

آزمون‌های شکل‌پذیری و شرایط ناپایداری

تعریف شکل‌پذیری (*Formability*): قابلیت تغییر شکل پلاستیکی ماده بدون ایجاد عیب یا وقوع شکست و گسیختگی در آن

در تغییر شکل پلاستیکی فلزات علاوه بر تغییر ابعاد ماده، در اثر تغییرات ریزساختار ماده استحکام و سختی نیز ممکن است افزایش یابد (کارسختی یا کرنش سختی). این موضوع باعث می‌شود که شکل‌پذیری ماده محدود باشد. در دماهای بالا نیز با اینکه به دلیل کاهش کارسختی، شکل‌پذیری فلزات افزایش می‌یابد ولی تغییرات ریزساختاری، ایجاد عیوبی مانند حفرات و ... شکل‌پذیری ماده را محدود می‌کنند.

برای بررسی رفتار کارسختی و شکل‌پذیری مواد از تعدادی آزمون استاندارد مانند آزمون کشش، فشار، بالچ و ... استفاده می‌شود.

۱. آزمون کشش (*Tensile Test*)

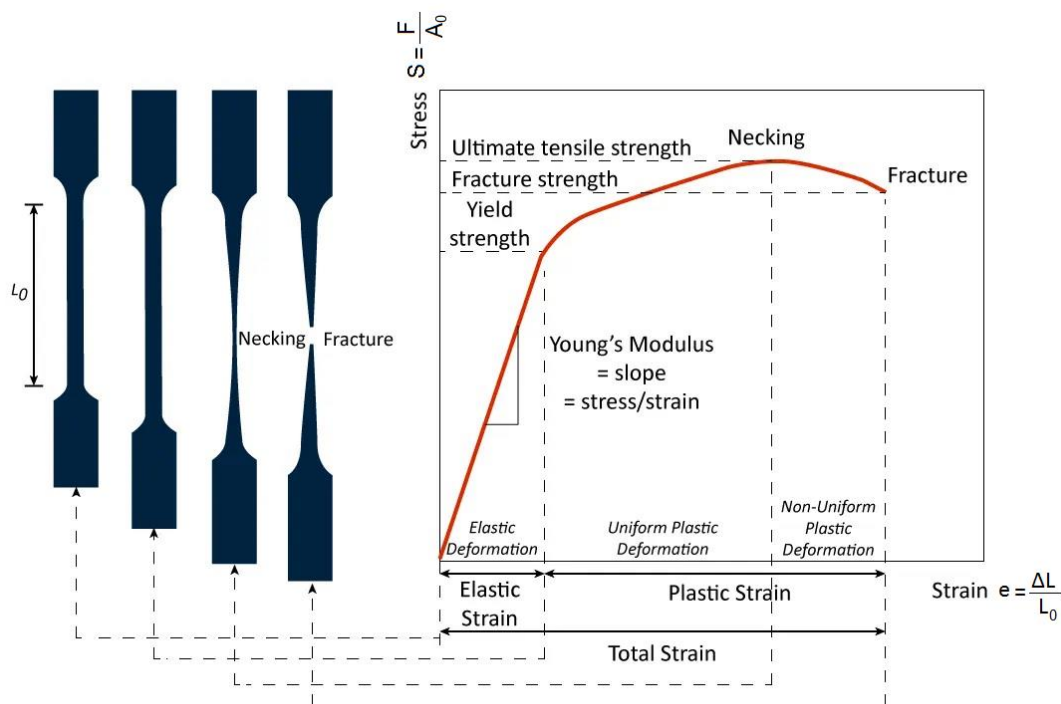
همانطور که در درس خواص مکانیکی بیان شده است، در این آزمون نمونه‌ای به شکل استاندارد (شامل دو بازو و یک طول سنج در میانه) از ماده مورد نظر تهیه شده و تحت کشش تک محوره در راستای طولی قرار می‌گیرد.

روش انجام آزمایش: بازوها درون گیره یا فک دستگاه کشش قرار می‌گیرند و نمونه تحت نیروی تک‌محوری کششی (در راستای طولی نمونه) قرار می‌گیرد. نیرو به طور پیوسته زیاد می‌شود و طول نمونه زیاد می‌شود تا حدی که نمونه بشکند. سرعت کشش نمونه معمولاً ثابت است. مثلاً: 5mm/min و

1mm/min

خروجی دستگاه (نتایج آزمون): منحنی نیرو - ازدیاد طول و یا منحنی تنش مهندسی - کرنش مهندسی. چون مقادیر نیرو و ازدیاد طول به ابعاد اولیه نمونه وابسته است، برای ایجاد امکان مقایسه نتایج برای نمونه‌ها و مواد مختلف از نمودار تنش مهندسی - کرنش مهندسی استفاده می‌شود.

قسمت سنجه (*Gage section*): قسمت میانی نمونه با سطح مقطع اولیه ثابت و یکنواخت. سنجه برای محاسبات تنش و کرنش استفاده می‌شود.



تنش مهندسی $S = \frac{F}{A_0}$ A_0 : سطح مقطع اولیه سنجه F : نیرو

کرنش مهندسی $e = \frac{L_i - L_0}{L_0}$ L_0 : طول اولیه سنجه L_i : طول سنجه در هر لحظه

E : ثابت تناسب رابطه تنش و کرنش در ناحیه الاستیک است که به آن مدول یانگ (*Young's modulus*) یا مدول الاستیک (کشسانی) (*Modulus of elasticity*) می‌گویند.

نقطه تسلیم (*Yield Point*): تنشی که در آن تغییر شکل پلاستیک ماده شروع می‌شود. انتقال از ناحیه الاستیک به ناحیه پلاستیک ممکن است در یک نقطه اتفاق بیفتد یا تدریجی باشد (در محدوده‌ای از تنش) بسته به حالت انتقال، معیارهای نقطه تسلیم ماده متفاوت است.

استحکام کشش نهایی (*Ultimate tensile strength (UST)*): حداکثر تنش مهندسی که ماده

می تواند در آزمون کشش تحمل کند. (نقطه حداکثر منحنی مهندسی)

استحکام شکست (*Fracture strength*): تنش مهندسی در نقطه شکست

منحنی تنش حقیقی - کرنش حقیقی:

$$\sigma = \frac{F}{A_i} \quad \varepsilon = \ln \frac{L_i}{L_0} = \ln \frac{A_0}{A_i}$$

$$\varepsilon = \ln \left(\frac{1}{1-r} \right) \quad . \quad r = \frac{A_0 - A_i}{A_0}$$

A_0, L_0 ← طول و سطح مقطع اولیه سنجه

A_i, L_i ← طول و سطح مقطع لحظه ای سنجه

رابطه کرنش حقیقی و مهندسی:

$$e = \frac{L_i - L_0}{L_0} = \frac{L_i}{L_0} - 1 \Rightarrow \frac{L_i}{L_0} = 1 + e \rightarrow \varepsilon = \ln(1 + e)$$

این رابطه فقط تا شروع ناحیه گلویی صدق می کند.

برای محاسبه کرنش حقیقی در ناحیه گلویی شدن نمونه باید از رابطه $\ln \frac{A_0}{A_i}$ استفاده کرد، زیرا در ناحیه

گلویی، تغییر طول یکنواخت نداریم.

رابطه تنش حقیقی و مهندسی:

$$\sigma = \frac{F}{A_i} = \frac{F}{A_0} \times \frac{A_0}{A_i} = S(1 + e) \Rightarrow \sigma = S(1 + e)$$

$$1 + e = \exp(\varepsilon) \Rightarrow \sigma = S \exp(\varepsilon)$$

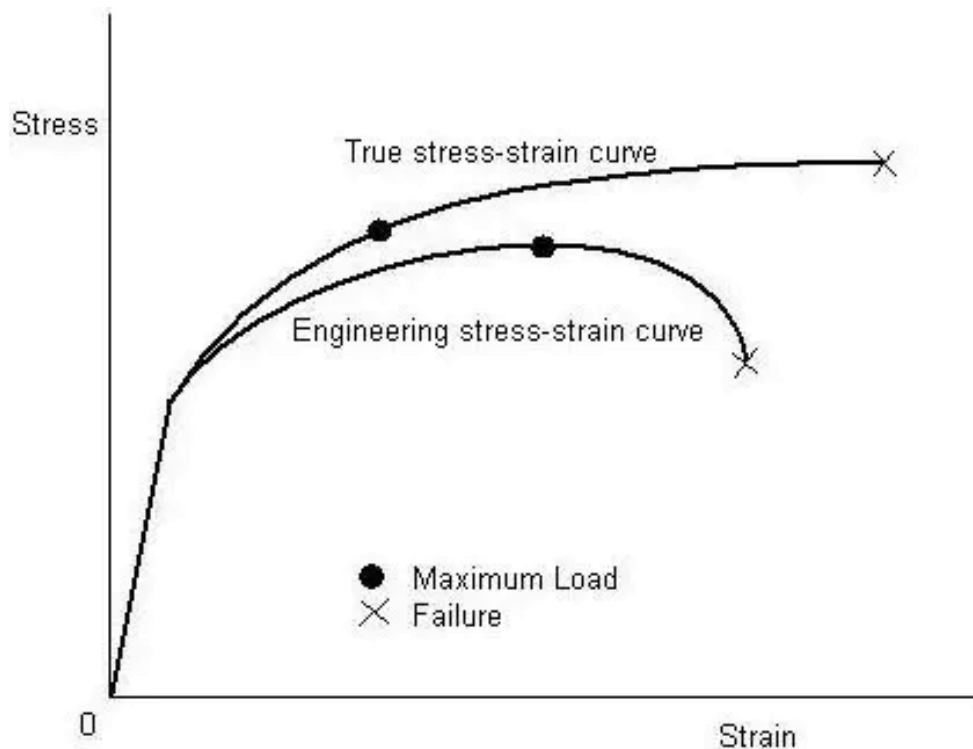
اعتبار این رابطه نیز تا شروع ناحیه گلویی است.

مقایسه منحنی‌های تنش - کرنش در دو حالت حقیقی و مهندسی:

منحنی تنش حقیقی - کرنش حقیقی تا رسیدن به نیروی حداکثر در سمت چپ و بالای منحنی مهندسی قرار دارد. در حالی که پس از نیروی حداکثر، کرنش‌های موضعی بزرگ در ناحیه گلویی (بدست آمده از

رابطه $\epsilon = \ln \frac{A_0}{A_i}$) باعث می‌شود کرنش حقیقی بزرگ‌تر شود.

در ناحیه گلویی برای منحنی حقیقی: $F \downarrow \text{ and } A \downarrow \Rightarrow \sigma \uparrow$



کمیت‌های قابل محاسبه از منحنی حقیقی:

تنش حقیقی در نیروی حداکثر (نقطه شروع گلویی):

A_u : سطح مقطع لحظه‌ای در بار حداکثر

$$\sigma_u = \frac{F_{max}}{A_u} \quad \sigma_u = S_u \frac{A_0}{A_u} = S_u \exp(\epsilon_u)$$

کرنش حقیقی در نیروی حداکثر (کرنش حقیقی یکنواخت):

$$\epsilon_u = \ln \frac{A_0}{A_u} = \ln \frac{L_u}{L_0} = \ln \left(\frac{1}{1 - r_u} \right) \quad \cdot \quad r_u = \frac{A_0 - A_u}{A_0}$$

تنش حقیقی شکست:

$$\sigma_f = \frac{F_f}{A_f}$$

F_f : نیرو در لحظه شکست

A_f : سطح مقطع در لحظه شکست

کرنش حقیقی شکست:

محاسبات فقط با سطح مقطع قابل قبول است.

$$\varepsilon_f = \ln \frac{A_0}{A_f} = \ln \frac{1}{1-r_f} \quad r_f = \frac{A_0 - A_f}{A_0}$$

کرنش حقیقی غیریکنواخت (ناحیه گلویی شدن):

$$\varepsilon_n = \ln \frac{A_u}{A_f}$$

روابط ارائه شده برای نشان دادن شکل منحنی جریان (حقیقی) در ناحیه تغییر شکل پلاستیک یکنواخت:

برای راحتی محاسبات مربوط به منحنی تنش حقیقی-کرنش حقیقی در ناحیه پلاستیک یکنواخت،

روابطی برای این منحنی ارائه شده است که مهم‌ترین و ساده‌ترین آن رابطه هولمن است:

$$\sigma = K \varepsilon^n \quad \text{رابطه هولمن}$$

K : ضریب استحکام

n : توان کار سختی (معمولاً ۰/۵ - ۰/۱) (~)

محدودیت رابطه هولمن:

عدم دقت در کرنش‌های کوچک (برای کرنش‌های $0.04 \leq \bar{\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon}_{uts}$ قابل استفاده است).

رابطه لودویک $\sigma = \sigma_0 + K \varepsilon^n$

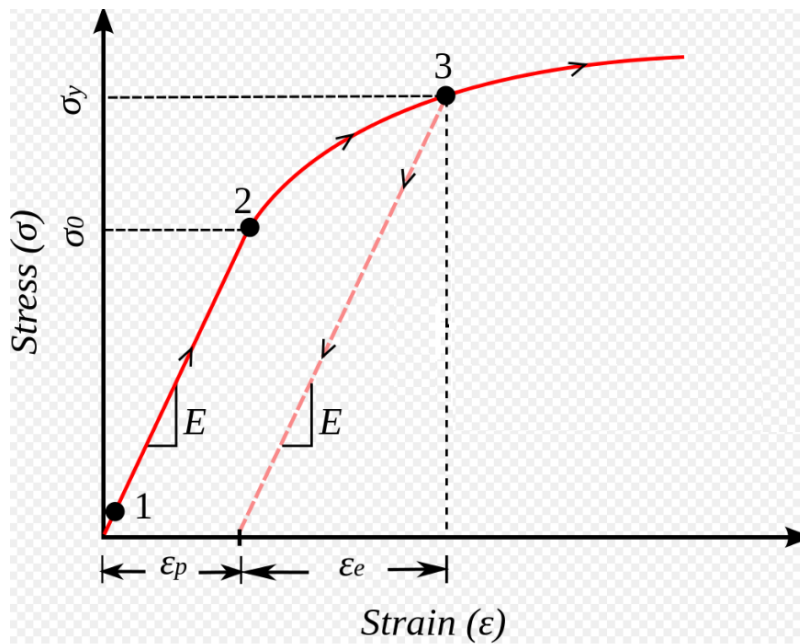
رابطه سویفت $\sigma = K (\varepsilon_0 + \varepsilon)^n$

σ_0 : تنش تسلیم

ε_0 : کرنش پلاستیک ابتدایی داده شده به ماده قبل از آزمون کشش

کرنش حقیقی در روابط بالا باید همان کرنش مومسان (پلاستیک) باشد:

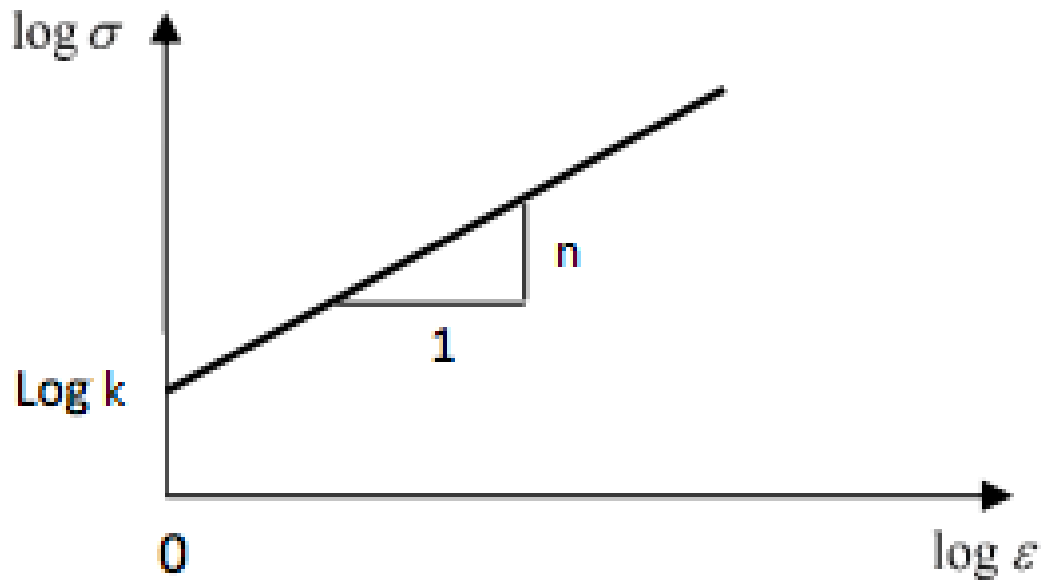
$$\varepsilon_p = \varepsilon_{total} - \varepsilon_e = \varepsilon_{total} - \frac{\sigma_y}{E}$$



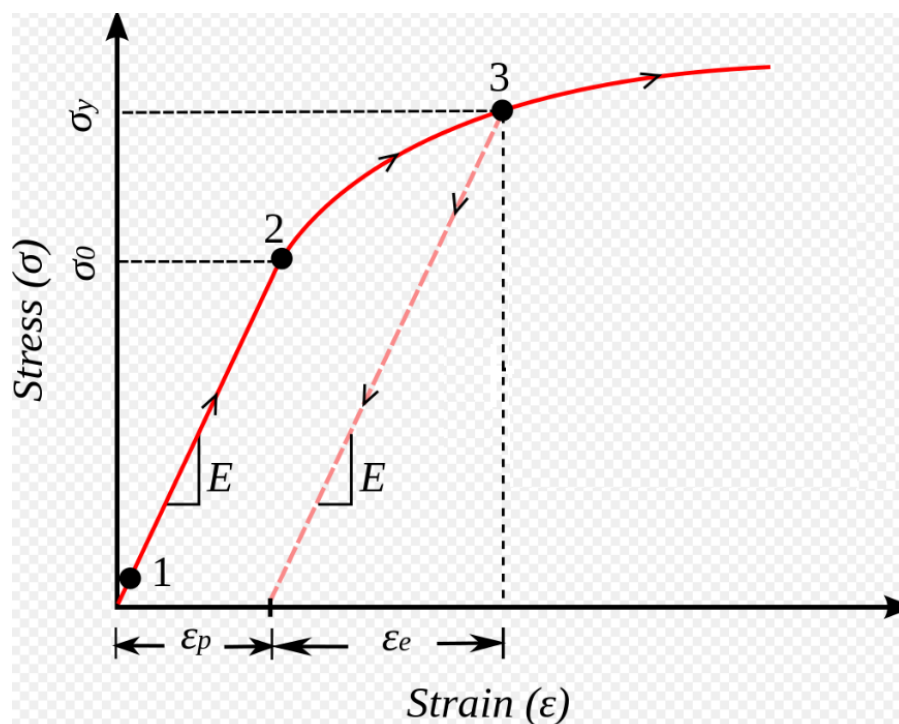
رابطه هولمن در بسیاری مواقع تطابق خوبی با شکل منحنی داشته و همچنین به دلیل ساده بودن آن استفاده بیشتری دارد.

با رسم نمودار $\log \sigma - \log \varepsilon$ می توان n , K را بدست آورد:

$$\log \sigma = \log K + n \log \varepsilon$$



کارسختی یا افزایش استحکام در اثر اعمال کرنش پلاستیکی:



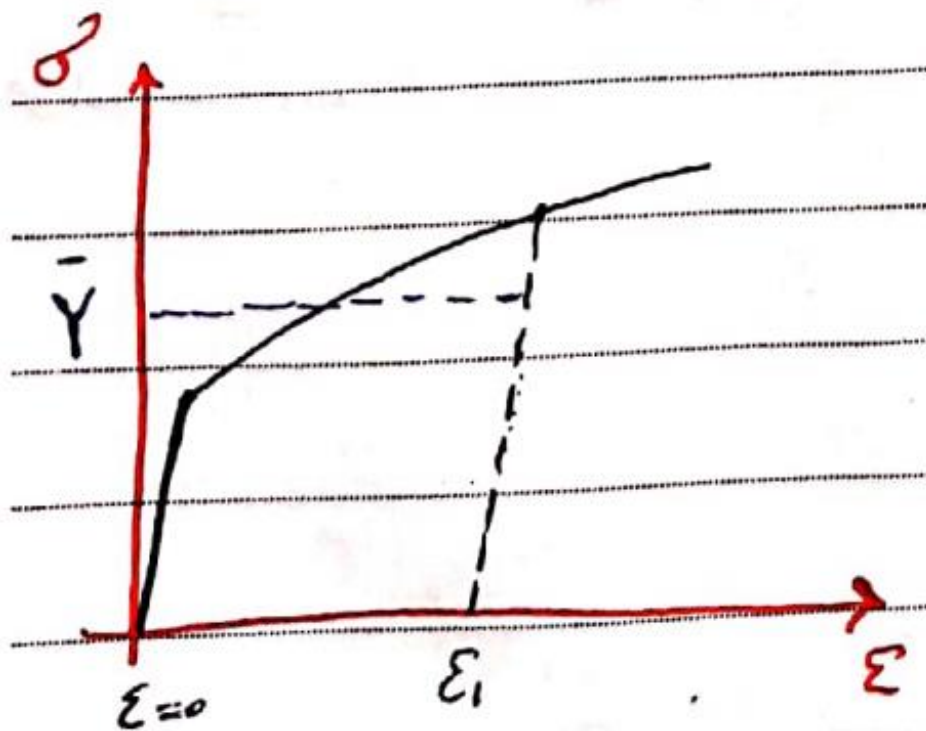
نرخ یا آهنگ کارسختی:

نرخ یا آهنگ کارسختی را با $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ نشان می‌دهیم.

رابطه نرخ کار سختی با توان کار سختی (n) هنگامی که منحنی تنش حقیقی-کرنش حقیقی از رابطه هولمن تبعیت کند:

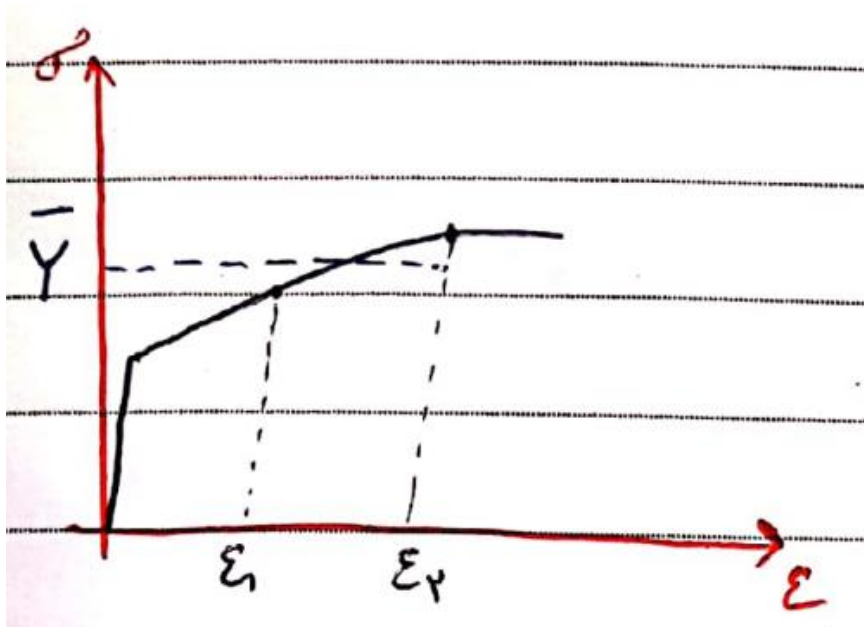
$$n = \frac{d(\ln\sigma)}{d(\ln\varepsilon)} = \frac{d\sigma/\sigma}{d\varepsilon/\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = n \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

تنش سیلان (جریان) متوسط ($\bar{Y}$):



$$\bar{Y} = \frac{1}{\varepsilon_1} \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon$$

$$\text{If } \sigma = K \varepsilon^n \Rightarrow \bar{Y} = \frac{1}{\varepsilon_1} \int_0^{\varepsilon_1} K \varepsilon^n d\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_1} K \frac{\varepsilon_1^{n+1}}{n+1}$$



$$\bar{Y} = \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \sigma d\epsilon$$

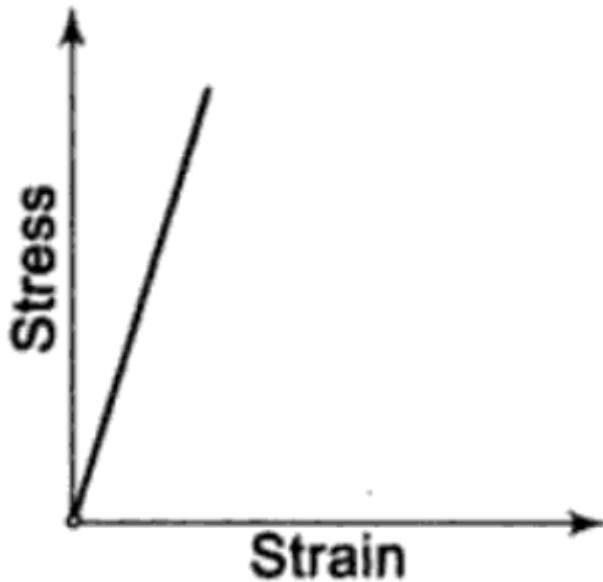
مثال: تنش سیلان یک فولاد با استفاده از رابطه $\sigma = 1300\epsilon^{0.3}$ به دست می‌آید. در صورتی که یک سیم از این فولاد در اثر یک فرایند شکل‌دهی به اندازه ۲۰٪ کاهش سطح مقطع داده شود، تنش سیلان میانگین را در حین این فرایند محاسبه کنید.

مثال: تنش سیلان یک فولاد با استفاده از رابطه $\sigma = 1300\epsilon^{0.3}$ به دست می‌آید. در صورتی که یک سیم از این فولاد که قبلاً کاهش سطح مقطع ۲۰٪ داده شده است، در یک فرایند شکل‌دهی به اندازه ۳۰٪ دیگر کاهش سطح مقطع داده شود، تنش سیلان میانگین را در حین فرایند شکل‌دهی محاسبه کنید.

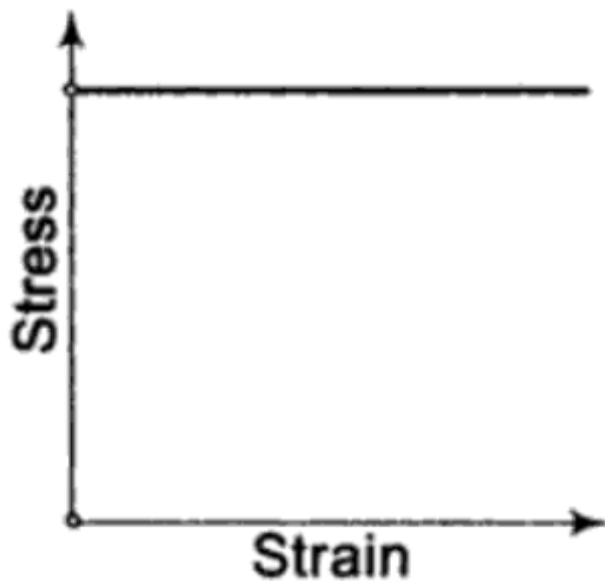
مدل‌های ارائه شده برای رفتار کششی مواد مختلف:

به منظور ساده کردن محاسبات در تغییر شکل پلاستیکی مواد، نمودارهای واقعی تنش-کرنش با مدل‌های ساده‌تری جایگزین می‌شوند که این مدل‌ها در زیر آورده شده‌اند:

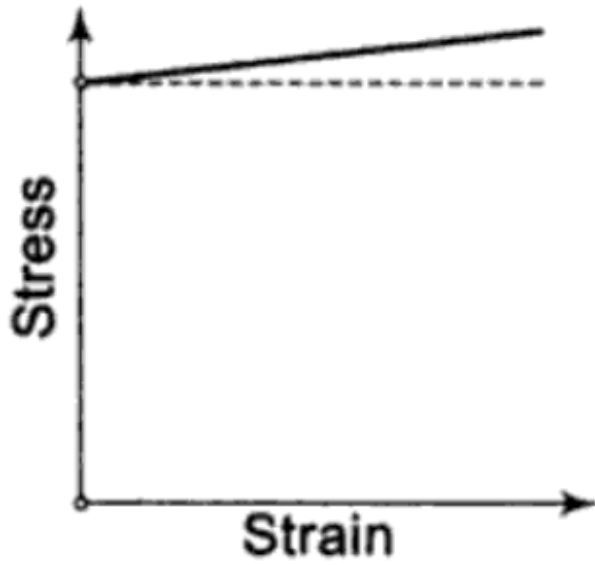
۱- *Linearly Elastic*



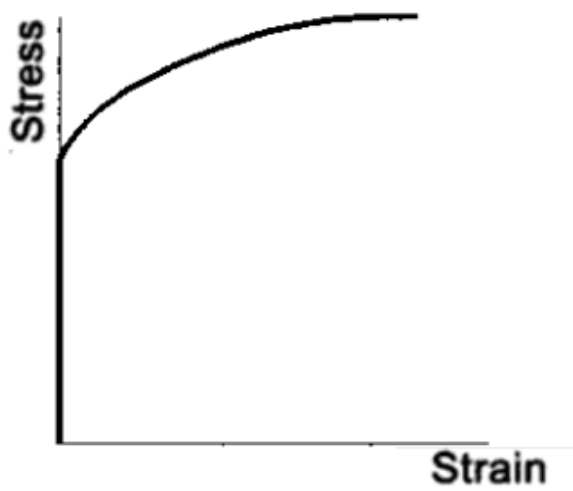
۲- *Rigid-Perfectly (Ideal) Plastic*



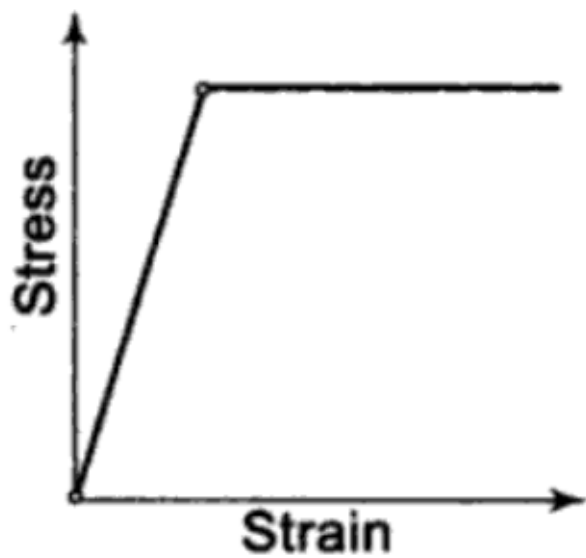
(Rigid-Linear Workhardening) Rigid-Linearly Plastic - ३



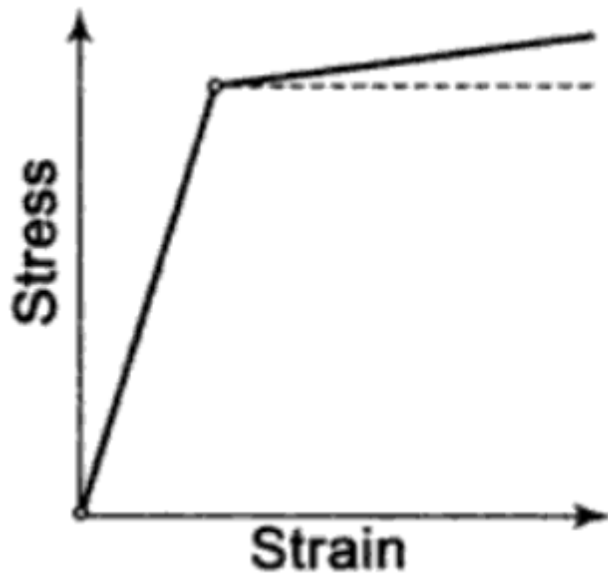
Rigid-Workharden Plastic - ४



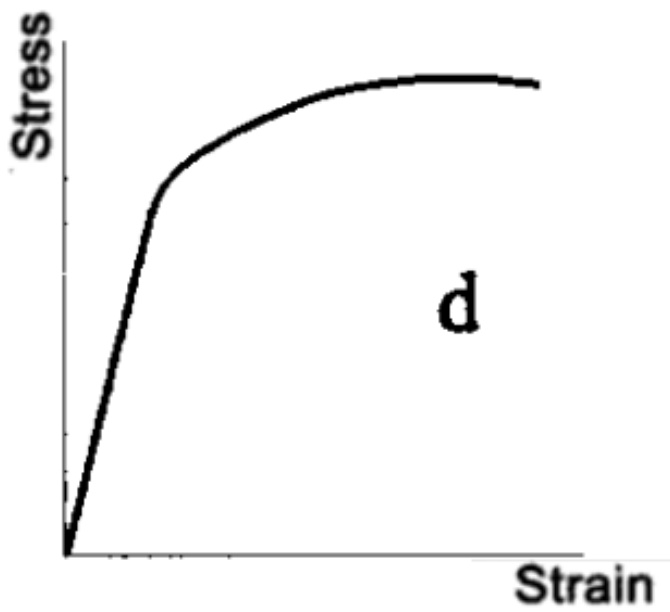
Linearly Elastic-Perfectly (Ideal) Plastic - ५



Linearly Elastic-Linearly Plastic - ϵ



Linearly Elastic-Workharden Plastic - γ



ناپایداری (*Instability*) در آزمون کشش:

منظور از شرایط ناپایداری در تغییر شکل، غیریکنواخت شدن یا موضعی شدن تغییر شکل است. در آزمون کشش همان گلویی شدن (*necking*) است.

$$\text{State of stress: } \{\sigma_1 > 0 \text{ . } \sigma_2 = \sigma_3 = 0\}$$

$$\text{State of strain: } \left\{ \varepsilon_1 > 0 \text{ . } \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \right\}$$

این روابط تا نقطه نیروی حداکثر (نقطه شروع گلویی) صادق است.

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - 0)^2 + (\sigma_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2]^{\frac{1}{2}} = \sigma_1\end{aligned}$$

$$\bar{\varepsilon} = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + (-\frac{1}{2}\varepsilon_1)^2 + (-\frac{1}{2}\varepsilon_1)^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_1$$

در نتیجه تا نقطه نیروی حداکثر می‌توان به جای σ_1 بر حسب ε_1 ، $\bar{\sigma}$ بر حسب $\bar{\varepsilon}$ را رسم کرد:

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2}$$

$$\text{at instability point: } dF = 0 \quad \Rightarrow \quad d(\bar{\sigma} \pi r^2) = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi r \bar{\sigma} dr + \pi r^2 d\bar{\sigma} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2dr}{r} + \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = -2 \frac{dr}{r}$$

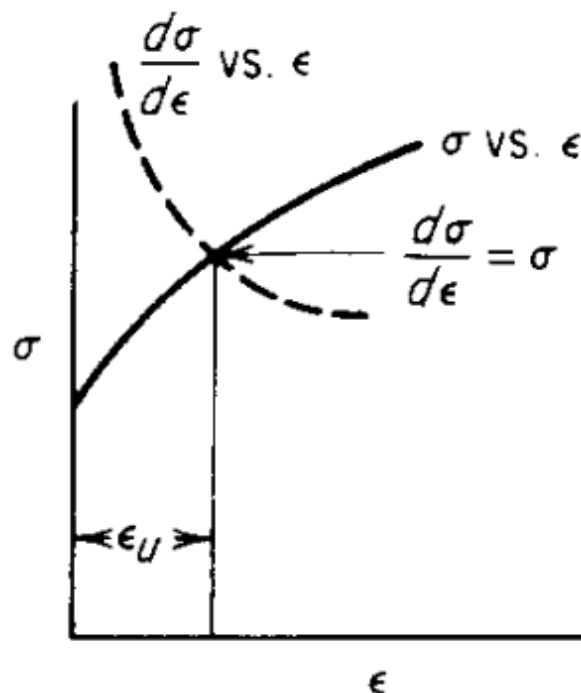
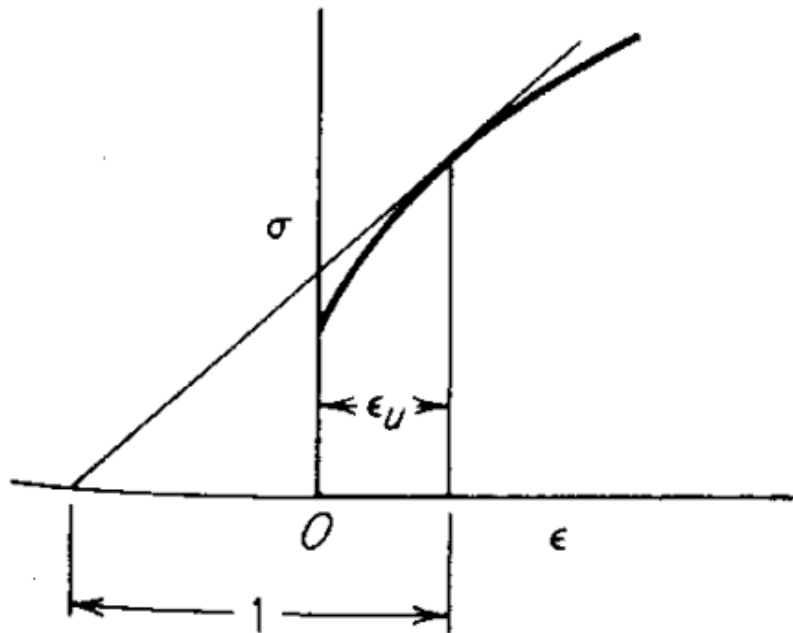
$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = -2d\epsilon_2 = d\bar{\epsilon} \Rightarrow \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = \bar{\sigma}$$

اگر رابطه تنش-کرنش به صورت $\bar{\sigma} = K \bar{\epsilon}^n$ باشد:

$$nK \bar{\epsilon}^{n-1} = K \bar{\epsilon}^n \Rightarrow \bar{\epsilon} = n$$

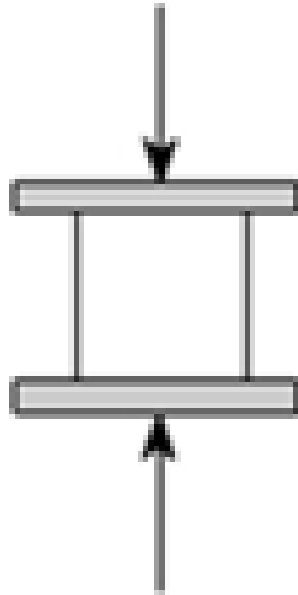
در آزمون کشش تک محوری هر گاه مقدار کرنش مؤثر برابر توان کارسختی شد ناپایداری رخ می‌دهد.

(برای $\bar{\epsilon} = n$ تغییرشکل همگن است). فقط در کشش تک محوری این شرایط صادق است.



۲. آزمون فشار

نمونه استوانه‌ای مطابق شکل بین دو فک قرار گرفته و در راستای محور استوانه تحت نیروی فشاری قرار می‌گیرد.



State of stress: $\{\sigma_1 < 0 \text{ . } \sigma_2 = \sigma_3 = 0\}$

State of strain: $\{\varepsilon_1 < 0 \text{ . } \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon_1\}$

$$\sigma_1 = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon_1 = Ln \frac{h}{h_0}$$

h و h_0 : ارتفاع اولیه و لحظه‌ای نمونه استوانه‌ای

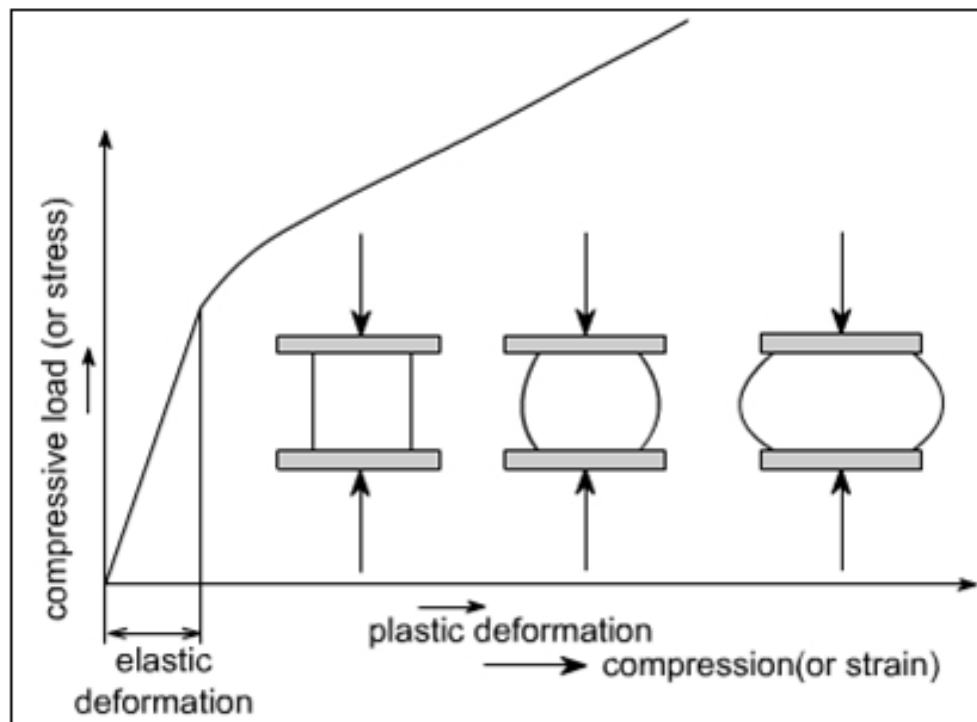
A : سطح مقطع لحظه‌ای نمونه استوانه‌ای

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}}$$

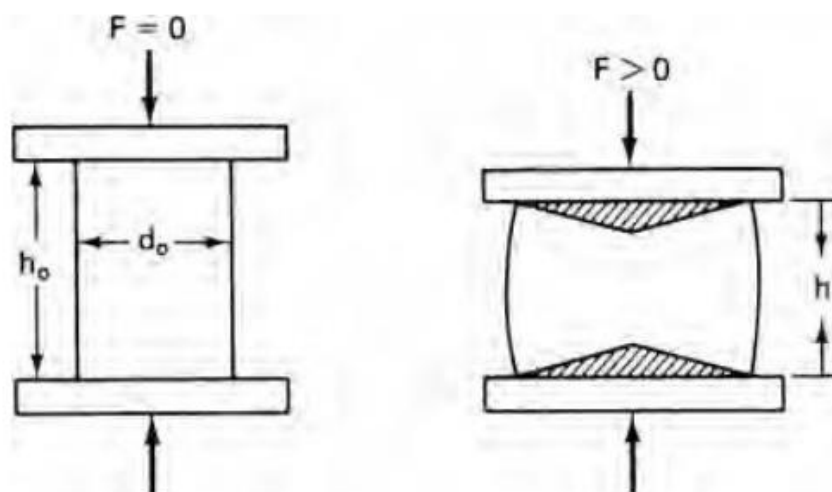
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - 0)^2 + (\sigma_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2]^{\frac{1}{2}} = \sigma_1$$

$$\bar{\varepsilon} = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + (-\frac{1}{2}\varepsilon_1)^2 + (-\frac{1}{2}\varepsilon_1)^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_1$$

با افزایش تنش اعمالی، چون در محل‌های تماس اجازه کرنش شعاعی داده نمی‌شود، مطابق شکل اصطکاک شعاعی بوجود می‌آید و باعث پدیده بشک‌ای شدن (*Barreling*) می‌شود.



این پدیده شبیه به گلویی شدن در آزمون کشش یک تغییر شکل ناهمگن و مشکل آزمون فشار است.



روش‌های کاهش اصطکاک در آزمون فشار:

۱. روان‌کاری مرحله به مرحله در حین انجام آزمون

روان‌کارها در تغییر شکل پلاستیکی فلزات: در دمای محیط ← گریس و روغن

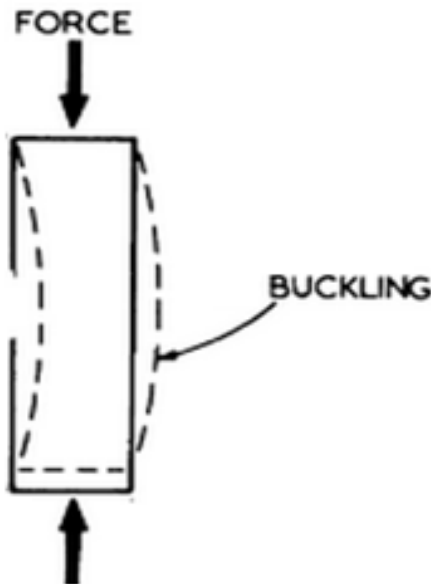
در دمای بالا ← پودر شیشه (اکستروژن)، ورق میکا، محلول MoS_2

در فورج ← روغن+پودر گرافیت

در زیر دمای محیط ← ورق تفلون

۲. استفاده از نمونه با نسبت قطر به ارتفاع کوچک

اما استفاده از نمونه با نسبت قطر به ارتفاع کوچک احتمال پدیده کمانش (*Buckling*) را افزایش می‌دهد.

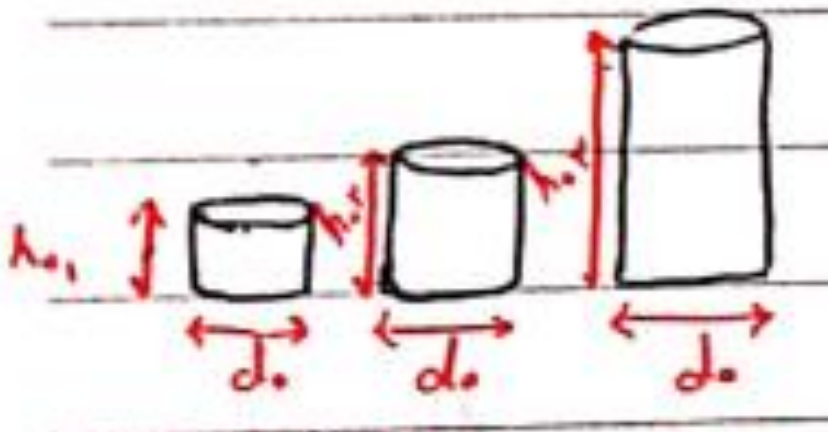


روش پیشنهاد شده توسط کوک و لارک (*Cook-Larke*) و اصلاح شده توسط واتس و فورد

(*Watts-Ford*) برای حل این مشکل:

۱. انتخاب نمونه‌های از جنس یکسان با قطر برابر و ارتفاع متفاوت

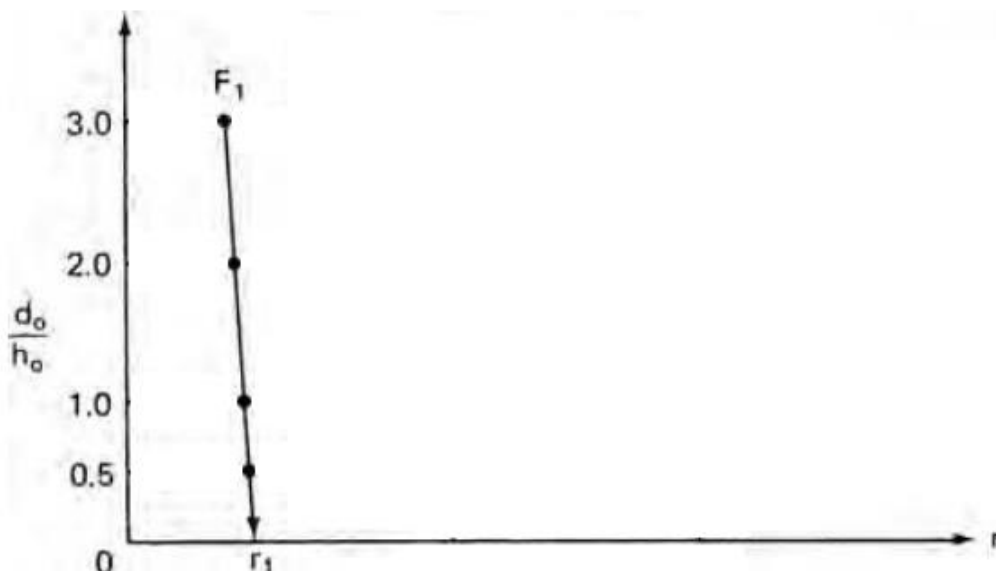
طوری که نسبت قطر به ارتفاع برای همه نمونه‌ها: $0.5 \leq \frac{d_0}{h_0} \leq 3$



۲. اعمال یک نیروی فشاری مشخص مثل F_1 در ناحیه تغییرشکل پلاستیک و رسم $\frac{d_0}{h_0}$ بر حسب r (تغییر سطح مقطع نسبی):

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{h_1}{h_0} = \ln \frac{1}{1-r}$$

ابتدا h_1 را محاسبه می‌کنیم و بعد r را برای هر یک از نسبت‌های $\frac{d_0}{h_0}$ محاسبه می‌کنیم.



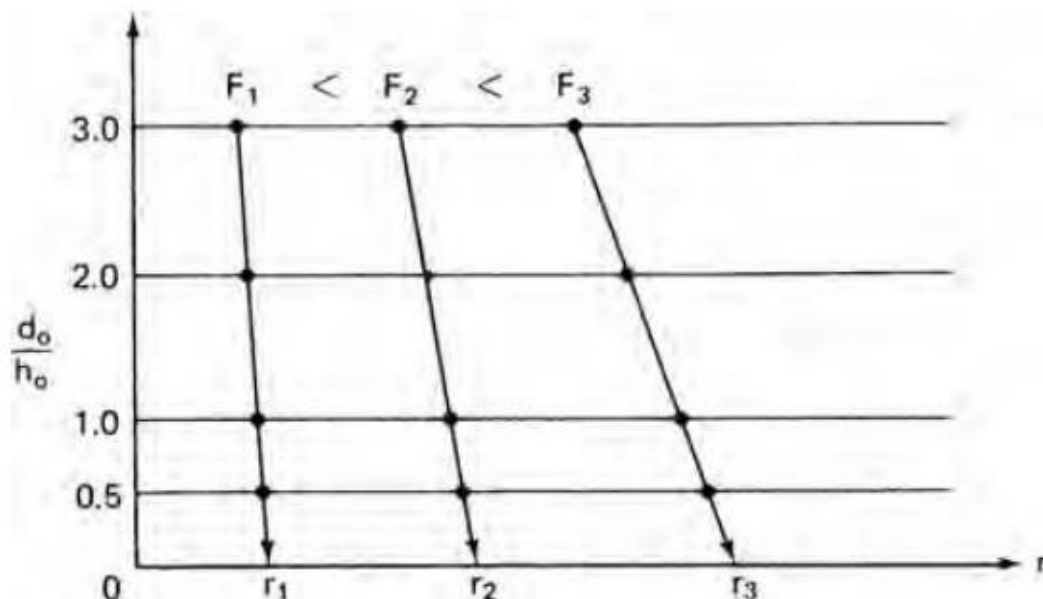
۳. پیدا کردن r_1 در $\frac{d_0}{h_0} = 0$ یا $h_0 \rightarrow \infty$ با امتداد دادن نمودار تا محور افقی

به این ترتیب می‌توان مقدار r_1 را برای طول بی‌نهایت به دست آورد. در طول بی‌نهایت یا $\frac{d_0}{h_0} = 0$ نسبت قطر به طول آنقدر کم است که می‌توان فرض کرد نمونه به طور کاملاً یکنواخت تغییرشکل می‌یابد (آثار بشکه ای شدن قابل صرف‌نظر است).

۴. سپس از روابط زیر ε_1 و σ_1 و در نتیجه یکی از نقاط منحنی $\sigma - \varepsilon$ را به دست می‌آوریم:

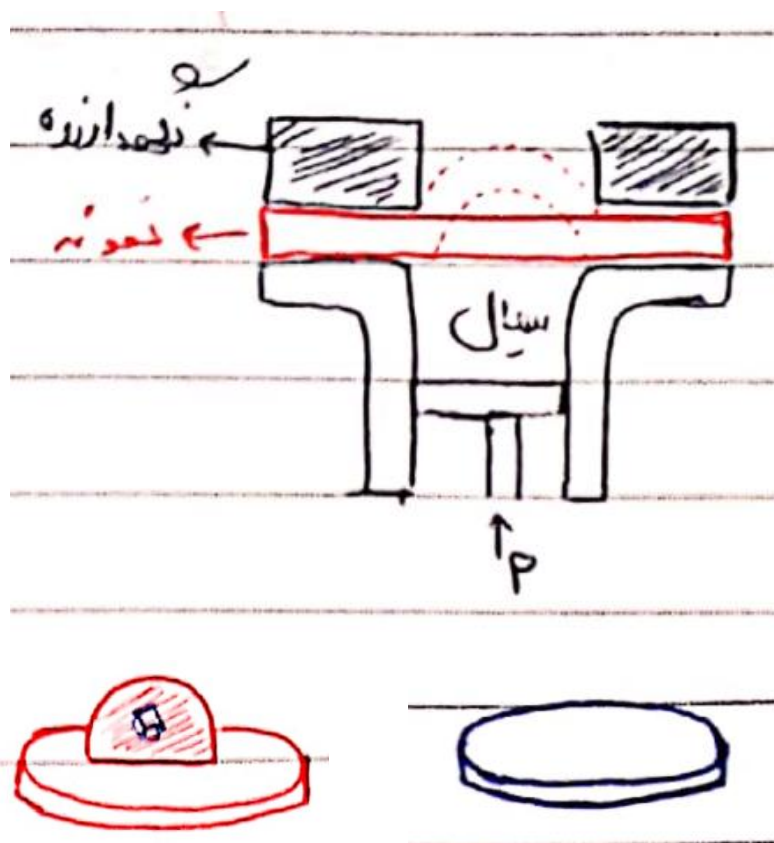
$$r_1 \rightarrow \varepsilon_1 = \ln \frac{1}{1-r_1} = \ln \frac{h_1}{h_0} = \ln \frac{A_0}{A_1} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{F_1}{A_1}$$

۵. با انجام همین مراحل در نیروهای دیگر (در ناحیه پلاستیک) می توان نقاط دیگر منحنی $\sigma - \epsilon$ را به دست آورد.

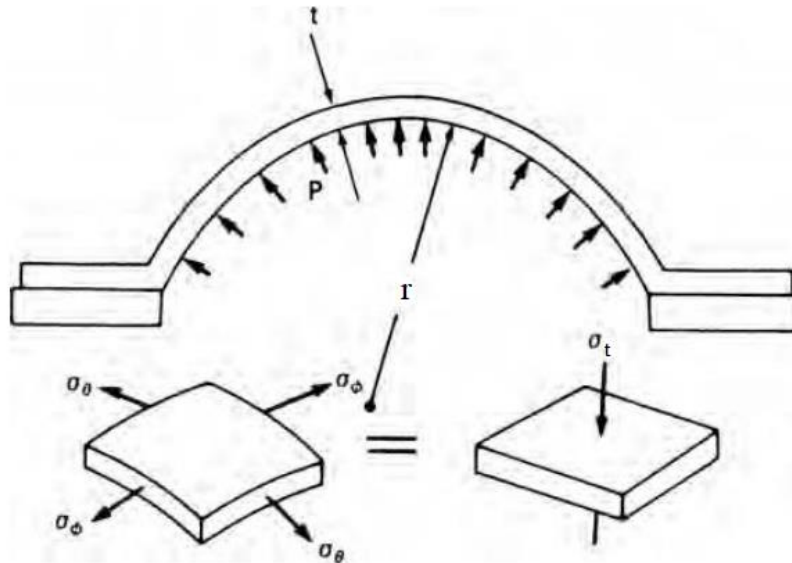


۳. آزمون بالج (Buldge test)

یک دیسک نازک از ورق فلزی را مطابق شکل در گیره قرار داده و سپس آن را در معرض فشار فزاینده سیال قرار می دهند.



مشابه حالت تنشی در مخزن جدار نازک کروی داریم:



$$\sigma_{\theta} = \frac{Pr}{2t} \quad . \quad \sigma_{\phi} = \frac{Pr}{2t} \quad . \quad \sigma_t \approx 0$$

چون تنش برشی نداریم این سه تنش، تنش‌های اصلی هستند:

$$\text{State of stress: } \{\sigma_{\theta} > 0 \quad . \quad \sigma_{\phi} = \sigma_{\theta} \quad . \quad \sigma_t = 0\}$$

$$\text{State of strain: } \{\varepsilon_{\theta} > 0 \quad . \quad \varepsilon_{\phi} = \varepsilon_{\theta} \quad . \quad \varepsilon_t = -2\varepsilon_{\theta}\}$$

$$\varepsilon_{\theta} + \varepsilon_{\phi} + \varepsilon_t = 0 \xrightarrow{\text{according to levy-mises: } \varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\phi}} 2\varepsilon_{\theta} = -\varepsilon_t = \ln \frac{t_0}{t}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{\theta} - \sigma_{\theta})^2 + (\sigma_{\theta} - 0)^2 + (\sigma_{\theta} - 0)^2]^{\frac{1}{2}} = \sigma_{\theta} \end{aligned}$$

$$\bar{\varepsilon} = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_{\theta}^2 + \varepsilon_{\theta}^2 + (-2\varepsilon_{\theta})^2) \right]^{\frac{1}{2}} = 2\varepsilon_{\theta} = -\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{Pr}{2t} \quad . \quad \bar{\varepsilon} = \ln \frac{t_0}{t}$$

شرایط ناپایداری در آزمون بالج

با تغییر شکل ورق، به دلیل کارسختی فشار لازم برای ادامه تغییر شکل افزایش می‌یابد تا جایی که ورق در ناحیه‌ای به صورت موضعی تغییر شکل داده و نازک شود و در حقیقت ناپایداری اتفاق بیفتد، در این زمان فشار حداکثر خود را داشته و از آن به بعد به دلیل ضعیف شدن ماده کاهش می‌یابد.

$$\bar{\sigma} = \frac{Pr}{2t} \Rightarrow P = \frac{2\bar{\sigma}t}{r}$$

$$dP = 0 \Rightarrow dP = d\left(\frac{2\bar{\sigma}t}{r}\right) = 2\left[\frac{\bar{\sigma}dt}{r} + \frac{td\bar{\sigma}}{r} - \frac{\bar{\sigma}tdr}{r^2}\right] = 0$$

$$r\bar{\sigma}dt + rtd\bar{\sigma} - \bar{\sigma}tdr = 0 \Rightarrow \frac{dt}{t} + \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} - \frac{dr}{r} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = \frac{dr}{r} - \frac{dt}{t} = d\varepsilon_{\theta} - d\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = 3d\varepsilon_{\theta} = \frac{3}{2}d\bar{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{3}{2}\bar{\sigma}$$

اگر منحنی تنش-کرنش ماده از رابطه هولمن تبعیت کند یعنی $\bar{\sigma} = K \bar{\varepsilon}^n$ در نتیجه داریم:

$$nK \bar{\varepsilon}^{n-1} = \frac{3}{2}K \bar{\varepsilon}^n \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{2}{3}n$$

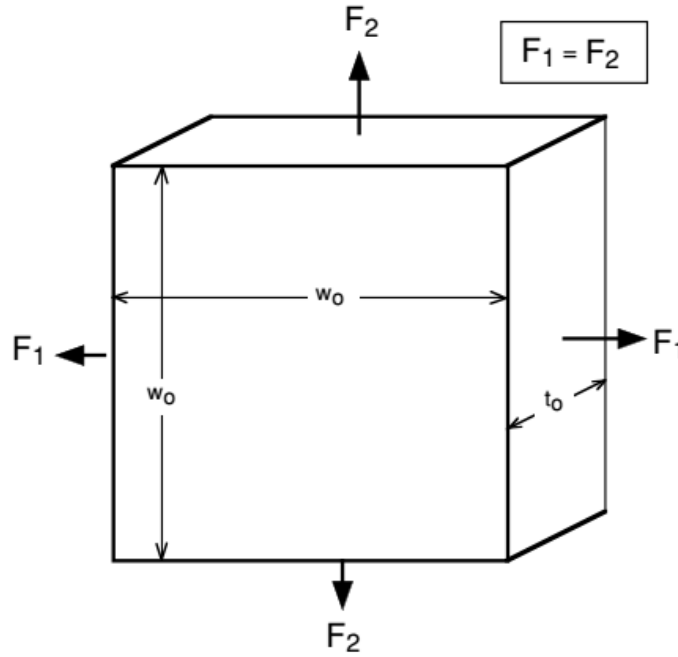
۴. آزمایش کشش دو محوری متقارن (Balanced biaxial tension)

در حالت کشش ساده نشان دادیم که کرنش ناپایداری برابر است با: $\bar{\varepsilon} = n$

در این حالت نشان می‌دهیم که کرنش ناپایداری برابر است با: $\bar{\varepsilon} = 2n$ (یعنی دو برابر کشش ساده)

در این آزمایش، مطابق شکل ورق نازکی تحت دو نیروی کششی F_1 و F_2 قرار گرفته و نیروی F_3 در

راستای ضخامت برابر با صفر است.



$$\sigma_1 = \frac{F_1}{tw} \quad . \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{tw} \quad . \quad \sigma_t \approx 0$$

State of stress: $\{\sigma_1 > 0 \quad . \quad \sigma_2 = \sigma_1 \quad . \quad \sigma_3 = 0\}$

State of strain: $\{\varepsilon_1 > 0 \quad . \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \quad . \quad \varepsilon_3 = -2\varepsilon_1\}$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \xrightarrow{\text{according to levy-mises: } \varepsilon_1 = \varepsilon_2} \varepsilon_3 = -2\varepsilon_1$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - 0)^2 + (\sigma_1 - 0)^2]^{\frac{1}{2}} = \sigma_1 \end{aligned}$$

$$\bar{\varepsilon} = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^2 + (-2\varepsilon_1)^2) \right]^{\frac{1}{2}} = 2\varepsilon_1$$

شرایط ناپایداری:

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{tw} \quad \Rightarrow \quad F = \bar{\sigma}tw$$

$$dF = 0 \quad \Rightarrow \quad dF = d(\bar{\sigma}tw) = twd\bar{\sigma} + \bar{\sigma}wdt + t\bar{\sigma}dw = 0$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} + \frac{dt}{t} + \frac{dw}{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = -\frac{dt}{t} - \frac{dw}{w} = 2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_1 = \frac{1}{2}d\bar{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\bar{\sigma}$$

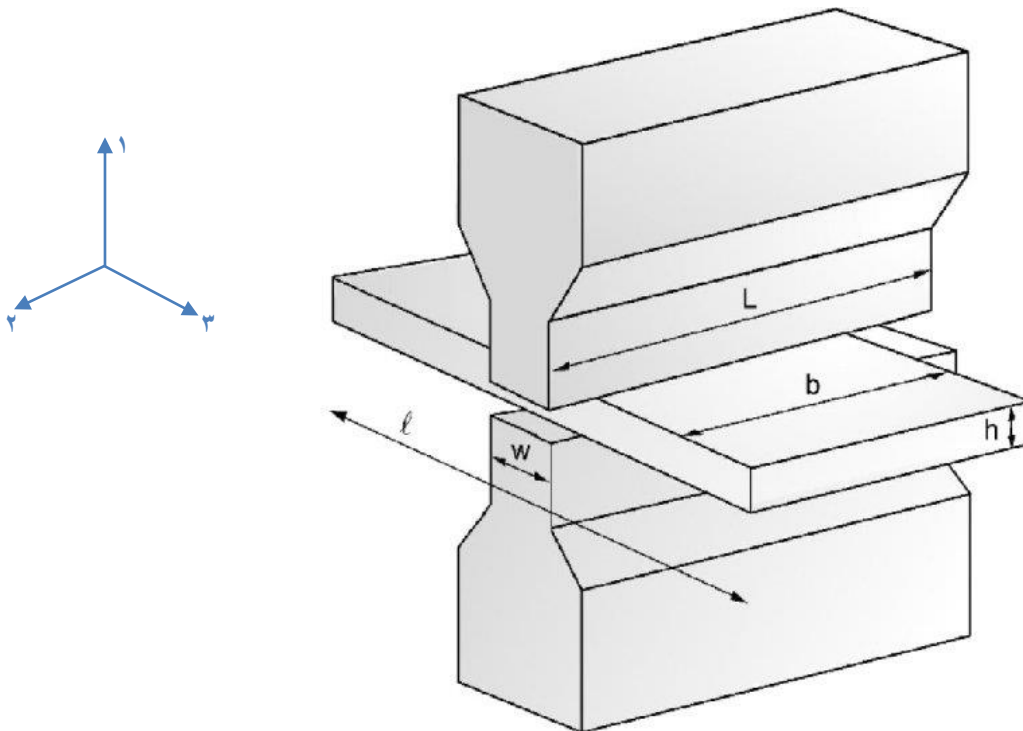
اگر منحنی تنش-کرنش ماده از رابطه هولمن تبعیت کند یعنی $\bar{\sigma} = K \bar{\varepsilon}^n$ در نتیجه داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} = K \bar{\varepsilon}^n \end{array} \right\} \Rightarrow nK \bar{\varepsilon}^{n-1} = \frac{1}{2}K \bar{\varepsilon}^n \quad \Rightarrow \quad \bar{\varepsilon} = 2n$$

۵. آزمون فشار تحت کرنش صفحه‌ای

بسیاری از فرایندهای تغییرشکل از جمله نورد تحت شرایط کرنش صفحه‌ای انجام می‌شوند.

شماتیک فرایند فشار تحت کرنش صفحه‌ای:



اگر $b \gg w$ و می‌توان تغییرشکل را با تخمین خوبی کرنش صفحه‌ای در نظر گرفت.

$$d\varepsilon_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad d\varepsilon_2 = \frac{2}{3}d\lambda \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$\text{State of stress: } \left\{ \sigma_1 < 0 \text{ . } \sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma_1 \text{ . } \sigma_3 = 0 \right\}$$

State of strain: $\{\varepsilon_1 < 0 \text{ . } \varepsilon_2 = 0. \text{ } \varepsilon_3 = -\varepsilon_1\}$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_1)^2 + (\sigma_1 - 0)^2 + (\frac{1}{2}\sigma_1 - 0)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_1$$

$$\bar{\varepsilon} = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + 0 + (-\varepsilon_1)^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_1$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{F}{bw}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{h}{h_0}$$

نرخ کرنش و دمای تغییر شکل

نرخ کرنش ($\dot{\epsilon}$) (Strain rate):

عبارت است از سرعت تغییر شکل

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} \left(\frac{1}{\text{sec}} \right)$$

فرایندهای تغییر شکل پلاستیکی بر حسب نرخ کرنش آنها:

خزش (Creep): به عنوان یک فرایند تغییر شکل با نرخ کرنش بسیار کم مطرح است.

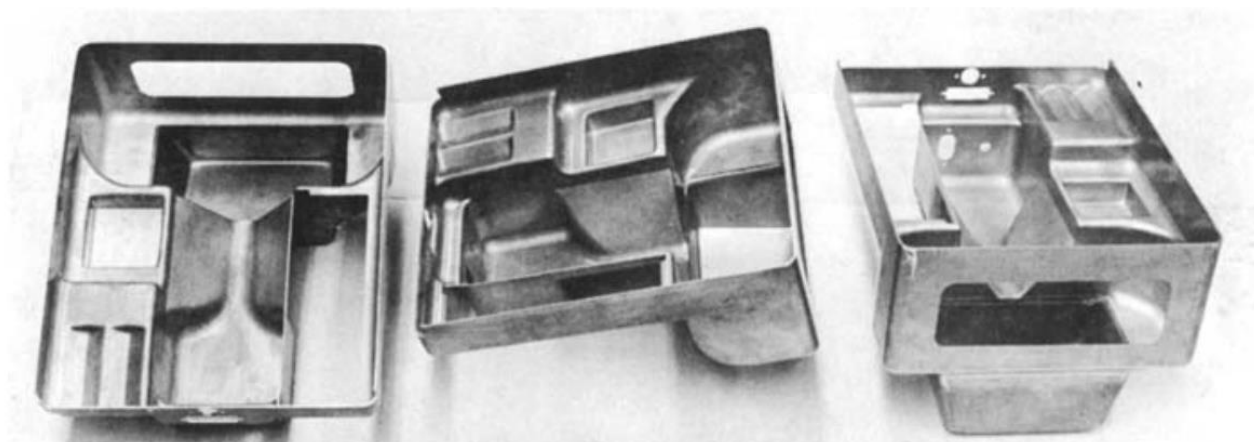
$$\dot{\epsilon} \ll 10^{-4}$$

شکل دهی ابرومسانی (Superplastic forming): فرایندی با نرخ کرنش بسیار کم در دماهای بالا (شرایط:

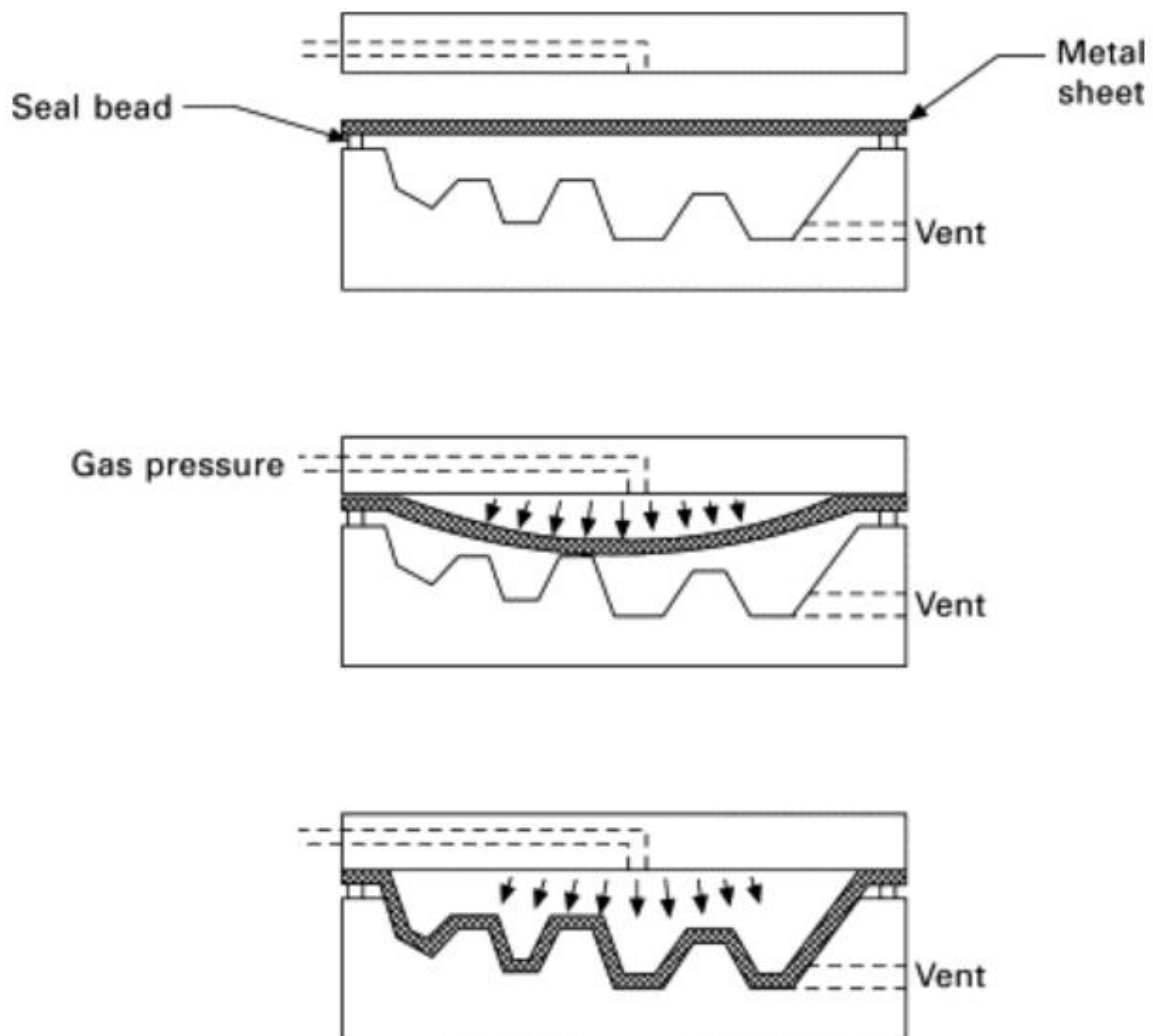
اندازه دانه بسیار ریز (کوچکتر از $10 \mu m$ و ساختار یکنواخت و هم‌محور، دمای بالا $T > 0.5T_m$)

آزمون کشش نیز در همین محدوده نرخ کرنش انجام می‌شود.

$$10^{-4} < \dot{\epsilon} < 10^{-2}$$



Complex sheet-metal part of Zn-22% Al made by superplastic forming. Courtesy of D. S. Fields, IBM Corp.



$$10^{-2} < \varepsilon^{\circ} < 1$$

سایر فرایندهای شکل دهی:

$$1 < \varepsilon^{\circ} < 100$$

فرایندهای با نرخ کرنشی متوسط:

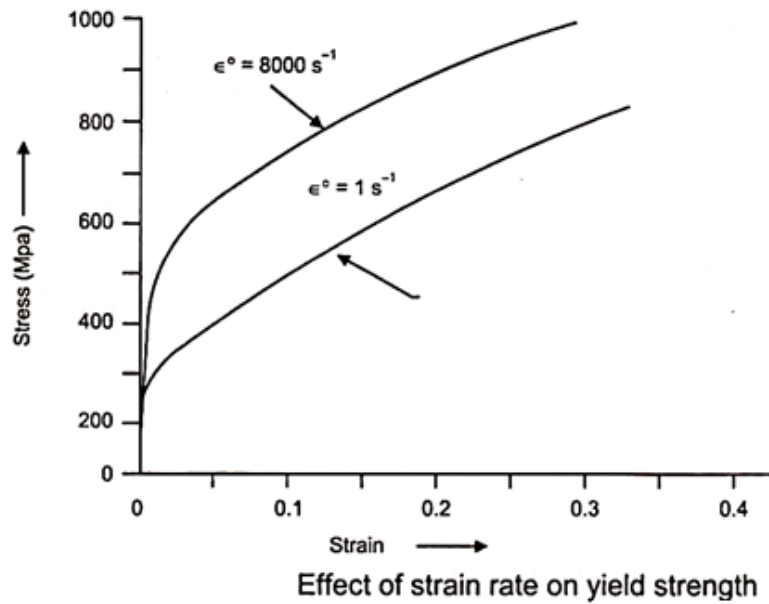
$$100 < \varepsilon^{\circ} < 1000$$

فرایندهای با نرخ کرنشی بالا:

$$10^3 < \varepsilon^{\circ} < 10^4$$

شکل دهی انفجاری (*Explosive forming*):

دلیل اهمیت نرخ کرنش؟ تنش سیلان مواد به نرخ کرنش وابسته است.



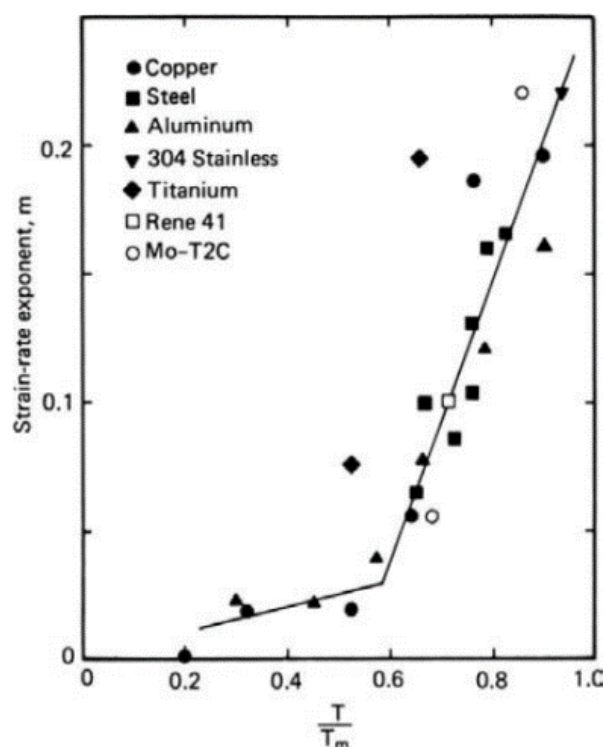
ارتباط بین تنش و کرنش: $\sigma = K \varepsilon^n$

ارتباط بین تنش و نرخ کرنش: $\sigma = C \varepsilon^{\circ m}$

m: ضریب حساسیت به نرخ کرنش (Strain rate sensitivity)

C: ثابت استحکام ماده (Strength coefficient) به دما، کرنش و جنس بستگی دارد.

نمودار تغییرات m بر حسب دما:



دیده می شود هنگامی که دما از دمای تبلور مجدد ($0.5 T_m$) بالاتر می رود، ضریب حساسیت به نرخ کرنش به شدت افزایش می یابد.

برای موادی که تحت کرنش و تغییر شکل در دماهای پایین قرار می گیرند (کار سرد)، m مقدار بسیار کمی دارد:

$$0 < m < 0.03$$

و می توان از تأثیر ε° روی تنش سیلان صرف نظر کرد،

مثلاً اگر $m = 0.02$ و نرخ کرنش ۱۰ برابر شود:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{C \varepsilon_2^\circ{}^m}{C \varepsilon_1^\circ{}^m} \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \left(\frac{\varepsilon_2^\circ}{\varepsilon_1^\circ} \right)^m \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1.04$$

ولی با افزایش دما، m زیاد شده و اهمیت پیدا می کند، مثلاً اگر $m = 0.2$ و نرخ کرنش ۱۰ برابر شود:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \left(\frac{\varepsilon_2^\circ}{\varepsilon_1^\circ} \right)^m \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1.58$$

در نتیجه در فرایندهای شکل دهی در دماهای بالا باید نرخ کرنش را تأثیر داد ولی در دماهای پایین چندان لزومی به تأثیر نرخ کرنش نیست.

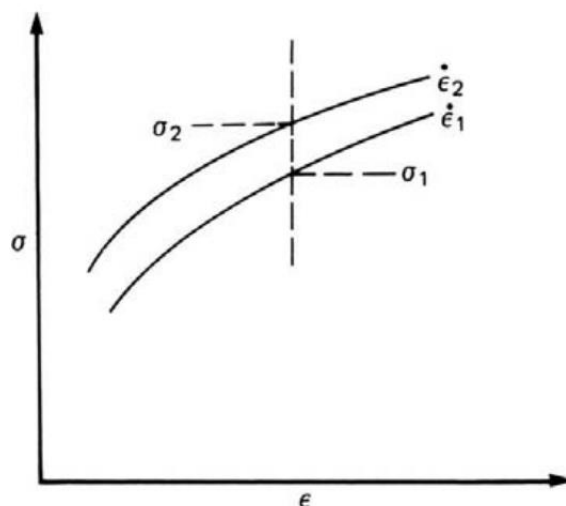
پس در دماهای بالا معمولاً از رابطه $\sigma = C \varepsilon^\circ{}^m$ برای تعیین تنش سیلان ماده استفاده می کنند.

m را معمولاً در آزمایشگاه اندازه گیری می کنند.

روش‌های تعیین m :

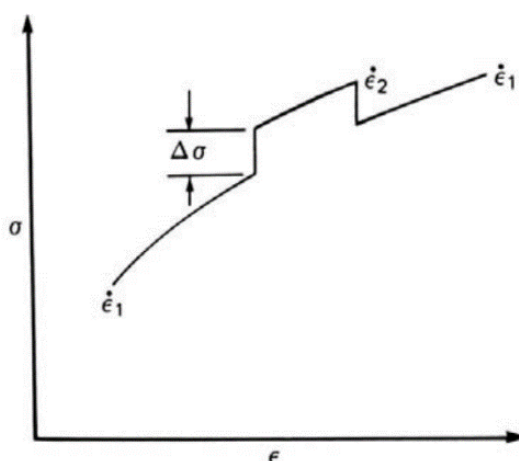
۱. رسم منحنی تنش-کرنش پیوسته برای یک ماده در نرخ کرنش‌های متفاوت و مقایسه تنش‌ها در یک

کرنش ثابت با استفاده از معادله $\sigma = C \dot{\epsilon}^m$



$$\begin{cases} \sigma_1 = C \dot{\epsilon}_1^m \\ \sigma_2 = C \dot{\epsilon}_2^m \end{cases} \quad \text{Ln} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) = \text{Ln} \left(\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} \right)^m \quad \Rightarrow \quad \text{Ln} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) = m \times \text{Ln} \left(\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} \right)$$

۲. استفاده از دستگاهی که قادر به تغییر ناگهانی نرخ کرنش باشد.



$$\text{Ln} \left(\frac{\sigma_1 + \Delta\sigma}{\sigma_1} \right) = \text{Ln} \left(\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} \right)^m \quad \Rightarrow \quad \text{Ln} \left(1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_1} \right) = m \times \text{Ln} \left(\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{Little } \Delta\sigma} \frac{\Delta\sigma}{\sigma_1} = m \times \text{Ln} \left(\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} \right)$$

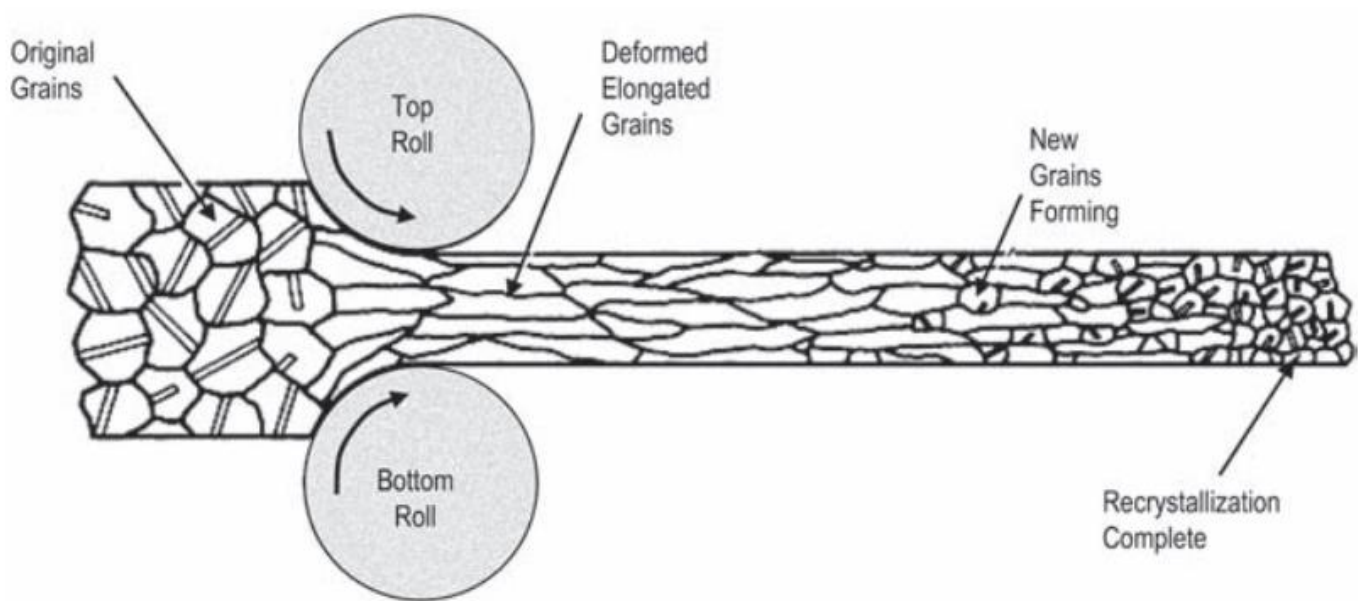
دمای تغییر شکل:

انواع فرایندهای شکل دهی از نظر درجه حرارت تغییر شکل:

۱. فرایندهای تغییر شکل سرد (کار سرد) *Cold metal working*

۲. فرایندهای تغییر شکل گرم (کار گرم) *Warm metal working*

۳. فرایندهای تغییر شکل داغ (کار داغ) *Hot metal working*



Recrystallization during hot rolling

کار داغ را عموماً به صورت انجام کار در دمایی بالاتر از دمای تبلور مجدد تعریف می کنند و مزایای آن عبارتند از:

۱. به دلیل کاهش تنش سیلان در دمای بالا نیروی مورد نیاز برای تغییر شکل کاهش می یابد.

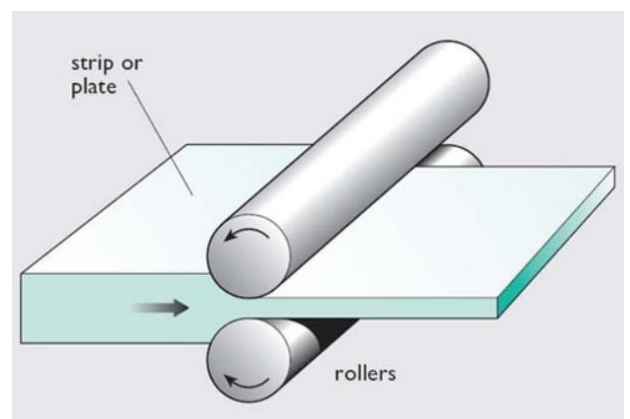
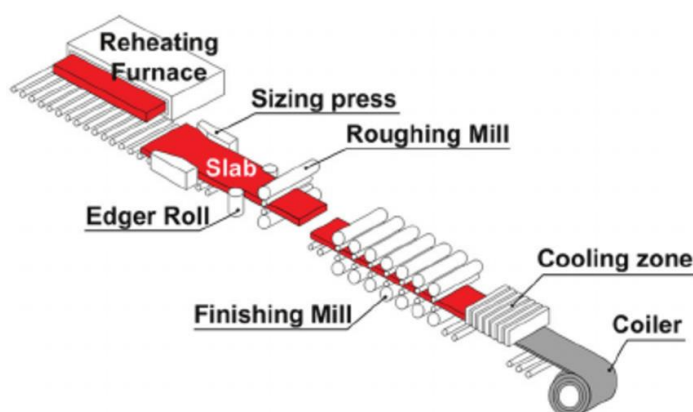
۲. ساختار و خواص قطعه نسبت به محصولات کار سرد شده همسانگردتر است.

۳. فلز همچنان که تغییر شکل می یابد، تبلور مجدد اتفاق افتاده و در نتیجه داکتیلیته محصول زیاد است.

اما بالا بودن دما در کار داغ چند اثر نامطلوب دارد:

۱. روان کاری دشوارتر است. هر چند مثلاً در اکستروژن داغ از پودر شیشه استفاده می‌شود، بسیاری از عملیات‌های کار داغ بدون روان کار انجام می‌شوند.
۲. فلز تمایل زیادی به اکسایش دارد و ضایعات فلز دارد.
۳. به دلیل حضور پوسته‌های اکسیدی سخت و ساینده و عدم روان کاری عمر ابزار کوتاه می‌شود.
۴. به سبب کافی نبودن روان کاری، وجود پوسته‌های اکسیدی و زبر شدن سطح ابزار، سطح نهایی محصول مطلوب نیست و نمی‌توان ابعاد را به دقت کنترل کرد.
۵. هنگامی که به استحکام در حد استحکام محصولات کار سرد شده نیاز باشد، عدم کارسختی در محصولات کار داغ شده نامطلوب است.

در بسیاری موارد که میزان تغییر شکل ماده زیاد است، فرایندهای شکل‌دهی با کار داغ شروع می‌شوند. زیرا به دلیل تبلور مجدد، کارسختی نداریم و توان کمتری نسبت به کار سرد لازم است و کرنش‌های بزرگ‌تری را می‌توان اعمال کرد. اما زمانی که دقت ابعادی بالا، کیفیت سطحی مناسب لازم باشد و معمولاً در مراحل پایانی تغییر شکل، کارسرد انجام می‌شود.



افزایش دما در حین تغییر شکل:

با اعمال نیرو در فرایندهای تغییر شکل به ماده انرژی می‌دهیم که کمتر از ۵٪ آن به صورت نابجایی و دیگر عیوب در ماده ذخیره شده و بیش از ۹۵٪ از این انرژی به گرما تبدیل می‌شود و دمای ماده را افزایش می‌دهد.

محاسبه تغییر دمای آدیاباتیک در حین تغییر شکل:

$$w = \int \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \quad . \quad Q = \rho c \Delta T$$

$$Q = \alpha w$$

$$\rho c \Delta T = \alpha \int \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \Rightarrow \Delta T = \frac{\alpha \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}}{\rho c} = \frac{\alpha \bar{Y} \bar{\epsilon}}{\rho c}$$

α : ضریبی بین ۰/۹۵ تا ۱.

$\bar{Y}$: تنش سیلان میانگین در محدوده کرنش از ۰ تا $\bar{\epsilon}$

ρ : دانسیته ماده

c : ظرفیت گرمایی ویژه

ΔT : تغییر دما در اثر تغییر شکل

در عمل به دلیل انتقال حرارت، ΔT کمتر از آن مقدار است (شرایط آدیاباتیک نیست).