  به ازای  $u = \psi = Ae^t$  بیشینه می‌گردد. حال جواب متناظر برای  $x_1$  را به دست می‌آوریم.

$$x_1' = -x_1 + u \Rightarrow x_1' = -x_1 + Ae^t \Rightarrow x_1 = Be^{-t} + \frac{1}{4}Ae^t \quad (177.2)$$

که  $B$  عددی ثابت است.

اکنون شرایط انتهایی را اعمال می‌کنیم:

$$x_1(t_0) = a \Rightarrow B + \frac{1}{4}A = a \quad (178.2)$$

$$x_1(t_1) = b \Rightarrow Be^{-t_1} + \frac{1}{4}Ae^{t_1} = b \quad (179.2)$$



البته باید  $t_1$  زمان رسیدن به هدف، با استفاده از شرط  $H = 0$  روی مسیر بهینه (قضیه پونتریاگین) مشخص گردد. داریم:

$$H = 0 \Rightarrow H = \psi_0 \frac{u^2}{4} + \psi_1(-x_1 + u) \quad (180.2)$$

$$-\frac{1}{4}A^2 e^{2t} + Ae^t(-Be^{-t} - \frac{A}{4}e^t + Ae^t) = 0, \quad \forall t \quad (181.2)$$

پس از ساده کردن داریم  $AB = 0$  (حذف هیچ جمله‌ای از  $t$  خطایی در محاسبات وارد نمی‌کند زیرا به ازای هر  $t$  همواره  $H = 0$ ، در واقع یک اتحاد ایجاد می‌کند). اکنون دو حالت خاص را امتحان می‌کنیم:

الف)  $a = 1$  و  $b = 2$ ، آن‌گاه شرط  $AB = 0$  یا نتیجه می‌دهد که

$$A = 0 \Rightarrow B = a \Rightarrow B = 1, \quad A = 0 \Rightarrow e^{-t_1} = 2 \quad (182.2)$$

که برای  $t_1 > 0$  غیر ممکن است. یا

$$B = 0 \Rightarrow e^{t_1} = 2 \quad (183.2)$$

و در نتیجه  $t_1 = \ln 2$ . در این وضعیت کنترل بهینه  $u = 2e^t$  و مسیر بهینه  $x_1 = e^t$  به دست می‌آید. در نتیجه  $J = 3$ .

ب)  $a = 2$  و  $b = 1$ ، آن‌گاه شرط  $AB = 0$  یا نتیجه می‌دهد که

$$B = 0 \Rightarrow e^{t_1} = \frac{1}{4} \quad (184.2)$$

که غیر ممکن است. یا

$$A = 0 \Rightarrow e^t = 2 \quad (185.2)$$

در این حالت کنترل بهینه عبارتست از  $u = 0$  و مسیر بهینه

$$x_1 = 2e^{-t_1} \rightarrow J = 0 \quad (186.2)$$

فصل ۳

حل مسئله کنترل زمان بهینه‌ی فازی

## مقدمه

در این فصل یک مسئله‌ی کنترل زمان بهینه را با عدم قطعیت مورد توجه قرار می‌دهیم. دینامیک‌های موضوع کنترل شده با سیستم خطی قطعی با معادلات دیفرانسیلی با وضعیت اولیه و نهایی فازی نشان داده شده است. یک نظریه از زمان بهینه فازی را معرفی خواهیم کرد و محاسبات آن را به دو مسئله‌ی کنترل بهینه قطعی کاهش می‌دهیم. سپس روش معرفی شده را بر روی یک مثال آزمایش خواهیم کرد.

بسیاری از محققان مسائل کنترل بهینه‌ی فازی را مورد بررسی قرار داده‌اند. در [۱۷] گاباسف و همکاران مسئله‌ی کنترل بهینه را تحت عدم قطعیت با جواب‌های وضعی که بر اساس جواب‌هایی از محاسبات غیر دقیق از داده‌های ورودی و خروجی داده شده، به دست آمده مورد بررسی قرار دادند. مسئله‌ی کنترل زمان بهینه در شکل‌های متفاوتی در [۴]، [۱۵] و [۱۰] مورد مطالعه قرار گرفته است. در [۴] پلوتنیکوف<sup>۱</sup> برای یک مسئله‌ی کنترل، شرایط لازم برای ماکسیمین (ماکزیمم مجموعه‌ای از مینیمم‌ها) و ماکسی ماکس را مورد بررسی قرار داد زمانی که رفتار یک تابع توسط یک متغیر قابل کنترل توصیف می‌شود. در [۱۵] ساکاوا<sup>۲</sup> و همکاران یک روش فازی را برای مسائل کنترل بهینه خطی پیشنهاد می‌کند. برای حل این مسائل آن‌ها با گسسته‌سازی زمان مسئله را به یک مسئله با معادلات تفاضلی تبدیل می‌کند.

در این فصل یک مسئله‌ی کنترل زمان بهینه را با دینامیک‌های قطعی و با وضعیت‌های اولیه و نهایی مورد توجه قرار دادیم. زمان بهینه را برای متغیرهای فازی معرفی می‌کنیم و یک روش عددی را برای محاسبه‌ی آن پیشنهاد می‌کنیم.

## ۱.۳ مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی خطی کلاسیک نوع اول

در این بخش مسائلی در نظر گرفته می‌شوند که در آن‌ها، هدف انتقال سیستم از یک وضعیت اختیاری آغازین به یک وضعیت نهایی مشخص در حداقل زمان می‌باشد. به عنوان مثال در مسابقه‌ی اتومبیل رانی عملکرد کسانی که در این مسابقه شرکت می‌کنند خیلی نزدیک به سیستم کنترل زمان بهینه است زیرا آن‌ها اغلب گاز و ترمز را به کار برده و در نتیجه تحت تاثیر تنش‌های شدید مکانیکی قرار گرفته و به سرعت و در کمترین زمان می‌خواهند از نقطه‌ی شروع به مقصد

<sup>۱</sup>Plotnikov

<sup>۲</sup>Sakawa

برسند. یا هواپیمایی را در نظر بگیرید که در لحظه‌ی اولیه در نقطه‌ی  $x = 0$  و  $y = 0$  بوده و در حال تعقیب موشک بالستیکی است. در این لحظه در  $x = a > 0$  و  $y = 0$  می‌باشد. در این مثال مجموعه‌ی هدف موقعیت موشک است.

در مثال‌های بالا هدف به دست آوردن کمترین زمان از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر می‌باشد. به این نوع مسائل که هدف به دست آوردن زمان بهینه بین دو نقطه‌ی آغازین و نهایی است کنترل زمان بهینه‌ی نوع اول گفته می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید یک سیستم با معادلات کنترل زیر توصیف گردد:

$$x' = Ax + u \quad (1.3)$$

به طوری که  $x$  یک بردار  $n$ -بعدی است و بیانگر وضعیت سیستم است و وضعیت شیئی را مشخص می‌کند.  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  است و  $u$  یک بردار  $n$ -بعدی است که متغیر کنترل را توصیف می‌کند.

فرض کنید  $U \subseteq R^n$  یک مجموعه‌ی غیر تهی و فشرده (یعنی محدود و کراندار) باشد. اگر تابع اندازه‌پذیر  $u$ ، روی بازه‌ی  $I = [t_0, t_1]$  تعریف شده باشد و برای هر  $t \in I$  شرط  $u(t) \in U$  برقرار باشد آن‌گاه  $u$  را یک کنترل قابل قبول می‌نامند.

برای هر تابع قابل قبول  $u$  و هر نقطه‌ی آغازین  $p$ ، مسئله‌ی اولیه‌ی

$$x' = Ax + u \quad (۲.۳)$$

$$x(t_0) = p \quad (۳.۳)$$

دارای یک جواب منحصر به فرد می‌باشد [۲۱]. جواب شدنی  $x$  چگونگی حالت شی را تحت تاثیر کنترل قابل قبول  $u$  بیان می‌کند.

فرض کنید که در لحظه‌ی شروع  $t_0$  نقطه‌ی شروع (آغازین)  $p$  داده شده باشد. اگر بخواهیم شیئی را به نقطه‌ی  $q$  در کوتاهترین زمان، با انتخاب  $u$  قابل قبول مناسب، جابه‌جا کنیم، مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی کلاسیک نوع اول را که به شکل زیر است خواهیم داشت:

$$\min \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \quad (۴.۳)$$

$$x' = Ax + u \quad (۵.۳)$$

$$x(t_0) = p \quad (۶.۳)$$

$$x(t_1) = q \quad (۷.۳)$$

در این مسئله زمان پایانی  $t_1$  از قبل مشخص نیست و در صورت حل مسئله مشخص خواهد شد. به طور خلاصه مسئله‌ی زمان بهینه‌ی کلاسیک نوع اول (۷.۳) - (۴.۳) مسئله‌ای است برای پیدا کردن کنترل قابل قبول  $u$ ، که سیستم را از حالت ابتدایی  $p$  به حالت نهایی  $q$  در کوتاهترین زمان انتقال دهد.

روش حل مسئله‌ی کنترل زمان بهینه کلاسیک نوع اول:

برای حل مسئله‌ی (۷.۳) - (۴.۳) نیز اصل ماکزیمم پونتریاگین که در فصل قبل مورد بررسی قرار دادیم اعمال می‌گردد بنابراین لازم است که هامیلتونین  $H(x, u, \psi)$  را بنویسیم، سپس معادلات هم‌وضعیت را بیابیم و  $H$  را به عنوان تابعی از  $u$  بیشینه کنیم.

بدون این که از کلیت مسئله کاسته شود فرض کنیم  $n = ۲$  باشد. در حالت کلی اگر دستگاهی را با دو متغیر  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  که وضعیت دستگاه را توصیف می‌کنند و یک کنترل  $u(t)$  که مقید است و  $|u| \leq ۱$  در نظر بگیریم. فرض کنیم دستگاه با زوجی از معادلات دیفرانسیل خطی زیر همراه باشد

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 + l \\ x_2' = cx_1 + dx_2 + mu \end{cases} \quad (۸.۳)$$

که در آن‌ها  $|u| \leq 1$  و  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  و  $l$  و  $m$  ثابت‌های داده شده هستند.

در شکل ماتریسی، دستگاه (۸.۳) به صورت زیر است:

$$x' = Ax + Bu \quad (9.3)$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

و

$$B = \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$$

تابع هامیلتونین را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} H &= -1 + \psi_1(ax_1 + bx_2 + lu) + \psi_2(cx_1 + dx_2 + mu) \\ &= -1 + \psi_1(ax_1 + bx_2) + \psi_2(cx_1 + dx_2) + (l\psi_1 + m\psi_2)u \end{aligned} \quad (10.3)$$

معادلات هم‌وضعیت عبارتند از:

$$\psi_1' = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -a\psi_1 - c\psi_2 \quad (11.3)$$

$$\psi_2' = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -b\psi_1 - d\psi_2 \quad (12.3)$$

یا به شکل ماتریسی:

$$\psi' = -A^*\psi$$

اکنون به ازای هر مقدار  $t$ ، مقدار  $u = u(t)$  که  $H$  را بیشینه می‌کند بر می‌گیریم.

یادآوری می‌کنیم که  $H$  بر حسب  $u$  خطی است بنابراین برای بیشینه کردن  $H$  لازم است که

$u = 1$  یا  $u = -1$  را انتخاب کنیم. انتخاب این مقادیر وابسته به علامت ضریب  $l\psi_1 + m\psi_2$

می‌باشند. بنابراین تنها کنترل‌هایی که می‌توانند منجر به زمان کمینه انتقال شوند عبارتند از:

$$u^* = \text{sgn}(l\psi_1 + m\psi_2) \quad (13.3)$$

این کنترل قطعه به قطعه‌ای ثابت است و نقاط ناپیوستگی آن در محل صفرهای تابع

$$s = l\psi_1(t) + m\psi_2(t) \quad (14.3)$$

می‌باشد. یعنی این کنترل از  $1$  به  $-1$  یا از  $-1$  به  $1$  هنگامی سوئیچ می‌کند که  $s = 0$  باشد به این

دلیل تابع  $s$  را که در (۱۴.۳) تعریف شده تابع سوئیچ می‌نامند.

در بازه زمانی بین صفرهای  $s$  کنترل ثابت است، بنابراین معادلات وضعیت به صورت زیر می‌باشند:

$$x' = Ax + Lu^* \quad , \quad u^* = 1 \quad \text{یا} \quad u^* = -1 \quad (15.3)$$

و شکل مسیرها در صفحه  $(x_1, x_2)$  به راحتی به دست می‌آید. چنانچه  $|A| \neq 0$  باشد آن‌گاه مسیرها در ازای  $u^* = 1$  یک نقطه‌ی تکین در محل تلاقی معادلات وضعیت زیر دارند:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + l = 0 \\ cx_1 + dx_2 + m = 0 \end{cases} \quad (16.3)$$

در حالی که مسیرها برای  $u^* = -1$  یک نقطه‌ی تکین در محل تلاقی معادلات زیر خواهند داشت:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 - l = 0 \\ cx_1 + dx_2 - m = 0 \end{cases} \quad (17.3)$$

**تذکره ۱.۱.۳.** رفتار هر دو خانواده مسیرها با محاسبه‌ی مقادیر ویژه ماتریس دستگاه  $A$  تعیین شدنی است.

چند قضیه‌ی مهم که توسط پونتریاگین و همکاران [۱۳] ارائه شده را بیان می‌کنیم.

**قضیه ۲.۱.۳.** (وجود پاسخ). اگر تمام مقادیر ویژه‌ی  $^3$  ماتریس  $A$  حقیقی و غیر مثبت باشند، آن‌گاه کنترل بهینه‌ای وجود دارد که هر وضعیت ابتدایی  $x_0$  را به مبدا منتقل می‌کند.

□ برهان. به مرجع [۱۴] مراجعه کنید.

**قضیه ۳.۱.۳.** (تعداد تغییر علامت‌ها  $^4$  (سوئیچ کنترل)). اگر مقادیر ویژه‌ی  $A$  همگی حقیقی بوده و کنترل زمانی بهینه (منحصر به فردی) وجود داشته باشد، آن‌گاه کنترل زمان بهینه حداکثر می‌تواند  $(n - 1)$  مرتبه تغییر علامت بدهد (کلید بزند).

□ برهان. به مرجع [۱۴] مراجعه کنید.

**مثال ۴.۱.۳.** یک سیستم دینامیکی با متغیرهای وضعیت  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  که در شرایط زیر صدق می‌کند توصیف می‌شود

$$x_1' = -x_1 - u$$

$$x_2' = -2x_2 - 2u$$

<sup>۳</sup> Characteristic value

<sup>۴</sup> Switch

$$|u| \leq 1$$

با استفاده از اصل ماکزیمم کنترلی را پیدا می‌کنیم که سیستم را از وضعیت دلخواه  $(x_1', x_2')$  به مبدا  $(0, 0)$  در کمترین زمان انتقال دهد. [۱]

حل:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$$

هامیلتونین عبارتست از

$$H = -1 + \psi_1(-x_1 - u) + \psi_2(-2x_2 - 2u) \quad (18.3)$$

که در آن

$$\psi_1' = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \psi_1 \Rightarrow \psi_1 = Ae^t \quad (19.3)$$

$$\psi_2' = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 2\psi_2 \Rightarrow \psi_2 = Be^{2t} \quad (20.3)$$

از طرفی  $H = -(\psi_1 + 2\psi_2)u - 1 - x_1\psi_1 - 2x_2\psi_2$  پس طبق اصل ماکزیمم

$$u = \begin{cases} +1 & ; \psi_1 + 2\psi_2 < 0 \\ -1 & ; \psi_1 + 2\psi_2 > 0 \end{cases} \quad (21.3)$$

حال

$$\psi_1 + 2\psi_2 = Ae^t + 2Be^{2t} = Ae^t((1 + 2Be^t)/A) \quad (22.3)$$

و این معادله حداکثر یک صفر دارد پس حداکثر یک کلید در کنترل  $u$  موجود است. اگر

$$u = k = \pm 1$$

آن‌گاه:

$$x_1' + x_1 = -k \quad \text{یا} \quad x_1 = Ae^t - k \quad (23.3)$$

$$x_2' + 2x_2 = -2k \quad \text{یا} \quad x_2 = Be^{-2t} - k \quad (24.3)$$

با حذف  $t$  داریم

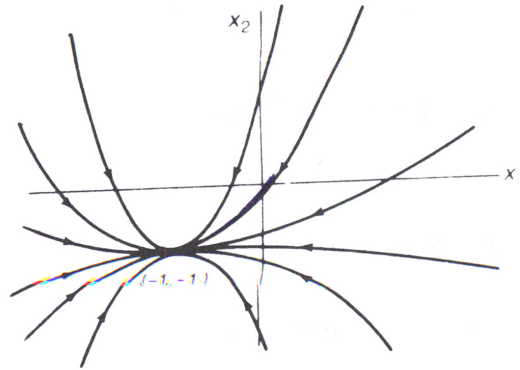
$$(x_1 + k)^2 = c(x_2 + k) \quad (25.3)$$

پس

$$k = 1 : (x_1 + 1)^2 = c(x_2 + 1) \quad (26.3)$$

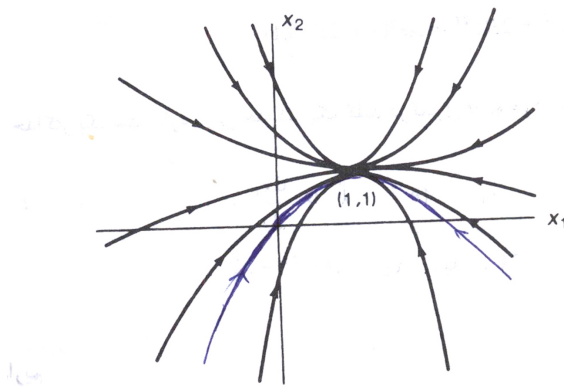


که در شکل زیر تشریح شده است



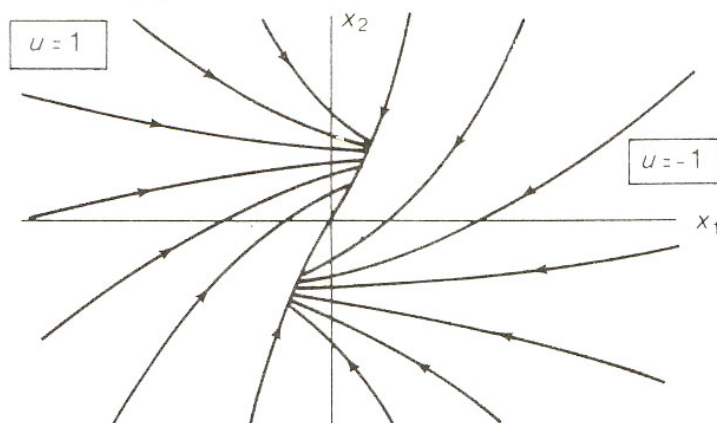
شکل ۱.۳: مسیرهای بهینه متناظر با  $u^* = -1$

$$k = -1 : (x_1 - 1)^2 = c(x_2 - 1)$$



شکل ۲.۳: مسیرهای بهینه متناظر با  $u^* = +1$

از ترکیب دو نمودار قبل شکل زیر نتیجه می‌شود:



شکل ۳.۳: بهینه ترکیبی

منحنی کلیدی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$x_2 = \begin{cases} (x_1 + 1)^2 - 1 & ; x_1 > 0 \\ 1 - (x_1 - 1)^2 & ; x_1 < 0 \end{cases} \quad (27.3)$$

دستگاه‌های با مقادیر ویژه مختلط:

اگر ماتریس  $A$  از دستگاه  $x' = Ax + bu$  دارای مقادیر ویژه مختلط باشند آن‌گاه ماتریس هم‌وضعیت  $A^*$  نیز دارای مقادیر ویژه مختلط خواهد بود.

هنگامی که دستگاه داری مقادیر ویژه مختلط است و کنترل اعمال نشده ( $u = 0$ )، رفتار دستگاه نوسانی است. اعمال کنترل می‌تواند این رفتار را تغییر دهد. اعمال کنترل بهینه تنها دستکاری مختصری در این رفتار طبیعی ایجاد می‌کند. در حالتی که مقادیر ویژه حقیقی بودند دیدیم که می‌توانیم بهینه‌ی ترکیبی را بدون حل معادله هم‌وضعیت آن به دست آوریم نظر به این که در این حالت تنها یک سوئیچ می‌تواند موجود باشد، می‌توانیم جواب را تنها با امتحان رفتار مسیرهای متناظر با  $u = 1$  و  $u = -1$  تکمیل کنیم.

دستگاه‌های با مقادیر ویژه مختلط سه نوع هستند:

الف) موهومی محض

ب) مقادیر ویژه با جزء حقیقی منفی

ج) مقادیر ویژه با جزء حقیقی مثبت

در زیر مثالی می‌آوریم که در آن مقادیر ویژه موهومی محض می‌باشند.

**مثال ۵.۱.۳. دستگاه**

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + u \end{cases} \quad (28.3)$$

$$|u| \leq 1$$

باید از یک نقطه‌ی اولیه در صفحه‌ی فاز در کمترین زمان به مبدا کنترل گردد تابع کنترل  $u = u(t)$  دارای قید  $|u| \leq 1$  می‌باشد، بهینه‌ی ترکیبی را به دست می‌آوریم.  
حل:

در این مثال داریم

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow -A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{مقادیر ویژه: } |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda = \pm i$$

بنابراین  $-A^*$  نیز دارای مقادیر ویژه  $\pm i$  که موهومی محض می‌باشند، است. ابتدا هامیلتونین را تشکیل می‌دهیم:

$$H = -1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_1 + u) \quad (29.3)$$

چون  $H$  نسبت به  $u$  خطی است پس  $H$  باید  $\pm 1$  باشد  $u^* = -\text{sgn} \psi_2 = \pm 1$  بیشینه گردد. بنابراین:

$$\psi' = -A^* \psi \Rightarrow \begin{cases} \psi_1' = \psi_2 \\ \psi_2' = -\psi_1 \end{cases}$$

از مقادیر ویژه  $A$  به دست می‌آوریم  $s = \psi_2 = k \sin(t + l)$  که در آن  $l, k$  اعداد ثابت و صفرهای  $s$  در  $t = -l \pm n\pi$  قرار دارند.

معادلات وضعیت عبارتند از:

$$x_1' = x_2 \quad (30.3)$$

$$x_2' = -x_1 + u^* \quad (31.3)$$

با فرض  $u^* = 1, -1$  داریم:

$$u^* = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = a \sin(t + \alpha) \\ x_2 = a \cos(t + \alpha) \end{cases}$$

$\alpha$  و ثابت‌های دلخواه هستند. در نتیجه داریم

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = a^2 \quad (32.3)$$

این معادلات خانواده‌ای از دوایر می‌باشند به مرکز نقطه‌ی  $(1, 0)$  که جهت آن‌ها همان جهت عقربه‌های ساعت است. فرض کنیم  $\varphi^+$  مشخص کننده عضوی از این خانواده باشد.

هنگامی که  $u^* = -1$  است داریم:

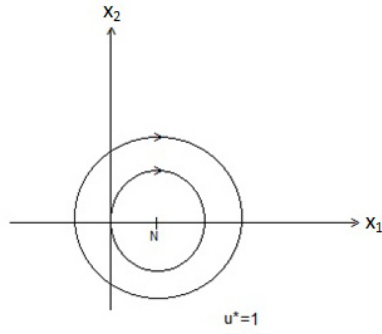
$$x_1 + 1 = a \sin(t + \alpha) \quad (33.3)$$

$$x_2 = a \cos(t + \alpha) \quad (34.3)$$

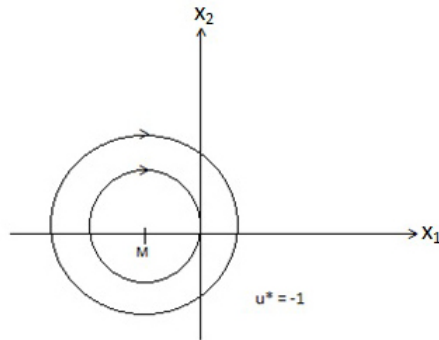
$$\Rightarrow (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = a^2 \quad (35.3)$$

خانواده‌ای از دوایر به مرکز  $(-1, 0)$ . فرض کنیم  $\varphi^-$  مشخص کننده عضوی از این خانواده باشد.

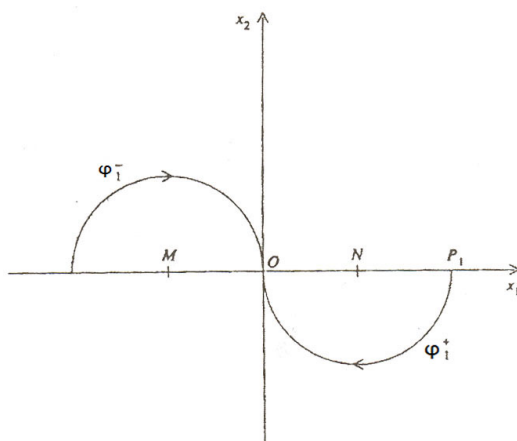
شکل زیر دواير مربوطه را نشان می‌دهد.



شکل ۴.۳: مسیر بهینه متناظر با  $u^* = +1$



شکل ۵.۳: مسیر بهینه متناظر با  $u^* = -1$



شکل ۶.۳: دو مسیر نیم‌دایره به مبدا

مسیر بهینه به  $o$  باید شامل قوس‌هایی از  $\varphi^+$  و  $\varphi^-$  باشد با نقاطی که در آن‌ها سوئیچ انجام می‌پذیرد و این نقاط با ریشه‌های  $s$  معین شده‌اند. بازه‌های زمانی بین دو ریشه  $\pi$  خواهد بود و در این زمان یک نقطه بر هر یک از مسیرهای  $\varphi^+$  یا  $\varphi^-$  قوسی از نیم‌دایره را جاروب می‌کند. می‌دانیم فقط با یکی از دو کمان  $\varphi^+$  یا  $\varphi^-$  می‌توانیم به مبدا برسیم. همان‌طور که در شکل (۶.۳) می‌بینیم  $M$  نقطه‌ی  $(-1, 0)$ ،  $N$  نقطه‌ی  $(1, 0)$  و  $P_1$  نقطه‌ی  $(2, 0)$  می‌باشد.

جزئیات مسیر بهینه:

مسیری که به  $\varphi_1^+$  در  $P_1$  و در زمان  $t = \varphi$  سوئیچ می‌کند باید سوئیچ قبلی خود را در  $t = \varphi - \pi$  انجام داده باشد و در نتیجه بر نیمه بالایی مسیر  $\varphi^-$  مار بر  $P_1$  واقع باشد که دایره ایست به مرکز  $(-1, 0)$  و شعاع ۳.

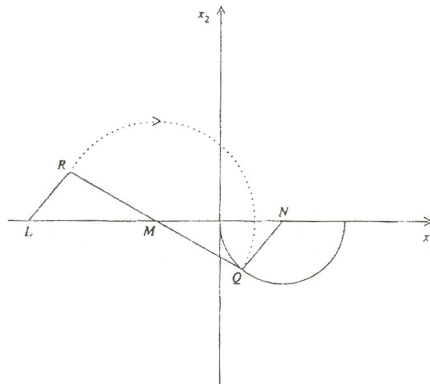
اکنون مسیری را در نظر می‌گیریم که به مسیر  $\varphi_1^+$  در نقطه‌ی  $Q$  سوئیچ کند. این مسیر باید در  $\varphi - \pi \leq t \leq \varphi$  بر  $\varphi_1^-$  مار بر  $Q$  واقع باشد که سوئیچ قبلی خود را در  $R$  انجام داده به طوری که  $RQ$  قطر نیم‌دایره است. ما نیاز به منحنی سوئیچ داریم که مکان هندسی نقاط سوئیچ باشد در واقع باید مکان هندسی  $R$  را تعیین کنیم در حالی که  $Q$  هر نقطه‌ی دلخواه  $\varphi_1^+$  باشد. از شکل (۷.۳) دیده می‌شود که اگر  $L$  نقطه‌ی  $(-3, 0)$ ،  $M$  نقطه‌ی  $(-1, 0)$  و  $N$  نقطه‌ی  $(1, 0)$  باشد، آن‌گاه مثلث‌های  $MQN$  و  $MRL$  متشابهند.

بنابراین  $LR = NQ = 1$ ، لذا مکان هندسی  $R$  نیمه‌ی بالایی دایره به مرکز  $L$  و شعاع ۱ خواهد بود. به طور مشابه، مسیر بهینه سوئیچ کننده به  $\varphi_1^-$  باید سوئیچ قبلی خود را در نیمه‌ی پایینی دایره به مرکز  $(3, 0)$  و شعاع ۱ انجام دهد.

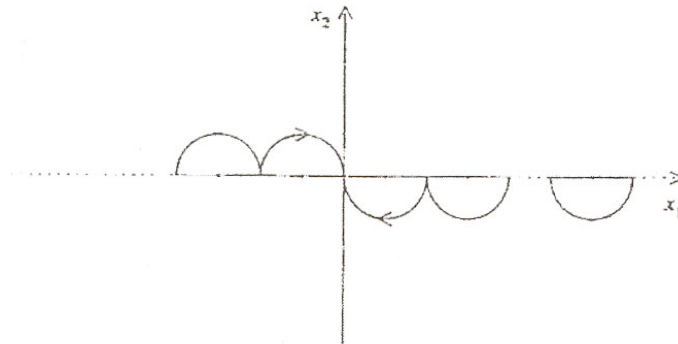
برای محاسبه‌ی باقی منحنی‌های سوئیچ کننده عمل را به صورت پسرو از  $Q$  ادامه می‌دهیم. واضح است که مسیر سوئیچ کننده در  $R$  سوئیچ قبلی خود را در نیمه‌ی پایینی دایره به مرکز  $(0, 5)$  و شعاع ۱ خواهد بود و الی آخر.

بنابراین منحنی سوئیچ کننده  $\Gamma$  شامل رشته‌ای از نیم‌دایره‌هاست هر یک به شعاع ۱. همان‌گونه که در شکل (۸.۳) نشان داده شده است. شکل (۹.۳) منحنی سوئیچ کننده و بعضی از مسیرهای نمونه را نشان می‌دهد. دیده می‌شود که بهینه‌ی ترکیبی عبارتست از:

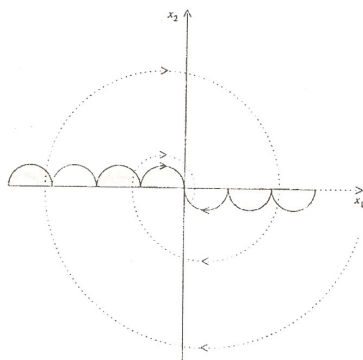
$$u^* = \begin{cases} -1 & \text{بالای } \Gamma \text{ یا روی } \varphi_1^- \\ +1 & \text{زیر } \Gamma \text{ یا روی } \varphi_1^+ \end{cases} \quad (۳۶.۳)$$



شکل ۷.۳: محاسبه‌ی مکان هندسی  $R$



شکل ۸.۳: منحنی‌های سوئیچ کننده، رشته‌ای از طوقه‌های نیم‌دایره هستند



شکل ۹.۳: منحنی سوئیچ کننده و مسیرهای نمونه

## ۲.۳ مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی کلاسیک نوع دوم

[۲۱] در بخش قبل مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی کلاسیک نوع اول را مورد بررسی قرار دادیم. ملاحظه کردیم که در این نوع مسائل، هدف حرکت کردن از یک نقطه (نقطه‌ی آغازین) و رسیدن به نقطه‌ی دیگر با حداقل زمان ممکن است. حال می‌خواهیم در این بخش مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی نوع دوم را معرفی کنیم. در این مسئله از یک مجموعه‌ی آغازین مانند  $M$  شروع می‌کنیم و با یک کنترل قابل قبول می‌خواهیم به یک مجموعه‌ی پایانی مانند  $M_1$  برسیم.

به عنوان مثال: در مسابقه دو و میدانی خط شروع را  $M$  و خط پایان را  $M_1$  در نظر می‌گیریم که گروهی از دوندگان در نقاط مختلف این خط قرار دارند و می‌خواهند با کمترین زمان ممکن خود را به خط پایانی برسانند.

معرفی مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی نوع دوم:

فرض کنیم  $M$  و  $M_1$  مجموعه‌های فشرده و غیر تهی از  $\mathbb{R}^n$ ، و  $u$  یک تابع کنترل قابل قبول روی بازه‌ی  $I = [t_0, t_1]$  باشد. اگر سیستم (۱.۳) که در بخش اول توصیف شد دارای جواب  $x(t)$  باشد به گونه‌ای که  $x(t_0) \in M$  و  $x(t_1) \in M_1$ ، در این صورت گفته می‌شود که کنترل  $u$  شی را از حالت آغازین روی مجموعه‌ی  $M$  به حالت نهایی روی مجموعه‌ی  $M_1$  بر روی بازه‌ی  $I = [t_0, t_1]$  انتقال می‌دهد.

اگر بخواهیم شی را از  $M$  به  $M_1$  در کوتاهترین زمان انتقال دهیم مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی



نوع دوم را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\min_u \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \quad (۳۷.۳)$$

$$\text{S.t. } x' = Ax + u \quad (۳۸.۳)$$

$$x(t_0) \in M_0 \quad (۳۹.۳)$$

$$x(t_1) \in M_1 \quad (۴۰.۳)$$

که در آن  $M_0$  و  $M_1$  به عنوان مجموعه‌های آغازین و پایان داده شده‌اند. جواب  $u(t)$  که از مسئله‌ی (۴۰.۳) - (۳۷.۳) به دست می‌آید را کنترل قابل قبول می‌نامند و جواب  $x(t)$  که از سیستم (۴۰.۳) - (۳۸.۳) به دست می‌آید را مسیر بهینه می‌نامند.

اگر  $u(t)$  کنترل بهینه و  $x(t)$  مسیر بهینه باشد به این ترتیب به زوج  $(u(t), x(t))$  یک زوج بهینه قابل قبول گفته می‌شود. مسئله‌ی کلاسیک نوع دوم را می‌توانیم به صورت زیر فرمول نویسی کنیم:

$$\min_{u, p \in M_0, q \in M_1} \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \quad (۴۱.۳)$$

$$\text{S.t. } x' = Ax + u \quad (۴۲.۳)$$

$$x(t_0) = p \quad (۴۳.۳)$$

$$x(t_1) = q \quad (۴۴.۳)$$

مسئله‌ی کنترل زمان بهینه کلاسیک نوع دوم (۴۰.۳) - (۳۷.۳) یا ((۴۴.۳) - (۴۱.۳)) به خوبی در [۲۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. حال شرایط لازم را برای بهینه سازی مسئله ارائه می‌دهیم [۲۱].

**تعریف ۱.۲.۳** (اصل ماکزیمم). فرض کنید  $u$  یک کنترل قابل قبول روی بازه‌ی  $I = [t_0, t_1]$  باشد و  $x$  جواب مسئله‌ی (۴۰.۳) - (۳۸.۳) باشد. گوییم زوج  $(u(t), x(t))$  در اصل ماکزیمم روی  $[t_0, t_1]$  صدق می‌کند اگر سیستم مزدوج زیر دارای جواب غیر بدیهی  $\psi$  باشد.

$$\psi' = -A^* \psi$$

که در آن  $A^*$  ترانزاده ماتریس  $A$  می‌باشد و  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  در شرایط زیر صدق کند:

(۱) شرط ماکزیمم:

$$\langle u(t), \psi(t) \rangle = c(U, \psi(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (۴۵.۳)$$

(۲) شرط تراگردی روی  $M_0$ :

$$\langle x(t), \psi(t) \rangle = c(M_0, \psi(t_0)) \quad (۴۶.۳)$$

(۳) شرط تراگردی روی  $M_1$ :

$$\langle x(t_1) - \psi(t_1) \rangle = c(M_1, -\psi(t_1)) \quad (۴۷.۳)$$

در این جا  $\langle u, \psi \rangle = u_1\psi_1 + u_2\psi_2 + \dots + u_n\psi_n$  حاصل ضرب داخلی بردارهای  $u$  و  $\psi$  را از  $\mathbb{R}^n$  نشان می‌دهد و  $c(S, \psi) = \max_{s \in S} \langle s, \psi \rangle$  نشان دهنده‌ی تابع حمایتی مجموعه‌ی فشرده‌ی  $S$  از  $\mathbb{R}^n$  می‌باشد.

**قضیه ۲.۲.۳** (شرایط لازم برای بهینه سازی مسئله‌ی کنترل زمان بهینه). فرض کنید  $M_0$  و  $M_1$  مجموعه‌های غیر تهی، محدب و فشرده باشند و  $u(t)$  یک تابع کنترل قابل قبول روی بازه‌ی  $[t_0, t_1]$  و  $x(t)$  یک مسیر بهینه برای مسئله‌ی (۴۰.۳) - (۳۷.۳) باشد. در این صورت زوج  $(x(t), u(t))$  اصل ماکزیمم را روی بازه‌ی  $[t_0, t_1]$  برقرار می‌سازد.

**مثال ۳.۲.۳**. می‌خواهیم موشکی را از زمین به سمت ایستگاه فضایی پرتاب کنیم. در این حالت موشک را به عنوان یک جسم در حال حرکت که از روابط حرکتی زیر پیروی می‌کند، فرض می‌کنیم

$$x'' = f(t)$$

$x$ : مقدار انحراف موشک

$x''$ : شتاب موشک

$f(t)$ : نیروی وارد شده به موشک در لحظه‌ی  $t$

فرض بر این است که نیروی  $f(t)$  در زمانی که به موشک وارد می‌شود، تغییر کند، به شرطی که  $|f(t)| \leq 1$  برقرار باشد. در لحظه‌ی آغاز، موشک در زمان  $t_0 = 0$  در مکان  $x(0) = \frac{5}{4}$  قرار دارد. هم‌زمان سرعت اولیه‌ی موشک در محدوده‌ی  $|x'(t)| \leq 1$  می‌باشد. در این لحظه لازم است که موشک از محل اولیه به  $2 \leq x(t_1) \leq 1$  پرتاب شود و سرعت برابر  $x'(t_1) = 0$  باشد. هنگامی که سرعت به صفر برسد، زمان رسیدن به ایستگاه فضایی است.

این نزدیک شدن می‌تواند در هر موقعیتی از  $1 \leq x \leq 2$  و در هر زمانی انجام پذیرد.

مسئله‌ی بالا را می‌توانیم به شکل جدیدی به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$x_1 = x \quad (۴۸.۳)$$

$$x_2 = x' \quad (۴۹.۳)$$

$$u_1 = 0 \quad (۵۰.۳)$$

$$u_2 = f \quad (۵۱.۳)$$

چنین مسئله‌ای در واقع تبدیل به فضای حالت دو بعدی  $X = (x_1, x_2)$  می‌باشد که معادله‌ی حرکتی آن را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = u_2 \end{cases} \quad (۵۲.۳)$$

که در آن  $U = (u_1, u_2)$  را بردار کنترل می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 = 0, |u_2| \leq 1\} \quad (۵۳.۳)$$

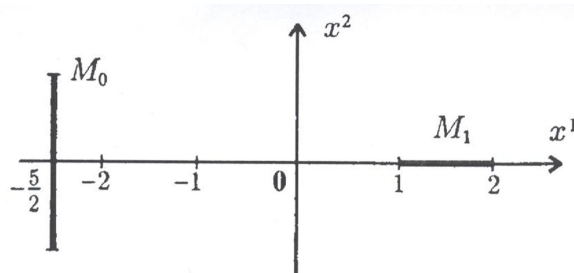
حرکت موشک ابتدا از مجموعه‌ی  $M_0$  که به صورت زیر تعریف شده، آغاز می‌شود

$$M_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \frac{-5}{2}, |x_2| \leq 1\} \quad (۵۴.۳)$$

و در نهایت به مجموعه‌ی  $M_1$  که به صورت زیر تعریف شده، خاتمه می‌یابد.

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, x_2 = 0\} \quad (۵۵.۳)$$

مجموعه‌های  $M_0$  و  $M_1$  در شکل (۱۰.۳) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۰.۳: مجموعه‌های  $M_0$  و  $M_1$

می‌خواهیم با استفاده از اصل ماکزیمم یک قاعده‌ی کلی برای حرکت پیدا کنیم.

ماتریس  $A$  برای معادلات (۵۲.۳) به صورت

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

می‌باشد. بنابراین

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

است و معادلات سیستم مزدوج دستگاه به صورت زیر می‌باشد:

$$\psi' = -A^*\psi \Rightarrow \begin{cases} \psi_1' = 0 \\ \psi_2' = -\psi_1 \end{cases}$$

حال با استفاده از تعریف اصل ماکزیمم برای مجموعه‌های  $U$ ،  $M_0$  و  $M_1$  داریم

$$c(U, \psi) = |\psi_2|, c(M_0, \psi) = \frac{-5}{4}\psi_1 + |\psi_2|, c(M_1, \psi) = \frac{3}{4}\psi_1 + \frac{1}{4}|\psi_1| \quad (56.3)$$

با توجه به شرط ماکزیمم از تعریف داریم:

$$u_2(t)\psi_2(t) = |\psi_2(t)| \quad (57.3)$$

که این نشان‌دهنده‌ی این است که علامت  $u_2$  بستگی به علامت  $\psi_2$  دارد. بنابراین

$$\begin{cases} u_2(t) = 1 & \text{if } \psi_2(t) > 0 \\ u_2(t) = -1 & \text{if } \psi_2(t) < 0 \\ -1 < u_2(t) < 1 & \text{if } \psi_2(t) = 0 \end{cases} \quad (58.3)$$

و هم‌چنین با استفاده از اصل تراگردی روی مجموعه‌ی  $M_0$  داریم:

$$\frac{-5}{4}\psi_1(0) + x_2(0)\psi_2(0) = \frac{-5}{4}\psi_1(0) + |\psi_2(0)| \quad (59.3)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود علامت  $x_2(t_0)$  بستگی به علامت  $\psi_2(0)$  دارد.

$$\begin{cases} x_2(t_0) = 1 & \text{if } \psi_2(0) > 0 \\ x_2(t_0) = -1 & \text{if } \psi_2(0) < 0 \\ -1 < x_2(t_0) < 1 & \text{if } \psi_2(0) = 0 \end{cases} \quad (60.3)$$

و هم‌چنین از اصل تراگردی روی  $M_1$  داریم:

$$x_1(t_1)(-\psi_1(t_1)) = \frac{-3}{4}\psi_1(t_1) + \frac{1}{4}|\psi_1(t_1)| \quad (61.3)$$

که این نشان‌دهنده‌ی آن است که  $x_1(t_1)$  بستگی به علامت  $\psi_1(t_1)$  دارد.

$$\begin{cases} x_1(t_1) = 1 & \text{if } \psi_1(t_1) > 0 \\ x_1(t_1) = 2 & \text{if } \psi_1(t_1) < 0 \\ 1 < x_1(t_1) < 2 & \text{if } \psi_1(t_1) = 0 \end{cases} \quad (62.3)$$

حال فرض کنیم سیستم مزدوج دارای جواب اولیه‌ی

$$\psi(0) = (\psi_1(0), \psi_2(0)) \in S \quad (63.3)$$

باشد. بنابراین داریم:

$$\psi_1(t) = \psi_1(0) \quad \text{و} \quad \psi_2(t) = -\psi_1(0)t + \psi_2(0) \quad (64.3)$$

همان‌طور که ذکر کردیم طبق شرط ماکزیمم از تعریف اصل ماکزیمم علامت  $u_2(t)$  بستگی به علامت  $\psi_2(t)$  دارد. حال اگر  $\theta$  را زمانی در نظر بگیریم که در آن  $\psi_2(t)$  به سمت صفر میل می‌کند در این حالت تابع زمان از  $u_2(\theta)$  پیروی نمی‌کند زیرا در حالتی که  $\psi_2(\theta)$  به سمت صفر میل کند آن‌گاه داریم  $-1 < u_2(\theta) < 1$ . تابع  $\psi_2(t)$  خطی و وابسته به زمان  $t$  است و در این حالت هیچ‌گاه نمی‌تواند صفر باشد.

بنابراین با توجه به اصل ماکزیمم و با توجه به  $u, u_2(t)$  دو مقدار  $+1$  و  $-1$  می‌تواند داشته باشد. علاوه بر این تنها یک بار می‌تواند سوئیچ بخورد که آن هم در زمان  $\theta$  می‌باشد وقتی که  $\psi_2(\theta) = 0$  اکنون حالت‌های ذکر شده برای  $u_2$  را بررسی می‌کنیم.

ابتدا حالتی که  $u_2(t) = +1$  است، در این صورت معادلات فضای حالت (۵۲.۳) به صورت

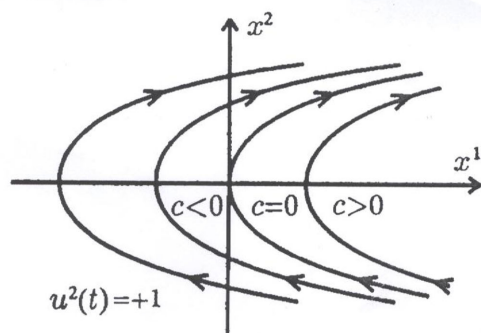
زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases} \quad (65.3)$$

که با انتگرال‌گیری از معادله‌ی اول به دست می‌آوریم  $x_1 = \frac{1}{2}(x_2^2) + c$ ، که مقدار  $c$  را ثابت انتگرال‌گیری می‌نامیم. در شکل (۱۱.۳) روند کار نشان داده شده است.

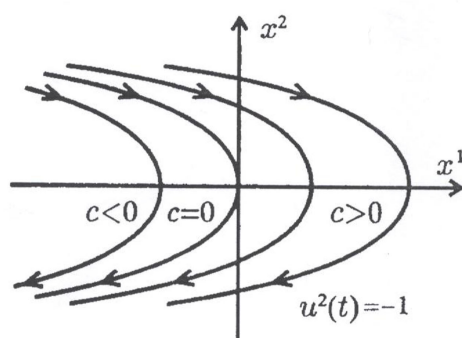
این شکل سهمی‌هایی را به نمایش می‌گذارد که جهت و امتداد حرکت به وسیله‌ی پیکان‌ها

مشخص شده‌اند.



شکل ۱۱.۳: مسیرهای بهینه متناظر با  $u^2 = +1$

به‌طور مشابه برای حالت  $u^2(t) = -1$  نیز روند مورد اشاره موجب در اختیار گذاشتن معادله‌ی  $x_1 = \frac{-1}{\gamma}(x_2^2) + c$  می‌باشد که در شکل (۱۲.۳) نشان داده شده و خانواده‌ای از سهمی‌ها می‌باشد.



شکل ۱۲.۳: مسیرهای بهینه متناظر با  $u^2 = -1$

حال می‌توان نمودار شکل (۱۳.۳) را ایجاد کرده و تمام معادلات و مسیرهای حل را بر اساس ایجاد معادلات اصل ماکزیمم به دست آوریم. برای اثبات و رسیدن به این منظور به معادله‌ی خطی زیر نیاز داریم:

$$\psi_2(t) = -\psi_1(0)t + \psi_2(0) \quad (۶۶.۳)$$

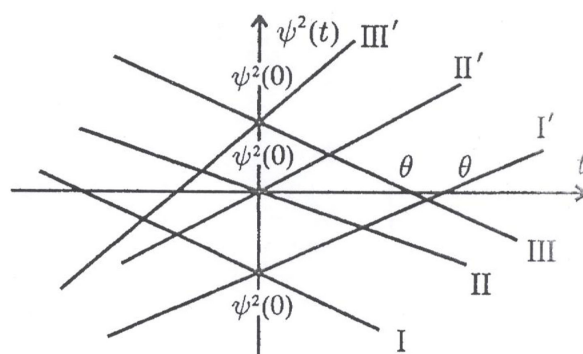
بر این اساس برای هر عضو  $(\psi_1(0), \psi_2(0)) \in S$  سه حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم. حالت اول: اگر  $\psi_2(0) < 0$  باشد، آن‌گاه از شرایط مجموعه‌ی  $M$  استفاده کرده و از نقطه‌ی  $x(0) \in (\frac{-5}{\gamma}, -1)$  عبور می‌کند. تابع  $\psi_2(t)$  در این حالت می‌تواند به عنوان یک حالت باز دارنده

عمل کند. در این حالت اگر  $\psi_1(0) > 0$  باشد خط  $(I)$  در شکل (۱۳.۳) را ایجاد می‌کند. و اگر  $\psi_1(0) < 0$  باشد خط  $(I')$  در شکل (۱۳.۳) را ایجاد می‌کند که در این صورت داریم  $u_2(t) = -1$ . بنابراین در هر حالتی از مسیر  $x(t)$  از نقطه‌ی  $x(0) = (-\frac{5}{4}, -1)$  خارج می‌شود که در این حالت هیچ‌گاه به مجموعه‌ی  $M_1$  نمی‌رسد به نتیجه‌ی رسیدن و خط مسیر نشان داده شده در شکل (۱۴.۳) که با  $I$  و  $I'$  مشخص شده‌اند توجه کنید.

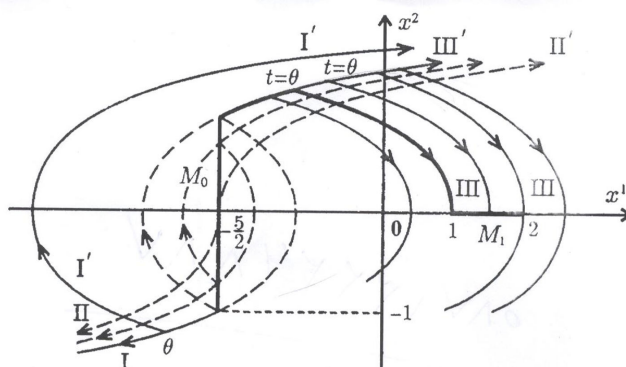
حالت دوم: اگر  $\psi_2(0) = 0$  باشد، آن‌گاه از اصل تراگردی روی  $M$  پیروی می‌کند که نقطه‌ی آغاز  $x(0)$  می‌تواند تغییر کند و به صورت اختیاری مقداری از مجموعه‌ی  $M$  را انتخاب کند. در این حالت  $\psi_1(0) \neq 0$ . از آنجایی که  $\psi(0) \in S$  و با توجه به مقدار  $\psi_2(t)$  اگر  $t > 0$  و  $\psi_1(0) > 0$  خط  $II$  در شکل (۱۳.۳) و اگر  $t > 0$  و  $\psi_1(0) < 0$  خط  $II'$  در شکل (۱۳.۳).

در این صورت طبق شرط ماکزیمم،  $u_2(t)$  را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم: برای  $t > 0$  اگر  $\psi_1(0) > 0$  باشد، آن‌گاه  $u_2(t) = -1$  و اگر  $\psi_1(0) < 0$  باشد، آن‌گاه  $u_2(t) = +1$  خواهد بود. همان‌طور که در شکل (۱۴.۳) ملاحظه می‌کنید مسیرهای مربوط به  $II$  و  $II'$  هیچ‌کدام به مجموعه‌ی  $M_1$  نمی‌رسند.

حالت سوم: اگر  $\psi_2(0) > 0$  باشد، آن‌گاه روی مجموعه‌ی  $M$  داریم،  $x(0) = (-\frac{5}{4}, +1)$ . در این صورت برای  $\psi_1(0) < 0$  خط  $III'$  در شکل (۱۳.۳) و برای  $\psi_1(0) > 0$  خط  $III$  در شکل (۱۳.۳) را داریم.



شکل ۱۳.۳:



شکل ۱۴.۳: مسیر حرکت موشک از مجموعه‌ی  $M_0$  به مجموعه‌ی  $M_1$

اگر  $u_2(t) = +1$  باشد، آن‌گاه مسیر  $x(t)$  که از نقطه‌ی آغاز  $x(0) = (\frac{-5}{4}, +1)$  آغاز شده هیچ‌گاه مجموعه‌ی  $M_1$  را قطع نمی‌کند. چنین مسیرهایی در شکل (۱۴.۳) به صورت  $III'$  نشان داده شده است.

اگر معادله‌ی  $u_2(t)$  در ابتدا برابر  $+1$  و سپس  $-1$  باشد، در برخی از زمان‌های  $\theta$ ، مسیرها هم‌دیگر را قطع می‌کنند و به مجموعه‌ی  $M_1$  می‌رسند (در شکل (۱۳.۳)). از شکل (۱۴.۳) ملاحظه می‌شود که چنین مسیرهایی در نقاط بسیاری توسط خط مسیر مجموعه‌ی  $M_1$  به هم می‌رسند که همان‌طور که ملاحظه می‌شود یک شکل جدید به وجود می‌آید.

حال به بررسی شرایط مجموعه‌ی  $M_1$  در (۶۲.۳) می‌پردازیم:

از آن‌جایی که برای تمام مسیره‌ی داده شده، حالت  $\psi_1(0) > 0$  بیانگر آن است که از رابطه‌ی (۶۲.۳) پیروی می‌کند، نقاط پایانی مسیره‌ی  $x(t)$  از شرایط  $x_1(t_1) = 1$  مشخص می‌شود. در شکل (۱۴.۳) ملاحظه می‌شود که تمام معادلات پایانی و موقعیت آن‌ها یک خط راست است. خط منحصر به فرد را پیدا می‌کنیم و با استفاده از آن اصل ماکزیمم را ایجاد می‌کنیم.

نقطه‌ی  $x(0)$  سهمی نوع  $I$  را در نقطه‌ی  $(\frac{-5}{4}, +1)$  قطع می‌کند و محل تقاطع آن با سهمی نوع  $II$  در نقطه‌ی  $(1, 0)$  می‌باشد که با استفاده از این نقاط می‌توانیم سهمی‌های نوع  $I$  و  $II$  را بیابیم. سهمی نوع  $I$  به صورت  $x_1 = \frac{1}{4}(x_2)^2 - 3$  و سهمی نوع  $II$  به صورت  $x_1 = \frac{1}{4}(x_2)^2 + 1$  می‌باشد. محل تقاطع آن‌ها در نقطه‌ی  $x(\theta) = (-1, 2)$  می‌باشد. نقطه‌ی شروع حرکت از

$x(0) = (\frac{-5}{4}, +1)$  و با معادله‌ی  $u_2(t) = +1$  می‌باشد. از معادله‌ی (۶۵.۳) خط مسیر و

مسیر  $x(t)$  که از  $x(0) = (\frac{-5}{4}, +1)$  آغاز می‌شود را پیدا می‌کنیم، که دارای جواب زیر می‌باشد:

$$x_1(t) = \frac{1}{4}(t-1)^2 - 3 \quad \text{و} \quad x_2(t) = t + 1 \quad (۶۷.۳)$$



در امتداد چنین مسیر و خط مسیری در لحظه‌ی  $\theta$  نقاط آن‌چنان که در تصویر نشان داده شده است مسیر  $x(t)$  در نقطه‌ی  $(-1, 2)$  همدیگر را قطع کرده که از آن  $1 + \theta = 2$  سبب به وجود آمدن  $\theta = 1$  می‌شود. متعاقب آن خطی را در نظر می‌گیریم که از معادله‌ی (۶۲.۳) همراه با  $u_2(t) = -1$  و از شرط  $x(0) = (-1, 2)$  پیروی می‌کند. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید معادله‌ی (۶۵.۳) دارای دو جواب

$$x_1(t) = \frac{-(t-3)^2}{2} + 1 \quad \text{و} \quad x_2 = -(t-3) \quad (۶۸.۳)$$

می‌باشد. زمان وقوع  $t$  به صورت برخورد خط مسیر در نقطه‌ی انتهایی  $(1, 0)$  می‌باشد که به دست می‌آوریم  $t_1 = 3$ . بنابراین توانستیم معادله‌ی منحصر به فرد  $u(t)$  را بر اساس روش اصل ماکزیمم به دست آوریم و جهت انتقال موشک را از مجموعه‌ی  $M$  به مجموعه‌ی  $M_1$  روی بازه‌ی  $I = [0, 3]$  به دست آوریم.

### ۳.۳ مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی خطی فازی

اگر مقادیر آغازین و پایانی مسئله‌ی کلاسیک نوع اول و دوم که در بخش‌های قبلی مورد توجه قرار گرفت، فازی باشند، مسئله‌ی کنترل زمان بهینه را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\min_u \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \quad (۶۹.۳)$$

$$\text{S.t.} \quad x' = Ax + u \quad (۷۰.۳)$$

$$x(t_0) = \tilde{\varepsilon} \quad (۷۱.۳)$$

$$x(t_1) = \tilde{\xi} \quad (۷۲.۳)$$

که در آن  $\tilde{\varepsilon}$  و  $\tilde{\xi}$  به عنوان مجموعه‌های ورودی و خروجی فازی داده می‌شوند.

بر اساس تعاریف مختلف برای تابع فازی می‌توان مسئله‌ی (۷۲.۳)-(۶۹.۳) را از راه‌های متفاوتی تفسیر کرد. مسئله‌ی (۷۲.۳)-(۶۹.۳) را می‌توانیم به عنوان یک سری از مسائل کلاسیک نوع اول (۷.۳)-(۴.۳) تفسیر کنیم. در این صورت مقدار آغازین  $p$  از  $\varepsilon$  و مقدار پایانی  $q$  از  $\xi$  به دست می‌آید، که در آن جواب مسئله‌ی (۷.۳)-(۴.۳) به صورت  $t_1 pq, t_0 pq$  و  $x pq$  می‌باشد.

اگر  $\alpha = \min\{\mu_\varepsilon(p), \mu_\xi(q)\}$  باشد که در آن  $\mu_\varepsilon(p)$  نشان دهنده‌ی عضویت  $p$  در  $\varepsilon$  می‌باشد.

نشان خواهیم داد که  $(t_1 pq, upq, xpq)$  جواب مسئله‌ی (۷۲.۳) - (۶۹.۳) با درجه‌ی عضویت  $\alpha$  می‌باشد.

را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.  $t_1 pq$  که در بالا تعریف گردید یک عدد فازی  $\tilde{t}_1$  را مشخص می‌کند. چگونگی محاسبه‌ی  $\tilde{t}_1$

توابع  $\overline{t_1(\alpha)}$  و  $\underline{t_1(\alpha)}$  که حدود راست و چپ محدوده‌ی  $\alpha$ -برش را معین می‌کنند، عدد  $\tilde{t}_1$  را به طور کامل مشخص می‌کنند. بنابراین مسئله‌ی محاسبه‌ی زمان بهینه‌ی فازی به محاسبه‌ی ارقام  $\overline{t_1(\alpha)}$  و  $\underline{t_1(\alpha)}$  کاهش می‌یابد.

همان‌طور که می‌دانیم مقادیر آغازین و نهایی جواب بهینه‌ی  $x(t)$  برای مسئله‌ی (۴۰.۳) - (۳۷.۳) بر روی محدوده‌های  $M_0$  و  $M_1$  به دست می‌آیند [۲۱]. بنابراین مقدار  $t_1(\alpha)$  را می‌توان با حل کردن مسئله‌ی (۴۰.۳) - (۳۷.۳) با قرار دادن  $M_0 = \varepsilon_\alpha$  و  $M_1 = \xi_\alpha$  به دست آورد.

$\varepsilon_\alpha$  و  $\xi_\alpha$  نشان دهنده‌ی  $\alpha$ -برش‌هایی از  $\varepsilon$  و  $\xi$  می‌باشند.  
حال مسئله را این‌گونه بیان می‌کنیم:

$$\min_u \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \quad (۷۳.۳)$$

$$\text{S.t. } x' = Ax + u \quad (۷۴.۳)$$

$$x(t_0) \in \varepsilon_\alpha \quad (۷۵.۳)$$

$$x(t_1) \in \xi_\alpha \quad (۷۶.۳)$$

مسئله‌ی (۷۶.۳) - (۷۳.۳) یک مسئله‌ی کلاسیک نوع دوم می‌باشد.  
با محاسبه کردن (۴۱.۳) می‌توان دید که:

$$\underline{t_1(\alpha)} = \min_{p \in \varepsilon_\alpha, q \in \xi_\alpha} t_1 pq \quad (۷۷.۳)$$

توجه داشته باشید که مقدار  $\underline{t_1(\alpha)}$  یعنی کوتاهترین زمان ممکن بین دو نقطه در بهترین حالت که یکی از آن‌ها از  $\varepsilon_\alpha$  و دیگری از  $\xi_\alpha$  می‌باشد. متشابهاً  $\overline{t_1(\alpha)}$  به معنای کوتاهترین زمان ممکن در بدترین حالت هاست:

$$\overline{t_1(\alpha)} = \max_{p \in \varepsilon_\alpha, q \in \xi_\alpha} t_1 pq \quad (۷۸.۳)$$

محاسبه‌ی  $\overline{t_1(\alpha)}$  را می‌توان مشابه محاسبه‌ی  $\underline{t_1(\alpha)}$  انجام داد.  
در بخش بعد با یک مثال چگونگی محاسبه‌ی  $\underline{t_1(\alpha)}$  را بیان می‌کنیم.

### ۴.۳ روش محاسبه‌ی زمان بهینه‌ی فازی با مثال

[۱۹] در این بخش روش‌های پیشنهاد شده را بر روی یک مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی فازی اجرا می‌کنیم. این مسئله یکی از حالت‌های فازی شده مسئله‌ی ریاضی قطعی آونگ آویخته می‌باشد.

**مثال ۱۰.۴.۳.** مسئله‌ی کنترل زمان بهینه زیر را با شرایط مرزی فازی داده شده در نظر می‌گیریم. (توجه کنید که  $t_0 = 0$ )

$$\min \int_0^{t_1} dt = t_1 \quad (۷۹.۳)$$

$$\text{S.t.} \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + u_2 \end{cases} \quad (۸۰.۳)$$

$$U = \{u = (u_1, u_2) | u_1 = 0, |u_2| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (۸۱.۳)$$

$$x_1(0) = \varepsilon_1 = (-6, -5, -4) \quad ; \quad x_2(0) = \varepsilon_2 = (2, 3, 4) \quad (۸۲.۳)$$

$$x_1(t_1) = \xi_1 = (-0.5, 0, 0.5) \quad ; \quad x_2(t_1) = \xi_2 = (-0.5, 0, 0.5) \quad (۸۳.۳)$$

در این جا  $\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  و  $\xi_1$  و  $\xi_2$  اعداد فازی مثلثی می‌باشند. با تبدیل این مسئله به مسئله‌ی کنترل زمان بهینه‌ی قطعی آن را حل می‌کنیم.

حل:

با استفاده از داده‌های بالا در می‌یابیم که

$$\varepsilon_\alpha = \{(x_1, x_2) | \alpha - 6 \leq x_1 \leq -4 - \alpha, \alpha + 2 \leq x_2 \leq 4 - \alpha\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (۸۴.۳)$$

$$\xi_\alpha = \{(x_1, x_2) | \alpha - 1 \leq x_1 \leq 1 - \alpha, \alpha - 1 \leq x_2 \leq 1 - \alpha\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (۸۵.۳)$$

زیرا همان‌طور که گفتیم  $\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  و  $\xi_1$  و  $\xi_2$  اعداد فازی مثلثی می‌باشند پس برای به دست آوردن محدوده‌های  $x_1$  و  $x_2$  به صورت زیر عمل می‌کنیم.

ابتدا محدوده‌های  $\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  را به صورت زیر روی شکل نمایش می‌دهیم (در اعداد فازی مثلثی

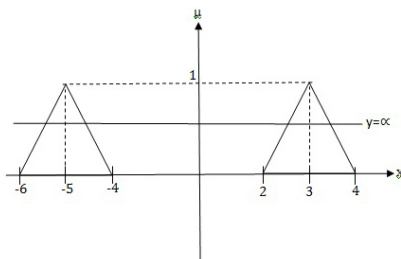
عنصر وسط تابع عضویت ۱ دارد)

خط  $y = \alpha$  نشان دهنده‌ی  $\alpha$ -برش می‌باشد.

با استفاده از معادله‌ی خط می‌توانیم حدود  $x$  را به دست آوریم

$$A = (2, 0), B = (3, 1)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



شکل ۱۵.۳:

$$y - 1 = m(x - 3)$$

$$y - 1 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 2 \xrightarrow{y=\alpha} \alpha = x - 2 \Rightarrow x = \alpha + 2$$

و برای طرف دیگر  $x$  نیز به همین روش می‌توانیم به دست آوریم.

حال به ادامه‌ی حل مثال می‌پردازیم:

ماتریس سیستم برابر است با

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

که  $A = -A^*$  (ترانهاده‌ی ماتریس  $A$  می‌باشد) دارای مقادیر ویژه‌ی موهومی محض می‌باشد.

سیستم مزدوج به صورت:

$$\psi' = -A^* \psi$$

$$\begin{bmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1' = \psi_2 \\ \psi_2' = -\psi_1 \end{cases}$$

و تابع حمایتی  $u$  به صورت  $c(u, \psi) = |\psi_2|$  می‌باشد طبق شرط ماکزیمم از تعریف ۱.۲.۳ داریم:

$$\langle u(t), \psi(t) \rangle = c(u, \psi(t)) \quad (۸۶.۳)$$

داریم  $|\psi_2(t)|\psi_2(t) = u_2(t)\psi_2(t)$ . بنابراین همان‌طور که ملاحظه می‌شود علامت  $u_2$  بستگی به علامت

$\psi_2$  دارد پس:

$$\begin{cases} u_2(t) = 1 & \text{if } \psi_2(t) > 0 \\ u_2(t) = -1 & \text{if } \psi_2(t) < 0 \\ -1 < u_2(t) < 1 & \text{if } \psi_2(t) = 0 \end{cases} \quad (۸۷.۳)$$

می‌خواهیم جواب سیستم مزدوج را بر اساس یک شرط آغازین  $\psi(0) \in C$  پیدا کنیم جایی که  $C$  یک دایره‌ی واحد است. نقطه‌ی آغازین به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\psi_1' = \psi_2 \Rightarrow \psi_1'' = \psi_2' \quad (88.3)$$

$$\psi_2' = -\psi_1 \stackrel{(88.3) \text{ را جایگذاری می‌کنیم}}{\Rightarrow} \psi_1'' = -\psi_1 \Rightarrow \psi_1 = \cos \alpha, \psi_2 = \sin \alpha \quad (89.3)$$

بنابراین نقطه‌ی آغازین به صورت  $\psi_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  با  $\alpha \in [0, 2\pi]$  خواهد بود. پس جواب سیستم مزدوج به صورت  $\psi_1(t) = \cos(\alpha - t)$  و  $\psi_2(t) = \sin(\alpha - t)$  می‌باشد. تابع  $\psi_2(t) = \sin(\alpha - t)$  برای اولین بار در  $T \leq \pi$ ، سپس بعد از هر دو دوره زمانی  $\pi$  تغییر علامت می‌دهد.

با توجه به  $\alpha$ ، علامت  $\psi_2 = \sin(\alpha - t)$  روی بازه‌ی  $[0, T]$  می‌تواند هم مثبت باشد و هم منفی. بنابراین بر طبق شرایط ماکزیمم، کنترل بهینه  $u(t)$  می‌تواند ۱ یا -۱ باشد. بعد از  $T \leq \pi$  و هم‌چنین بعد از هر دوره متناوب  $\pi$  به طور مکرر از ۱ به -۱ تبدیل می‌شود. در زیر رفتار شی را به عنوان یک حرکت در صفحه‌ی  $x_1 x_2$  توضیح می‌دهیم.

جواب سیستم دینامیک برای  $u(t) = 1$  به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1' = x_2 \Rightarrow x_1'' = x_2' \quad (90.3)$$

$$x_2' = -x_1 + 1 \stackrel{(90.3) \text{ را جایگذاری می‌کنیم}}{\Rightarrow} x_1'' = -x_1 + 1 \Rightarrow x_1 = 1 + c \cos(\alpha - t), x_2 = c \sin(\alpha - t) \quad (91.3)$$

بنابراین  $x(t) = (1 + c \cos(\alpha - t), c \sin(\alpha - t))$  می‌باشد که در صفحه‌ی  $\mathbb{R}^2$  به صورت دایره‌های هم مرکز با مرکز  $L(1, 0)$  (شکل (۱۶.۳)) می‌باشد که حرکت روی این دایره‌ها موافق حرکت عقربه‌های ساعت با سرعت ثابت است و هر دور  $2\pi$  طول می‌کشد.

به طور مشابه جواب سیستم دینامیک (۸۰.۳) برای  $u_2(t) = -1$  نیز به صورت زیر می‌باشد

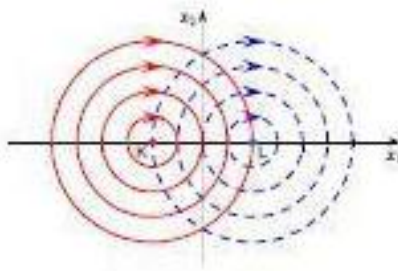
$$x(t) = (-1 + c \cos(\alpha - t), c \sin(\alpha - t)) \quad (92.3)$$

که در  $\mathbb{R}^2$  به صورت دایره‌های هم مرکز با مرکز  $K(-1, 0)$  (شکل (۱۶.۳)) است.

حرکت این دایره‌ها موافق حرکت عقربه‌های ساعت و با سرعت ثابت می‌باشد و هر دور  $2\pi$  واحد زمانی طول می‌کشد.

شکل شماره (۱۶.۳): یک مسیر بهینه را می‌توان به وسیله‌ی ترکیب حرکت‌ها بر روی دایره‌های

با مرکزهای  $L$  و  $K$  در جهت حرکت عقربه‌های ساعت مشخص کرد.

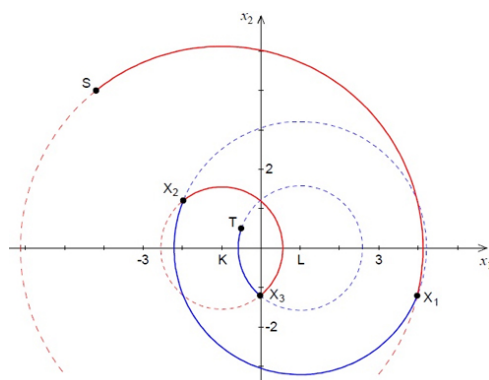


شکل ۱۶.۳: مسیرهای بهینه متناظر با  $u^* = -1$  و  $u^* = +1$

توجه داشته باشید که سرعت زاویه‌ای  $w = 1$  برای هر دو حرکتی است که در بالا در نظر گرفته شد. بنابراین زاویه‌ی تشکیل شده توسط شی در طول حرکت و زمان طی شده با هم برابر هستند. در این جا دو تذکر را تاکید می‌کنیم که در موارد زیر استفاده خواهند گردید:

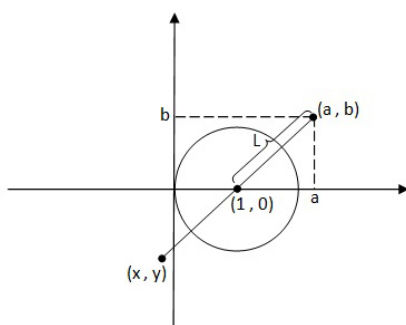
**تذکر ۲.۴.۳.** در حرکت دورانی با  $w = 1$  بعد از هر دوره زمانی  $\pi$  در موقعیت متقارن با مرکز، نسبت به موقعیت قبلی خود قرار خواهند گرفت.

**تذکر ۳.۴.۳.** اگر مرکز دایره  $K(-1, 0)$  باشد، آن گاه تقارن نقطه‌ی  $(c, d)$  نسبت به این مرکز به صورت  $(-c - 2, -d)$  می‌باشد و اگر مرکز دایره  $L(1, 0)$  باشد، آن گاه تقارن نقطه‌ی  $(a, b)$  نسبت به این مرکز به صورت  $(-a + 2, -b)$  می‌باشد.



شکل ۱۷.۳: نمونه‌ای از مسیر بهینه با سه تغییر

فرض کنیم در دایره‌ای به مرکز  $L(1, 0)$  نقطه‌ای مانند  $(a, b)$  داشته باشیم



شکل ۱۸.۳:

$$L = \sqrt{(a-1)^2 + b^2}$$

از طرفی فاصله‌ی مرکز دایره تا تقارن نقطه‌ی  $(a, b)$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$L = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \stackrel{(1,0)}{\implies} L = \sqrt{(1-x)^2 + (-y)^2}$$

می‌دانیم فاصله‌ی مرکز تا نقطه‌ی  $(a, b)$  و فاصله‌ی مرکز تا تقارن با هم برابر است پس داریم

$$\sqrt{(a-1)^2 + (+b)^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (-y)^2}$$

$$a-1 = 1-x \Rightarrow -x = a-2 \Rightarrow x = -a+2$$

$$y = -b \Rightarrow y = -b$$

و به همین روش می‌توانیم تقارن  $(c, d)$  را در دایره به مرکز  $K(-1, 0)$  به دست آوریم.

حال چگونگی حرکت یک شی متناظر با یک کنترل بهینه در صفحه‌ی فاز برای یک نقطه‌ی شروع  $S$  و یک نقطه‌ی پایانی  $T$  را بررسی می‌کنیم:

حالتی را در نظر بگیرید که شی با کنترل  $u = -1$  آغاز می‌گردد. (حالت شروع با کنترل  $u = 1$  را نیز می‌توان متشابه‌ها محاسبه نمود).

فرض کنید  $k$  تعداد کلیدهای کنترل باشد. حالتی را در نظر بگیرید که  $k = 0$  (حرکت بدون کلید) و به همین ترتیب  $k \geq 1$ .

در حالت  $k = 0$ ، شی از نقطه‌ی آغاز  $S$  در طول دایره‌ی به مرکز  $K$  شروع به حرکت می‌کند و به نقطه‌ی پایانی  $T$  می‌رسد. این فقط هنگامی رخ می‌دهد که  $|KS| = |KT|$  باشد. (در این جا  $|AB|$  نشان‌دهنده‌ی طول پاره خط  $AB$  است).

زمان حرکت  $t_1 = \theta$  برابر است با  $\angle SKT$ . ( $\angle SKT$  میزان زاویه‌ی  $SKT$  را نشان می‌دهد). حال  $k \geq 1$  را در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی را در نظر می‌گیریم. زمانی که  $k$  زوج یا فرد باشد حالت‌ها را تغییر می‌دهیم. ابتدا فرض کنیم که  $k$  فرد و  $k = 3$  باشد.

شی از نقطه‌ی  $S$  در طول دایره‌ی به مرکز  $K$  حرکت می‌کند و بعد از دوره زمانی  $t$  به نقطه‌ی  $X_1(x, y)$  (شکل (۱۷.۳)) می‌رسد. نقاط  $S$  و  $X_1$  هر دو بر روی یک دایره هستند بنابراین:

$$|KX_1| = |KS| \quad (۹۳.۳)$$

در نقطه‌ی  $X_1$  کنترل برای بار اول کلید می‌خورد و چون  $u = 1$  است تحت این کنترل شی در طول دایره‌ی به مرکز  $L$  حرکت می‌کند و بعد از گذشت زمانی  $\pi$  به نقطه‌ی  $X_2 = (-x + 2, -y)$  می‌رسد (طبق (۳.۴.۳)) در این جا کنترل برای بار دوم کلید می‌خورد و تحت کنترل جدید  $u = -1$  حرکت در طول دایره‌ی به مرکز  $K$  می‌باشد. پس از زمان  $\pi$ ، شی به نقطه‌ی

$$X_k = X_3 = (-(-x + 2) - 2, -(-y)) = (x - 4, y)$$

می‌رسد. در نقطه‌ی  $X_k$  کنترل برای بار آخر کلید می‌خورد و  $u = 1$  می‌شود و شی حرکت خود را در طول دایره‌ی به مرکز  $L$  ادامه می‌دهد تا به نقطه‌ی پایانی  $T$  برسد.

برای حرکت اشاره شده، نقطه‌های  $X_k$  و  $T$  می‌بایست بر روی یک دایره به مرکز  $L$  باشند داریم:

$$|LX_k| = |LT| \quad (۹۴.۳)$$

جدول (۱.۳): نقاط  $k$ -th، تغییرات کنترل برای حرکت بهینه



k فرد	$X_k$	k زوج	$X_k$
1	$(x, y)$	2	$(-x+2, -y)$
3	$(x-4, y)$	4	$(-x+6, -y)$
5	$(x-8, y)$	6	$(-x+10, -y)$
7	$(x-12, y)$	8	$(-x+14, -y)$

جدول ۱.۳:

می‌توان در جدول (۱.۳) دید که برای یک فرد  $k$  (شامل  $k = 1$ ) آخرین نقطه‌ی کلید کنترل

به صورت

$$X_k = (x_k, y_k) = (x - 2(k-1), y) \quad (۹۵.۳)$$

می‌باشد.

اگر  $S = (p_x, p_y)$  و  $T = (q_x, q_y)$  باشد، برای محاسبه‌ی مختصات‌های نامشخص  $x$  و  $y$  می‌توان از معادلات (۹۳.۳) و (۹۴.۳) استفاده کرد. با استفاده از (۹۵.۳) می‌توان این معادلات را برای مختصات به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$(x+1)^2 + y^2 = r_1^2 = (p_x+1)^2 + p_y^2 \quad (۹۶.۳)$$

$$(x+1-2k)^2 + y^2 = r_2^2 = (q_x+1)^2 + q_y^2 \quad (۹۷.۳)$$

با کم کردن (۹۷.۳) از (۹۶.۳) خواهیم داشت  $r_1^2 - r_2^2 = 4k(x+1) - 4k^2$  پس می‌توانیم  $x$  و  $y$  را به شکل زیر محاسبه کنیم:

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2}{4k} + k - 1 \quad (۹۸.۳)$$

$$y = \pm \sqrt{r_1^2 - (x+1)^2} \quad (۹۹.۳)$$

اگر  $x$  و  $y$  محاسبه و تعیین گردند می‌توانیم زمان مصرف شده را نیز محاسبه نماییم.

$$t_1 = \angle SKX_1 + (k-1)\pi + \angle X_k LT \quad (۱۰۰.۳)$$

حال برای  $k$  یک محدوده پیدا می‌کنیم، از (۹۸.۳) و (۹۹.۳) داریم:

$$y^2 = r_1^2 \left( \frac{r_1^2 - r_2^2}{4k} - k \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow k^4 - \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} k^2 + \left( \frac{r_1^2 - r_2^2}{4} \right)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(r_1 - r_2)^2}{4} \leq k^2 \leq \frac{(r_1 + r_2)^2}{4} \quad (101.3)$$

با جذر گرفتن از عبارت بالا داریم:

$$k_{\min} = \lceil |r_1 - r_2|/2 \rceil \leq k \leq \lfloor |r_1 + r_2|/2 \rfloor = \hat{k} \quad (102.3)$$

که  $[x]$  و  $[x]$  نشان‌دهنده‌ی بیشترین و کمترین مقدار  $x$  هستند. با در نظر گرفتن  $k = k_{\min}$  از فرمول (100.3) داریم:

$$t_1^{opt} \leq t_1 = \angle SKX_1 + (k_{\min} - 1)\pi + \angle X_k LT < 2\pi + (k_{\min} - 1)\pi + 2\pi \quad (103.3)$$

پس خواهیم داشت:

$$k_{\max} < k_{\min} + 4 \Leftrightarrow k_{\max} \leq k_{\min} + 3 \quad (104.3)$$

به طور هم‌زمان ارزیابی بالا را می‌توان برای  $k$  با استفاده از (102.3) به دست آورد. بنابراین:

$$k_{\max} = \min\{k_{\min} + 3, \hat{k}\} \quad (105.3)$$

در مواردی که  $k \geq 1$  و  $k$  زوج است می‌توان به همین روش آن را به دست آورد. در این مورد نقطه‌ی آخر کلید کنترل در (جدول (1.3))

$$X_k = (x_k, y_k) = (-x + 2(k - 1), -y) \quad (106.3)$$

می‌باشد و کنترل نهایی  $u = -1$  است. هم‌زمان شی حرکتش را بر روی دایره‌ی با مرکز  $K$  پایان می‌دهد. در این جا  $r_2^2 = (q_x - 1)^2 + q_y^2$  به جز این مقدار، فرمول برای  $x$  و  $y$  شبیه (98.3) و (99.3) خواهد بود. زمان حرکت برابر است با:

$$t_1 = \angle SKX_1 + (k - 1)\pi + \angle X_k KT \quad (107.3)$$

در بالا مواردی را محاسبه می‌کنیم که شروع کنترل با  $u = -1$  بود. در حالی که  $u = 1$  باشد فرمول‌های نهایی زیر را خواهیم داشت:

$$r_1^2 = (p_x - 1)^2 + p_y^2 \quad (108.3)$$

$$r_2^2 = \begin{cases} (q_x + 1)^2 + q_y^2 & \text{if } k \text{ فرد باشد} \\ (q_x - 1)^2 + q_y^2 & \text{if } k \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad (109.3)$$

$$X_k = (x_k, y_k) = \begin{cases} (x + 2(k - 1), y) & \text{if } k \text{ فرد باشد} \\ (-x - 2(k - 1), -y) & \text{if } k \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad (110.3)$$

$$x = -\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{4k} + k - 1\right) \quad (111.3)$$

$$y = \pm \sqrt{r_1^2 - (x - 1)^2} \quad (112.3)$$

$$t_1 = \angle SLX_1 + (k - 1)\pi + \begin{cases} \angle X_k KT & \text{if } k \text{ فرد باشد} \\ \angle X_k LT & \text{if } k \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad (113.3)$$

فرمول‌هایی که در بالا برای موقعیت‌های مختلف ارائه گردید، تحت شرایط لازم برای بهینه‌سازی به دست آمده بودند. بنابراین هر جوابی که بر اساس این فرمول‌ها به دست آید ممکن است بهینه نباشد. اگر چه جواب بهینه در میان سایر جواب‌هایی هستند که بر اساس نقاط آغازین برای کنترل و برای مقادیر متفاوت  $k$  ساخته شده‌اند.

بر اساس نظریات و فرمول‌های بالا یک برنامه کامپیوتری برای محاسبه کنترل بهینه برای زوج‌های ارائه شده در نقطه‌ی شروع  $S$  و نقطه‌ی پایانی  $T$  به کار گرفته می‌شود.

نخست با در نظر گرفتن کنترل  $u = -1$  بعد از  $u = 1$  و در هر دو مورد با تغییر مقدار  $k$  از  $k_{min}$  به  $k_{max}$  یک جواب به دست می‌آید (در صورت وجود).

جواب با کوتاهترین زمان برای انتقال شی از  $S$  به  $T$ ، جواب بهینه خواهد بود.

حالا توضیح می‌دهیم که چگونه زمان بهینه فازی  $t_1$  را به طور عددی محاسبه کنیم. برای محاسبه‌ی مقدار  $t_1(\alpha)$  منحنی‌های سرعت برابر را در محدوده‌های  $\varepsilon_\alpha$  و  $\xi_\alpha$  قرار می‌دهیم. کوتاهترین زمان در میان همه‌ی زوج منحنی‌های ممکن آغاز - پایان  $(p, q)$ ، مقدار تقریبی  $t_1(\alpha)$  را مشخص می‌کند.

با گسسته‌سازی مسئله‌ی (۷۸.۳) و حل آن به طور عددی  $\overline{t_1(\alpha)}$  را محاسبه می‌کنیم.

تابع عضویتی زمان بهینه فازی  $t_1$  که از محاسبات به دست آمده در شکل شماره‌ی (۱۹.۳) نشان داده شده است مقدار  $t_1 \approx 8/78$  با تابع عضویت ۱، متناسب با جواب‌های مسئله‌ی قطعی  $p = (-5, 3)$  و  $q = (0, 0)$  است. چون در اعداد فازی مثلثی نقاط وسط، درجه‌ی عضویت ۱ دارند.

$$S = (-5, 3) \text{ و } T = (0, 0)$$

طبق فرمول‌های (۹۶.۳) و (۹۷.۳) داریم:

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 = r_1^2 = (p_x + 1)^2 + p_y^2 \\ (x + 1 - 2k)^2 + y^2 = r_2^2 = (q_x + 1)^2 + q_y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1^2 = 25 \Rightarrow r_1 = 5 \\ r_2^2 = 1 \Rightarrow r_2 = 1 \end{cases} \quad (114.3)$$

با جایگذاری  $r_1$  و  $r_2$  در (۱۰۲.۳) داریم  $k = 3$  و از فرمول (۹۸.۳)،  $x = \frac{25-1}{12} + 2 = 4$  و

از فرمول (۹۹.۳)،  $y = \sqrt{25 - 25} = 0$ ، بنابراین  $X_1 = (4, 0)$  و  $X_k = X_3 = (0, 0)$

$X_1$  و  $S$  نقاطی روی دایره‌ی به مرکز  $k(-1, 0)$  هستند بنا بر (۹۳.۳) داریم:

$$|KS| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$|KX_1| = \sqrt{25} = 5$$

$$|SX_1| = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}$$

با استفاده از فرمول  $\cos$  در مثلث‌ها داریم:

$$|SX_1|^2 = |KS|^2 + |KX_1|^2 - 2|KS||KX_1|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \theta = 2/49 \Rightarrow \angle SKX_1 = 2/49$$

و برای به دست آوردن  $\angle X_2LT$  از فرمول‌های به دست آمده داریم:

$$X_2 = (0, 0), T = (0, 0), L = (1, 0)$$

$$|KX_2| = 1, |KT| = 1, |TX_2| = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \angle X_2LT = 0$$

بنابراین

$$t_1 = \angle SKX_1 + (k-1)\pi + \angle X_2LT = 2/49 + 2(3/14) + 0 \simeq 8/78$$

و برای زوج‌های  $q = (-0/5, 0/5)$  و  $p = (-4, 2)$  داریم

$$(x+1)^2 + y^2 = r_1^2 = 9 + 4 = 13$$

$$(x+1-2k)^2 + y^2 = r_2^2 = 0/5$$

$$k_{\min} = \lceil 1/45 \rceil \leq k \leq \hat{k} = \lfloor 2/15 \rfloor \Rightarrow k = 2$$

$$x = 2/56, y = 0/57$$

$$X_1 = (2/56, -0/57), K = (-1, 0), S = (-4, 2)$$

$$|KX_1| = 3/6, |KS| = 3/6, |SX_1| = \sqrt{49/63} \Rightarrow 49/63 = 13 + 13 - 2(13)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \theta = 2/71 \Rightarrow \angle SKX_1 = 2/71$$

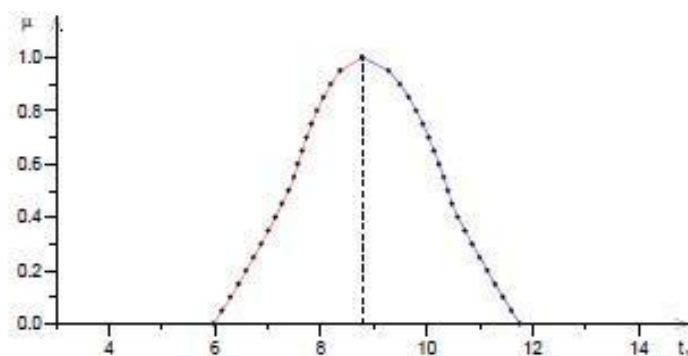
$$X_2 = (-0/56, +0/57), T = (0/5, 0/5), K = (-1, 0)$$

$$|KX_2| = \sqrt{0/5} = 0/7, |KS| = \sqrt{0/5} = 0/7, |TX_2| = \sqrt{0/0085} \Rightarrow \theta = 0/13$$

$$\angle X_2KT = 0/13$$

$$t_1 = 2/71 + 3/14 + 0/13 \simeq 5/98$$

که حداقل مقدار  $t_1$  مربوط به همین زوج‌ها می‌باشد؛ یعنی،  $t_1 = 5/98$  که درجه‌ی عضویت آن صفر می‌باشد و به همین ترتیب بیشترین مقدار  $t_1$  را برای زوج‌های  $p = (-6, 4)$  و  $q = (0/5, 0/5)$  داریم، که مقدار آن  $t_1 \approx 11/76$  با درجه‌ی عضویت صفر است. شکل (۱۹.۳)، مقدار  $t_1$  را با درجه عضویت‌های مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۱۹.۳:  $t_1$  با درجه عضویت‌های مختلف

جدول (۲.۳):  $t_1$  های مختلف برای نقاط آغازین و انتهای مختلف

$S=(p_x, p_y)$	$T=(q_x, q_y)$	$K=\min\{k_{min}+\beta, k\}$	$t_1$
$(-۶,۲)$	$(-۱۵,۰)$	۳	۹/۸۳
$(-۶,۲)$	$(۰, -۱۵)$	۳	۱۰/۲۴
$(-۶,۲)$	$(۰, ۰)$	۳	۹/۷۳
$(-۶,۲)$	$(۰, ۱۵)$	۳	۹/۳۱
$(-۶,۳)$	$(۰, ۰)$	۳	۱۰/۱۷
$(-۶,۳)$	$(۰, ۱۵)$	۳	۹/۵۶
$(-۶,۴)$	$(۱۵, ۱۵)$	۴	۱۱/۷۵
$(-۶,۲)$	$(۱۵, ۰)$	۳	۹/۷۲
$(-۶,۳)$	$(۱۵, ۱۵)$	۳	۹/۸۶
$(-۵,۳)$	$(۰, ۰)$	۳	۸/۷۸
$(-۵,۴)$	$(۰, ۱۵)$	۳	۹/۱۶
$(-۵,۳)$	$(۰, ۱۵)$	۳	۸/۷۶
$(-۵,۲)$	$(۰, ۱۵)$	۲	۷
$(-۴,۴)$	$(۰, ۱۵)$	۳	۸/۴۸
$(-۴,۲)$	$(۰, ۱۵)$	۲	۹/۵۵
$(-۴,۳)$	$(۰, ۱۵)$	۲	۷/۰۹
$(-۴,۲)$	$(۱۵, ۱۵)$	۲	۹/۸۷
$(-۴,۳)$	$(۱۵, ۱۵)$	۲	۷/۱۱
$(-۴,۲)$	$(۱۵, ۱۵)$	۲	۷/۵۲
$(-۴,۴)$	$(۱۵, ۱۵)$	۳	۹/۴۱
$(-۵,۲)$	$(-۱۵, -۱۵)$	۲	۷/۱۱
$(-۵,۲)$	$(-۱۵, ۰)$	۲	۸/۴۹
$(-۴,۳)$	$(-۱۵, ۰)$	۲	۷/۳۴
$(-۴,۳)$	$(-۱۵, ۱۵)$	۲	۷/۹۱
$(-۴,۲)$	$(-۱۵, ۱۵)$	۲	۵/۹۷
$(-۵,۲)$	$(-۱۵, ۱۵)$	۲	۸/۵۳
$(-۵,۲)$	$(۰, ۰)$	۲	۷/۵۷
$(-۵,۴)$	$(۰, ۰)$	۳	۹/۷۷
$(-۴,۴)$	$(۰, ۰)$	۳	۸/۵
$(-۴,۳)$	$(۰, ۰)$	۲	۶/۹۲
$(-۴,۲)$	$(۰, ۰)$	۲	۶/۴۹
$(-۴,۲)$	$(۱۵, ۱۵)$	۳	۹/۳۶
$(-۴,۴)$	$(۰, -۱۵)$	۳	۹/۲۸
$(-۴,۲)$	$(۱۵, ۰)$	۲	۶/۴۱
$(-۴,۳)$	$(۱۵, ۰)$	۲	۶/۶۷
$(-۴,۴)$	$(۰, ۰)$	۳	۱۰/۴۹
$(-۴,۴)$	$(۰, ۱۵)$	۳	۱۰
$(-۴,۳)$	$(-۱۵, ۱۵)$	۲	۶/۷
$(-۵,۳)$	$(۰, -۱۵)$	۳	۹/۷۷
$(-۵,۴)$	$(۰, -۱۵)$	۳	۱۰/۰۹
$(-۴,۴)$	$(۰, -۱۵)$	۳	۱۱/۰۳

جدول ۲.۳:

## نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای کارهای آتی

در این پایان نامه مسئله‌ی کنترل زمان بهینه را با حالت‌های آغازین و انتهایی فازی مورد بررسی قرار دادیم و این مسئله را به عنوان یک مجموعه از مسئله‌های قطعی بیان کردیم و زمان بهینه فازی را با حل دو نوع از مسئله‌های کنترل بهینه‌ی قطعی حساب کردیم و در نهایت بر روی یک مسئله عددی، نزدیکی این دو مسئله را نمایش دادیم. بنابراین می‌توان مسائل کنترل بهینه را در شرایط فازی مورد بررسی قرار داد و نتایج مسئله را در شرایط عدم قطعیت، با تبدیل به مسائل کنترل بهینه‌ی قطعی حل کرد.

برای کارهای آتی می‌توان حل مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی فازی را در حالتی که شرایط اولیه و نهایی غیر فازی هستند، اما معادله‌ی دینامیکی فازی است را مورد بررسی قرار دهیم.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Maximum principle	اصل ماکزیمم
Target set	تابع هدف
Combine	ترکیب کردن
Short time	حداقل زمان
Calculus of variation	حساب تغییرات
Linear	خطی
Time-period	دوره‌ی زمانی
Admissible paire	زوج قابل قبول
Conjugate system	سیستم مزدوج
Boundry conditions	شرایط مرزی
Inner product	ضرب داخلی
Uncertainly	غیر قطعی
Switch	کلید خوردن
Optimal control	کنترل بهینه
Lagrang	لاگرانژ
Crisp sets	مجموعه‌های قاطع
Complex	مختلط
Trajectory	مسیر بهینه



# مراجع

- [۱] برقر. د، گراهام-آ.، ترجمه: دکتر علی وحیدیان، دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا، (بهمن ۱۳۷۲)، مقدمه‌ای بر نظریه‌ی کنترل و کنترل بهینه.
- [۲] دکتر عادل آذر، حجت فرجی، (۱۳۸۷)، علم مدیریت فازی.
- [3] A. Agachev, Andrei, (2001), **Introduction to Optimal Control Theory**.
- [4] A. V. Plotnikov, (2000), "Necessary optimality conditions for a nonlinear problem of control of trajectory boudles", **Cybernetics and System Analysis**, 36, (5), 730-733.
- [5] D. Dubios, H. Prade, (1980), **Fuzzy Sets and Systems Theory and Application**, Academic press, New York.
- [6] D. I. Cerik, (1998), **Introdoction to Optimal Control Theory**.
- [7] E. H. Mamadani, (1974), "Application of fuzzy algorithms for control of a simpledynamic plant", **Proceedings IEEE**, 121, 12, 1585-1588.
- [8] E. R. Pinch, (1993), **Optimal Control and the Calcules of Variations**.
- [9] H. Zimmerman, (1996), **Fuzzy set Theory and Its Application**, Kluwer Academic publisher.
- [10] I. V. Molchayuk, A. V. Plotnikov, (2009), "Necessary and sufficient conditions of optimality in the problems of control with fuzzy parameters", **Ukrainian Mathematical Journal**, 61, (3), 457-466.
- [11] K. Menger,(1956), "What Is Calculus of Variations and What Are Its Applications?", **The World of Mathematics**, 20, New York: Simon and Schuster Inc.
- [12] L. A. Zadeh, (1965), **Fuzzy sets, Information and Control**, 8, 338-353.
- [13] L. S. Pontryagin, V. G. Baltyskii, R. V. Gamkrelidze, (1962), **Mathematical Theory of Optimal Control Processes**, New York.
- [14] M. Athans, P. L. Falb, (1962), **Optimal Control An Introdoction to the Theory Its Applications**.
- [15] M. Sakawa, M. Inuigehi, k. kato, T. Ikeda, (1996), "A fuzzy satisfieing Method for multi-objective linear optimal control problems", **fuzzy sets and system**, 78, 223-229.
- [16] R. Gabasov, F. M. Kirillova, E. I. Poyasok, (2010), "Optimal real-time control measurements of input and output signals", **Applied Mathematics**, 268, 24-40.
- [17] R. Gabasov, F. M. Kirillova, E. I. Poyasok, (2009), "Optimal control of linear systems under uncertainty, Proceedings of dynamic systems states", **Applied Mathematics and Computation**, 8, (1), 54-69.

- 
- [18] R. Gabasov, F. M. Kirillova, E. I. Poyasok, (2010), "Optimal control of linear systems under uncertainty, proceedings of the steklov institute of mathematics", **Applied Mathematics and Computation**, 268, 95-11.
- [19] S. E. Amrahov, N. Gasilov, A. G. Fatullayev, (2011), **Numerical solution of a fuzzy time-optimal control problem**.
- [20] K. Tanaka , **An Introduction to Fuzzy Logic for Practical Applications**.
- [21] V. I. Blagodastshikh, (2001), **Introduction to optimal control** [in Russian], Vysshaya shkola, Moscow.

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Bounded	کراندار
Cardinality	عدد اصلی
Circle	دایره
Classical	کلاسیک
Compact	فشرده
Continu	پیوسته
Convex	محدب
Corresponding	متناظر
Crips	قطعی
Discrete	گسسته
Exponential	نمایی
Final	پایانی
Fuzzy	فازی
Fuzzy set	مجموعه فازی
Hammiltonian	هامیلتونی
Inclusion and exclusion principle	اصل شمول و عدم شمول
Increment of a function	نمویک تابع
Indefiniteness	ابهام
Lagrange multiplier	ضریب لاگرانژ
Membership function	تابع عضویت
Paire	جفت
Transfer	انتقال

---

Transversality condition .....	شرط تراگردی
Trapezeidal .....	دوزنقه‌ای
Tringular .....	مثلثی
$\alpha$ -cut .....	$\alpha$ -برش

Surname: Mombeini

Name: Maryam

---

Title: Numerical solution of a fuzzy time-optimal control problem

---

Supervisors: Dr.Alireza Nazemi and Dr.Hadi Basirzadeh

---

Degree: Master of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: operations research

---

Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical

Date: 2012

Number of pages: 110

---

Keywords: Optimal-time control, Fuzzy set, Maximum principle, Mathematical pendulum.

---

### **Abstract**

In this paper, we consider a time-optimal control problem with uncertainties. Dynamics of controlled object is expressed by crisp linear system of differential equations with fuzzy initial and final states. We introduce a notion of fuzzy optimal time and reduce its calculation to two crisp optimal control problems. We examine the proposed approach on an example. In the first chapter fuzzy sets are reviewed and studied. In the second chapter we study a general recitation of problems calculus variation and optimal control. In the third chapter we introduce two crisp time optimal control problems and also interpret their solving ways. Finally we introduce the fuzzy time optimal control problem and reduce its two kinds of two crisp time optimal control problem solved the problem.



Shahrood University of Technology  
Faculty of Mathematical

Dissertation Submitted in Partial  
Fulfillment of The Requirements For The  
Degree of Master of Science in  
Applied Mathematics

# **Numerical solution of a fuzzy time-optimal control problem**

Supervisors

**Dr.Alireza Nazemi and Dr.Hadi Basirzadeh**

by

**Maryam Mombeini**

2012