

❖ تمرینات :

۱. اگر $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ باشد (کثیرالجزءه ای با ضرائب حقیقی)

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

ثانیاً : اگر عدد مختلط v ریشه $f(z) = 0$ باشد آنگاه \bar{v} نیز ریشه آن است.

۲. درستی اتحاد $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ را تحقیق کنید و سپس نتیجه بگیرید:

$$(if \ 0 < \theta < 2\pi) \quad 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

۳. نشان دهید که :

$$(الف) \quad \overline{z_1 z_2} + \overline{z_1} z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

$$(ب) \quad \sqrt{2} |z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$$

$$(ج) \quad |z_1 - z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|$$

۴. اگر $f(x) = x^2 - y^2 - 2y + j(2x - 2xy)$ این عبارت را بر حسب z بنویسید :

۵. معادله های زیر را حل نمائید :

$$(الف) \quad z^4 - 2j + 6 = 0$$

$$(ب) \quad z^{\frac{5}{4}} = j$$

$$(ج) \quad \sin hz = j$$

$$(د) \quad e^{2z} + 3je^z = 0$$

$$(ه) \quad \cos z = 2$$

۶. نشان دهید که توابع $\sin z$ و $\cos z$ کراندار نیستند .

۷. نقاط مشتق پذیر توابع زیر را مشخص کنید :

$$(الف) \quad f(z) = \bar{z}$$

$$(ب) \quad f(z) = \operatorname{Re}\{z\}$$

$$(ج) \quad f(z) = \operatorname{Im}(z)$$

۸. نشان دهید که هر یک از توابع زیر در هیچ جا تحلیلی نیستند .

$$(الف) \quad f(z) = e^{\bar{z}}$$

$$(ب) \quad f(z) = e^y x^{ix}$$

$$(ج) \quad f(z) = xy + jy$$

۹. حوزه تحلیلی بودن تابع $f(z) = \frac{e^{j\bar{z}}}{(z^2 + |z|^2)^2}$ را تعیین نمائید .

۱۰. اولاً n را طوری تعیین کنید که تابع زیر همساز باشد. ثانیاً با قرار دادن $n=2$ مزدوج همساز آن را بدست آورید: (n عدد طبیعی است)

$$u = \ln(x^n + y^n)$$

۱۱. کدامیک از توابع زیر همساز (هارمونیک) می باشند؟ مزدوج آنها را بدست آورید:

(الف) $x^2 + y^2$ (ب) $\sin x \cos y$ (ج) $\frac{x}{x^2 + y^2}$ (د) $e^x \cos y + x + y$

۱۲. نشان دهید که تابع $f(z) = \begin{cases} \left(\frac{-z}{z}\right)^2, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ در $z=0$ مشتق پذیر نیست ولی در این نقطه در شرایط کوشی - ریمن صدق می کند؟

۱۳. اگر $v(x,y)$ یک مزدوج همساز تابع $u(x,y) = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2$ باشد و داشته باشیم $V(0,0) = 0$ آنگاه مقدار $V(1,1)$ را محاسبه نمایید:

۱۴. تابع تحلیلی $w(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ را بدست آورید وقتی که:

$$w(0) = 0, \quad u(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

۱۵. تابع $w = \ln z$ را به ازای عدد مختلط $z = re^{j\theta}$ و $r > 0$ و $-\pi \leq \theta \leq \pi$ چنین تعریف می کنیم:

$$\ln z = \ln r + j\theta$$

اکنون اگر $z = e^{j\frac{3\pi}{4}}$ آنگاه مقدار $\ln z^2$ را بدست آورید.

۱۶. اگر $u(x,y) = 2^x \cos(y \ln 2)$ باشد تابع $f(z)$ که به فرم $u + jv$ هست را بیابید.

۱۷. قطب های تابع زیر را بیابید.

$$f(z) = \frac{z}{\sinh z \cosh z}$$

۱۸. با فرض $f(z) = x^2 - y^2 + j(x^2 + y^2)$ مشتق تابع را در نقاط $1+j$ و $1-j$ (در صورت وجود) محاسبه کنید.

۱۹. اگر $u(x,y) = ax^3 + bx^2y + xy + xy^2$ و تابع $f(z) = u + jv$ که یک تابع تحلیلی است را بر حسب z محاسبه کنید.

۲۰. حد تابع زیر را در مبدا بیابید.

$$f(z) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} + j \frac{xy}{x^2+y^2}$$