نام و نام خانوادگی : . . . . گروه آموزشی : **ریاضی**

شماره دانشجویی : . . . . تاریخ : **۱۳۹۸/۱۰/۱۵**

نام مدرس : . . . . وقت : **۱۳۵** دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس : **معادلات دیفرانسیل (۱۲ گروه هماهنگ)**

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۳۹۹-** ۱۳۹۸

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱ - معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. ۱۵ نمره

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^3}$$

سوال۲ - جواب عمومی معادله $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + 2$ را بیابید. ۱۵ نمره

سوال۳- دستگاه معادلات زیر را با کمک عملگر D حل کنید: ۲۰ نمره

$$\begin{cases}(D+2)x - (D+2)y = \sin t \\ (D-2)x + y = e^{2t}\end{cases}$$

سوال ۴- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را حول نقطه $x_0 = 0$ بیابید. ۲۰ نمره

$$y'' + x^2y' + 2xy = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

سوال ۵- با استفاده از تبدیلات لاپلاس مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید. ۱۵ نمره

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = te^{-t},\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1$$

سوال ۶- معادله انتگرالی زیر را حل کنید. ۱۵ نمره

$$x(t) = 1 + \int_0^t \sin(t-u)x(u)du$$

سوال ۷- تبدیلات لاپلاس و لاپلاس معکوس زیر را بیابید. ۲۰ نمره

الف- $L(H(t-5)e^{2t})$

ب- $L^{-1}(\frac{s}{s^2 - 2s + 26})$

موفق باشید

پاسخنامه امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل ۳۹۸۱

سؤال ۱:

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^3}$$

ج عمومی همگن: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \longrightarrow \lambda = -3$ (۲ نمره)

$$\longrightarrow y_g = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} \qquad \text{(۳ نمره)}$$

ج خصوصی ناهمگن: $y_s = V_1 \cdot y_1 + V_2 \cdot y_2$

$$V_1 = -\int \frac{y_2 \cdot R(x)}{w(y_1, y_2)} dx = -\int \frac{e^{-6x}/x^2}{e^{-6x}} dx = \frac{1}{x} \qquad \text{(۳ نمره)}$$

$$V_2 = \int \frac{y_1 \cdot R(x)}{w} dx = \int \frac{e^{-3x} \cdot \frac{e^{-3x}}{x^3}}{e^{-6x}} dx = \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \qquad \text{(۳ نمره)}$$

$$\longrightarrow y_s = V_1 y_1 + V_2 y_2 = \frac{e^{-3x}}{x} - \frac{1}{2x^2} \cdot x e^{-3x} = \frac{1}{2x} e^{-3x} \qquad \text{(۲ نمره)}$$

$$\longrightarrow y_p = y_s + y_g = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{1}{2x} e^{-3x} \qquad \text{(۲ نمره)}$$

سؤال ۲:

$$x^2 \cdot y'' - 3x y' + 4y = x + 2 \qquad \text{(معادله اویلر)}$$

$x = e^t$ (۱ نمره) $\longrightarrow$ ج عمومی همگن: $D(D-1)y - 3Dy + 4y = 0$

$\longrightarrow (D^2 - 4D + 4)y = 0$ (۲ نمره) $\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \longrightarrow$

$\lambda_1, \lambda_2 = 2$ (۱ نمره) $\longrightarrow y_g = c_1 e^{2t} + c_2 t \cdot e^{2t}$ (۲ نمره) $\xrightarrow{x = e^t}$

$y_g = c_1 x^2 + c_2 x^2 \cdot \ln x$ (۱ نمره)

جواب خصوصی همگن (روش اول: عملگر D):

$x=e^t \Rightarrow (D^2-4D+4)y=e^t+2 \Rightarrow$ (۳ نمره)

$y_s=\dfrac{e^t+2}{D^2-4D+4} \rightarrow y_s=\dfrac{e^t}{D^2-4D+4}+\dfrac{2}{D^2-4D+4}=e^t+\dfrac{1}{2}$

(۳ نمره)

$\xrightarrow{x=e^t} y_s=x+\dfrac{1}{2}$ (۱ نمره)

$\rightarrow y_p=y_g+y_s=c_1x^2+c_2x^2 \cdot \ln x+x+\dfrac{1}{2}$ (۲ نمره)

روش (۲): کاهش مرتبه.

سؤال ۳:

$$\begin{cases}(D+2)x-(D+2)y=\sin t \\ (D-2)x+y=e^{2t} \quad \times(D+2)\end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases}(D+2)x-(D+2)y=\sin t \\ (D^2-4)x+(D+2)y=2e^{2t}+2e^{2t}=4e^{2t}\end{cases}$$ (۲ نمره)

$\Rightarrow (D^2+D-2)x=4e^{2t}+\sin t$ (۱ نمره)

جواب عمومی همگن: $\lambda^2+\lambda-2=0 \rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=-2$ (۲ نمره)

$x_g(t)=c_1e^t+c_2e^{-2t}$ (۲ نمره)

جواب خصوصی ناهمگن: $(D^2+D-2)x=4e^{2t}+\sin t$

(۲ نمره) (۲ نمره)

$\Rightarrow x_s=\dfrac{4e^{2t}}{D^2+D-2}+\dfrac{\sin t}{D^2+D-2}=e^{2t}+\dfrac{\sin t}{D-3}$

$=e^{2t}+\dfrac{(D+3)}{(D^2-9)}\sin t=e^{2t}+\dfrac{\cos t+3\sin t}{-10}$ (۲ نمره)

(۱ نمره)

$\Rightarrow x_h(t)=x_g(t)+x_s(t)=c_1e^t+c_2e^{-2t}+e^{2t}+\dfrac{\cos t+3\sin t}{-10}$

از رابطه (۵) داریم:

$$(D-2)x + y = e^{2t} \longrightarrow y = e^{2t} - (D-2)x \quad \text{(۲ نمره)}$$

$$\to y = e^{2t} - (D-2)\left(c_1e^{t} + c_2e^{-2t} + e^{2t} + \frac{\cos t + 3\sin t}{-10}\right)$$

$$= e^{2t} - c_1e^{t} + 2c_2e^{-2t} - 2e^{2t} + \frac{(-\sin t)}{10} + \frac{3}{10}\cos t$$

$$+ 2c_1e^{t} + 2c_2e^{-2t} + 2e^{2t} - \frac{1}{5}(\cos t + 3\sin t)$$

$$= e^{2t} + c_1e^{t} + 4c_2e^{-2t} + \frac{\cos t - 7\sin t}{10} \quad \text{(۳ نمره)}$$

سوال ۴: $y'' + x^2y' + 2xy = 0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\ x_0=0$

$x_0=0$ نقطه عادی است. لذا داریم:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \longrightarrow y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\longrightarrow y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \text{(۳ نمره)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad \text{(۲ نمره)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2)a_{n+3} x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad \text{(۲ نمره)}$$

$$\to 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)a_{n+3} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

(۲ نمره) ←

$$\Rightarrow 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+3)(n+2)a_{n+3} + (n+2)a_n\right]\cdot x^{n+1} = 0$$

(۰٫۲ نمره)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_2 = 0 \longrightarrow a_2 = 0 \\ (n+3)(n+2)a_{n+3} + (n+2)a_n = 0 \longrightarrow a_{n+3} = \dfrac{-a_n}{(n+3)} \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

(۰٫۲ نمره)

$$\rightarrow a_3 = \frac{-a_0}{3},\ a_4 = -\frac{a_1}{4},\ a_5 = \frac{-a_2}{5} = 0,\ a_6 = -\frac{a_3}{6} = \frac{a_0}{18}, \ldots$$

(۰٫۲ نمره)

$$\Rightarrow y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow y(x) = a_0 + a_1 x + 0 - \frac{a_0}{3}x^3 - \frac{a_1}{4}x^4 + \frac{a_0}{18}x^6 + \cdots$$

$$= a_0\left(1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{18} - \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

(۰٫۲ نمره)

$$\xrightarrow{y(0)=1} a_0 = 1, \xrightarrow{y'(0)=0} a_1 = 0$$

(۰٫۲ نمره)

$$\longrightarrow y(x) = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{18} - \cdots$$

(۰٫۱ نمره)

سؤال ۵:

$$x'' + 2x' + x = t\cdot e^{-t},\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1$$

$$\rightarrow L\{x''\} + 2L\{x'\} + L\{x\} = L\{t\cdot e^{-t}\}$$

$$\Rightarrow s^2 L\{x(t)\} - s x(0) - x'(0) + 2\left(sL\{x(t)\} - x(0)\right) + L\{x(t)\} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

(۰٫۲ نمره) (۰٫۲ نمره) (۰٫۲ نمره)

$$\Rightarrow (s^2 + 2s + 1)L\{x(t)\} = \frac{1}{(s+1)^2} + s + 1$$

(۰٫۲ نمره)

(۰٫۳ نمره)

$$\rightarrow L\{x(t)\} = \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{1}{(s+1)} \Rightarrow x(t) = \frac{t^3}{6}e^{-t} + e^{-t}$$

(۰٫۲ نمره) (۰٫۲ نمره)

سؤال ۶:

$$x(t) = 1 + \int_0^t \sin(t-u)\, x(u)\, du$$

$$\Rightarrow L\{x(t)\} = L\{1\} + L\left\{\int_0^t \sin(t-u)\, x(u)\, du\right\}$$

$$\Rightarrow L\{x(t)\} = L\{1\} + L\{\sin t * x(t)\}$$ (۳ نمره)

$$\Rightarrow L\{x(t)\} = \frac{1}{s} + L\{\sin t\} \cdot L\{x(t)\}$$ (۲ نمره)

$$\Rightarrow L\{x(t)\} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1} \cdot L\{x(t)\}$$ (۳ نمره)

$$\Rightarrow \frac{s^2}{s^2+1} L\{x(t)\} = \frac{1}{s} \Rightarrow L\{x(t)\} = \frac{s^2+1}{s^3}$$ (۲ نمره)

$$\Rightarrow x(t) = L^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s^3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}\right\} = t + \frac{t^2}{2}$$

(۵ نمره)

سؤال ۷:

الف: $L\{H(t-5)e^{2t}\}$

$$f(t-5) = e^{2t} \rightarrow f(t) = e^{2(t+5)} = e^{10} \cdot e^{2t}$$ (۳ نمره)

$$\rightarrow L\{H(t-5)e^{2t}\} = e^{-5s} \cdot L\{e^{10} e^{2t}\} =$$ (۴ نمره)

$$\frac{e^{-5s} \cdot e^{10}}{s-2}$$ (۳ نمره)

ب) $$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2s+26}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2+25}\right\}$$ (۲ نمره)

$$= L^{-1}\left\{\frac{s-1+1}{(s-1)^2+25}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+25}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+25}\right\}$$ (۳ نمره)

$$= e^t \cdot \cos 5t + e^t \cdot \frac{\sin 5t}{5}$$ (۵ نمره)