

۱- سری فوریه سینوسی $0 < x < \pi$ و $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ را بدست آورده و سپس مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ را محاسبه

کنید

۲- ثابت کنید که: $-\pi < x < \pi$ ، $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$ سپس نشان دهید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad (\text{ج}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{الف})$$

۳- ثابت کنید برای $0 < x < \pi$:

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left[\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots \right] \quad (\text{الف})$$

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots \right] \quad (\text{ب})$$

(ج) از روابط الف و ب به ترتیب تساوی های زیر را ثابت کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

۴- فرض کنید f و g در فاصله $[-\pi, \pi]$ پیوسته تکه ای و متناوب با دوره 2π باشند و (a_n, b_n) و (c_n, d_n) به ترتیب ضرایب فوریه f و g باشند آنگاه ثابت کنید که:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g dx = 2a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n)$$

۵- $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$ را به صورت انتگرال سینوسی فوریه بنویسید و با توجه به آن انتگرال روبرو را

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \pi x}{x} \sin \pi x dx \quad \text{محاسبه کنید:}$$

۶- تساویهای زیر را ثابت کنید:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{w^3 \sin xw}{w^4 + 4} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x \quad x > 0 \quad 2) \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi w \sin xw}{1 - w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

۷- اگر ضرایب بسط فوریه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2π ، a_0 و a_n و b_n باشد؛ ضرایب سری فوریه $g(x) = f(x) \cos x$ را بر حسب ضرایب فوریه تابع $f(x)$ به دست آورید.

۸- حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos^3 x dx$ با فرض $f(x) = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{w^2 + 4} \cos wx + \frac{w}{w^2 + 4} \sin wx \right] dw$ را بیابید.

۹- مطلوبست حل معادله زیر:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2u = \begin{cases} 1+2x & -1 \leq x < 0 \\ 1-2x & 0 < x \leq +1 \end{cases}$$

که در آن $k \neq 0$ یک ثابت حقیقی است.

$$۱۰- \text{اگر } \int_0^{\infty} g(w) \cos wx dw = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

آنگاه حاصل $\frac{d}{dw} [(1-w^2)g(w)]$ را بیابید.

۱۱- سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع g را بنویسید که در یک دوره تناوب ضابطه آن ضابطه قسمت غیرصفر تابع f که به صورت $f(x) = H(-x) - 2H(1-x) + H(2-x)$ تعریف می شود؛ است. که در آن

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$
