

مثال ۱: معادلی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی  $A \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix}$  عبور کرده و بر صفحه‌ی

$$E_1: x - 2y + 2z = 13 \quad \text{و} \quad E_2: 2x - z = 5 \quad \text{عمود باشد.}$$

حل) به‌وضوح اگر دو صفحه بر یکدیگر عمود باشند، آن‌گاه بردارهای نرمال آن‌ها نیز بر یکدیگر عمود می‌باشند. لذا بردار نرمال صفحه‌ی خواسته‌شده، برابر با حاصلضرب خارجی بردار نرمال‌های صفحه‌های  $E_1$  و  $E_2$  می‌باشد و داریم:

$$\vec{n} = \vec{n}_{E_1} \times \vec{n}_{E_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

لذا معادلی صفحه‌ی خواسته‌شده به صورت زیر می‌باشد:

$$2(x - 2) + 2(y - (-2)) + 4(z - 3) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{2x + 2y + 4z - 10 = 0}$$

مثال ۲: معادلی صفحه‌ای را بنویسید که با بردار  $\vec{v} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$  و محور  $x$ -ها موازی باشد و از نقطه‌ی  $A \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$  واقع بر محور  $y$ -ها به‌عرض ۲ عبور کند.

حل) بردار نرمال صفحه‌ی خواسته‌شده، حاصلضرب خارجی بردارهای  $\vec{v} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$  و  $\vec{i} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$  (بردار یکم محور  $x$ -ها) می‌باشد و

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow 0(x - 0) + 1(y - 2) - 2(z - 0) = 0$$

$$\Rightarrow 1y - 2z = 2$$

یادآوری: (الف) فرض کنیم صفحه  $P$  مماس بر دایره و نقطه  $A$  نقطه این دایره خارج از صفحه  $P$  بر دایره و همچنین  $\vec{n}$  بردار نرمال صفحه  $P$  باشد. در این صورت فاصله نقطه  $A$  از صفحه  $P$  از رابطه زیر بدست می آید که  $B$  نقطه این دایره است که بر روی صفحه  $P$  منطبق است:

$$\text{فاصله نقطه } A \text{ از صفحه } P = d = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

(ب) ثابت می شود که اگر صفحه  $P$  دارای معادله  $P: ax+by+cz+d=0$  باشد در این صورت فاصله نقطه  $A \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$  از صفحه  $P$  از رابطه زیر حاصل می شود:

$$\text{فاصله نقطه } A \text{ از صفحه } P = d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال ۳- اگر صفحات  $E_1: x-y-z=1$  و  $E_2: x-y-z=2$  دو وجه یک

مکعب باشند در این صورت حجم این مکعب را به دست آورید!

حل) دو صفحه فوق موازی هستند (چون بردار نرمال آنها) و لذا فاصله بین این دو صفحه که دو وجه مکعب بوده اند، برابر با طول ضلع مکعب می باشد. حال برای به دست آوردن فاصله این دو صفحه موازی کافی است یک نقطه را به دایره از صفحات انتخاب کرده و فاصله آن را تا صفحه دیگر محاسبه کنیم:

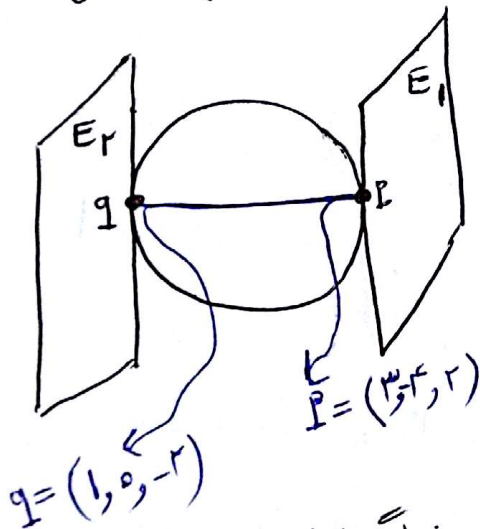
$$\begin{aligned} A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \in E_1 \\ \text{فاصله نقطه } A \text{ از صفحه } E_2 = \frac{|0+0+1-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \Rightarrow \text{حجم مکعب} = \left( \frac{\text{ضلع}}{\text{مکعب}} \right)^3 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

مثال ۴- معادله‌ی کره‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی  $P \begin{vmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{vmatrix}$  بگذرد و بر صفحات

$$E_1: x-2y+2z=15 \quad \text{و} \quad E_2: x-2y+2z=-3 \quad \text{ماس باشد}$$

حل) ابتدا یادآوری می‌کنیم که معادله‌ی کره با مرکز  $(x_0, y_0, z_0)$  و شعاع  $r$  به صورت  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$  می‌باشد. حال برای نوشتن معادله‌ی کره فاصله‌ی مرکز از صفحات مرکز آن و اندازه‌ی شعاع آن نیاز داریم. ابتدا مت‌کنیم که دو صفحه‌ی  $E_1$  و  $E_2$  موازی می‌باشند (چرا؟!). و به وضوح نقطه‌ی  $P \begin{vmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{vmatrix}$  روی صفحه‌ی  $E_1$  واقع شده است (چرا؟!)

و با توجه به وضعیت واقع شدن کره در بین دو صفحه موازی، نقطه‌ی تماس صفحه‌ی  $E_1$  و کره می‌باشد. پاره خط  $PQ$  که در شکل می‌بینید برابر با قطر کره می‌باشد و چون این پاره خط بر صفحات  $E_1$  و  $E_2$  عمود است، لذا بردارهای خطی که از  $PQ$  می‌گذرد، برابر با بردار نرمال صفحات موازی  $E_1$  و  $E_2$  یعنی برابر با  $\vec{n} = (1, -2, 2)$  می‌باشد. لذا معادله‌ی خط گذرا از  $PQ$  به صورت



$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-2}{2}$$

می‌کنند (چرا?!). به وضوح طول  $PQ$  برابر با ۴ می‌باشد  $|PQ| = \sqrt{(3-1)^2 + (-4-0)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$

لذا شعاع کره مدنظر ۳ می‌باشد و مرکز پاره خط  $PQ$ ، مرکز کره می‌باشد که داریم:

$$PQ \text{ مرکز} = \left( \frac{3+1}{2}, \frac{-4+0}{2}, \frac{2+(-2)}{2} \right) = (2, -2, 0)$$

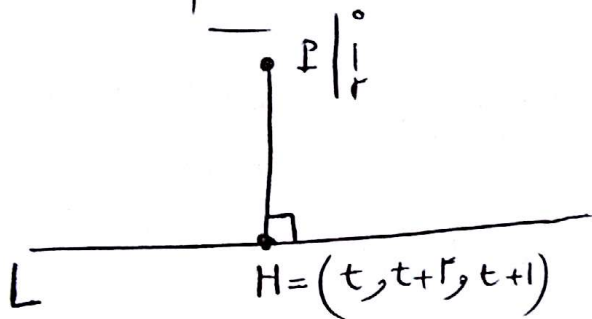
در نهایت معادله‌ی کره فاصله‌ی مرکز به صورت  $(x-2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 36$  می‌باشد.  $\square$

مثال ۵- معادلات خط گزرا از نقطه  $P(1, 1, 2)$  و عمود متقاطع بر خط

$$L: x=y-2=z-1 \quad \text{را بنویسید.}$$

حل / ابتدا تو بکنیم که معادلی پارامتری خط  $L$  به صورت  $L: \begin{cases} x=t \\ y=t+2 \\ z=t+1 \end{cases}$

می باشد. و ضریب نقطه  $P(1, 1, 2)$  روی خط  $L$  واقع شده است و در این صورت با اختیار کردن نقطه  $H$  که پای عمود متقاطع می باشد داریم:



$$PH = (t-1, (t+2)-1, (t+1)-2) \\ = (t, t+1, t-1)$$

حال چون بردارهای خط  $L$  برابر با  $\vec{n} = (1, 1, 1)$  می باشد و  $PH$  عمود بر  $L$  است، داریم:

$$PH \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (t, t+1, t-1) \cdot (1, 1, 1) = 0 \\ \Rightarrow t + (t+1) + (t-1) = 0 \Rightarrow 3t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \Rightarrow PH = (-1, 1, -1)$$

لذا خط خواسته شده، خطی است که بردارهای آن  $PH = (-1, 1, -1)$  بوده و از

نقطه  $P(1, 1, 2)$  عبور می نماید. داریم:

$$L': \begin{cases} \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1} \\ x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L': \begin{cases} x=0 \\ y=t+1 \\ z=-t+2 \end{cases}$$

مثال 4- معادلات خط را بنویسید در نقطه‌های بر محور (و خط زیر، هر دو آن ها محور باشد)

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$$

$$L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+3}{2}$$

حل / ابتدا مثل بر محور (تقاطع) (و خط را مشخص می‌کنیم):

$$L_1: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = 3t \end{cases}$$

$L_1$  را در  $L_2$  جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{t+1}{1} = \frac{(2t-1)+3}{2} = \frac{3t+3}{2}$$

$$\Rightarrow t+1 = t+1 = \frac{3}{2}(t+1) \Rightarrow \frac{-1}{2}(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2}t = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{t = -1}$$

لذا داریم  
نقطه‌های تقاطع (و خط من باشد) حال

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -3 \\ z_0 = -3 \end{cases}$$

بردارهای خط  $L_1$  برابر  $n_1 = (1, 2, 3)$  و بردارهای خط  $L_2$  برابر با

$n_2 = (1, 2, 2)$  من باشد و لذا باید بردارهای خط که بفرایم بر محور (و خط محور باشد) برابر

حاصل ضرب خارجی این دو من باشد

$$n_3 = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2i + j + 0k = (-2, 1, 0)$$

$$\Rightarrow L: \frac{x-0}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+3}{0}$$

مثال ۷- معادلات صفحه‌ای را بنویسید که از فصل مشترک دو صفحه‌ای

$$E_1: 7x - 4y + 7z + 5 = 0$$

و  $E_2: 4x + 3y - 2z + 4 = 0$  بیشتر دو صفحه‌ای

همچنین  $E_3: x - y - 2z + 5 = 0$

حل / فصل مشترک دو صفحه  $E_1$  و  $E_2$  (انتخاب  $R^3$  همایک خط راست منبسط را به دست

من آوریم: برای این منظور می‌توانیم یکبار بین  $E_1$  و  $E_2$  که متغیر  $z$  را حذف کرده و  $x$  را بر حسب  $y$  و  $z$  برابر کنیم

$$\begin{cases} 7x - 4y + 7z + 5 = 0 \\ 4x + 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x^2} \begin{cases} 14x - 8y + 14z + 10 = 0 \\ 28x + 21y - 14z + 42 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 42x + 13y + 52 &= 0 \\ \Rightarrow x &= -\frac{(13y + 52)}{42} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 7x - 4y + 7z + 5 = 0 \\ 4x + 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x^3} \begin{cases} 21x - 12y + 21z + 15 = 0 \\ 14x + 12y - 8z + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 37x + 13z + 39 &= 0 \\ \Rightarrow x &= -\frac{(13z + 39)}{37} \quad (2) \end{aligned}$$

بنابراین از (1) و (2) داریم  $L: \frac{x}{-13} = \frac{y+4}{42} = \frac{z+3}{37}$  حال پیدا

نرمال صفحه مورد نظر بایستی بر بردارهای این خط و بردار نرمال صفحه  $E_3$  عمود باشد لذا داریم:

$$\vec{n} = (1, -1, -2) \times (-13, 42, 37) = (29, -11, 47)$$

حال با نقطه‌ای  $(-3, -4, 0)$  که معادله صفحه به صورت  $47x - 11(y+4) + 29(z+3) = 0$  منبسط

مثال ۱- محل تقاطع خطوط  $\langle (0, 2, 3) \rangle + (4, 0, 1): L_1$  و

$$L_2: \langle (2, 2, 1) \rangle + (2, 2, 1)$$

را بیابید و معادلات صفحه‌ی شامل آن‌ها را بنویسید.

$$L_1: \begin{cases} x = 1t \\ y = 3t - 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$L_2: \begin{cases} x = 3s + 1 \\ y = s + 4 \\ z = 2s + 2 \end{cases}$$

حل/رایم

$$\begin{cases} 1t = 3s + 1 \\ 3t - 1 = s + 4 \\ 4 = 2s + 2 \end{cases} \quad \text{با حل این}$$

حال با تقاطع دارن خطوط رایم

رستگاه ۳ معادله و ۲ مجهول  $(t, s)$ ، رایم که تقاطع تقاطع به صورت زیر می باشد:

مقدار پارامتر  $s$  را در معادله  $L_2$  جایگزین

نقطه تقاطع بدست می آید

$P = (4, 5, 4)$

$$\vec{A}_1 = (2, 3, 0) \text{ و } \vec{A}_2 = (2, 2, 1) \text{ بردارهای صورت}$$

می باشند، لذا بردار نرمال صفحه که باستی بر هر دو خط عمود باشد به صورت زیر بدست

$$\vec{n} = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 = (2, 3, 0) \times (2, 2, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3i - 2j - 4k = (3, -2, -4)$$

بنابراین معادله صفحه مورد نظر به صورت زیر می باشد:

$$3(x - 4) - 2(y - 5) - 4(z - 4) = 0$$

$$3x - 2y - 4z + 24 = 0$$

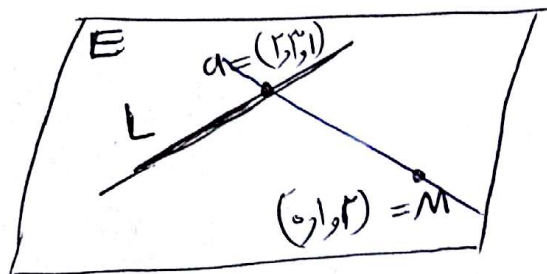
مثال ۹- معادلی صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی  $M = (۲, ۰, ۰)$  و شامل خط زیر را بنویسید.

$$L: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \rightarrow L: (1, 3, 1) + \langle (1, -2, 3) \rangle$$

حل/ به وضع نقطه‌ی  $(1, 3, 1)$  روی خط قرار دارم و می‌توانم با استفاده از این نقطه

و نقطه‌ی  $M = (۲, ۰, ۰)$  برداری غیر هم‌راستا با بردارهای خط  $\vec{a}$  که بردار  $\vec{A} = (1, -2, 3)$  می‌باشد

به دست آورده دارم:



$$\vec{Ma} = (1, 3, 1)$$

$$\vec{A} = (1, -2, 3)$$

حال بردار نرمال صفحه بر هر دو بردار  $\vec{Ma}$  و  $\vec{A}$  عمود می‌باشد، لذا داریم

$$\vec{n} = \vec{Ma} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4i - 7j - 4k = (4, -7, -4)$$

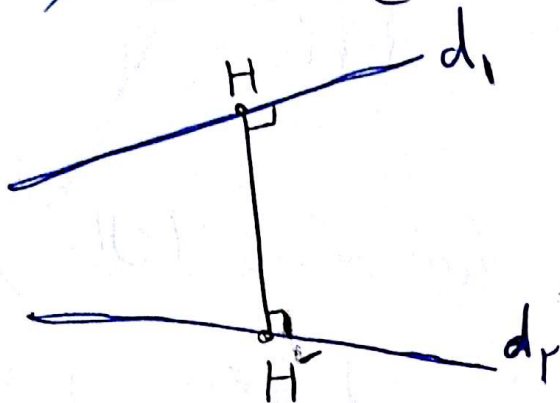
لذا معادلی صفحه‌ی خواسته شده به صورت زیر می‌باشد:

$$4(x-0) - 7(y-1) - 4(z-2) = 0$$

$$4x - 7y - 4z + 19 = 0$$

یادآوری: (تعریف عمود مشترک دو خط متناظر)

به خطی که به دو خط متناظر عمود برود و هر دو آن‌ها را قطع می‌کند، عمود مشترک



دو خط متناظر گوئیم. مثلاً در شکل مقابل

از خطوط  $d_1$  و  $d_2$  متناظر با هم، آن‌گاه

$HH'$  عمود مشترک این دو خط متناظر می‌باشد.

اگر  $u_1$  و  $u_2$  بردارهای هاری خطوط متناظر  $d_1$  و  $d_2$  باشند، آن‌گاه  $u_1 \times u_2$  بردار هاری عمود مشترک  $d_1$  و  $d_2$  می‌باشد.

(طریقه محاسبه طول عمود مشترک دو خط متناظر  $d_1$  و  $d_2$ )

فرض کنیم خطوط متناظر  $d_1$  و  $d_2$  به ترتیب با بردارهای هاری  $u_1$  و  $u_2$  منروض باشند و  $A$  و  $B$  به ترتیب نقاطی دلخواه از خطوط  $d_1$  و  $d_2$  باشند. در این صورت طول عمود مشترک دو خط متناظر  $d_1$  و  $d_2$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{طول عمود مشترک} = |HH'| = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}$$

مثال ۱: طول عمود مشترک دو خط متناظر  $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{1-z}{1}$  و  $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$  را به دست آورید.

$$\left. \begin{aligned} A &= (1, 0, 0) \in d_1 \\ B &= (0, 0, -1) \in d_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{AB} = (-1, 0, -1)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_1 &= (2, 0, -1) \\ \vec{u}_2 &= (1, 2, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

بنابر این طول عمود مشترک  $d_1$  و  $d_2$  به صورت زیر بدست می آید:

$$\text{طول عمود مشترک } d_1 \text{ و } d_2 = |HH'| = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

(سوال) فرض کنید مکعبی داریم که دو بال آن در راستای خطوط متناظر

$d_1: (x=0 \text{ و } y=5)$  و  $d_2: (\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, z=0)$  قرار داشته باشند. آن گاه حجم

این مکعب را بدست آورید.