

تحلیل فرایندهای شکل‌دهی فلزات

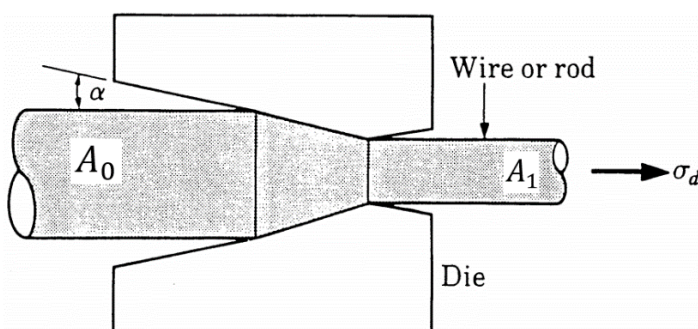
هدف از تحلیل فرایندهای شکل‌دهی، تعیین کردن مقدار بار یا نیروی لازم برای انجام یک تغییرشکل مشخص است.

روش‌های زیادی برای تحلیل استفاده می‌شوند:

۱. روش تحلیل کار همگن (کار ایده‌آل) (Ideal Work)
 ۲. روش تحلیل قاچی (تعادل نیروها) (Slab Analysis)
 ۳. روش تحلیل میدان خطوط لغزش (Slip-Line Field)
 ۴. آنالیز حد بالایی (Upper-Bound Analysis)
 ۵. آنالیز حد پایینی (Lower-Bound Analysis)
 ۶. روش المان محدود (Finite Element Method (FEM))
 ۷. روش تفاضل محدود (Finite Difference Method (FDM))
- در این درس دو روش اول مورد بحث قرار می‌گیرد.

فرایند کشش سیم (Wire Drawing)

ماده اولیه در این فرایند، میله، مفتول یا سیم با قطرهای زیاد هستند. میله از طریق نورد تولید می‌شود.



به طور معمول، در دمای پایین انجام می‌شود پس کار سرد است.

جنس قالب (Die) در تماس با ماده از جنس کاربید تنگستن یا الماس است. الماس کیفیت سطحی بهتری ایجاد می‌کند.

هدف در این قسمت تحلیل فرایند کشش سیم با استفاده از دو روش کار ایده‌آل و آنالیز قاچی است. ابتدا روش کار ایده‌آل توضیح داده می‌شود.

۱. روش تحلیل کار ایده‌آل

نیروی خارجی که برای تغییر شکل فلز استفاده می‌شود صرف انجام چند نوع کار می‌شود:

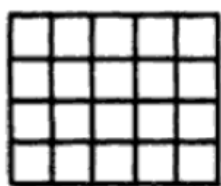
$$W_{total} = W_{ideal} + W_{frictional} + W_{redundant}$$

W_{total} : کار کلی انجام شده به وسیله نیروی خارجی

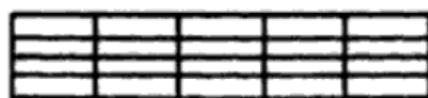
W_{ideal} : کار ایده‌آل

$W_{frictional}$: کار اصطکاکی

$W_{redundant}$: کار اضافی



(a)



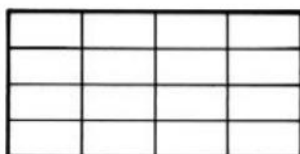
Homogeneous

(b)

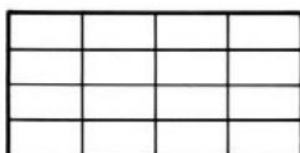
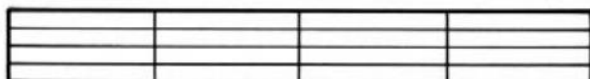


Friction + Redundant

(c)



Homogeneous
deformation



Redundant
deformation



در روش کار ایده‌آل فرض می‌شود که تغییر شکل به صورت کاملاً همگن یا ایده‌آل انجام شود و کار اصطکاکی و اضافی را نادیده می‌گیریم.

در واقع در این روش: کار لازم برای تغییر شکل ایده‌آل ماده = کار خارجی

محاسبه کار لازم برای تغییر شکل ایده‌آل:

داشتیم کار انجام شده در واحد حجم ماده در اثر تغییر شکل پلاستیک آن برابر بود با:

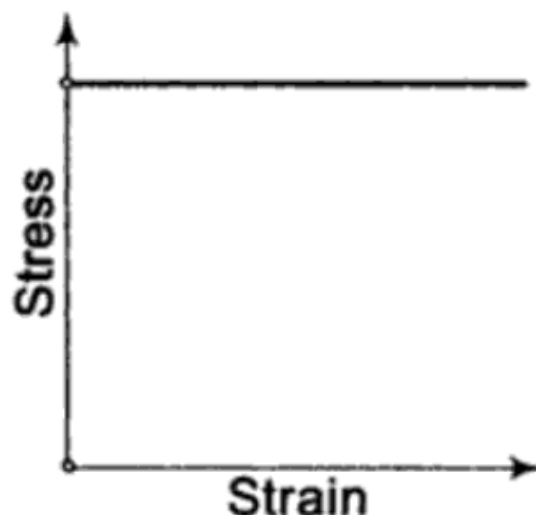
$$dw = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}$$

کل کار انجام شده:

$$w = \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}$$

می‌توان این کار را برای رفتارهای متفاوت مواد به دست آورد، مثلاً:

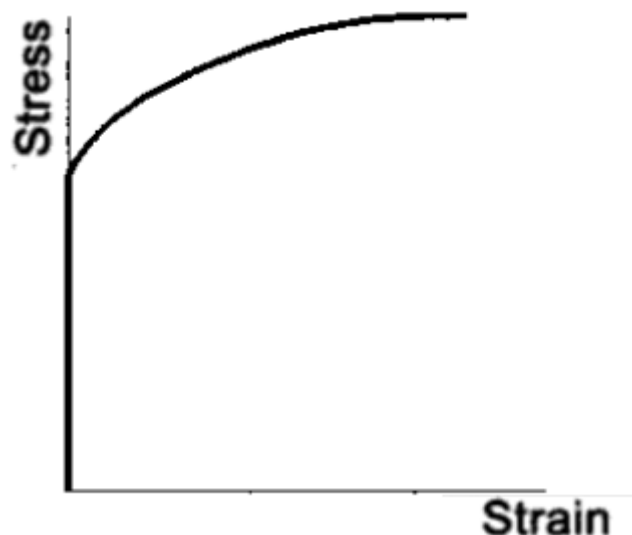
- Rigid-Perfectly Plastic



$$w = \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} = Y \times \epsilon = Y \times \ln\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

$$r = \frac{A_0 - A_1}{A_0}$$

- Rigid-Workharden Plastic



$$w = \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} = \int_0^{\bar{\epsilon}} K \bar{\epsilon}^n d\bar{\epsilon} = K \frac{\bar{\epsilon}^{n+1}}{n+1}$$

گاهی اوقات از تنش تسلیم متوسط برای محاسبات استفاده می کنند. زمانی که ماده کرنش قبلی نداشته باشد:

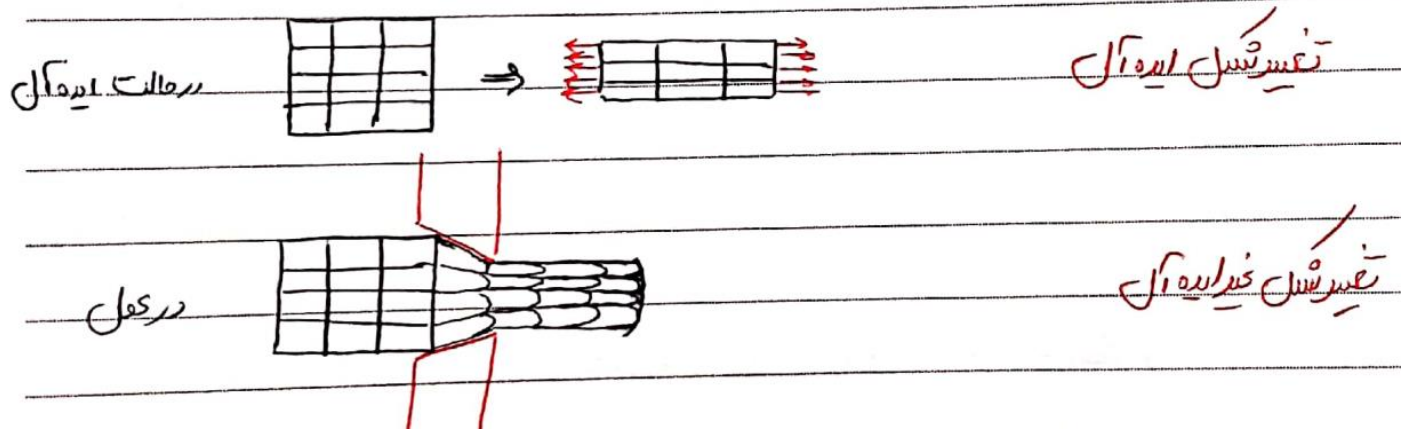
$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{\epsilon}} \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}$$

$$w = \bar{Y} \times \bar{\epsilon} = \bar{Y} \times \ln\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

زمانی که کرنش اولیه $\bar{\epsilon}_1$ در ماده وجود داشته باشد و آن را تا کرنش $\bar{\epsilon}_2$ تحت تغییر شکل قرار دهیم:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_1} \int_{\bar{\epsilon}_1}^{\bar{\epsilon}_2} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \qquad w = \bar{Y} \times (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_1)$$

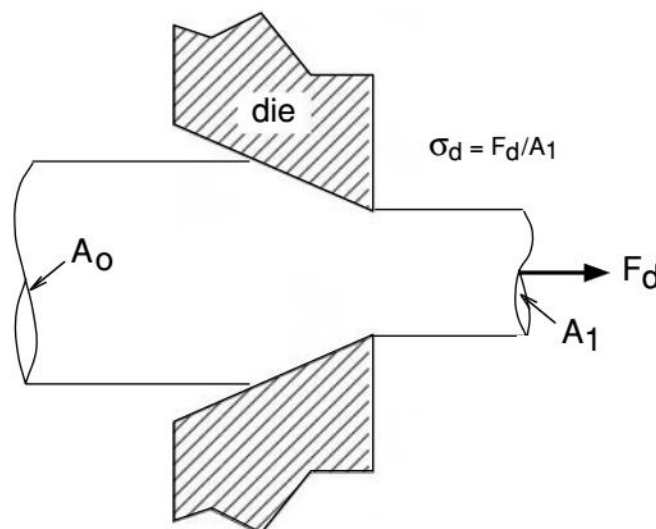
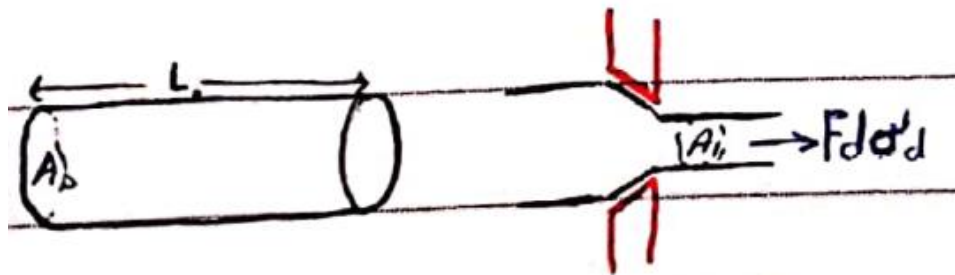
تحلیل فرایند کشش سیم به وسیله روش کار ایده‌آل:



همان‌طور که در شکل دیده می‌شود در فرایند کشش سیم تغییر شکل اضافی نیز داریم. همچنین به دلیل تماس ماده با قالب، کار اصطکاکی نیز داریم ولی از هر دوی آنها صرف‌نظر می‌شود و داریم:

$$W_{total} = W_{ideal}$$

برای تحلیل فرایند لازم است کار انجام شده توسط نیروی خارجی محاسبه شود. فرض می‌کنیم مقطع دایره‌ای با مساحت سطح مقطع اولیه (A_0) و طول اولیه L_0 به مقطعی با مساحت A_1 و طول L_1 تبدیل شود.



کل کار انجام شده برای این تغییر شکل:

$$W = F_d L_1 = \sigma_d A_1 L_1$$

کل کار انجام شده در واحد حجم:

$$w = \frac{\sigma_d A_1 L_1}{A_1 L_1} \Rightarrow w = \sigma_d$$

σ_d : تنش لازم برای کشش

F_d : نیروی لازم برای کشش

$$W_{total} = W_{ideal}$$

برای مواد با رفتار کارسخت شوند:

$$\Rightarrow \sigma_d = \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} = \bar{Y} \times \bar{\epsilon} = \bar{Y} \times \ln\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

برای مواد با رفتار پلاستیک کامل:

$$\sigma_d = \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} = Y \times \bar{\epsilon} = Y \times \ln\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

برای تخمین دو جمله مربوط به کار اضافی و کار اصطکاکی و لحاظ کردن آنها گاهی از پارامتر بازدهی استفاده می‌کنیم.

$$W_{total} = W_{ideal} + W_{frictional} + W_{redundant}$$

$$\eta = \frac{W_{ideal}}{W_{total}}$$

$$W_{total} = \frac{1}{\eta} W_{ideal}$$

با لحاظ کردن پارامتر بازدهی روابط به صورت زیر در می‌آیند.

برای مواد با رفتار کار سخت شوند:

$$\Rightarrow \sigma_d = \frac{1}{\eta} \times \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} = \bar{Y} \times \bar{\epsilon}$$

برای مواد با رفتار پلاستیک کامل:

$$\sigma_d = \frac{1}{\eta} \times Y \times \bar{\epsilon}$$

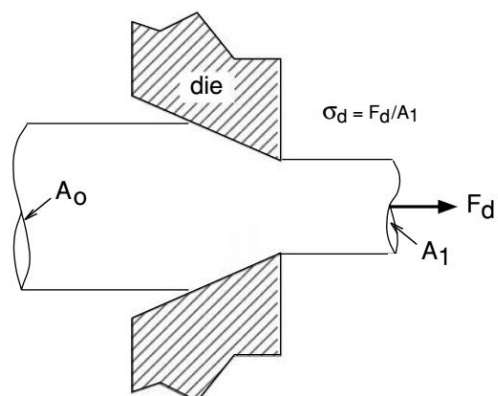
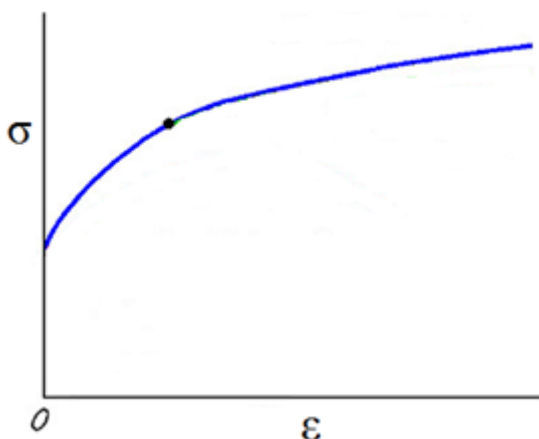
با محاسبه σ_d می‌توان F_d را محاسبه کرد و با داشتن F_d می‌توان الکتروموتور مورد استفاده برای کشش را محاسبه کرد:

$$P = F_d \times v$$

v : سرعت کشش

حداکثر کاهش سطح مقطع ممکن در یک مرحله از فرایند کشش سیم

اگر بخواهیم یک خط تولید راه بیندازیم و تعداد قالب‌های لازم را پیدا کنیم ابتدا باید حداکثر کاهش سطح مقطع ممکن در یک مرحله از کشش را به دست آوریم، حداکثر کاهش سطح مقطع به وسیله مقدار σ_d محدود می‌شود. اگر σ_d بیش از حد باشد، ماده پاره و دچار گسیختگی می‌شود. از آنجا که معمولاً کرنش اعمال شده به ماده در کشش سیم، بیشتر از کرنش ناپایداری در کشش تک محوری (ϵ_u) است، بنابراین استحکام کششی و تنش سیلان ماده کشیده شده برابر هستند. پس حداکثر کاهش سطح مقطع ممکن در یک مرحله از تغییر شکل مربوط به حالتی است که σ_d به $\bar{\sigma}$ (تنش سیلان ماده) برسد:



$$\sigma_d = \frac{1}{\eta} \times \int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{1}{\eta} \times \int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} \quad \xrightarrow{\text{if } \bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^n} K\varepsilon^{*n} = \frac{1}{\eta} \times \frac{K\varepsilon^{*n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \varepsilon^* = \eta \times (1+n)$$

ε^* : حداکثر کرنش قابل اعمال در یک مرحله از فرایند

$$\ln\left(\frac{1}{1-r_{max}}\right) = \eta \times (1+n)$$

r_{max} : حداکثر کاهش سطح مقطع نسبی در یک مرحله از فرایند

اگر ماده مومسان ایده‌آل باشد و بازدهی را کامل بگیریم:

$$n = 0 \quad . \quad \eta = 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^* = 1 \quad . \quad r_{max} = 0.63$$

اگر ماده مومسان ایده‌آل باشد و بازدهی را مقدار معمول $\eta = 0.65$ بگیریم:

$$n = 0 \quad . \quad \eta = 0.65 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^* = 0.65 \quad . \quad r_{max} = 0.48$$

مثال ۱: در ماده‌ای خاص، منحنی تنش-کرنش حقیقی با رابطه $\bar{\sigma} = B + C\bar{\varepsilon}$ نشان داده می‌شود که B و C

مقادیر ثابت هستند. اگر مقدار B برابر با ۳۰۰۰۰ psi و C برابر با ۱۰۰۰۰ psi باشد و بازدهی فرایند کشش سیم

را برابر با ۷۵٪ فرض کنیم، حداکثر کرنشی را که می‌توان در یک عبور ایجاد نمود حساب کنید.

حل:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\eta} \times \int_0^{\varepsilon^*} \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad B + C\varepsilon^* = \frac{1}{\eta} \times \int_0^{\varepsilon^*} (B + C\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon}$$

$$B + C\varepsilon^* = \frac{1}{\eta} \times \left(B\varepsilon^* + C \frac{\varepsilon^{*2}}{2} \right)$$

$$B + \left(C - \frac{B}{\eta}\right) \varepsilon^* - \frac{C}{2\eta} \varepsilon^{*2} = 0$$

$$6.67\varepsilon^{*2} + 30\varepsilon^* - 30 = 0 \quad \begin{cases} \varepsilon^* = 0.837 \\ \varepsilon^* = -5.316 \end{cases}$$

مقدار منفی قابل قبول نیست، مقدار مثبت قابل قبول بوده و می‌توان از آن مقدار r_{max} را محاسبه کرد.

مثال ۲: حداکثر کاهش سطح مقطع نسبی در یک مرحله از کشش سیمی که رابطه تنش-کرنش مؤثر آن به صورت

$$\bar{\sigma} = 300\bar{\varepsilon}^{0.25}$$

باشد را در هر یک از حالت‌های زیر محاسبه کنید:

(الف) تغییرشکل به صورت ایده‌آل باشد.

(ب) تغییرشکل به صورت همگن بوده و از کارسختی صرف‌نظر شود.

(ج) از کارسختی صرف‌نظر کنیم و راندمان تغییرشکل ۸۰٪ باشد.

(د) کارسختی را در نظر گرفته و راندمان تغییرشکل نیز برابر با ۸۰٪ باشد.

مثال ۳: فرض کنید هدف ما طراحی یک فرایند کشش سیم است که در آن باید قطر سیمی از ۱ mm به ۰.۵ mm

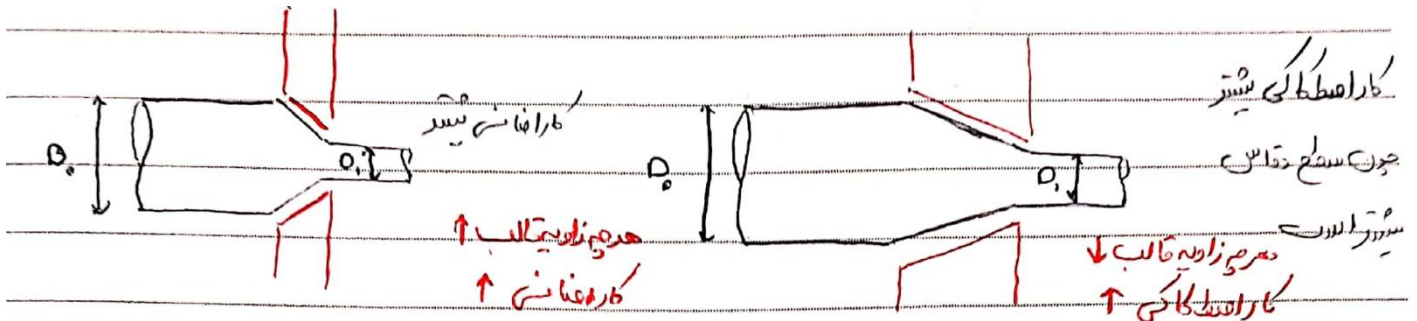
کاهش یابد. چند مرحله (چند قالب) کشش سیم مورد نیاز است؟

(فرضیات: تنش خارجی مورد استفاده برای کشش سیم هیچ گاه از ۸۰٪ جریان ماده بیشتر نمی‌شود و بازدهی

فرایند ۰/۶ است. از کارسختی صرف‌نظر می‌شود.)

طراحی زاویه قالب:

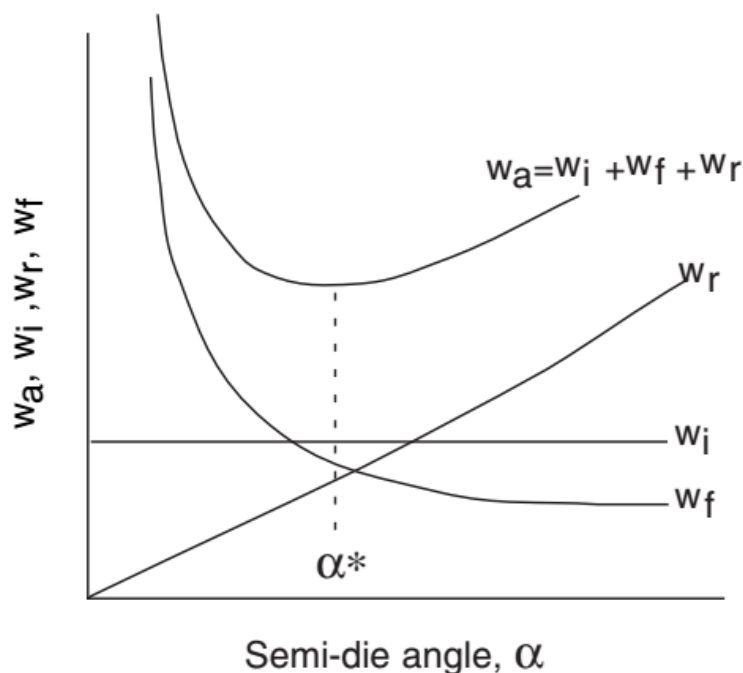
زاویه قالب بر کار لازم برای تغییر شکل در فرایند کشش سیم تأثیرگذار است. این موضوع را با بررسی و مقایسه دو فرایند با کاهش سطح مقطع‌های یکسان ولی زوایای قالب متفاوت مشاهده می‌کنیم.



اگر کار لازم برای تغییر شکل را برابر با کار ایده‌آل در نظر بگیریم، کار کل در هر دو حالت برابر است زیرا میزان کاهش سطح مقطع در هر دو حالت برابر است:

$$W_{Ideal} = \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \quad . \quad \bar{\epsilon} = Ln\left(\frac{D_0}{D_1}\right)^2 \quad . \quad \bar{\sigma} = K\bar{\epsilon}^n$$

اما اگر دو عبارت کار اضافی و اصطکاکی را در نظر بگیریم تغییرات به صورت زیر در می‌آید:



- با افزایش زاویه قالب در یک کرنش یکسان، سطح تماس ماده با قالب کمتر می‌شود و کار اصطکاکی کاهش می‌یابد.

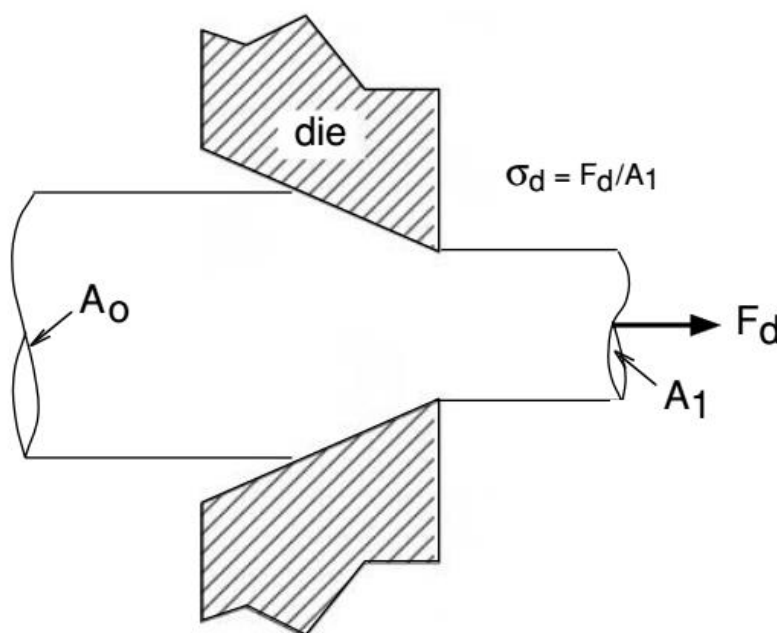
- از طرفی با افزایش زاویه قالب در یک کرنش یکسان، کار اضافی افزایش می‌یابد.

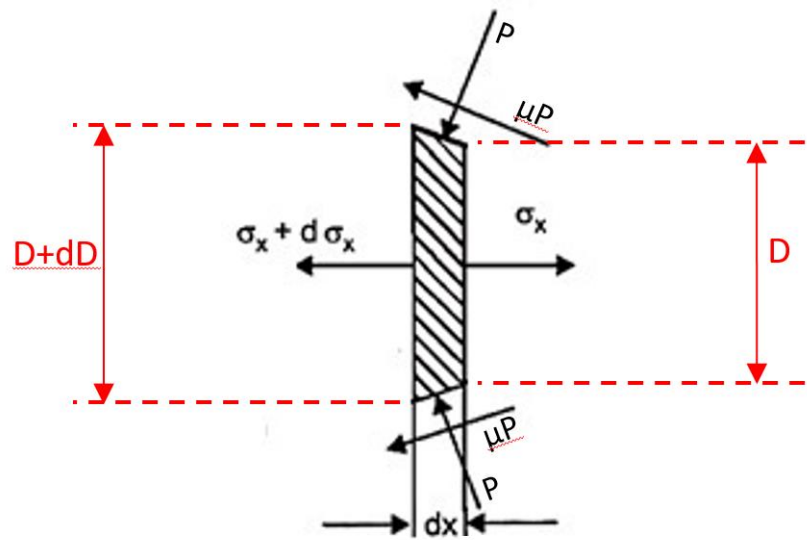
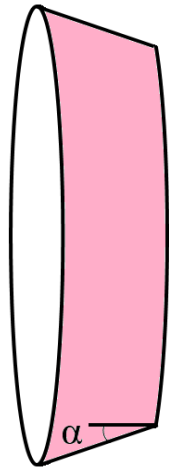
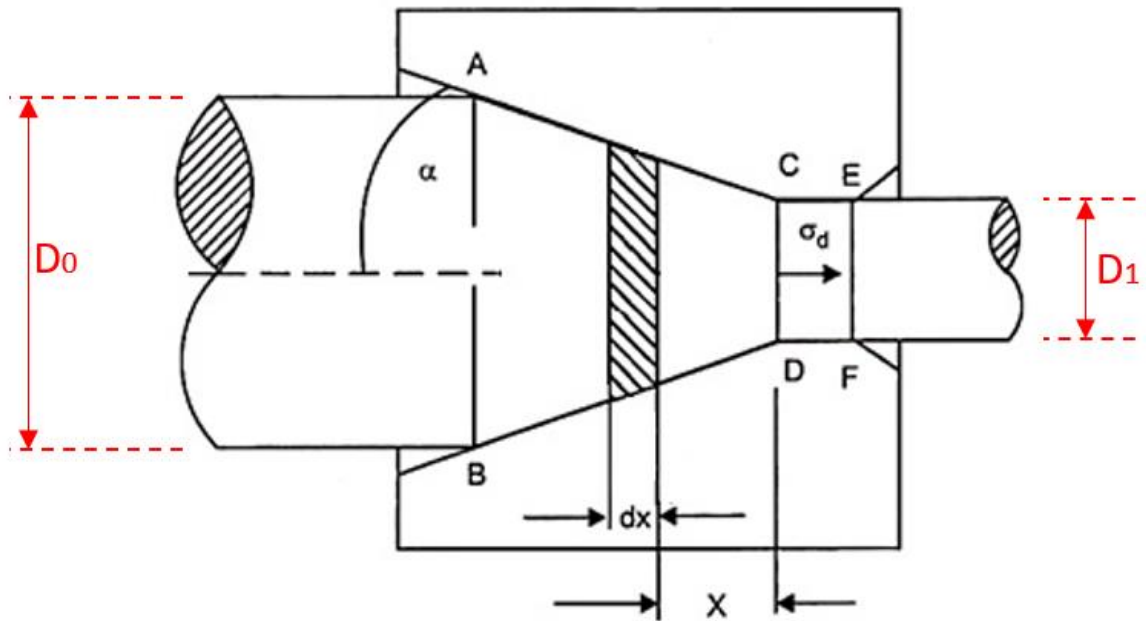
بنابراین اگر نمودار کار کل بر حسب زاویه قالب را رسم کنیم، زاویه بهینه‌ای (α_{opt}) وجود دارد که در آن کار کل (W_{total}) حداقل می‌شود، در نتیجه کم‌ترین تنش خارجی (σ_d) را برای کشش سیم نیاز داریم.

۲- روش آنالیز قاچی (Slab analysis)

این روش شامل نوشتن معادلات تعادل نیروها روی یک المان (قاچ) از فلز در حال تغییرشکل با ضخامت جزئی است. یک معادله دیفرانسیلی به دست می‌آید که با انتگرال‌گیری از آن و در نظر گرفتن شرایط مرزی مناسب، جواب معادله (نیروی لازم برای تغییرشکل) به دست می‌آید.

در این روش، کار اصطکاکی ($W_{frictional}$) را وارد محاسبات می‌کنیم و فقط از کار اضافی ($W_{redundant}$) صرف‌نظر می‌کنیم. در نتیجه به نظر می‌رسد که این روش، دقیق‌تر است. تحلیل فرایند کشش سیم با استفاده از این روش نیز انجام می‌شود:





$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_x + d\sigma_x) \frac{\pi}{4} (D + dD)^2 - \sigma_x \frac{\pi}{4} D^2 + P \sin \alpha \left(\frac{\pi D dx}{\cos \alpha} \right) + \mu P \cos \alpha \left(\frac{\pi D dx}{\cos \alpha} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} (\sigma_x + d\sigma_x)(D^2 + 2DdD + d^2D) - \sigma_x D^2 + 4PD \tan \alpha dx + 4\mu PD dx = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_x D^2 + 2\sigma_x DdD + \sigma_x d^2D + D^2 d\sigma_x + 2DdD d\sigma_x + d\sigma_x d^2D - \sigma_x D^2 + 4PD \tan \alpha dx + 4\mu PD dx = 0$$

عبارت‌های شامل حاصلضرب دو دیفرانسیل (جملات قرمز رنگ) بسیار کوچک بوده و قابل صرف‌نظر هستند.

$$\Rightarrow 2\sigma_x D dD + D^2 d\sigma_x + 4PD \operatorname{tg} \alpha dx + 4\mu PD dx = 0$$

$$\stackrel{\times \frac{1}{D}}{\Rightarrow} 2\sigma_x dD + D d\sigma_x + 4P \operatorname{tg} \alpha dx + 4\mu P dx = 0$$

برای زاویه α داریم:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dD/2}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2} \cot \alpha dD \quad \text{or} \quad dD = 2 \operatorname{tg} \alpha dx$$

$$\Rightarrow 2\sigma_x dD + D d\sigma_x + 2PdD + 2\mu P \cot \alpha dD = 0$$

$$\Rightarrow (2\sigma_x + 2P + 2\mu P \cot \alpha) dD + D d\sigma_x = 0$$

$$\Rightarrow 2(\sigma_x + P(1 + \mu \cot \alpha)) dD = -D d\sigma_x$$

عبارت $\mu \cot \alpha$ وابسته به قالب بوده و به صورت یک ثابت B در رابطه قرار داده می‌شود: $B = \mu \cot \alpha$

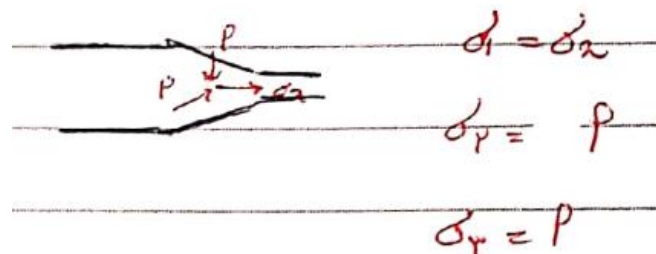
$$\Rightarrow 2(\sigma_x + P(1 + B)) dD = -D d\sigma_x$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x}{\sigma_x + P(1 + B)} = -\frac{2dD}{D}$$

برای انتگرال‌گیری از رابطه دیفرانسیلی به دست آمده ابتدا باید رابطه بین P و σ_x مشخص شود. اگر مقدار اصطکاک

در سطح بسیار کم باشد (مثلاً داریم $\mu \approx 0/05$ که کاملاً کم است.) و زاویه قالب کوچک باشد (به طور معمول

$\alpha = 6 - 10^\circ$) می‌توان تنش‌ها را معادل تنش‌های اصلی در نظر گرفت.



و با استفاده از معیار فون میزز می‌توان رابطه بین P و σ_x را مشخص کرد.

$$\text{Von - mises: } \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} = Y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x + P)^2 + (\sigma_x + P)^2 + (-P + P)^2]^{\frac{1}{2}} = Y$$

$$\Rightarrow \sigma_x + P = Y \quad \text{or} \quad P = Y - \sigma_x$$

با قرار دادن P بر حسب σ_x در رابطه اصلی:

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x}{\sigma_x + (Y - \sigma_x)(1 + B)} = -\frac{2dD}{D}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x}{\sigma_x + Y - \sigma_x + YB - B\sigma_x} = -\frac{2dD}{D}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x}{B\sigma_x - (1 + B)Y} = \frac{2dD}{D}$$

با انتگرال گیری از دو طرف رابطه بالا:

$$\frac{1}{B} \ln[B\sigma_x - (1 + B)Y] = 2 \ln D + C$$

C: ثابت انتگرال گیری

$$\Rightarrow \ln[B\sigma_x - (1 + B)Y] = \ln D^{2B} + C'$$

$$\Rightarrow B\sigma_x - (1 + B)Y = C'' D^{2B}$$

قرار دادن شرایط مرزی:

$$\text{if } D = D_0 \rightarrow \sigma_x = 0 \Rightarrow -(1 + B)Y = C'' D_0^{2B} \Rightarrow C'' = \frac{-(1 + B)Y}{D_0^{2B}}$$

$$B\sigma_x - (1 + B)Y = \frac{-(1 + B)Y}{D_0^{2B}} D^{2B}$$

$$\frac{\sigma_x}{Y} = \frac{1 + B}{B} \left[1 - \left(\frac{D}{D_0} \right)^{2B} \right]$$

σ_x مقدار تنش در فاصله x است و جایی که قطر سیم برابر D است. اگر بخواهیم مقدار تنش لازم برای کشیدن سیم توسط الکتروموتور (σ_d) در جایی که سطح مقطع برابر D_1 می شود را بدست آوریم، رابطه را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{\sigma_d}{Y} = \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_0} \right)^{2B} \right]$$

$$or \quad \frac{\sigma_d}{Y} = \frac{1+B}{B} [1 - (1-r)^B]$$

$$r = \frac{A_0 - A_1}{A_0} = \frac{\pi D_0^2 - \pi D_1^2}{\pi D_0^2} = 1 - \frac{D_1^2}{D_0^2}$$

اگر ماده کارسخت شونده فرض شود، بجای Y (یک تنش تسلیم ثابت)، از $\bar{Y}$ تنش تسلیم میانگین استفاده می شود.

$$\frac{\sigma_d}{\bar{Y}} = \frac{1+B}{B} [1 - (1-r)^B]$$

تمرین ۱: در یک فرایند کشش سیم، سیم مسی با قطر ۵ mm تا قطر نهایی ۴ mm کشیده می شود. در صورتی

که ضریب اصطکاک بین سیم و قالب برابر با $\mu = 0/05$ و زاویه قالب ۱۰ درجه باشد، مطلوب است:

الف) نیروی مورد نیاز برای کشش سیم

ب) در صورتی که سرعت کشش سیم برابر با ۵ m/s باشد و برای انجام این فرایند از یک موتور الکتریکی با راندمان

۹۰٪ استفاده شود، شدت جریان لازم برای این موتور را به دست آورید.

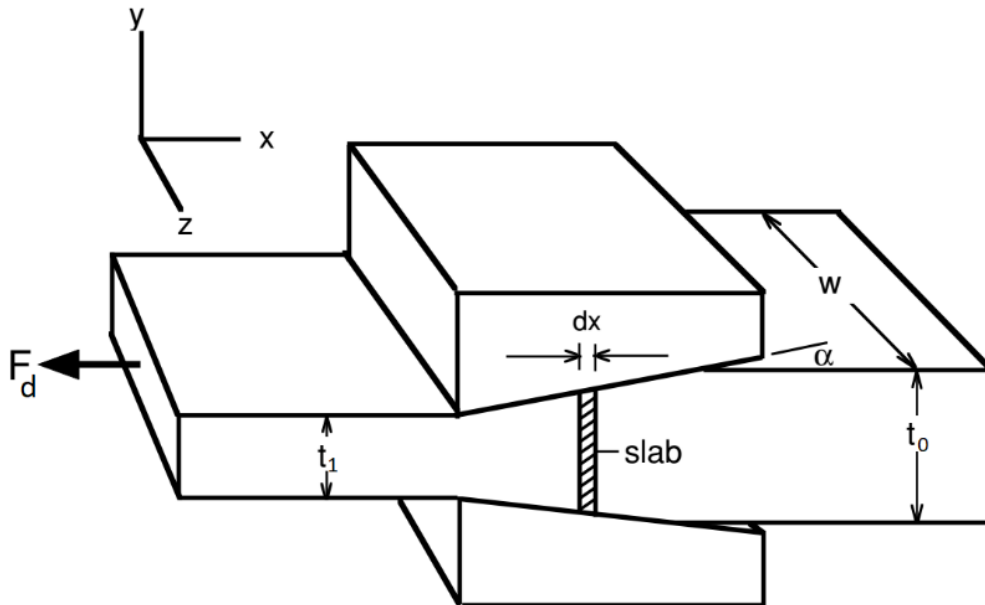
(تنش سیلان ثابت فرض شود، $Y = 20 \text{ kg/mm}^2$)

تمرین ۲: حداکثر کاهش سطح مقطع یک سیم را در عملیات کشش به وسیله قالب با زاویه 6° و ضریب اصطکاک ۰/۰۵ بدست آورده و نتایج را با حالت بدون اصطکاک مقایسه کنید. (فرض: ماده مومسان ایده‌آل)

تمرین ۳: فرمول کار همگن را با استفاده از آنالیز قاچی (تعادل نیروها) و در حالت بدون اصطکاک به دست آورید.

کشش تسمه یا ورق (Sheet (strip) drawing)

ورق فلزی با عرض اولیه W و ضخامت اولیه t_0 در نظر می‌گیریم که از داخل یک جفت قالب گوه‌ای کشیده می‌شود. هر دو گوه شیب یکسان به طرف خط مرکزی دارند و از آنجا که $W \gg t_0$ می‌توان فرض کرد شرایط کرنش صفحه‌ای است. این فرایند را کشش ورق یا تسمه می‌گویند.

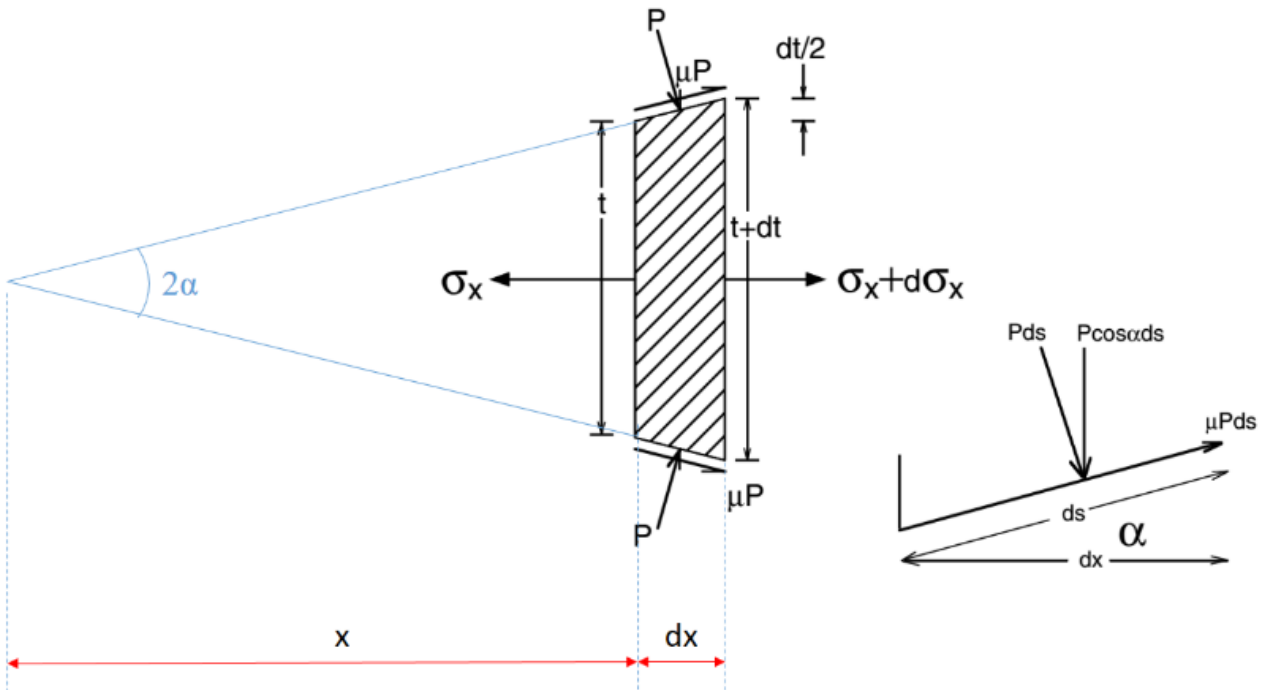


از آنجا که $W \gg t_0$ ، کرنش در راستای عرض (z) نادیده و صفر در نظر گرفته می‌شود (W ثابت می‌ماند). هدف ما محاسبه نیروی لازم برای کشش تسمه (F_d) یا تنش کشش تسمه ($\sigma_d = \frac{F_d}{wt_1}$) است.

در حالت کرنش صفحه‌ای:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x > 0 \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_z = 0 \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_y = -\varepsilon_x$$

$$\sigma_1 = \sigma_x > 0 \quad \sigma_3 = \sigma_y < 0 \quad \sigma_2 = \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$



$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_x + d\sigma_x)(t + dt)w - \sigma_x tw + 2P \sin \alpha \left(\frac{dx}{\cos \alpha} \right) w + 2\mu P \cos \alpha \left(\frac{dx}{\cos \alpha} \right) w = 0$$

پس از ساده کردن عبارات مشابه و حذف جملات دیفرانسیلی از مرتبه بالا:

$$\sigma_x dt + t d\sigma_x + 2P \tan \alpha dx + 2\mu P dx = 0$$

داریم:

$$\tan \alpha = \frac{dt/2}{dx} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cot \alpha dt$$

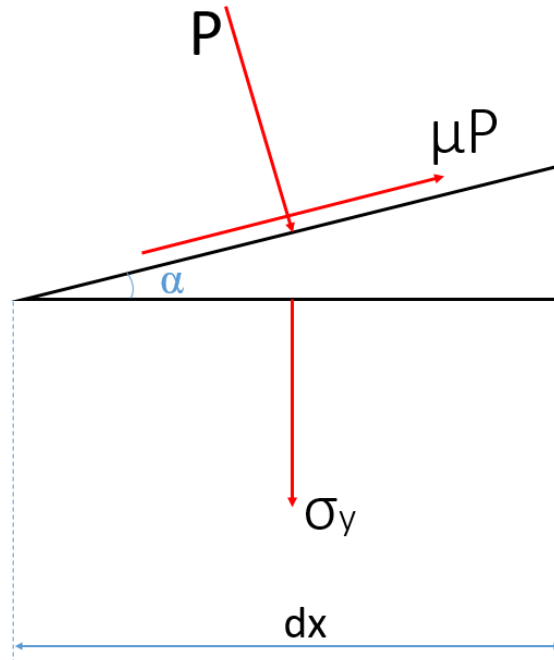
$$\Rightarrow \sigma_x dt + t d\sigma_x + P dt + \mu P \cot \alpha dt = 0$$

شبیه به فرایند کشش سیم $\mu \cot \alpha$ را برابر با ثابت B می گیریم:

$$t d\sigma_x + [\sigma_x + P(1 + B)] dt = 0$$

$$\frac{d\sigma_x}{\sigma_x + P(1+B)} = -\frac{dt}{t} \quad (1)$$

برای انتگرال گیری از رابطه قبل و محاسبه σ_x باید رابطه ای بین P و σ_x بیابیم. اگر براینده نیروها را برای برش زیر از المان در جهت y بنویسیم:



$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow \sigma_y w dx + P \cos \alpha \frac{w dx}{\cos \alpha} - \mu P \sin \alpha \frac{w dx}{\cos \alpha} = 0 \\ &\Rightarrow \sigma_y + P - \mu P \tan \alpha = 0 \\ &\Rightarrow \sigma_y = P(\mu \tan \alpha - 1) \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم α کوچک و ثابت (گاهی α متغیر است) و همچنین اصطکاک بسیار کم باشد ($\mu \approx 0$):

$$\sigma_y = -P$$

با فرض های بالا می توان نتیجه گرفت که جهات x ، y و z ، جهات اصلی بوده و:

$$\sigma_1 = \sigma_x > 0 \quad , \quad \sigma_2 = \sigma_z = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_x - P}{2} \quad , \quad \sigma_3 = \sigma_y = -P < 0$$

$$\text{Von - mises: } \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} = Y$$

$$\text{or } \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} = k$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} Y = 2k$$

$$\sigma_x + P = \frac{2}{\sqrt{3}} Y \quad \text{or} \quad \sigma_x + P = 2k \quad (2)$$

$$\text{From (1) and (2): } \frac{d\sigma_x}{\sigma_x + (2k - \sigma_x)(1 + B)} = -\frac{dt}{t}$$

$$\frac{d\sigma_x}{2k(1 + B) - B\sigma_x} = -\frac{dt}{t}$$

$$\frac{d\sigma_x}{B\sigma_x - 2k(1 + B)} = \frac{dt}{t}$$

$$\frac{1}{B} \ln[B\sigma_x - 2k(1 + B)] = \ln t + C$$

$$\Rightarrow \ln[B\sigma_x - 2k(1 + B)] = \ln t^B + C'$$

$$\Rightarrow B\sigma_x - 2k(1 + B) = C'' t^B$$

برای بدست آوردن مقدار C'' از شرایط مرزی استفاده می کنیم:

$$t = t_0 \rightarrow \sigma_x = 0 \Rightarrow -2k(1 + B) = C'' t_0^B \Rightarrow C'' = \frac{-2k(1 + B)}{t_0^B}$$

با قرار دادن مقدار C'' در رابطه اصلی:

$$B\sigma_x - 2k(1 + B) = \frac{-2k(1 + B)}{t_0^B} t^B$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x}{2k} = \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{t}{t_0} \right)^B \right]$$

برای اینکه مقدار σ_d (تنش جایی که t_1 است، تنش لازم برای کشش تسمه) را به دست آوریم باید به جای t مقدار t_1 را در رابطه قرار دهیم:

$$\frac{\sigma_d}{2k} = \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{t_1}{t_0} \right)^B \right]$$

$$\frac{\sigma_d}{\frac{2}{\sqrt{3}}Y} = \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{t_1}{t_0} \right)^B \right]$$

۲- روش کار ایده‌آل

می‌توان با در نظر نگرفتن اصطکاک در تحلیل قاچی به رابطه روش کار ایده‌آل رسید:

$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_x + d\sigma_x)(t + dt)w - \sigma_x tw + 2P \sin \alpha \left(\frac{dx}{\cos \alpha} \right) w + 2\mu P \cos \alpha \left(\frac{dx}{\cos \alpha} \right) w = 0$$

پس از ساده کردن عبارات مشابه و حذف جملات دیفرانسیلی از مرتبه بالا:

$$\sigma_x dt + t d\sigma_x + 2P \operatorname{tg} \alpha dx = 0$$

داریم:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dt/2}{dx} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cot \alpha dt$$

$$\Rightarrow \sigma_x dt + t d\sigma_x + P dt = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_x + P) dt + t d\sigma_x = 0$$

از روش تحلیل قاچی مشخص شد که با استفاده از معیار فون-میزز داریم:

$$\sigma_x + P = \frac{2}{\sqrt{3}}Y \quad \text{or} \quad \sigma_x + P = 2k$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}Y dt + t d\sigma_x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x}{\frac{2}{\sqrt{3}}Y} = -\frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x}{\frac{2}{\sqrt{3}}Y} = -\ln t + C$$

شبهه به قبل با استفاده از شرایط مرزی مقدار ثابت انتگرال گیری به دست می آید:

$$t = t_0 \rightarrow \sigma_x = 0 \Rightarrow C = \ln t_0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x}{\frac{2}{\sqrt{3}}Y} = \ln \frac{t_0}{t}$$

$$\sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}}Y \times \ln \frac{t_0}{t}$$

$$\sigma_d = \frac{2}{\sqrt{3}}Y \times \ln \frac{t_0}{t_1}$$

مثال: ورقی از یک فلز با ضخامت اولیه 0.1 inch و عرض 12 inch از میان قالبی با وجوه مستقیم و زاویه رأس

30° درجه کشیده می شود. اگر تنش تسلیم در برش خالص برابر با 30 ksi و مقدار میانگین ضریب اصطکاک برابر با

0.08 باشد، نیروی لازم برای انجام این عملیات و ایجاد 10% کاهش سطح مقطع را حساب کنید.

الف) با استفاده از تحلیل کار همگن

ب) با استفاده از آنالیز قاچی

حل: آنالیز قاجی:

$$r = \frac{A_0 - A_1}{A_0} = \frac{t_0 - t_1}{t_0} \Rightarrow r = 1 - \frac{t_1}{t_0} \Rightarrow \frac{t_1}{t_0} = 1 - r$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_d}{2k} = \frac{1+B}{B} [1 - (1-r)^B]$$

$$B = \mu \cot \alpha = 0.08 \cot 15 = 0.3$$

$$\frac{\sigma_d}{2 \times 30} = \frac{1+0.3}{0.3} [1 - (1-0.1)^{0.3}] \Rightarrow \sigma_d = 8.1 \text{ ksi}$$

$$\frac{t_1}{t_0} = 1 - r = 0.9 \Rightarrow t_1 = 0.9 \times 0.1 \text{ inch}$$

$$F_d = \sigma_d \times A_1 = 8.1 \times (12 \times 0.9 \times 0.1) = 8.74 \text{ klb}$$

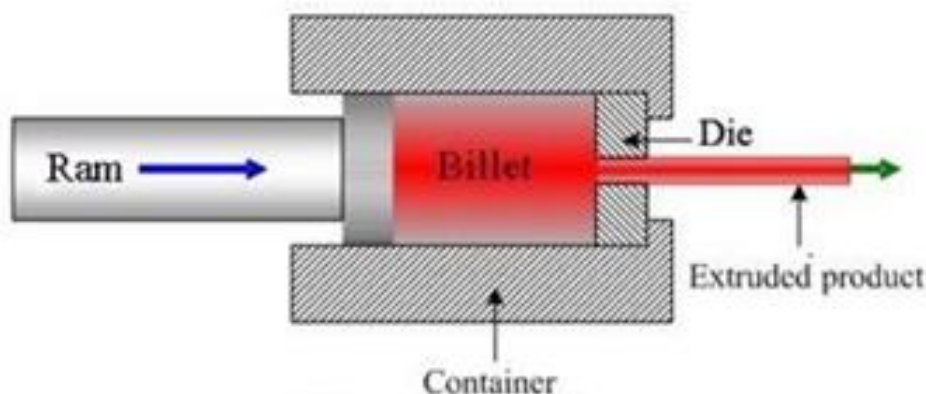
کار ایده آل:

$$\sigma_d = \frac{2}{\sqrt{3}} Y \ln \left(\frac{1}{1-r} \right) \Rightarrow \sigma_d = 2 \times 30 \times \ln \left(\frac{1}{1-0.1} \right)$$

$$\Rightarrow \sigma_d = 6.3 \text{ ksi} \Rightarrow F_d = 6.3 \times (12 \times 0.9 \times 0.1) = 6.82 \text{ klb}$$

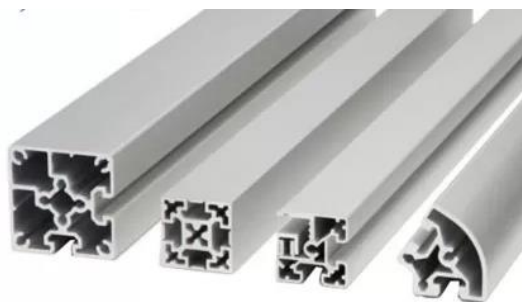
اکستروژن (فشار کاری، روزن رانی) (Extrusion):

در این فرایند، شمشال (Billet) وارد قالب شده و با فشار اعمالی به انتهای آن به مقطع موردنظر (پروفیل در و پنجره، قطعات I شکل، استوانه‌ای و ...) تبدیل می‌شود. به طور کلی این روش برای تولید میله‌های استوانه‌ای یا لوله‌های توخالی و همچنین اشکال پیچیده‌تر از فلزاتی که راحت‌تر اکستروژن می‌شوند استفاده می‌شود.



مزیت‌ها:

- قابلیت تولید مقاطع با شکل‌های پیچیده
- دقت ابعادی بالا و کیفیت سطحی مناسب
- امکان تغییر شکل مواد با شکل‌پذیری کم

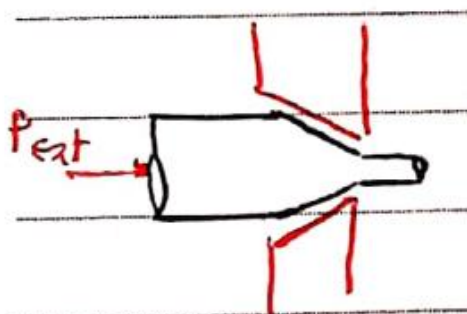


انواع فرایند اکستروژن:

الف) از نظر نوع قالب

۱- اکستروژن قالب باز (Open-die)

برای تغییر شکل‌های ساده



۲- اکستروژن قالب بسته (Closed-die)

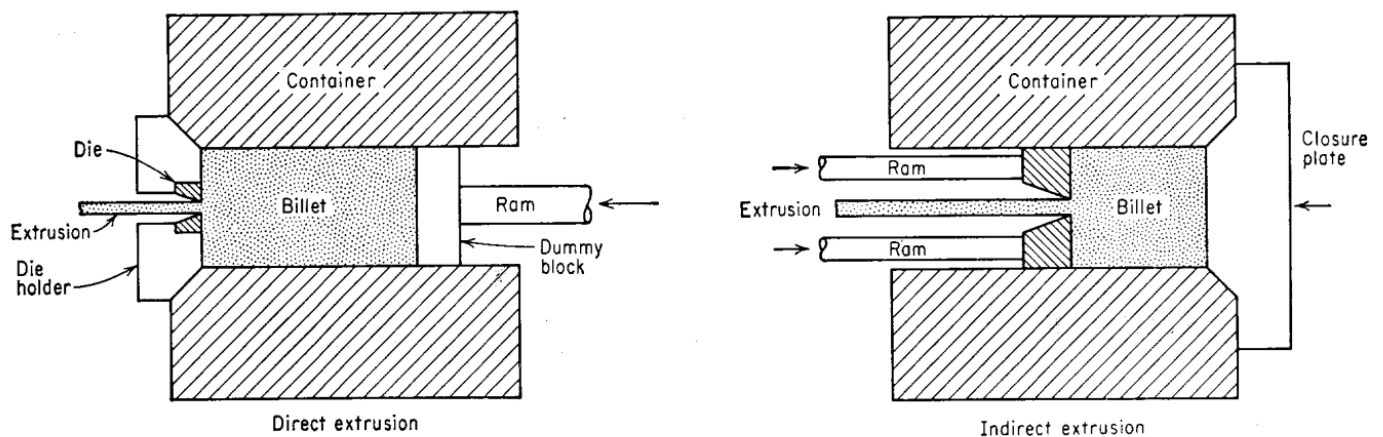
به دو صورت انجام می‌شود.

- اکستروژن مستقیم (Direct Extrusion)

در این نوع اکستروژن محدودیتی برای اعمال نیرو نداریم.

- اکستروژن غیرمستقیم (Indirect Extrusion)

چون محل اعمال نیرو همان طرف اکستروژن شدن محصول است، محدودیت برای اعمال نیرو وجود دارد. به دلیل عدم حرکت نسبی شمشال و محفظه، اصطکاک نسبی بین این دو نداریم و به نیروی کمتری نیاز است.



(ب) از نظر دما

۱- اکستروژن داغ

۲- اکستروژن سرد

نسبت اکستروژن (Extrusion ratio)

پارامتر نسبت اکستروژن را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$R = \frac{A_0}{A_f}$$

A_0 : مساحت سطح مقطع اولیه (شمشال)

A_f : مساحت سطح مقطع نهایی (محصول)

R برای فولاد تا ۴۰ ($r=97\%$) و برای فلز نرمی مانند آلومینیم تا ۴۰۰ نیز می‌رسد.

نسبت اکستروژن (R) قابلیت بهتری برای نشان دادن تغییرات در سطح مقطع نسبت به کاهش سطح مقطع نسبی یا r دارد.

$$r = \frac{A_0 - A_f}{A_0} = 0.95 \quad \rightarrow \quad R = 20$$

$$r = 0.98 \quad \rightarrow \quad R = 50$$

سرعت حرکت محصول تولید شده را می‌توان با رابطه زیر بیان کرد:

سرعت حرکت محصول = سرعت حرکت سنبه (سرعت حرکت شمشال) $\times R$

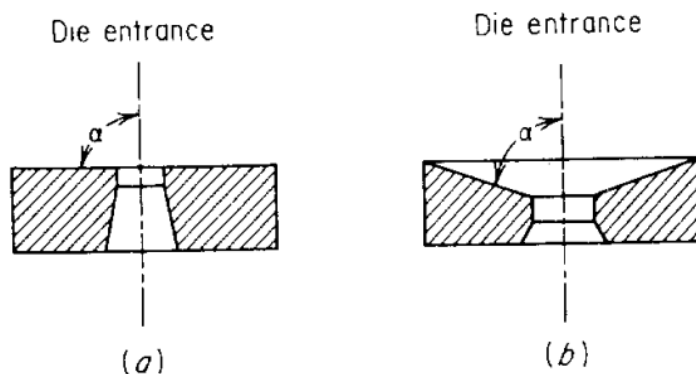
اگر سنبه با سرعت $1 \frac{cm}{s}$ حرکت کند و $R = 40$ باشد محصول با سرعت $40 \frac{cm}{s}$ حرکت می‌کند.

زاویه قالب

در اکستروژن نیز هم کار اضافی و هم کار اصطکاکی داریم.

از آنجا که در این فرایند زاویه قالب معمولاً بزرگ است، کار اضافی مقدار زیادی دارد. زاویه قالب نسبت به کشش سیم بیشتر است.

معمولاً در اکستروژن دو نوع قالب استفاده می‌شود. قالب‌های با وجوه مسطح و قالب‌های با زاویه ورودی مخروطی. همان‌طور که در مورد کشش سیم گفتیم، کاهش زاویه قالب کار اضافی را کاهش داده و از طرفی کار اصطکاکی را افزایش می‌دهد. برای بیشتر فرایندهای اکستروژن تجاری زاویه قالب بالای ۴۵ درجه استفاده می‌شود و به همین دلیل مقدار کار اضافی زیاد است.



Typical extrusion dies. (a) Flat-faced (square) die; (b) conical die.

روابط نیمه تجربی مربوط به اکستروژن

از آنجا که مقدار کار اضافی زیاد بوده و در محاسبات وارد نمی‌شود، دقت محاسبات برای صنعت زیاد نیست و معمولاً از روابط تجربی برای محاسبه نیروی لازم برای اکستروژن استفاده می‌شود.

$$\frac{P_{ext}}{\bar{Y}} = a + b \ln R$$

a و b : ثوابت رابطه

R : نسبت اکستروژن

$\bar{Y}$: تنش تسلیم متوسط

P_{ext} : فشار لازم برای اکستروژن

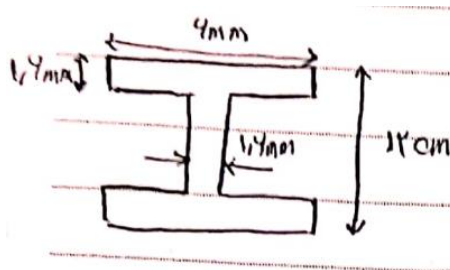
مثال: اگر رابطه مربوط به فشار اکستروژن آلومینیم به صورت زیر باشد:

$$\frac{P_{ext}}{\bar{Y}} = a + b \ln R$$

ثوابت a و b به ترتیب 0.8 و 1.5 باشند، تناژ پرس (نیروی پرس) اکستروژن که بتواند پروفیل آلومینیمی با مقطع I

شکل و ابعاد داده شده در شکل را از یک شمشال استوانه‌ای به قطر 25 cm تولید کند محاسبه نمایید. ($\bar{Y} =$

150 MPa)



$$A_0 = \frac{\pi}{4} D^2 = 490.8$$

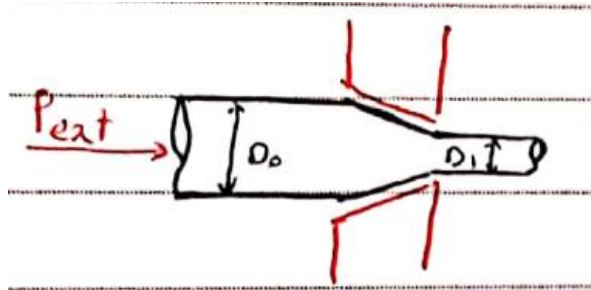
$$A_f = 2(6 \times 1.6) + (1.6 \times 8.8) = 33.28$$

$$\frac{P_{ext}}{150} = 0.8 + 1.5 \ln \frac{490.8}{33.28} \Rightarrow P = 725.5$$

تحلیل فرایند اکستروژن

الف) قالب باز:

اکستروژن یک مقطع ساده دایره‌ای را در نظر می‌گیریم:



۱- روش کار ایده‌آل:

$$\frac{\text{work}}{\text{volume}} = \frac{P_{ext} \times A_0 \times L_0}{A_0 \times L_0} = P_{ext}$$

$$P_{ext} = \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}$$

برای رفتار پلاستیک ایده‌آل:

$$P_{ext} = Y \times \ln\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

برای رفتار کارسخت شونده:

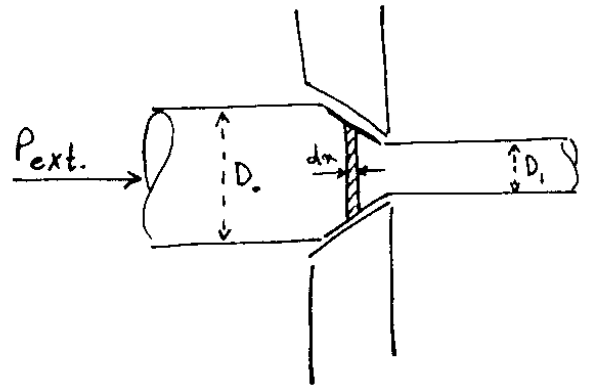
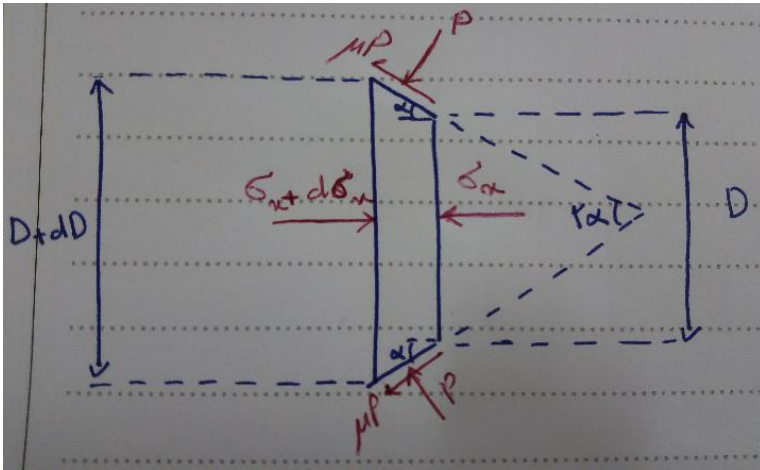
$$P_{ext} = \bar{Y} \times \ln\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

اگر بازدهی را نیز لحاظ کنیم:

$$P_{ext} = \frac{1}{\eta} \times Y \times \ln\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

$$P_{ext} = \frac{1}{\eta} \times \bar{Y} \times \ln\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

۲- روش آنالیز قاجی:



$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_x + d\sigma_x) \frac{\pi}{4} (D + dD)^2 - \sigma_x \frac{\pi}{4} D^2 - P \sin \alpha \left(\frac{\pi D dx}{\cos \alpha} \right) - \mu P \cos \alpha \left(\frac{\pi D dx}{\cos \alpha} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} (\sigma_x + d\sigma_x) (D^2 + 2 D dD + d^2 D) - \sigma_x D^2 - 4 P D \tan \alpha dx - 4 \mu P D dx = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_x D^2 + 2 \sigma_x D dD + \sigma_x d^2 D + D^2 d\sigma_x + 2 D dD d\sigma_x + d\sigma_x d^2 D - \sigma_x D^2 - 4 P D \tan \alpha dx - 4 \mu P D dx = 0$$

جملات شامل حاصلضرب دو یا تعداد بیشتری عبارت دیفرانسیلی (جملات قرمز رنگ) بسیار کوچک بوده و قابل صرف نظر هستند.

$$\Rightarrow \frac{1}{D} (2 \sigma_x dD + D d\sigma_x - 4 P \tan \alpha dx - 4 \mu P dx) = 0$$

برای زاویه α داریم:

$$\tan \alpha = \frac{dD/2}{dx} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cot \alpha dD$$

$$\Rightarrow 2\sigma_x dD + Dd\sigma_x - 2PdD - 2\mu P \cot \alpha dD = 0$$

$$\Rightarrow (2\sigma_x - 2P - 2\mu P \cot \alpha)dD = -Dd\sigma_x$$

$$\Rightarrow 2(\sigma_x - P(1 + B))dD = -Dd\sigma_x$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x}{\sigma_x - P(1 + B)} = -\frac{2dD}{D}$$

در اینجا نیز برای محاسبه P بر حسب σ_x می‌توان تنش‌ها را مطابق زیر، معادل تنش‌های اصلی در نظر گرفت و از معیار فون-میزز استفاده کرد.

$$\sigma_1 = -\sigma_x \quad . \quad \sigma_2 = -P \quad . \quad \sigma_3 = -P$$

و با استفاده از معیار فون-میزز می‌توان رابطه بین P و σ_x را مشخص کرد.

$$\text{Von - mises:} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} = Y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [(-\sigma_x + P)^2 + (-\sigma_x + P)^2 + (-P + P)^2]^{\frac{1}{2}} = Y$$

$$\Rightarrow -\sigma_x + P = Y \quad \text{or} \quad P = Y + \sigma_x$$

با قرار دادن P بر حسب σ_x در رابطه اصلی:

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x}{\sigma_x - (Y + \sigma_x)(1 + B)} = -\frac{2dD}{D}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x}{B\sigma_x + (1 + B)Y} = \frac{2dD}{D}$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف رابطه بالا:

$$\frac{1}{B} \ln[B\sigma_x + (1 + B)Y] = 2 \ln D + C$$

C: ثابت انتگرال گیری

$$\Rightarrow \ln[B\sigma_x + (1+B)Y] = \ln D^{2B} + C'$$

$$\Rightarrow B\sigma_x + (1+B)Y = C'' D^{2B}$$

قرار دادن شرایط مرزی:

$$\text{if } D = D_1 \rightarrow \sigma_x = 0 \Rightarrow (1+B)Y = C'' D_1^{2B} \Rightarrow C'' = \frac{(1+B)Y}{D_1^{2B}}$$

$$B\sigma_x + (1+B)Y = \frac{(1+B)Y}{D_1^{2B}} D^{2B}$$

$$\frac{\sigma_x}{Y} = -\frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{D}{D_1} \right)^{2B} \right]$$

σ_x مقدار تنش در فاصله X است. اگر بخواهیم مقدار فشار اکستروژن را بدست آوریم، رابطه را به صورت زیر

می نویسیم:

$$\frac{P_{ext}}{Y} = -\frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{D_0}{D_1} \right)^{2B} \right]$$

از آنجایی که اکستروژن برخلاف فرایندهایی مانند کشش سیم در دمای بالا انجام می شود و در دمای بالا تنش سیلان طبق رابطه زیر وابسته به نرخ کرنش است، معمولاً از این رابطه برای محاسبه تنش سیلان استفاده می شود:

$$\sigma = C \varepsilon^m$$

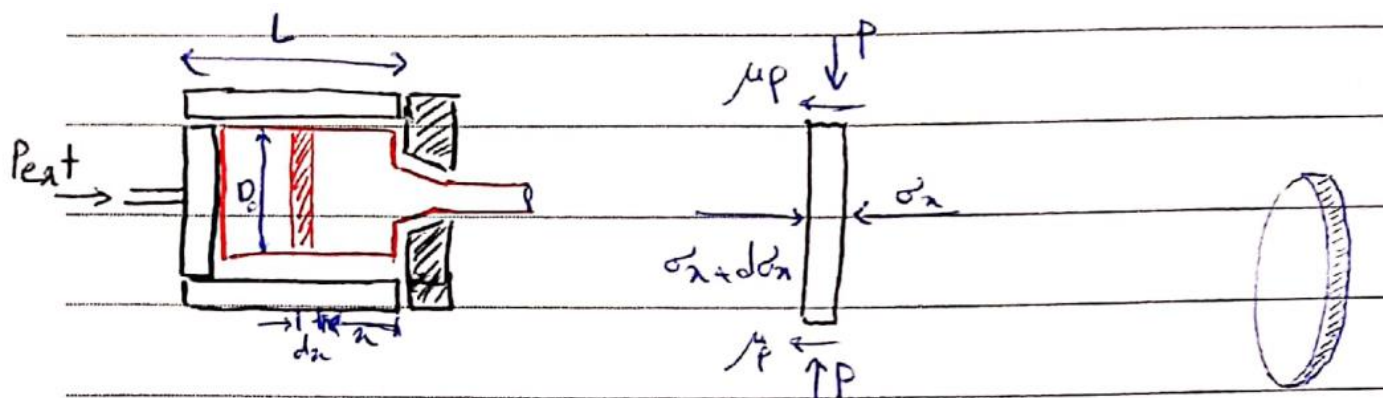
رابطه بر حسب نسبت اکستروژن:

$$\frac{P_{ext}}{Y} = -\frac{1+B}{B} [1 - R^B]$$

اگر P_{ext} بیشتر از تنش تسلیم شود قبل از ورود به قالب تغییرشکل پلاستیکی می‌دهد و فرایند اکستروژن انجام نمی‌شود. بنابراین مقدار حداکثر P_{ext} برابر با تنش سیلان ماده است. از این می‌توان برای محاسبه حداکثر کاهش قطر در یک مرحله از فرایند استفاده کرد.

ب) اکستروژن قالب بسته

روش آنالیز قچی



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow (\sigma_x + d\sigma_x) \frac{\pi}{4} D_0^2 - \sigma_x \frac{\pi}{4} D_0^2 - \mu P \pi D_0 dx = 0$$

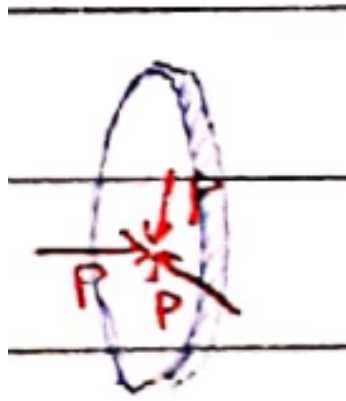
$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \sigma_x D_0^2 + D_0^2 d\sigma_x - \sigma_x D_0^2 - 4\mu P D_0 dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} D_0 d\sigma_x - 4\mu P dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x}{P} = \frac{4\mu dx}{D_0}$$

برای نوشتن P بر حسب σ_x در اینجا نمی‌توان از معیار تسلیم استفاده کرد زیرا المان انتخاب شده در ناحیه تغییرشکل پلاستیکی داخل قالب قرار ندارد.

در این مورد فرض می‌کنیم تنش‌های اعمالی به صورت هیدرواستاتیکی هستند یعنی داریم:



$$\sigma_x = P$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x}{\sigma_x} = \frac{4\mu}{D_0} dx$$

$$\Rightarrow \ln \sigma_x = \frac{4\mu}{D_0} x + C$$

محاسبه ثابت انتگرال‌گیری از شرایط مرزی:

$$\text{if } x = 0 \rightarrow \sigma_x = \sigma_{x0}$$

σ_{x0} : تنش لازم برای اکستروژن قالب باز (محاسبه شده در قسمت قبل)

$$\Rightarrow \ln \sigma_{x0} = \frac{4\mu}{D_0} (0) + C \Rightarrow C = \ln \sigma_{x0}$$

$$\Rightarrow \ln \sigma_x = \frac{4\mu}{D_0} x + \ln \sigma_{x0}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{\sigma_x}{\sigma_{x0}} = \frac{4\mu}{D_0} x$$

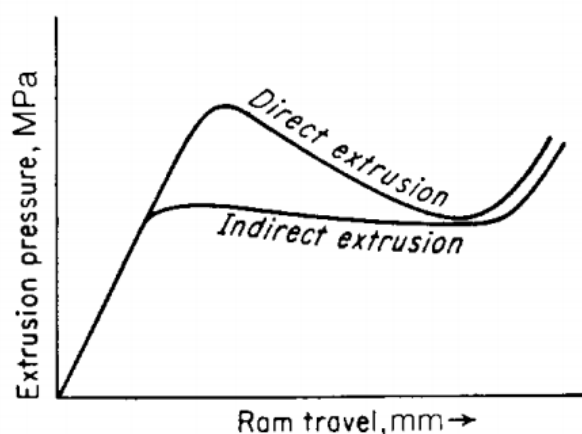
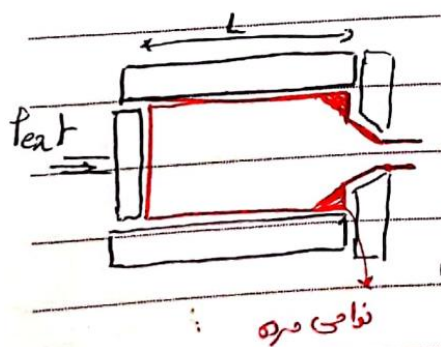
تنش در فاصله X:

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x}{\sigma_{x0}} = \exp\left(\frac{4\mu}{D_0} x\right)$$

برای اینکه تنش لازم برای فرایند اکستروژن را به دست آوریم باید به جای x در رابطه بالا، l یا طول لحظه‌ای شمشال قرار داده شود:

$$\frac{P_{ext}}{\sigma_{x0}} = \exp(\frac{4\mu l}{D_0})$$

تغییرات نیرو در فرایند اکستروژن:



افزایش نیرو ابتدا ناشی از نیروی لازم برای فشار دادن شمشال برای پر کردن محفظه اکستروژن است. برای اکستروژن مستقیم، فلز با حداکثر مقدار فشار اعمالی شروع به سیلان می‌کند که به این فشار، فشار باز کننده راه (breackthrough pressure) می‌گویند. با اکستروژن شدن شمشال از میان قالب، به دلیل کاهش طول شمشال و کاهش نیروی اصطکاکی مقاوم (به دلیل کاهش طول در تماس فلز با محفظه)، فشار لازم برای ادامه فرایند و جریان فلز کاهش می‌یابد. اما در اکستروژن غیرمستقیم که شمشال و محفظه حرکت نسبی ندارند، فشار لازم برای اکستروژن با حرکت سنبه تقریباً ثابت و برابر با تنش لازم برای تغییر شکل فلز داخل قالب باقی می‌ماند.

در انتهای منحنی‌ها، فشار به سرعت افزایش می‌یابد. در این قسمت از نمودار، سنبه به انتهای قالب رسیده است و باید ماده موجود در ناحیه مرده (گوشه قالب) خارج شود که احتیاج به نیروی بیشتری دارد.

آهن‌گری (Forging)

شامل تغییر شکل فلز به وسیله نیروهای فشاری متوالی است.

انواع آهن‌گری بر اساس دمای تغییر شکل:

۱- آهن‌گری داغ (Hot forging)

۲- آهن‌گری سرد (Cold forging)

بیش از ۹۰٪ فرایندهای آهن‌گری در محدوده کار داغ انجام می‌شوند.

انواع آهن‌گری بر اساس نحوه اعمال نیروی فشاری:

۱- آهن‌گری ضربه‌ای (Impact forging): از یک چکش یا پتک (Hammer) و با اعمال بارهای ضربه‌ای برای

تغییر شکل استفاده می‌شود.

۲- آهن‌گری فشاری (پرسی) (Press forging): از یک پرس برای تغییر شکل استفاده می‌شود.

مقایسه چکش و پرس:

- چکش‌ها ارزان‌تر هستند.

- در آهن‌گری ضربه‌ای زمان تماس با ماده کمتر و در نتیجه افت دمایی کمتر همچنین اصطکاک و سایش قالب

کمتر است.

- کنترل نیرو در پرس‌ها بهتر و در نتیجه دقت ابعادی قطعات تولیدی بیشتر است.

- تخریب قالب در استفاده از پرس کمتر است.

- در پرس هیدرولیک در هر نقطه از مسیر کوبه (ram) از تمام نیروی پرس می‌توان استفاده کرد.

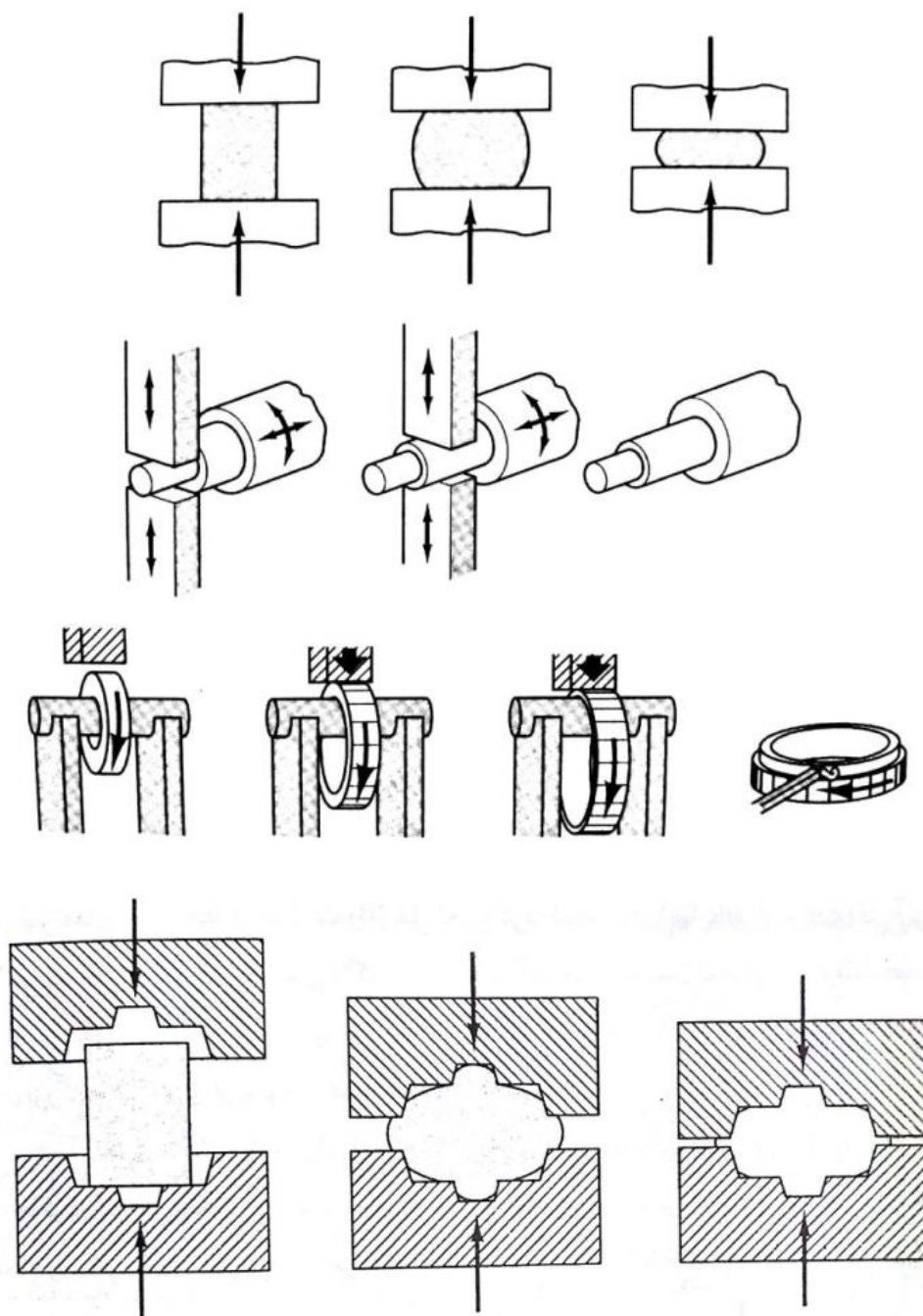
انواع آهنگری بر اساس نوع قالب:

۱- آهنگری قالب باز (Open-die forging)

۲- آهنگری قالب بسته (Closed-die forging)

در فرایند آهنگری قالب باز برعکس حالت قالب بسته، تغییر شکل فلز در همه جهات بوسیله قالب و ابزار محدود نمی شود.

در آهنگری قالب بسته از قطعات جفت شونده و با ابعاد دقیق برای تبدیل قطعه به شکل نهایی استفاده می شود.



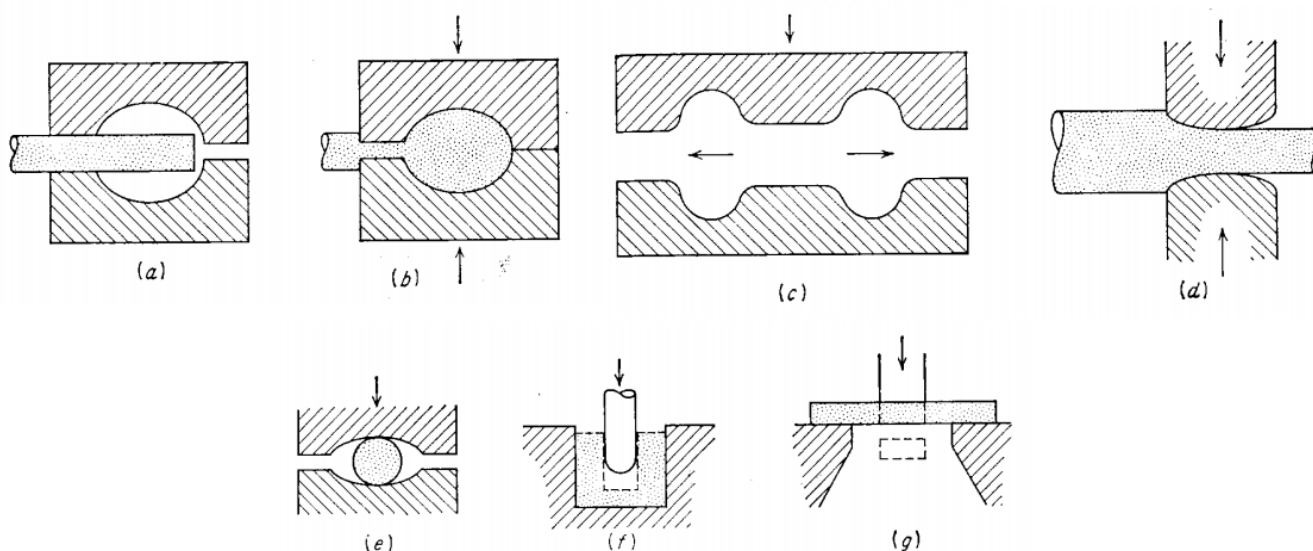
مقایسه کاربرد آهنگری قالب باز و قالب بسته:

آهنگری قالب باز عمدتاً برای تولید قطعات با شکل‌های ساده، قطعات بزرگ و سنگین و برای شکستن ساختار قطعات و شمش‌های ریخته‌گری شده و بهبود خواص آنها استفاده می‌شود. در اثر آهنگری شاهد از بین رفتن جدایش‌ها (شکسته شدن دندریت‌ها)، از بین رفتن حفره‌ها و در نتیجه بهبود خواص مکانیکی هستیم.

آهنگری قالب بسته عموماً برای تولید قطعات کوچک و پیچیده و با تعداد زیاد استفاده می‌شود.

به دلیل پیچیدگی شکل قطعه، معمولاً آهنگری قالب بسته در مراحل مختلفی انجام می‌شود.

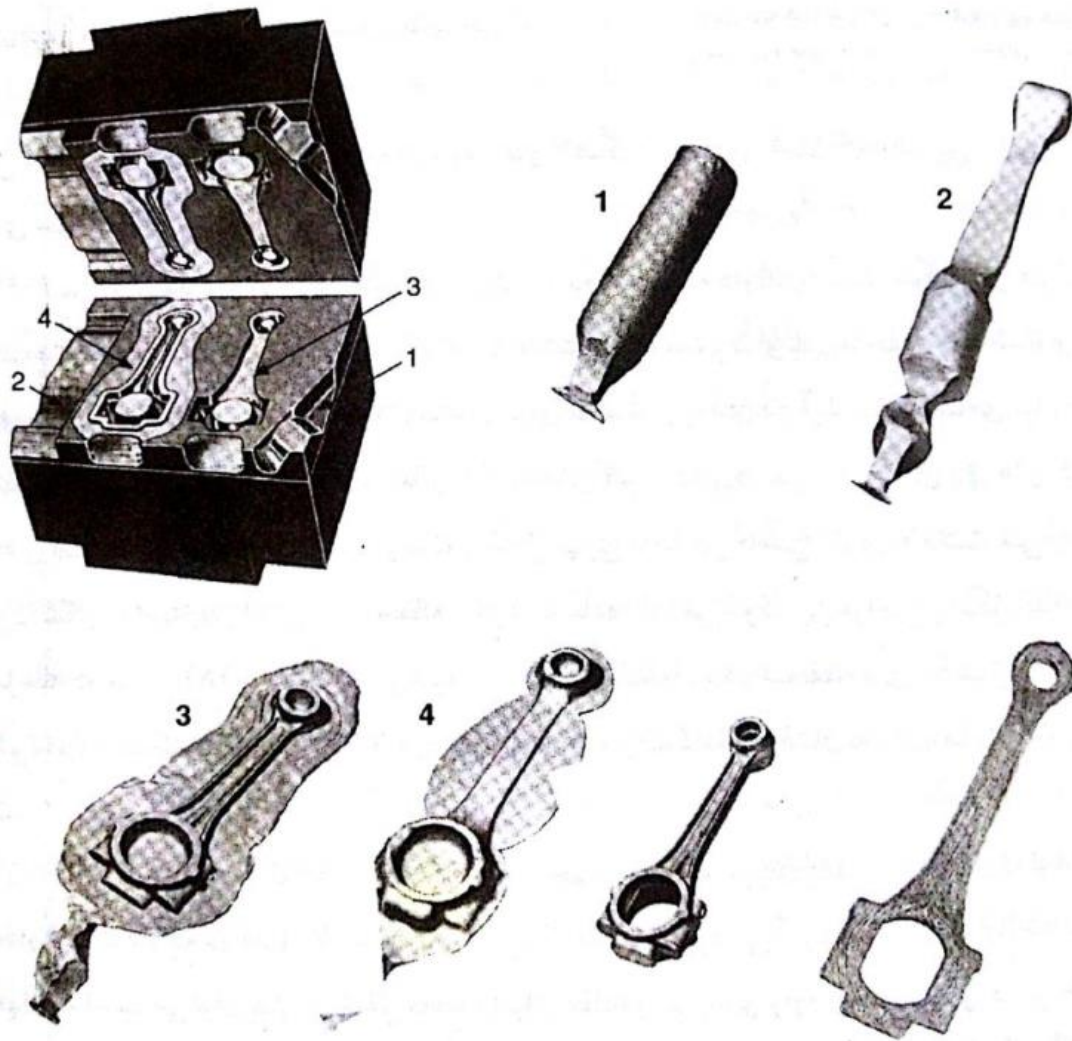
مراحل اولیه شامل تهیه پری‌فرم (Preform) یا شکل‌های میانی است. در این مراحل، از طریق فرایندهای لبه‌زنی (Edging) و باریک‌سازی (Fullering) به ترتیب ماده را به سمت نواحی مورد نیاز آن جمع کرده یا ماده را از نواحی که ماده کمتری نیاز دارد دور می‌کنند.



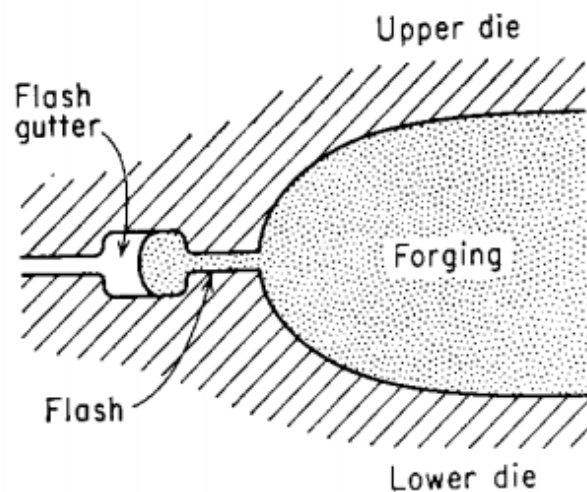
Forging operations. (a, b) Edging; (c) fullering; (d) drawing; (e) swaging; (f) piercing; (g) punching.

در مرحله بعد، ماده در قالب قطعه‌زنی (Blocking die) قرار گرفته و بیشترین مقدار تغییر شکل (در میان کل مراحل) به ماده اعمال می‌شود تا شکلی شبیه به شکل نهایی پیدا کند. سپس در قالب نهایی (Finishing die) قطعه کاملاً به شکل و ابعاد نهایی در می‌آید. معمولاً حفرات قالب قطعه‌زنی و قالب نهایی در یک قالب واحد تراشیده و ایجاد می‌شوند.

در مرحله نهایی تولید، پلیسه اطراف قطعه در قالب پلیسه‌زنی (Trimming die) برداشته می‌شود.



برای اینکه فلز به خوبی به همه قسمت‌های حفره قالب برسد، حجم ماده خام اولیه را کمی بیشتر از حجم قطعه نهایی می‌گیرند. در نتیجه در مرحله نهایی آهنگری، مقداری از ماده به صورت پلیسه از شیار بین دو نیمه قالب بیرون می‌زند. برای اینکه ضخامت پلیسه زیاد نشود، ابتدای مسیر آن را نازک و در انتها یک شیار ضخیم‌تر پلیسه‌رو در نظر می‌گیرند.



Sectional view through closed-die forging.

وظایف پلیسه:

۱- به عنوان دریچه اطمینان برای فلز اضافی در حفره قالب بسته عمل می‌کند.

۲- به پر شدن کامل حفره اصلی قالب کمک می‌کند. از آنجا که ضخامت پلیسه کم است فلز در آن زودتر سرد شده و فرار فلز را تنظیم می‌کند. به فلز گرم‌تر داخل حفره اصلی فشار وارد کرده و این باعث کمک به پر شدن کلیه فرورفتگی‌های قالب می‌شود.

در طراحی پلیسه و ابعاد آن باید توجه داشت که ابعاد آن به شکلی انتخاب شود که اکستروود شدن فلز به دهانه زائده سخت‌تر از پر شدن تمام قسمت‌های قالب و جزئیات آن باشد. از طرفی نباید آنقدر دهانه شیار پلیسه رو باریک باشد که باعث ایجاد نیروهای بزرگ آهنگری یا احتمال شکست و سایش قالب شود.

به طور کلی مراحل تولید قطعه به روش آهنگری قالب بسته را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

- تهیه ماده خام از شمش

- حرارت دادن ماه اولیه تا درجه حرارت فورجینگ

- اکسیدزدایی

- تهیه پیش‌فرم

- آهنگری نهایی

- از بین بردن زائده‌ها

- انجام ماشین‌کاری

- انجام عملیات حرارتی (نرماله کردن و ...)

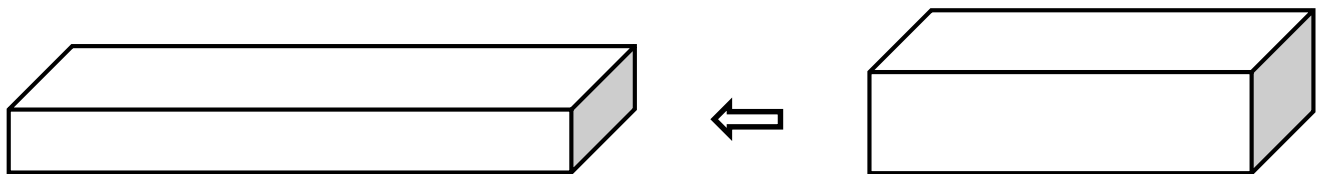
- تنش‌گیری و تاب‌گیری

- کنترل کیفی

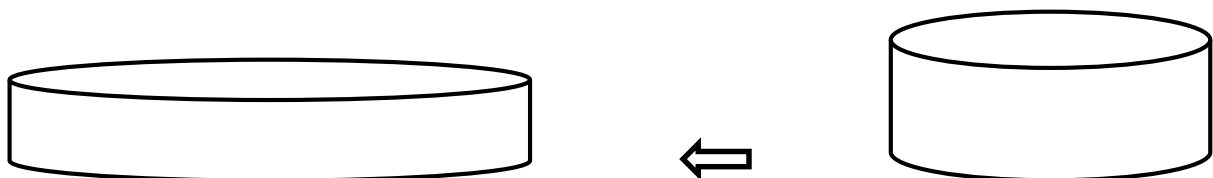
تحلیل فرایند آهنگری:

دو حالت ساده را بررسی می کنیم:

- آهنگری کرنش صفحه‌ای (Plain strain)

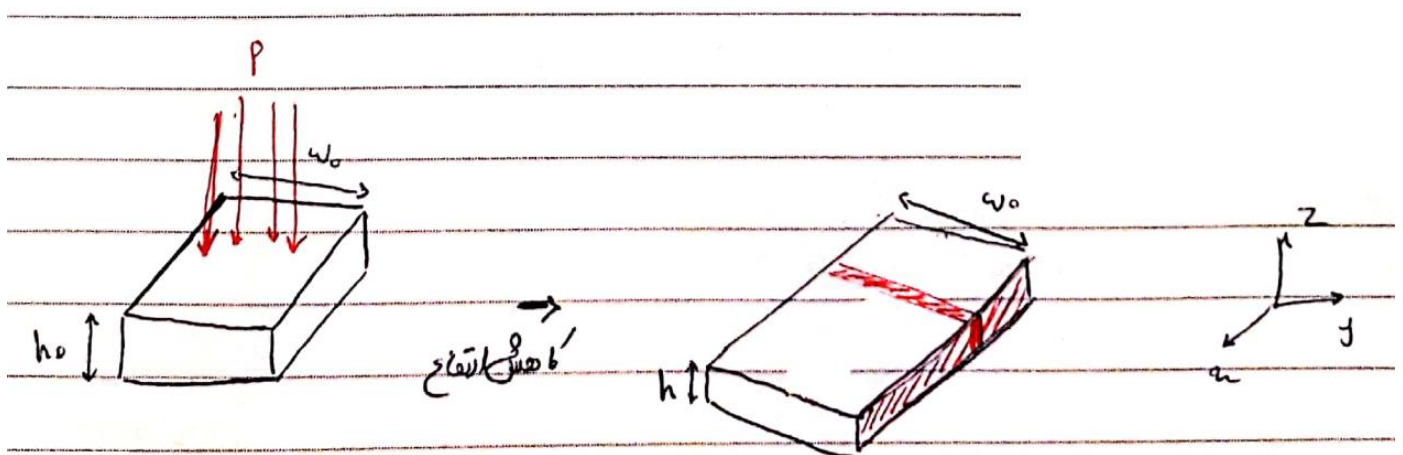


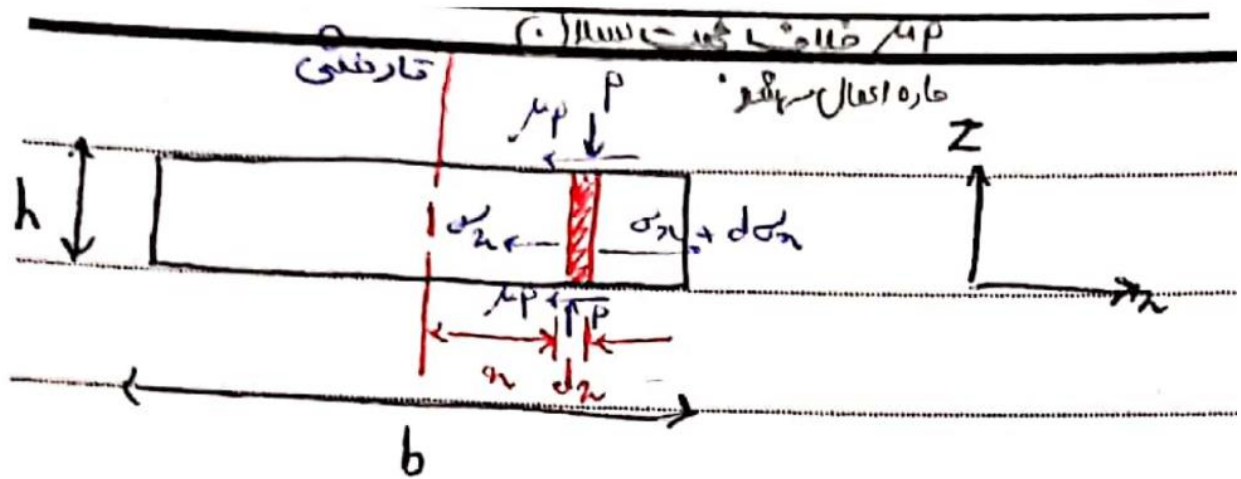
- آهنگری متقارن (Symmetric)



آهنگری کرنش صفحه‌ای

- آنالیز قچی





المان در سمت راست است پس سیلان ماده به سمت راست هدایت می‌شود و μP در خلاف جهت سیلان و به سمت چپ است.

در این حالت داریم: $\varepsilon_y = 0$

$$\sum F_x = 0$$

$$(\sigma_x + d\sigma_x)hw - \sigma_x hw - 2\mu P w dx = 0$$

$$\Rightarrow hwd\sigma_x - 2\mu P w dx = 0$$

$$\Rightarrow hd\sigma_x - 2\mu P dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x}{P} = \frac{2\mu}{h} dx$$

$$\text{Von-mises criterion in plane strain state: } \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} Y = 2k \Rightarrow \sigma_x + P = \frac{2}{\sqrt{3}} Y =$$

$$2k \Rightarrow d\sigma_x = -dP$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{2\mu}{h} dx$$

$$\Rightarrow \ln P = -\frac{2\mu}{h} x + C$$

$$\Rightarrow P = C' \exp\left(-\frac{2\mu}{h} x\right)$$

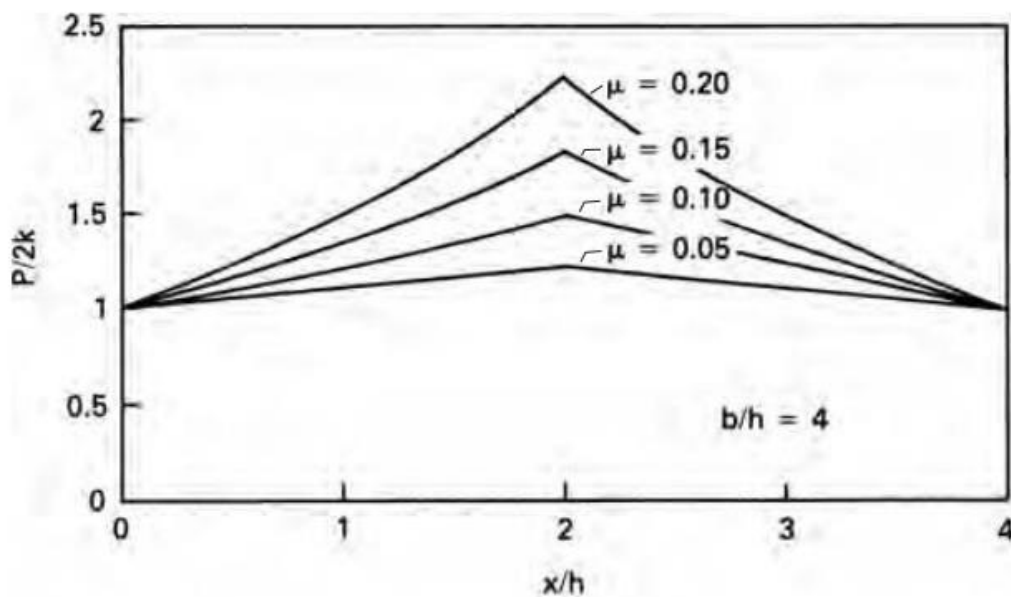
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{b}{2} \\ \sigma_x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P = \frac{2}{\sqrt{3}} Y = 2k \Rightarrow C' = \frac{2k}{\exp\left(-\frac{\mu b}{h}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2k} = \exp \left[\frac{2\mu}{h} \left(\frac{b}{2} - x \right) \right]$$

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow \left(\frac{P}{2k} \right)_{max} = \exp \left(\frac{\mu b}{h} \right)$$

$$\text{if } x = \frac{b}{2} \Rightarrow \left(\frac{P}{2k} \right)_{min} = 1$$

در نتیجه توزیع تنش مطابق شکل زیر داریم:



نتیجه می‌شود هر چه ضخامت کمتر باشد مقدار P لازم می‌شود.

رابطه بالا برای فشار آهنگری، برای مقادیر کوچک μ و در حالتی که تنش برشی ایجاد شده در اثر اصطکاک (μP)

کمتر از استحکام تحت برش (k) باشد، صادق است:

نیرو و فشار متوسط در آهنگری کرنش صفحه‌ای:

چون تنش فشاری متغیر است، برای محاسبه نیرو باید انتگرال‌گیری کنیم و یا یک مقدار متوسط برای σ در نظر

بگیریم:

$$F_z = \int P dA = 2w \int_0^{\frac{b}{2}} P dx \quad dA = w dx$$

$$\Rightarrow F_z = 2w \times \int_0^{\frac{b}{2}} 2k \times \exp\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{b}{2} - x\right)\right] dx$$

$$\Rightarrow F_z = 2w \times 2k \times \left(-\frac{h}{2\mu}\right) \exp\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{b}{2} - x\right)\right]_0^{\frac{b}{2}}$$

$$\Rightarrow F_z = 2w \times 2k \times \left(-\frac{h}{2\mu}\right) \left[1 - \exp\left(\frac{\mu b}{h}\right)\right]$$

$$\Rightarrow F_z = 2k \times \left(\frac{hw}{\mu}\right) \left[\exp\left(\frac{\mu b}{h}\right) - 1\right]$$

اما فشار میانگین لازم برای این تغییر شکل را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$P_{av} = \frac{F_z}{A} \Rightarrow \frac{P_{av}}{2k} = \frac{1}{bw} \times \frac{hw}{\mu} \times \left[\exp\left(\frac{\mu b}{h}\right) - 1\right]$$

$$\frac{P_{av}}{2k} = \frac{h}{\mu b} \times \left[\exp\left(\frac{\mu b}{h}\right) - 1\right]$$

با بسط دادن عبارت اکسپونانسیلی بالا داریم:

$$\exp\left(\frac{\mu b}{h}\right) = 1 + \left(\frac{\mu b}{h}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\mu b}{h}\right)^2 + \dots$$

به ازای مقادیر کوچک $\frac{\mu b}{h}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{P_{av}}{2k} = 1 + \left(\frac{\mu b}{2h}\right) + \dots \approx 1 + \frac{\mu b}{2h}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{av}}{2k} = 1 + \frac{\mu b}{2h}$$

از روابط بالا مشخص است که در فرایندهای آهنگری باید ابعاد نهایی قطعه را در فرمول‌ها قرار دهیم:

آهنگری، معمولاً یک فرایند کار داغ است. معمولاً کارسختی نداریم و تنش تسلیم را مقدار ثابتی در نظر می‌گیریم. اما وقتی نرخ کرنش زیاد باشد باید به کمک رابطه زیر آن را به دست آوریم:

$$\sigma = C \varepsilon^m$$

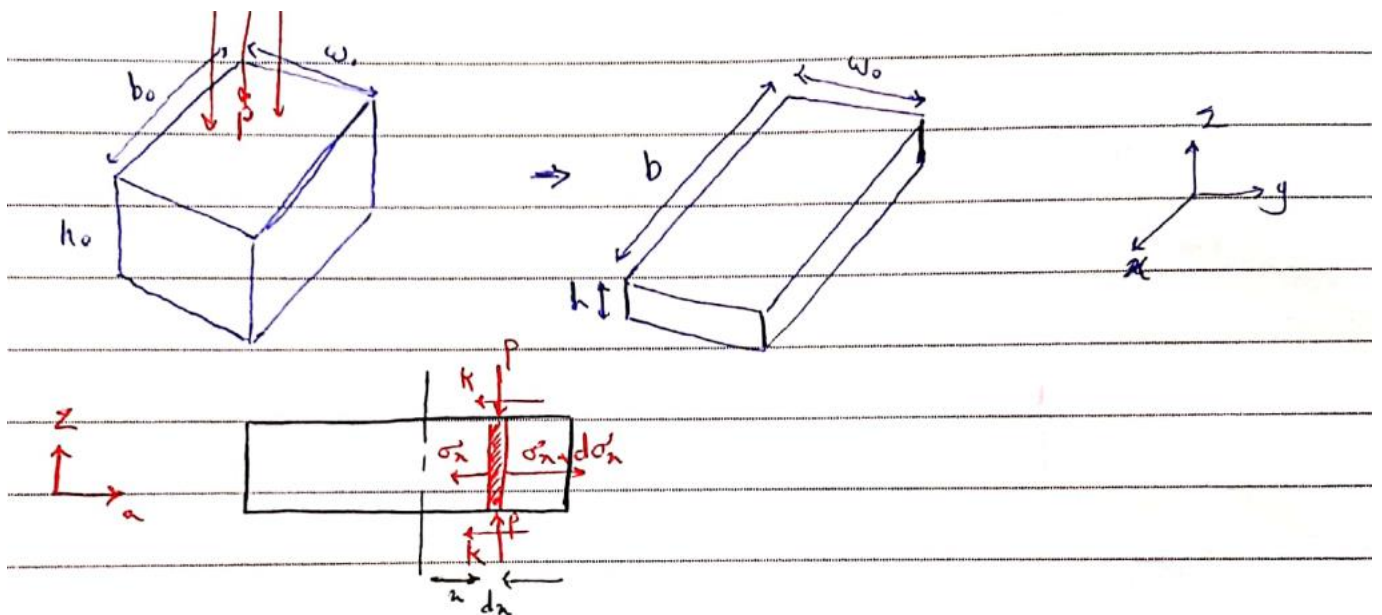
حالت اصطکاک چسبنده

چون فرایند آهنگری معمولاً به صورت داغ انجام می‌شود، به نظر می‌رسد که مقدار اصطکاک باید زیاد باشد:

$$\tau = mk$$

$m = 0$	Frictionless	$\tau = \mu P = 0$
$0 < m < 1$	Sliding friction	$\tau = \mu P = mk$
$m = 1$	Sticking friction	$\tau = \mu P = k$

اگر روان کاری در فرایند آهنگری خوب صورت نگیرد ممکن است اصطکاک از نوع چسبنده بوده و در نتیجه روابط تغییر می‌کند:



$$\sum F_x = 0$$

$$(\sigma_x + d\sigma_x)hw - \sigma_x hw - 2kwdx = 0$$

$$\Rightarrow h d\sigma_x - 2k dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_x}{2k} = \frac{dx}{h}$$

$$\text{Von-mises criterion in plane strain state: } \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}Y = 2k \quad \Rightarrow \quad \sigma_x + P =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}Y = 2k \quad \Rightarrow \quad d\sigma_x = -dP$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{2k} = -\frac{dx}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2k} = -\frac{x}{h} + C$$

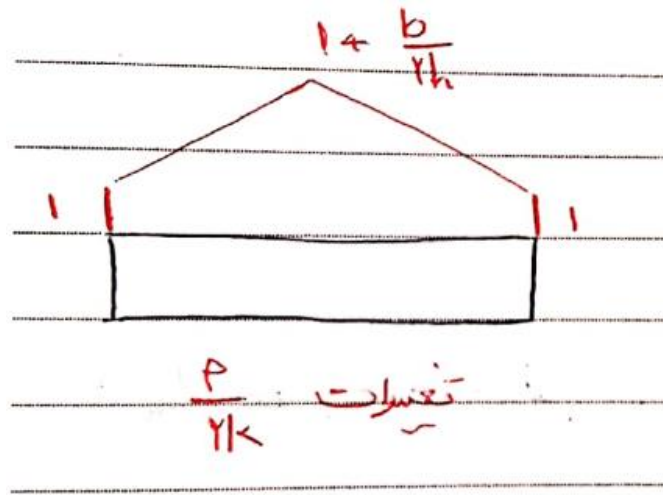
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{b}{2} \\ \sigma_x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P = 2k$$

$$\Rightarrow \frac{2k}{2k} = -\frac{b}{2h} + C \quad \Rightarrow \quad C = 1 + \frac{b}{2h}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2k} = 1 + \frac{\frac{b}{2} - x}{h}$$

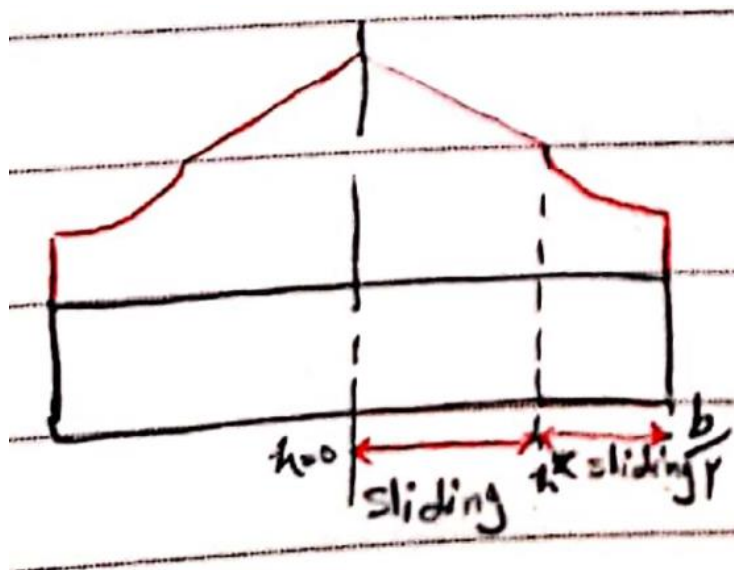
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow \left(\frac{P}{2k} \right)_{\max} = 1 + \frac{b}{2h} \\ x = \frac{b}{2} \Rightarrow \left(\frac{P}{2k} \right)_{\min} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{P}{2k} \right)_{\text{average}} = 1 + \frac{b}{4h}$$

تغییرات تنش در این حالت برخلاف حالت اصطکاک لغزنده، خطی است.



حالت مخلوط اصطکاک لغزنده و چسبنده:

در فرایند ممکن است توزیع تنش زیر یا حالت مخلوط اصطکاک لغزنده و چسبنده را داشته باشیم. با توجه به رابطه $\tau = \mu P$ در قسمت‌هایی که مقدار P زیاد باشد τ بزرگ شده و به سمت k می‌رود. در نتیجه اصطکاک از نوع چسبنده خواهد بود.



$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x < x^* \Rightarrow \mu P = k \Rightarrow \frac{P}{2k} = \frac{1}{2\mu} \\ x^* < x < \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{P}{2k} = \exp \left[\frac{2\mu}{h} \left(\frac{b}{2} - x \right) \right] \end{array} \right\}$$

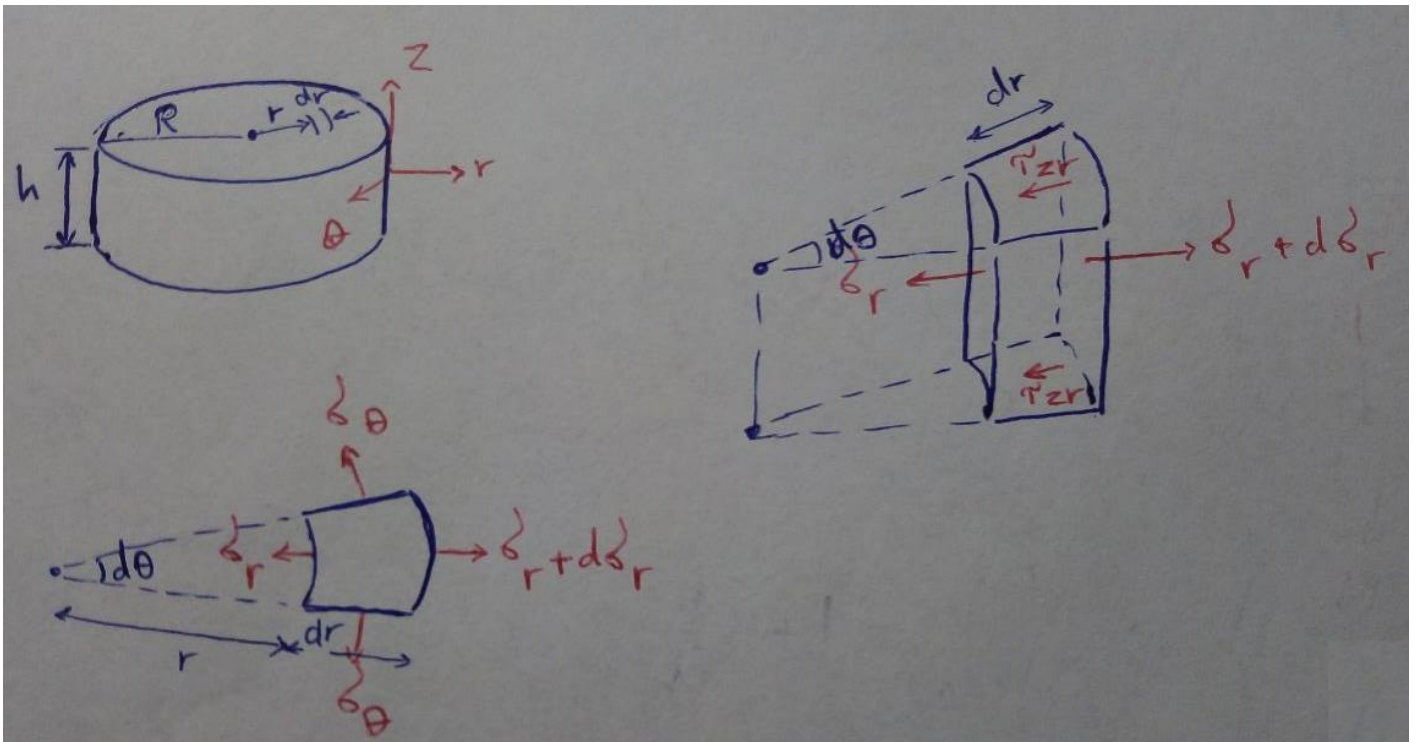
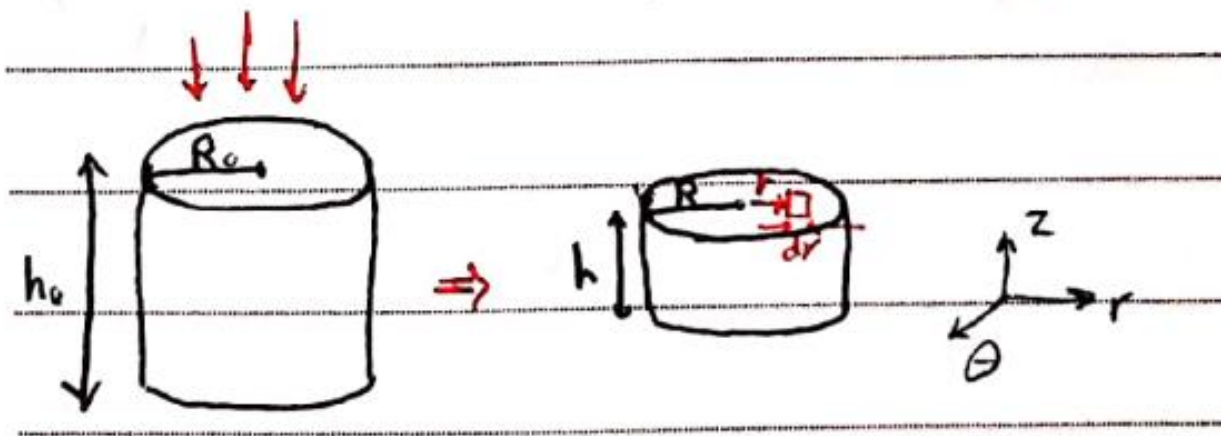
$$\Rightarrow \exp \left[\frac{2\mu}{h} \left(\frac{b}{2} - x^* \right) \right] = \frac{1}{2\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{2\mu}{h} \left(\frac{b}{2} - x^* \right) = \ln \left(\frac{1}{2\mu} \right) \Rightarrow \frac{b}{2} - x^* = \frac{h}{2\mu} \times \ln \left(\frac{1}{2\mu} \right)$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{b}{2} - \frac{h}{2\mu} \times \ln \left(\frac{1}{2\mu} \right)$$

آهنگری قالب باز متقارن (تقارن محوری)

این حالت، نشان دهنده آهنگری یک دیسک دایره‌ای به صورت زیر است:



مقدار σ_θ تغییر نمی کند چون شکل استوانه می ماند. اگر σ_θ تغییر کند، شکل از حالت دایره ای به سمت بیضی می رود.

$$\sum F_r = 0$$

$$(\sigma_r + d\sigma_r)h(r + dr)d\theta - \sigma_r h r d\theta - 2\sigma_\theta \sin \frac{d\theta}{2} h dr - 2\mu P r d\theta dr = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_r h r d\theta + \sigma_r h dr d\theta + h r d\sigma_r d\theta + h dr d\sigma_r d\theta - \sigma_r h r d\theta - 2\sigma_\theta \frac{d\theta}{2} h dr - 2\mu P r d\theta dr = 0$$

در حالت تغییر شکل با تقارن محوری داریم:

$$d\varepsilon_r = d\varepsilon_\theta \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = \sigma_\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_r h dr + h r d\sigma_r - \sigma_\theta h dr - 2\mu P r dr = 0$$

$$\Rightarrow h r d\sigma_r - 2\mu P r dr = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_r \quad . \quad \sigma_2 = \sigma_\theta \quad . \quad \sigma_3 = \sigma_z = -P$$

$$Von - mises: (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2Y^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_r + P = Y$$

$$\Rightarrow d\sigma_r = -dP$$

$$\Rightarrow -h dP - 2\mu P dr = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{2\mu dr}{h}$$

$$\Rightarrow \ln P = -\frac{2\mu r}{h} + C$$

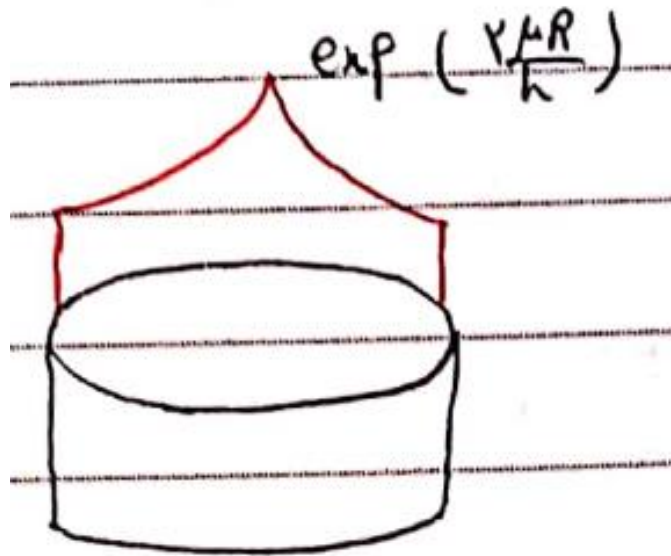
استفاده از شرایط مرزی برای یافتن ثابت C :

$$r = R \Rightarrow \sigma_r = 0 \quad . \quad P = Y \Rightarrow \ln Y = -\frac{2\mu R}{h} + C \Rightarrow C = \ln Y + \frac{2\mu R}{h}$$

$$\Rightarrow \ln P = -\frac{2\mu r}{h} + \ln Y + \frac{2\mu R}{h}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{P}{Y} = \frac{2\mu}{h} (R - r)$$

$$\Rightarrow \frac{P}{Y} = \exp \left[\left(\frac{2\mu}{h} (R - r) \right) \right]$$



با استفاده از رابطه به دست آمده، مطابق حالت کرنش صفحه‌ای می‌توان فشار میانگین را محاسبه کرد:

$$P_{av} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R P \, dA = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R P \times 2\pi r \, dr = \frac{2Y}{R^2} \int_0^R r \exp \left[\left(\frac{2\mu}{h} (R - r) \right) \right] dr$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\mu R} \right)^2 Y \left[\exp \left(\frac{2\mu R}{h} \right) - \frac{2\mu R}{h} - 1 \right]$$

به ازای مقادیر کوچک μ و مقادیر متوسط $\frac{R}{h}$ ، تقریب خوبی از عبارت بالا می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P_{av} = Y \left(1 + \frac{a}{3} + \frac{a^2}{12} + \dots \right) \quad . \quad a = \frac{2\mu R}{h}$$

که در این عبارت از ۵ جمله اول بسط e^a استفاده شده است.

حالت اصطکاک چسبنده:

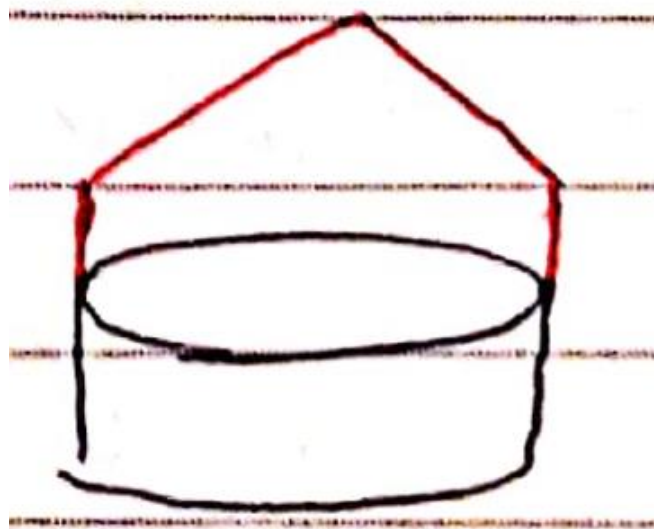
$$\mu P = k$$

$$h d\sigma_r - 2k dr = 0$$

$$-h dP - 2k dr = 0 \Rightarrow dP = -\frac{2k}{h} dr \Rightarrow P = -\frac{2kr}{h} + C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r = R \\ \sigma_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P = Y \Rightarrow C = Y + \frac{2kR}{h}$$

$$\Rightarrow P = Y + \frac{2k}{h}(R - r)$$



به همان ترتیب قبل می‌توان فشار میانگین را در این حالت نیز محاسبه کرد که داریم:

$$P_{av} = Y + \frac{2kR}{3h}$$

حالت مخلوط اصطکاک لغزنده-چسبنده:

مشابه حالت کرنش صفحه‌ای اگر در فرایند مقدار اصطکاک به قدری باشد که هم اصطکاک لغزنده و هم چسبنده داشته باشیم، از رابطه زیر می‌توان مرز این دو ناحیه را بدست آورد (با قرار دادن شرایط $\mu P = k$ در رابطه حالت اصطکاک لغزنده).

$$\frac{k}{\mu} = Y \exp \left[\left(\frac{2\mu}{h} (R - r^*) \right) \right] \quad \Rightarrow \quad r^* = R - \left(\frac{h}{2\mu} \right) \ln \left(\frac{k}{\mu Y} \right)$$

و باز با انتگرال گیری‌های مجزا برای دو حالت در نواحی مربوط به خود و جمع کردن انتگرال‌ها، فشار میانگین در این ناحیه را بدست آورد.

نورد (Rolling)

فرایند نورد شامل تغییر شکل پلاستیکی فلزات در اثر اعمال نیروهای فشاری است که از طریق عبور از بین غلتک‌های در حال چرخش اعمال می‌شود.

انواع نورد بر اساس دمای تغییر شکل:

۱- نورد داغ (Hot rolling)

۲- نورد سرد (Cold rolling)

انواع نورد بر اساس شکل محصول:

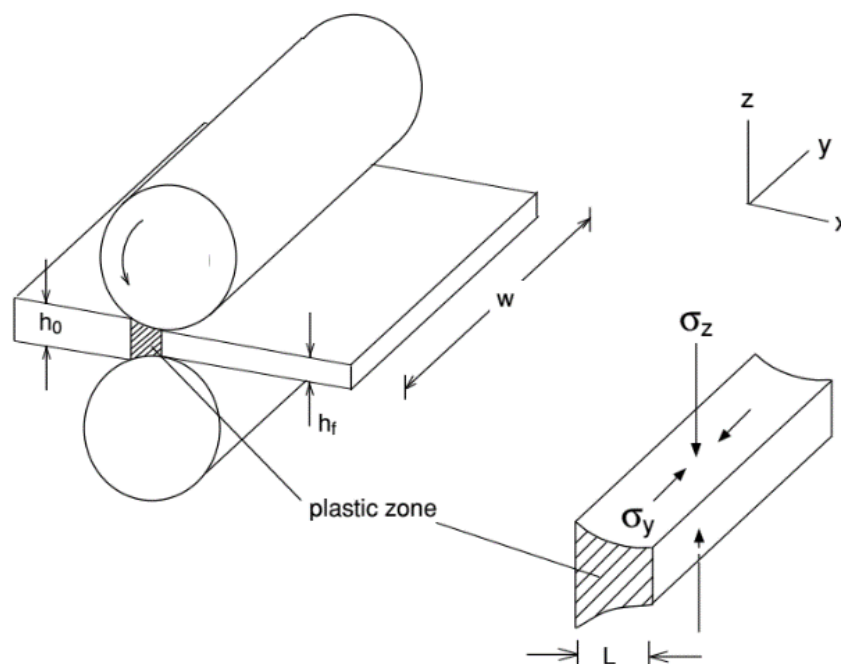
۱- نورد تخت (Flat rolling)

۲- نورد مقطع (Shape rolling)

تحلیل فرایند نورد تخت

۱- روش کار همگن:

می‌توان فرایند نورد را با یک فرایند فشار کرنش صفحه‌ای در ناحیه نشان داده شده شبیه‌سازی کرد:



Schematic of the deformation zone in flat rolling.

$$F = \bar{S}Lw = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{Y}Lw$$

$$\Delta h = h_0 - h_f$$

$$L^2 = Q^2 + \left(\frac{\Delta h}{2}\right)^2$$

$$Q^2 = R^2 - \left(R - \frac{\Delta h}{2}\right)^2 = R\Delta h - \left(\frac{\Delta h}{2}\right)^2$$

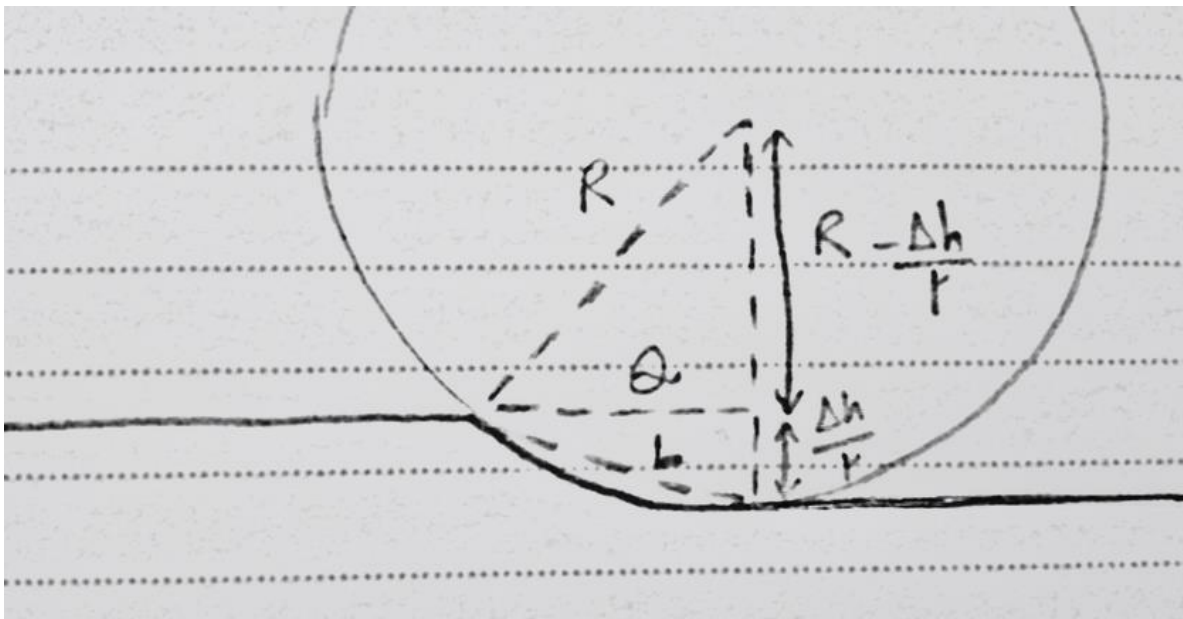
$$L = \sqrt{R\Delta h}$$

$$\Rightarrow F = \bar{S}w\sqrt{R\Delta h}$$

$$\Rightarrow F_s = \frac{F}{w} = \bar{S}\sqrt{R\Delta h}$$

برای بهتر جواب دادن معادله بالا، تأثیر اصطکاک را با اعمال ضریب تقریبی ۱/۲ اعمال می کنند.

$$\Rightarrow F_s = \frac{F}{w} = 1.2 \bar{S}\sqrt{R\Delta h}$$



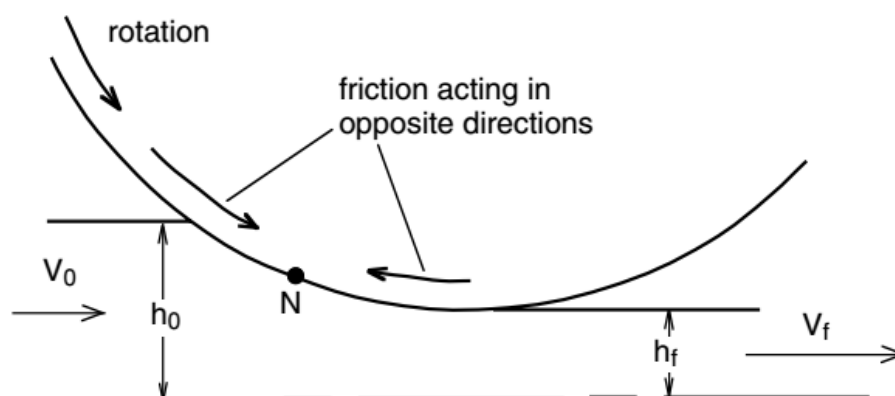
۲- روش آنالیز قاچی

فرضیات برای استفاده از این روش:

- شرایط کرنش صفحه‌ای
- ثابت بودن ضریب اصطکاک
- ثابت بودن شعاع قوس تماس
- تغییر شکل الاستیک کم
- تغییر شکل اضافی قابل چشم‌پوشی
- وجود نقطه خنثی در منطقه تماس

نقطه خنثی (Neutral point)

نقطه‌ای مانند N در منطقه تغییر شکل وجود دارد که در آن سیلان ماده به هر دو طرف راست و چپ یکسان است و در آن سرعت سطحی غلتک به سرعت سطحی ورق برابر است.



در سمت چپ نقطه N، سرعت سطحی ورق از سرعت سطحی غلتک کمتر است (سیلان ماده به سمت چپ و ورودی غلتک‌ها) در نتیجه اصطکاک بین غلتک و ورق در جهت کشیده شدن ورق به فضای بین غلتک‌ها عمل می‌کند.

از طرفی در سمت راست نقطه N ، سرعت سطحی ورق از سرعت سطحی غلتک‌ها بیشتر است (سیلان ماده به سمت راست و خروجی غلتک‌ها) در نتیجه اصطکاک بین غلتک‌ها و ورق در جهت نگه داشتن ماده زیر غلتک عمل می‌کند.

(در N جهت نیروی اصطکاکی تغییر می‌کند.)

برای تحلیل فرایند نورد می‌توان از انحنای غلتک چشم پوشی کرد. در این حالت، تغییر شکل ماده بین دو غلتک را می‌توان تحت فشار با شرایط کرنش صفحه‌ای در نظر گرفت.

در حالت اصطکاک لغزشی، مشابه فشار تحت شرایط کرنش صفحه‌ای داریم:

$$\frac{P}{2k} = \exp \left[\frac{2\mu}{h} \left(\frac{L}{2} - x \right) \right]$$

که در این رابطه، L طول تماس غلتک و ماده و برابر با $L = \sqrt{R\Delta h}$ و h ارتفاع میانگین فلز در شکاف غلتک $(h = \frac{h_0 + h_f}{2})$ است.

برای فشار متوسط نیز (مشابه فشار کرنش صفحه‌ای) داریم:

$$\frac{P_{av}}{2k} = \frac{h}{\mu L} \times \left[\exp \left(\frac{\mu L}{h} \right) - 1 \right]$$

$$\frac{P_{av}}{2k} = 1 + \frac{\mu L}{2h}$$

در حالت کرنش صفحه ای داشتیم:

$$\text{Von-mises criterion in plane strain state: } \sigma_1 - \sigma_3 = 2k = \frac{2}{\sqrt{3}}Y = S$$

در نتیجه:

$$\frac{P_{av}}{S} = \frac{h}{\mu L} \times \left[\exp \left(\frac{\mu L}{h} \right) - 1 \right]$$

هنگامی که دمای نورد پایین است و ماده کارسخت می‌شود، می‌توان S را به صورت تقریبی و با رابطه زیر بیان کرد:

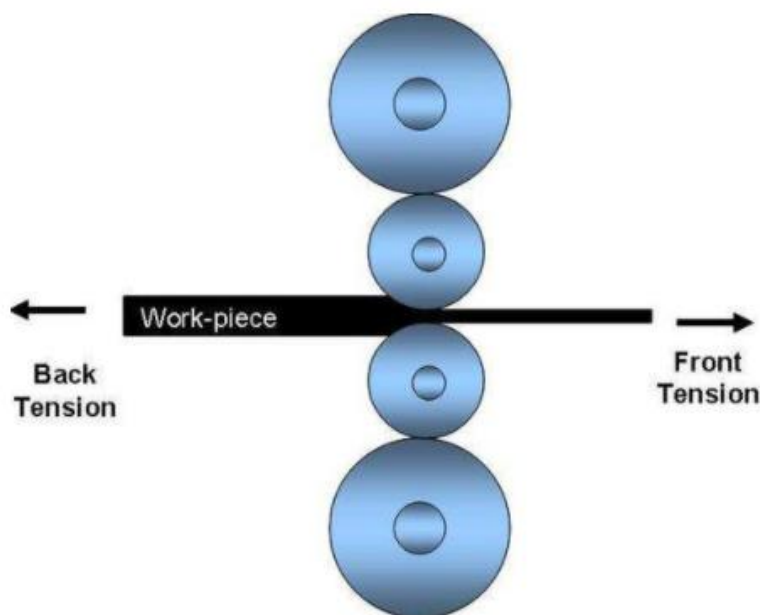
$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2}{2}$$

S_1 و S_2 تنش‌های سیلان به ترتیب در ورودی و خروجی شکاف غلتک‌ها هستند.

در بسیاری از موارد، نورد همراه با پیش‌کشش (front tension) (σ_{ft}) و یا پس‌کشش (back tension)

(σ_{bt}) است. این تنش فشاری غلتک را کاهش می‌دهد. رابطه را در این حالت به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$P_{av} = \frac{h}{\mu L} \times \left[\exp\left(\frac{\mu L}{h}\right) - 1 \right] \left(\bar{S} - \frac{\sigma_{bt} + \sigma_{ft}}{2} \right)$$



مثال: تنش سیلان کرنش صفحه‌ای (S) در فلزی برابر با 3000 psi است. می‌خواهیم ورقی از این فلز به عرض

24 inch و ضخامت $\frac{1}{8} \text{ inch}$ را نورد سرد کنیم تا ضخامت آن به $\frac{1}{8} \text{ inch}$ برسد. با فرض اینکه این عمل در

یک عبور انجام شود، قطر غلتک‌ها 12 inch و ضریب اصطکاک 0.075 باشد، مطلوب است:

(الف) فشار میانگین اعمالی از طرف غلتک‌ها را محاسبه کنید.

(ب) اگر تنش پیش‌کشش 10000 psi اعمال شود، فشار میانگین چقدر خواهد بود؟

افزایش پس کشش، کاهش اصطکاک یا افزایش کاهش سطح مقطع باعث جابجایی نقطه خنثی به سمت خروجی غلتک‌ها می‌شود.

افزایش پیش کشش، افزایش اصطکاک و کاهش کاهش سطح مقطع باعث جابجایی نقطه خنثی به سمت ورودی غلتک‌ها می‌شود.

تخت شدن غلتک‌ها:

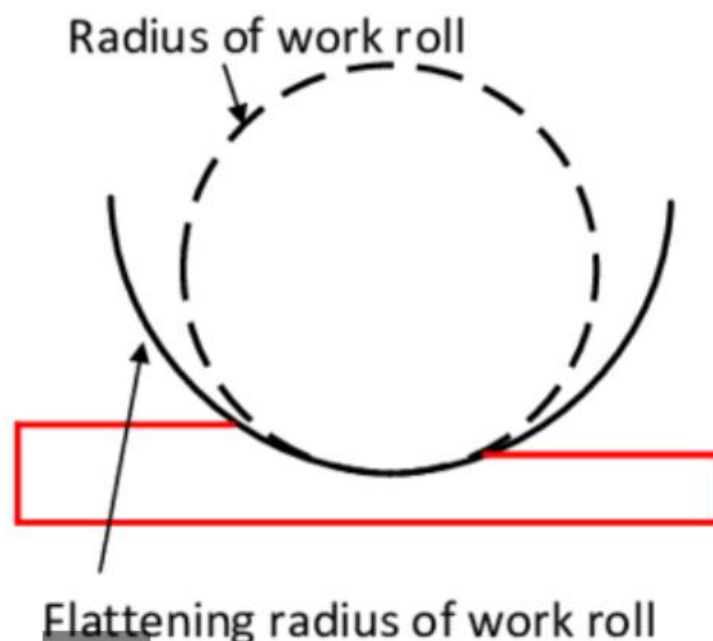
هر چه ورق نازک‌تر و قطر غلتک بزرگ‌تر باشد، فشار متوسط افزایش پیدا می‌کند.

$$R \uparrow \cdot h \downarrow \Rightarrow P_{av} \uparrow$$

نیروی لازم برای تغییر شکل که توسط غلتک‌ها اعمال می‌شود (نیروی جدا کننده غلتک‌ها) به ازای واحد عرض نیز با سرعت بیشتر نسبت به P_{av} افزایش می‌یابد:

$$F_s = P_{av} L$$

یکی از اثرات نیروی زیاد در این حالت، تخت شدن الاستیک غلتک‌ها است. بنابراین شعاع انحنای واقعی غلتک‌ها (R') در ناحیه تماس با ورق از شعاع انحنا در حالت بارگذاری نشده (R) بیشتر است. رابطه بین این دو پارامتر به طور تقریبی به صورت زیر ارائه شده است:



$$R' = R \left(1 + \frac{16F_s}{\pi E' \Delta h} \right) \quad . \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

وقتی تخت شدن غلتک داشته باشیم طول ناحیه تماس نیز تغییر می کند:

$$L = \sqrt{R' \Delta h}$$

$$F_s = P_{av} \sqrt{R' \Delta h}$$

$$P_{av} = \frac{h}{\mu \sqrt{R' \Delta h}} \left[\exp \left(\frac{\mu \sqrt{R' \Delta h}}{h} \right) - 1 \right] \left(\bar{S} - \frac{\sigma_{bt} + \sigma_{ft}}{2} \right)$$

$$F_s = \frac{h}{\mu} \left[\exp \left(\frac{\mu \sqrt{R' \Delta h}}{h} \right) - 1 \right] \left(\bar{S} - \frac{\sigma_{bt} + \sigma_{ft}}{2} \right)$$

نمودارهای دو رابطه مشخص شده با رنگ قرمز، رسم شده و محل تقاطع آنها مقدار F_s را مشخص می کند.

تخت شدن غلتک ها ممکن است در حدی باشد که نتوان ضخامت ورق را از یک مقدار حداقل (h_{min}) بیشتر

کاهش داد. رابطه ارائه شده برای h_{min} :

$$h_{min} = \frac{C \mu R}{E'} \left(\bar{S} - \frac{\sigma_{bt} + \sigma_{ft}}{2} \right)$$

C: ثابت بین ۷ و ۸

در نورد ورق های بسیار نازک یا فویل ها شرایط گفته شده معمولاً پیش می آید.

راه های کاهش h_{min} :

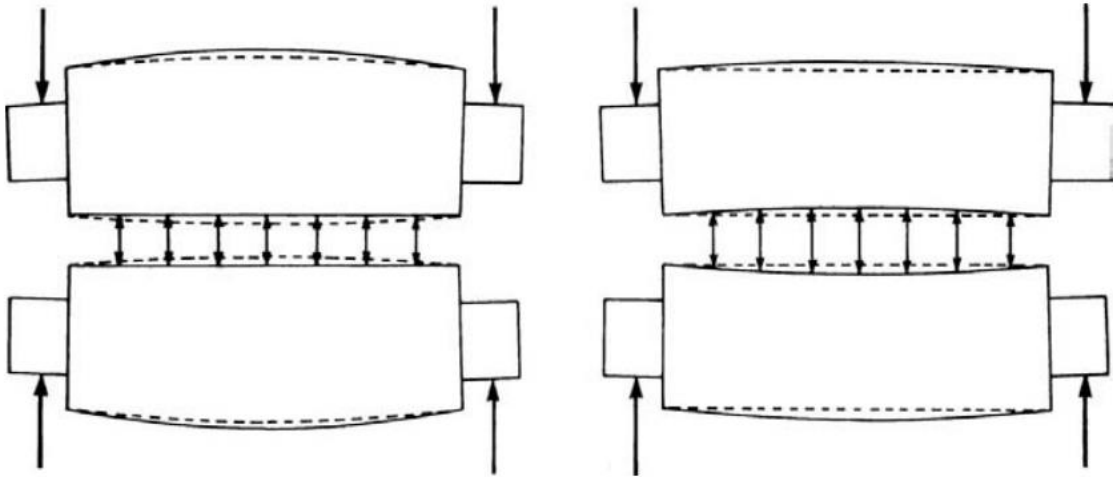
- اعمال پس کشش و پیش کشش

- کاهش قطر غلتک

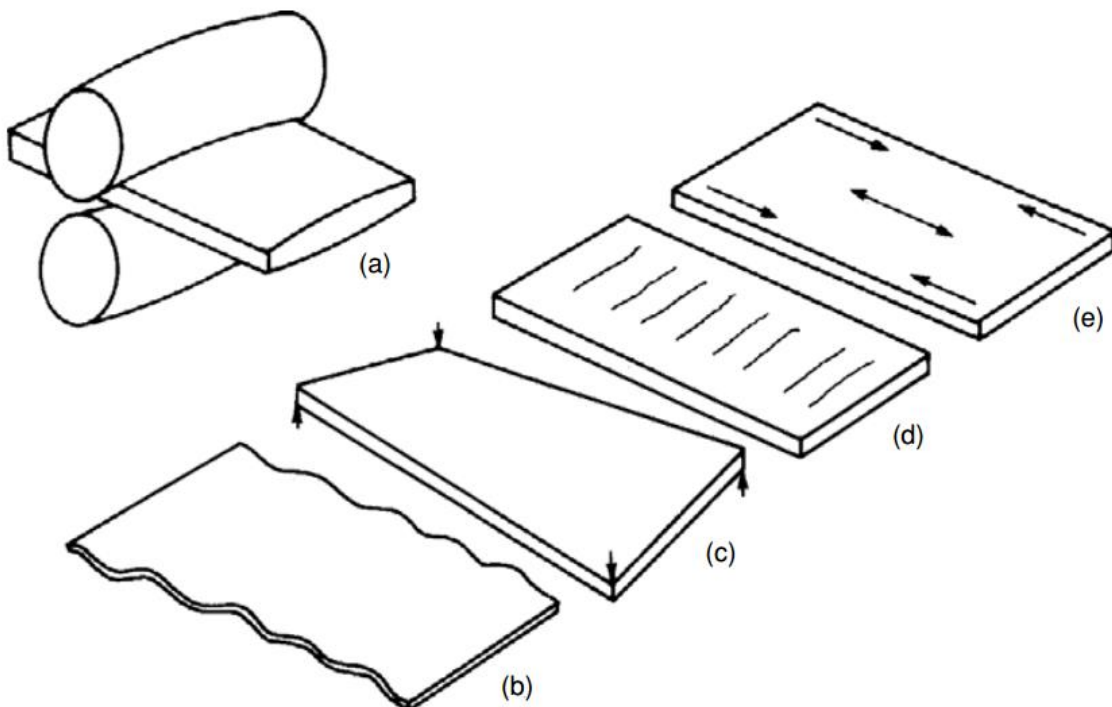
- کاهش ضریب اصطکاک

- آنیل ماده و کاهش $\bar{S}$

نیروی اعمالی از طرف ورق به غلتک در قسمت وسط عرض بیشتر است و این می‌تواند باعث خمیدگی غلتک‌ها شود. به همین دلیل غلتک‌ها کمی محدب ساخته می‌شوند. میزان این خمیدگی با پهنای ورق، تنش سیلان ماده و میزان کاهش ضخامت در هر مرحله متغیر است.

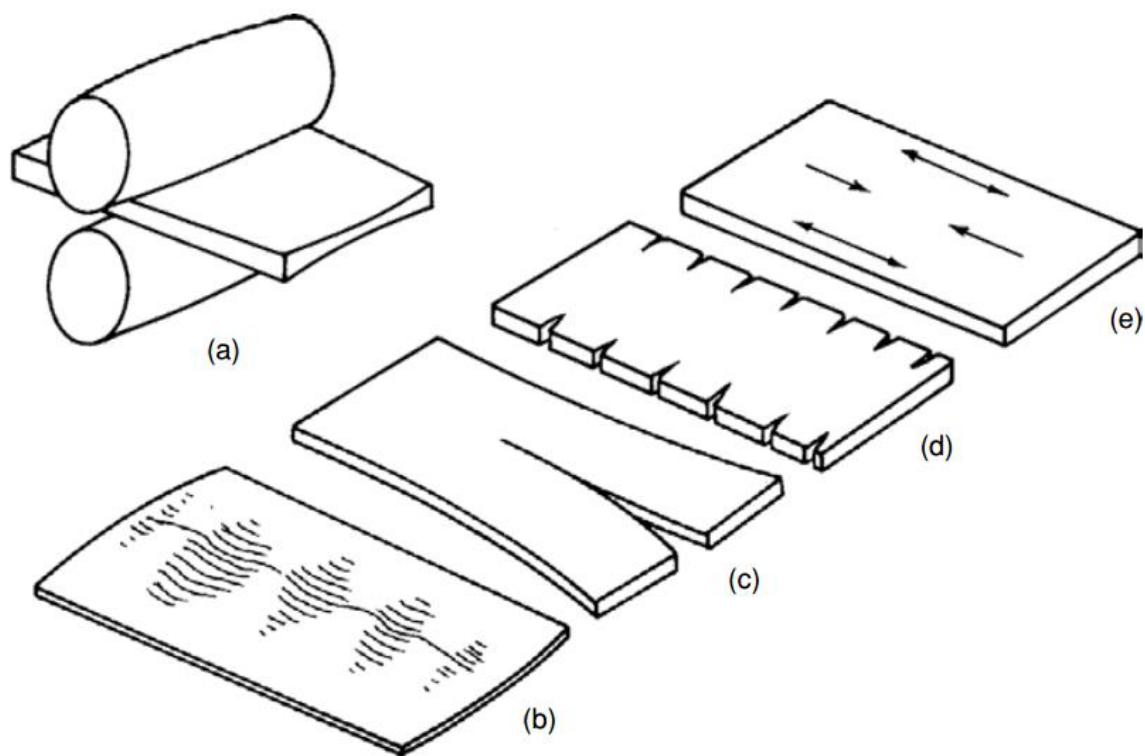


در صورت ناکافی بودن خمیدگی غلتک‌ها؛ لبه‌ها بیشتر از مرکز ورق افزایش طول می‌یابند. در لبه‌ها تنش فشاری و در وسط تنش کششی ایجاد می‌شود. این می‌تواند باعث ترک خوردن وسط ورق‌ها (ترک عرضی)، تابیدگی یا چروکیدگی لبه‌های ورق (اثر کاغذکشی) شود.



Possible effects of insufficient camber (a). Residual stresses (b) center cracking (c) warping (d) and edge wrinkling (e).

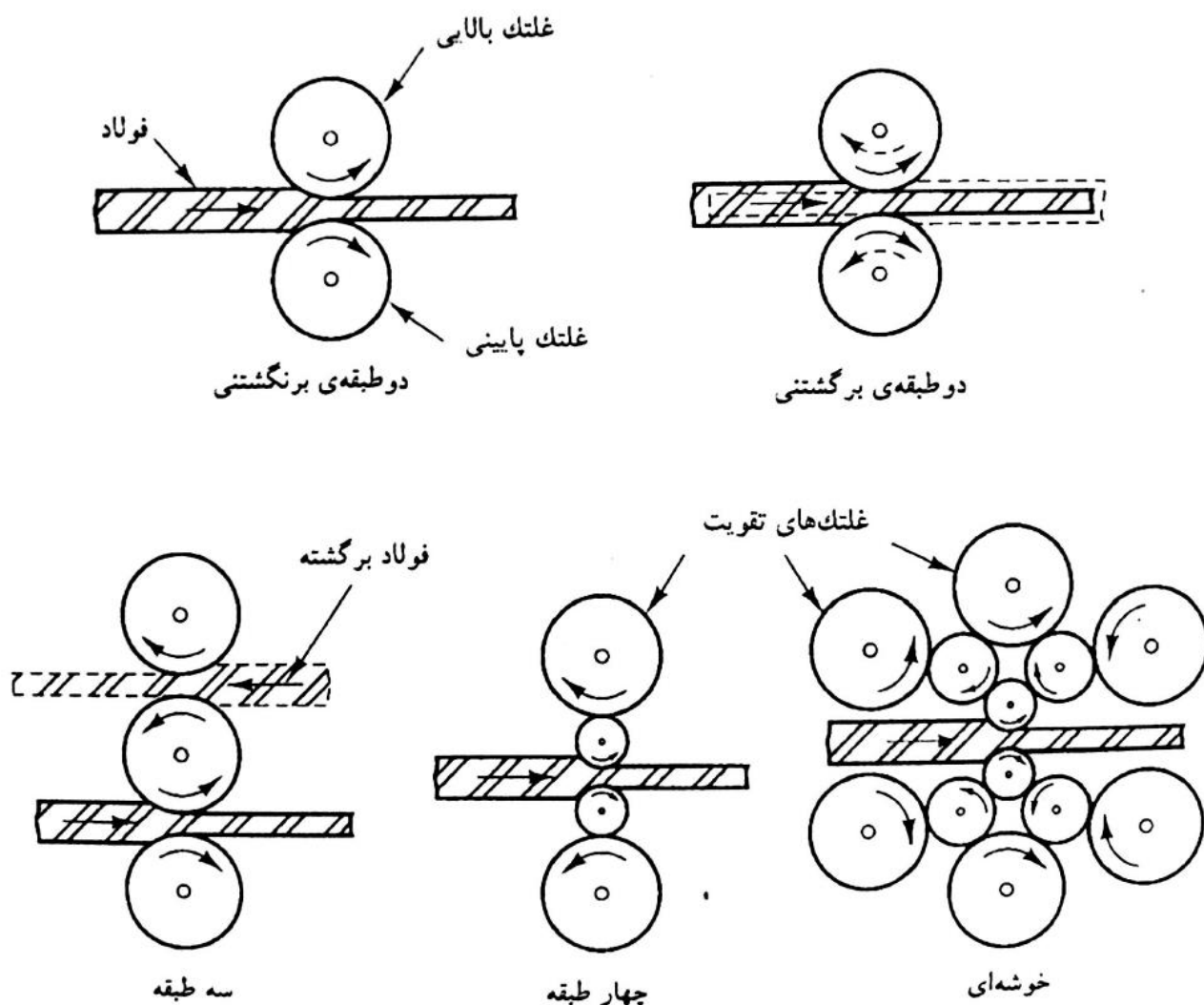
در صورت خمیده بودن بیش از حد غلتک ها: وسط ورق افزایش طول بیشتری می یابد. در لبه ها تنش کششی و در وسط ورق تنش فشاری ایجاد می شود. این می تواند باعث ترک خوردن لبه ورق (ترک عرضی)، شکاف مرکزی ورق (در راستای طولی) یا حالت موجی وسط ورق شود.



Effects of over-cambering include edge cracking, centerline splitting and wavy center.

آرایش های مختلف غلتک ها:

با توجه به شکل، غلتک های نورد می توانند آرایش های مختلفی داشته باشند.



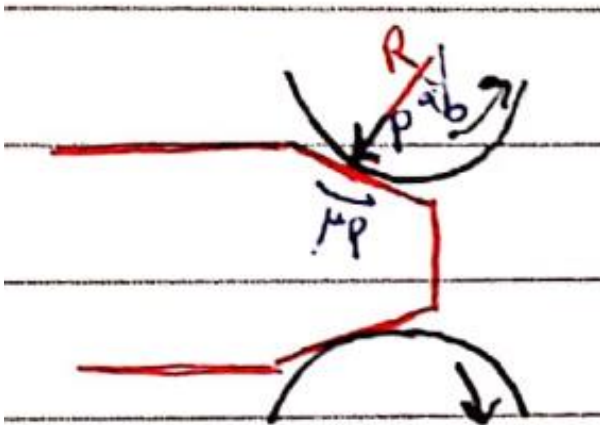
غلتك های با قطر کمتر، در یک کاهش ضخامت مشخص طول تماس کمتری داشته و در نتیجه به نیرو و انرژی کمتری برای تغییر شکل نیاز دارند. از طرفی احتمال خم شدن این غلتک ها بیشتر است و ماده عبور کرده از وسط این غلتک ها ضخامت بیشتری دارد. همچنین این غلتک ها دقت ابعادی بهتری ایجاد می کنند.

در مراحل اولیه کاهش ضخامت تختال و ورق های ضخیم از آرایش غلتک های دوتایی استفاده می شود.

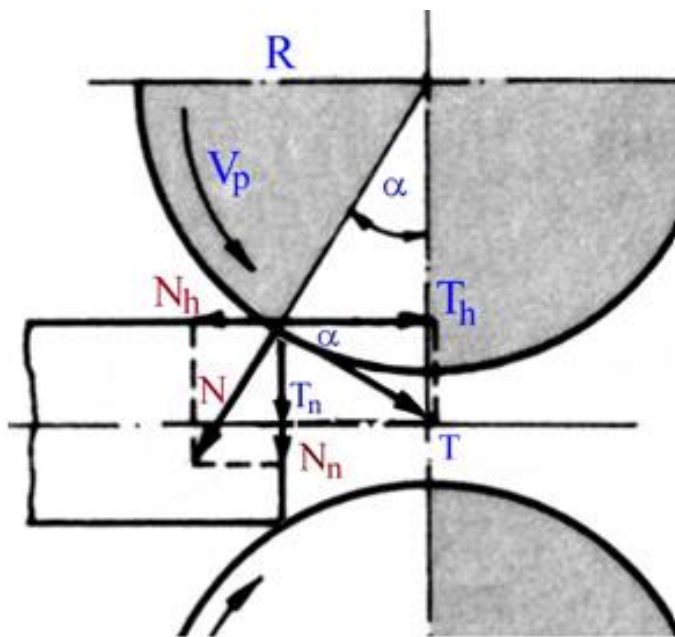
برای نورد داغ ورق های پهن و همچنین صفحات با ضخامت کم و همچنین در نورد سرد از آرایش خوشه ای استفاده می شود.

زاویه نیش (Angle of bite):

سر ورق یا شمش را زاویه می دهند تا به وسیله غلتک ها پس زده نشود.



محاسبه زاویه نیش:



$$\mu P \cos \alpha_b dA \geq P \sin \alpha_b dA$$

$$\Rightarrow \mu \geq \tan \alpha_b \Rightarrow \alpha_b^* = \tan^{-1} \mu$$