

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

رساله دکتری

# کدهای شناسایی و احاطه گر مکانی

نگارنده: هادی رهبانی

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

استاد مشاور

دکتر سید مسعود میررضایی

دی ماه ۱۳۹۶





مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم شماره 12: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)  
(ویژه دانشجویان ورودی های 94 و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای/خانم هادی رهبانی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی به شماره دانشجویی 9300685 ورودی مهر ماه سال 93 در تاریخ 93/10/26 از رساله نظری / عملی خود با عنوان: کدهای شناسایی و احاطه گر مکانی دفاع و با اخذ نمره ۱۹٫۹ به درجه عالی نائل گردید.

<input type="checkbox"/> الف) درجه عالی: نمره 19-20	<input type="checkbox"/> ب) درجه بسیار خوب: نمره 17 - 18/99
<input type="checkbox"/> ج) درجه خوب: نمره 15-16/99	<input type="checkbox"/> د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
<input type="checkbox"/> ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
1-	استاد راهنما	نادر جعفری راد	دانشیار	
2-	استاد مشاور	سید مسعود میرضایی	استادیار	
3-	داور خارجی	غلامحسین فتح تبار	دانشیار	
4-	داور داخلی	میثم علیشاهی	استادیار	
5-	داور داخلی	عبدالله آل هوز	استادیار	
6-	نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای هادی رهبانی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء: میثم علیشاهی





تقدیم به پدرم

کوهی استوار و حامی من در طول تمام زندگی

تقدیم به مادرم

سنگ صبوری که الفبای زندگی به من آموخت

تقدیم به برادر عزیزم، آقامهدی

تکیه گاه من در مواجهه با مشکلات

# سپاس گزارمی...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت های را که به دستش سپرده اند، تضمین می نماید، بر حسب وظیفه از استاد فاضل و اندیشمند جناب آقای دکتر نادر جعفری راد که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و با راهنمایی های ارزنده و گهربارشان نقش مهمی در به ثمر رسیدن این رساله داشتند، صمیمانه تقدیر و تشکر می نمایم. از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سید مسعود میررضایی که با مشاوره های ارزشمندشان در انجام این رساله بسیار به من کمک کردند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید. همچنین از پدر و مادر عزیزم و خانواده دوستداشتنی ام که در تمام عرصه های زندگی یار و یآوری برای من بوده اند و با حمایت های همه جانبه آنان توانستم این رساله را به اتمام برسانم، سپاسگزاری می نمایم.

هادی رهبانی  
دی ماه ۱۳۹۶



## تعهد نامه

اینجانب هادی رهبانی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **کدهای شناسایی و احاطه گر مکانی**، تحت راهنمایی **نادر جعفری راد** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

هادی رهبانی

دی ماه ۱۳۹۶

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.



## چکیده

یک زیرمجموعه  $S$  از رئوس گراف را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر می‌نامیم، هرگاه هر رأس  $V - S$  دارای حداقل یک همسایه در  $S$  باشد. مجموعه احاطه‌گر  $S$  از گراف  $G$  یک کد احاطه‌گر مکانی می‌باشد، اگر برای هر دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  از  $V - S$ ،  $N(x) \cap S \neq N(y) \cap S$ . عدد احاطه‌گر مکانی  $\gamma_L(G)$  کمترین اندازه یک کد احاطه‌گر مکانی در گراف  $G$  می‌باشد. زیر مجموعه  $S$  از رئوس در گراف  $G$  را یک کد شناسایی گوئیم، هرگاه برای هر دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  مجموعه‌های  $N(x) \cap S$  و  $N(y) \cap S$  ناتهی و متمایز باشند. مینیمم اندازه‌ی یک کد شناسایی در گراف  $G$  با  $M(G)$  نشان داده می‌شود. در این رساله کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی و پارامترهای وابسته به این کدها در یک گراف را مطالعه کرده و برخی از ویژگی‌ها، کاربردها و کران‌های موجود برای این پارامترها را بیان می‌کنیم. سپس برخی از این کران‌ها را بهبود بخشیده و کران‌های جدیدی برای درخت‌ها ارائه می‌دهیم. همچنین تمامی درخت‌هایی را که در تساوی کران‌های جدید صدق می‌کنند، مشخص می‌کنیم. در پایان تابع احاطه‌گر رومی را به احاطه‌گر رومی مکانی تعمیم می‌دهیم و پارامتر جدیدی را به نام عدد احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف‌ها معرفی می‌کنیم و به بررسی کران‌های متعددی از این پارامتر روی گراف‌ها و درخت‌ها می‌پردازیم. به علاوه این پارامتر را با سایر پارامترهای یک گراف مقایسه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: کد شناسایی، کد احاطه‌گر مکانی، کد احاطه‌گر مکانی کلی، مجموعه احاطه‌گر تفاضلی کلی، تابع احاطه‌گر رومی مکانی.



## لیست مقالات مستخرج از رساله

1. Nader Jafari Rad, Hadi Rahbani, *A Note on the Locating-Total Domination Number in Trees*, Australas. J. Combin, 66 (3) (2016), 420-424.
2. Nader Jafari Rad, Hadi Rahbani, *Bounds on the Locating Roman Domination Number in Trees*, Discuss. Math. Graph Theory, 38 (2018), 49-62.
3. Nader Jafari Rad, Hadi Rahbani, *Locating roman domination in graphs*, Utilitas Mathematica, In press.
4. Nader Jafari Rad, Hadi Rahbani, *Bounds on the Locating-Domination Number and Differentiating-Total Domination Number in Trees*, Discuss. Math. Graph Theory, In press
5. Nader Jafari Rad, Hadi Rahbani, *Some progress on the double Roman domination in graphs*, Discuss. Math. Graph Theory, In press.
6. Hadi Rahbani, Nader Jafari Rad, *Locating and Diferintial total Domination Number in Trees*, Conference on Graph Theory and Algebraic Combinatorics, Amirkabir University of Technology, Tehran.
7. Hadi Rahbani, Nader Jafari Rad, Seyed Masoud MirRezaei, *Bound on the Identifying Codes in Trees*, Submitted.
8. Hadi Rahbani, Nader Jafari Rad, *Double Roman Domination Number in Trees*, Submitted.
9. Hadi Rahbani, Nader Jafari Rad, *Nordhaus-Gaddum Bounds for Roman Domination in Graphs*, Submitted.



## پیشگفتار

گراف‌ها دارای دامنه‌ای وسیع از کاربردها در زمینه‌های متعدد مهندسی و علوم ارتباطات هستند. یک گراف می‌تواند برای نمایش دادن تقریباً هر حالت فیزیکی و همچنین ارتباط بین موجودات مختلف به کار برده شود. از این‌رو مدل‌های گرافی اغلب در حل تعدادی از مسائل کاربردی استفاده می‌شوند. کارپوسکی و همکاران [۱۲۶]، کدهای شناسایی را برای مدل کردن فرایند تشخیص خطا در سیستم‌های چندپردازنده تعریف کرده‌اند. در این سیستم‌ها ممکن است تعدادی از پردازنده‌ها، به نحوی که به هدف سیستم وابسته است، خراب شوند. هدف ما تشخیص و جایگزین کردن این پردازشگرهاست به صورتی که سیستم درست عمل کند. این رساله، به بحث در مورد کدهای شناسایی، احاطه‌گر مکانی و پارامترهای وابسته به آن‌ها در گراف‌ها می‌پردازد. فرض کنید  $G = (V, E)$  گرافی همبند و بدون جهت باشد. زیرمجموعه‌ای از رئوس مانند  $C$  یک کد احاطه‌گر مکانی برای گراف  $G$  است هرگاه برای هر رأس  $v \in V(G) \setminus C$ ،  $N(v) \cap C \neq \emptyset$  و همچنین برای هر دو رأس  $u, v \in V(G) \setminus C$ ،  $N(u) \cap C \neq N(v) \cap C$ . همچنین زیرمجموعه‌ای از رئوس مانند  $C$  یک کد شناسایی برای گراف  $G$  است هرگاه برای هر رأس  $v \in V(G)$ ،  $N(v) \cap C \neq \emptyset$  و همچنین برای هر دو رأس  $u, v \in V(G)$ ،  $N(u) \cap C \neq N(v) \cap C$ . در این رساله کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی و پارامترهای وابسته به این کدها در یک گراف را مطالعه کرده و برخی از ویژگی‌ها، کاربردها و کران‌های موجود برای این پارامترها را بیان می‌کنیم. سپس برخی از این کران‌ها را بهبود بخشیده و کران‌های جدیدی برای این پارامترها ارائه می‌دهیم. همچنین تمامی گراف‌هایی را که در تساوی کران‌های جدید صدق می‌کنند، مشخص می‌کنیم. در پایان یک پارامتر جدید، که حالت تابعی از کدهای احاطه‌گر مکانی می‌باشد، را معرفی می‌کنیم.

به‌طور کلی، در فصل اول این رساله به ذکر تعاریف و مفاهیم مورد نیاز، مانند کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی در گراف‌ها، می‌پردازیم. همچنین ارتباط این کدها را با دیگر پارامترهای نظریه گراف بررسی می‌کنیم. سپس چند کاربرد از این کدها را در زمینه‌های مختلف بیان می‌کنیم. کاربردهای این کدها از دو دیدگاه تئوری و حقیقی بررسی می‌شوند. سپس سختی الگوریتم‌های تخصیص برای پیدا کردن کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی با مینیمم اندازه را بررسی می‌کنیم.

در فصل دوم، چندین کران ارائه شده برای این پارامترها را مطرح می‌کنیم. کران‌های این فصل را به سه دسته کران‌های پایین، کران‌های بالا و کران‌های ویژه (کران‌هایی برای گراف‌های خاص) تقسیم‌بندی می‌کنیم.

در فصل سوم و چهارم، کران‌هایی جدیدی را به ترتیب برای مینیمم اندازه‌ی کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی و پارامترهای وابسته به این کدها در درخت‌ها ارائه می‌دهیم. کران‌های این دو فصل براساس مرتبه، تعداد رأس‌های پشتیبان و تعداد برگ‌های درخت هستند. سپس تمامی درخت‌هایی را که در تساوی این کران‌ها صدق می‌کنند، مشخص می‌کنیم. این کران‌ها

برخی از کران‌های ارائه شده در فصل دو را برای درخت‌ها بهبود می‌بخشند. در فصل پنجم احاطه‌گری رومی را به احاطه‌گری رومی مکانی تعمیم می‌دهیم و پارامتر جدیدی به نام عدد احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف‌ها تعریف می‌کنیم. در این فصل ابتدا پیچیدگی مسأله عدد احاطه‌گری رومی مکانی را برای گراف‌های دوبخشی و وتری بیان می‌کنیم. سپس چند کران برای این پارامتر جدید ارائه می‌دهیم و ارتباط این پارامتر را با چند پارامتر دیگر بررسی می‌کنیم. همچنین همه گراف‌های احاطه‌گر رومی مکانی یال بحرانی را مشخص می‌کنیم. نتایج این فصل تعمیمی از مراجع [۶۴] و [۱۷۳] است. در فصل ششم کران‌هایی برای عدد احاطه‌گر رومی مکانی برای درخت‌ها به دست می‌آوریم و همه درخت‌هایی که در تساوی این کران‌ها صدق می‌کنند را مشخص می‌کنیم.







# فهرست مطالب

ع	فهرست تصاویر
ف	فهرست جداول
۱	مقدمه و مفاهیم اولیه ۱
۱	۱.۱ مقدمه ۱
۲	۲.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه ۲
۶	۳.۱ کاربرد کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی ۶
۶	۱.۳.۱ ارتباط $M(G)$ و $\gamma_L(G)$ با $\gamma(G)$ ۶
۷	۲.۳.۱ کاربردهای حقیقی ۷
۹	۴.۱ پارامترهای وابسته به کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی ۹
۱۱	۵.۱ سختی مسائل کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی ۱۱
۱۵	۲ برخی کران‌های موجود برای کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی ۱۵
۱۶	۱.۲ کران‌های عمومی ۱۶
۲۰	۲.۲ کران‌های ویژه ۲۰
۳۳	۳ کران‌هایی برای کدهای شناسایی روی درختان ۳۳
۳۳	۱.۳ مقدمه ۳۳
۳۳	۲.۳ نتایج اصلی ۳۳
۳۵	۳.۳ اثبات قضیه ۱.۲.۳ ۳۵
۳۹	۴.۳ اثبات قضیه ۲.۲.۳ ۳۹
۴۸	۵.۳ اثبات قضیه ۳.۲.۳ ۴۸
۵۱	۴ کران‌هایی برای کداحاطه‌گر مکانی ۵۱
۵۱	۱.۴ مقدمه ۵۱
۵۱	۲.۴ نتایج اصلی ۵۱

۵۴	.....	اثبات قضیه ۱.۲.۴	۳.۴
۶۰	.....	اثبات قضیه ۲.۲.۴	۴.۴
۶۳		<b>۵ احاطه‌گری رومی مکانی در گراف‌ها</b>	
۶۳	.....	مقدمه	۱.۵
۶۴	.....	پیچیدگی عدد احاطه‌گر رومی مکانی	۲.۵
۶۶	.....	کران‌هایی برای عدد احاطه‌گر رومی مکانی	۳.۵
۶۹	.....	ارتباط عدد احاطه‌گر رومی مکانی با پارامترهای دیگر	۴.۵
۷۸	.....	گراف‌های احاطه‌گر رومی مکانی یال بحرانی	۵.۵
۸۷		<b>۶ کران‌هایی برای عدد احاطه‌گر رومی مکانی در درخت‌ها</b>	
۸۷	.....	مقدمه	۱.۶
۸۷	.....	نتایج اصلی	۲.۶
۸۹	.....	کران پایین	۳.۶
۹۵	.....	کران بالا	۴.۶
۱۰۷		<b>مراجع</b>	
۱۲۳		<b>واژه‌نامه فارسی به انگلیسی</b>	
۱۲۵		<b>واژه‌نامه انگلیسی به فارسی</b>	
۱۲۸		<b>نمایه</b>	

# فهرست تصاویر

۱۰	کاربرد کدهای شناسایی در مکان یابی حسگرها در یک ساختمان . . . . .	۱.۱
۱۷	رنگ سیاه متعلق به کد شناسایی بهینه هر گراف می‌باشند. . . . .	۱.۲
۱۸	گراف نامتناهی $G$ که تنها کد شناسایی آن مجموعه رأس‌های این گراف است.	۲.۲
۱۸	رأس‌های با رنگ سیاه متعلق به کد احاطه گر مکانی بهینه گراف می‌باشند.	۳.۲
۱۸	یک گراف که در تساوی کران ارائه شده در قضیه ۵.۱.۲ صدق می‌کند.	۴.۲
۱۹	رأس‌های با رنگ سیاه متعلق به کد احاطه گر کلی مکانی بهینه گراف می‌باشند.	۵.۲
۲۰	یک گراف که کران ارائه شده در قضیه ۱۰.۱.۲ برای آن قابل دستیابی است.	۶.۲
۲۱	رأس‌های با رنگ سیاه متعلق به کد احاطه گر کلی مکانی بهینه گراف می‌باشند.	۷.۲
۲۴	مثالی از خانواده‌ی $T_1$ . . . . .	۸.۲
۲۵	مثالی از خانواده‌ی $T_2$ . . . . .	۹.۲
۲۶	مثالی از خانواده‌ی $F$ . . . . .	۱۰.۲
۲۷	عملگرهای $\tau_1$ و $\tau_2$ . . . . .	۱۱.۲
۲۸	مثالی از خانواده‌ی $G$ . . . . .	۱۲.۲
۳۰	عملگرهای $\phi_1$ و $\phi_2$ . . . . .	۱.۴
۵۲	عملگرهای $O_1$ و $O_2$ . . . . .	۲.۴
۵۲	مثالی از خانواده‌ی $T$ . . . . .	۳.۴
۵۳	مثالی از خانواده‌ی $E$ . . . . .	۱.۵
۶۵	ساختار گراف $H$ در قضیه ۲.۲.۵ . . . . .	۲.۵
۶۶	ساختار گراف $H$ در قضیه ۳.۲.۵ . . . . .	۳.۵
۷۵	مثالی از خانواده‌ی $F_0$ . . . . .	۴.۵
۸۲	مثالی از خانواده‌ی $G$ . . . . .	

۸۸	.....	عملگر $\varphi_1$ .	۱.۶
۹۰	.....	عملگرهای $O_1, O_2, O_3$ و $O_4$ .	۲.۶

# فهرست جداول

- ۱.۱ مقایسه پیچیدگی مسائل کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی با مجموعه احاطه‌گر ۱۴
- ۱.۲ کران‌هایی برای پارامتر  $M(G)$  برای خانواده‌ای از گراف‌ها. . . . . ۲۲





# فصل ۱

## مقدمه و مفاهیم اولیه

### ۱.۱ مقدمه

مسائل کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی از مسائل شناخته شده در نظریه گراف می‌باشند. در این رساله، قصد داریم به‌طور جامع مفهوم کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی در نظریه گراف را بررسی کنیم. در این فصل، در بخش ۲.۱، به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی در نظریه گراف می‌پردازیم. همچنین مفهوم کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی و پارامترهای وابسته به این کدها در گراف را بیان می‌کنیم. در بخش ۳.۱ به منظور ایجاد انگیزه در مخاطب در راستای مطالعه این رساله، به بیان چند کاربرد از کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی می‌پردازیم. در ادامه و در بخش ۵.۱ سختی حل پیدا کردن کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی با مینیمم اندازه در گراف‌ها را بررسی می‌کنیم که این موضوع ما را به بحث راجع به  $NP$  - کامل بودن هدایت می‌کند. تعاریف ارائه شده در این فصل و سایر مفاهیم مرتبط با گراف براساس مراجع [۱۰۴، ۳۶] می‌باشند.

## ۲.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه

**تعریف ۱.۲.۱.** **گراف**<sup>۱</sup> ساده  $G = (V(G), E(G))$  عبارت است از مجموعه متناهی  $V(G)$  و خانواده  $E(G)$  از دوتایی‌های نامرتب از اعضای متمایز در  $V(G)$ . هر عضو  $V(G)$  **رأس**<sup>۲</sup> و هر عضو  $E(G)$  یک **یال**<sup>۳</sup> نامیده می‌شود. تعداد رأس‌ها،  $|V(G)|$ ، **مرتبه**<sup>۴</sup> گراف نامیده شده و با  $n(G)$  مشخص می‌شود.  $|E(G)|$  نیز **اندازه**<sup>۵</sup> گراف نامیده شده و با  $m(G)$  نشان داده می‌شود. همچنین مفهوم  $\{u, v\} \in E(G)$  را با  $uv \in E(G)$  مشخص کرده و اگر  $e = uv \in E(G)$  می‌گوییم  $u$  و  $v$  با هم **مجاور**<sup>۶</sup> هستند.

**تعریف ۲.۲.۱.** **درجه**<sup>۷</sup> رأس  $v$  در گراف  $G$  تعداد یال‌های گراف  $G$  است که بر آن‌ها واقع است و آن را با  $deg(v)$  نمایش می‌دهیم. **بیشترین درجه**<sup>۸</sup> و **کمترین درجه**<sup>۹</sup> در بین درجه رأس‌های گراف  $G$  را به ترتیب با  $\Delta(G)$  و  $\delta(G)$  نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۳.۲.۱.** یک **رأس منفرد**<sup>۱۰</sup> رأسی است که با هیچ رأس دیگری مجاور نباشد. یک **برگ**<sup>۱۱</sup> (رأس **آویخته**<sup>۱۲</sup>) رأسی از درجه یک است. رأسی که در همسایگی یک رأس آویخته باشد را **رأس پشتیبان**<sup>۱۳</sup> می‌نامیم. مجموعه برگ‌های گراف  $G$  را با  $L(G)$  و مجموعه رئوس پشتیبان آن را با  $S(G)$  نمایش می‌دهیم. یک رأس پشتیبان را **پشتیبان قوی**<sup>۱۴</sup> گوییم هرگاه دارای حداقل دو همسایه برگ باشد. برای هر رأس پشتیبان  $x$  مجموعه همه برگ‌های همسایه آن را با  $L_x$  نشان می‌دهیم. در یک گراف، یالی که حداقل یک رأس واقع بر آن برگ باشد، **یال آویخته**<sup>۱۵</sup> نامیده می‌شود.

**تعریف ۴.۲.۱.** برای هر زیرمجموعه  $S$  از  $V(G)$ ، **زیرگراف القا**<sup>۱۶</sup> توسط  $S$ ،  $G[S]$ ، زیرگراف ماکسیمال از  $G$  با مجموعه رئوس  $S$  را مشخص می‌کند. برای یک زیرمجموعه  $S$  از رأس‌های گراف  $G$ ، گراف  $G \setminus S$  گراف به دست آمده از  $G$  با حذف رأس‌های  $S$  است. اگر  $S = \{v\}$  آن‌گاه برای راحتی  $G \setminus S$  را به صورت  $G - v$  نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۵.۲.۱.** مجموعه رأس‌هایی از  $G$  که با رأس  $v$  از گراف  $G$  مجاور باشند را **همسایگی باز**<sup>۱۷</sup> رأس  $v$  نامیده و آن را با  $N(v)$  نمایش می‌دهیم. همسایگی باز زیرمجموعه  $S$  از رئوس گراف  $G$  را به صورت  $\bigcup_{v \in S} N(v)$  تعریف می‌کنیم و آن را با  $N(S)$  نمایش می‌دهیم.  $N(v) \cup \{v\}$  را **همسایگی بسته**<sup>۱۸</sup> رأس  $v$  نامیده و آن را با  $N[v]$  نمایش می‌دهیم. همچنین همسایگی بسته

<sup>۱</sup>Graph

<sup>۲</sup>Vertex

<sup>۳</sup>Edge

<sup>۴</sup>Order

<sup>۵</sup>Size

<sup>۶</sup>Adjacent

<sup>۷</sup>Degree

<sup>۸</sup>Maximum degree

<sup>۹</sup>Minimum degree

<sup>۱۰</sup>Isolated vertex

<sup>۱۱</sup>Leaf

<sup>۱۲</sup>Pendant vertex

<sup>۱۳</sup>Support vertex

<sup>۱۴</sup>Strong support

<sup>۱۵</sup>Pendant edge

<sup>۱۶</sup>Induced subgraph

<sup>۱۷</sup>Open neighborhood

<sup>۱۸</sup>Close neighborhood

زیرمجموعه  $S$  از رئوس گراف  $G$  را به صورت  $\cup_{v \in S} N[v]$  تعریف می‌کنیم و آن را با  $N[S]$  نمایش می‌دهیم. برای زیرمجموعه  $S$  از  $V(G)$ ،  $G[S]$  **زیرگراف القا شده**<sup>۱۹</sup> توسط  $S$  را مشخص می‌کند.

**تعریف ۶.۲.۱.** فرض کنید  $G$  یک گراف و  $e = uv$  یک یال آن باشد. اگر  $u = v$  آن گاه یال  $e$  را یک **طوقه**<sup>۲۰</sup> گویند. در صورتی که بین یک زوج از رأس‌های  $G$  چند یال وجود داشته باشد، این یال‌ها را **موازی**<sup>۲۱</sup> یا **چندگانه**<sup>۲۲</sup> گویند. همچنین گراف  $G$  را **گراف ساده**<sup>۲۳</sup> گویند در صورتی که دارای طوقه و یال چندگانه نباشد.

**تعریف ۷.۲.۱.** گراف  $G$  را **متناهی** گویند هرگاه مجموعه‌های  $V(G)$  و  $E(G)$  هر دو متناهی باشند. اگر  $V(G)$  فقط شامل یک عضو و  $E(G) = \emptyset$ ، گراف  $G$  را یک **گراف بدیهی**<sup>۲۴</sup> و سایر گراف‌ها را **غیربدیهی**<sup>۲۵</sup> گویند.

**تعریف ۸.۲.۱.** **گراف کامل**<sup>۲۶</sup>، گرافی است که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک یال وجود داشته باشد. یک گراف کامل از مرتبه  $n$ ، دارای  $n$  رأس و  $\frac{n(n-1)}{2}$  یال است که آن را با  $K_n$  نشان می‌دهند.

**تعریف ۹.۲.۱.** **گراف دو بخشی**<sup>۲۷</sup> گرافی است که مجموعه رأس‌های آن به دو زیر مجموعه  $X$  و  $Y$  چنان افراز شود، که یک سر تمام یال‌های  $G$  در  $X$  و سر دیگر آن‌ها در  $Y$  باشد.

**تعریف ۱۰.۲.۱.** فرض کنید  $G$  گرافی  $n$  رأسی باشد. **متمم**<sup>۲۸</sup> (یا مکمل) گراف  $G$  که با  $\bar{G}$  نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رأس‌های  $V(\bar{G}) = V(G)$  و هر دو رأس  $u$  و  $v$  در  $\bar{G}$  مجاور هستند اگر و فقط اگر در  $G$  مجاور نباشند.

**تعریف ۱۱.۲.۱.** **گراف مسطح**<sup>۲۹</sup> گراف مسطح گرافی است که می‌توان آن را در یک صفحه رسم کرد به گونه‌ای که یال‌هایش یکدیگر را تنها در رأس‌ها قطع کنند.

**تعریف ۱۲.۲.۱.** یک **گشت**<sup>۳۰</sup> به طول  $k$ ، یک دنباله متناوب  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$  از رأس‌ها و یال‌هاست، به طوری که به ازای هر  $i = 1, \dots, k$ ،  $e_i = v_{i-1}v_i$  یک یال باشد. یک **مسیر**<sup>۳۱</sup> گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به صورت فهرست مرتبی از رأس‌های متمایز  $v_0, v_1, \dots, v_n$  در نظر می‌گیریم، به طوری که به ازای هر  $i = 1, \dots, n$ ،  $e_i = v_{i-1}v_i$  یک یال باشد. یک مسیر  $n$  رأسی را با  $P_n$  نشان می‌دهیم. مسیری که رأس ابتدای آن  $u$  و رأس انتهایی آن  $v$  باشد را یک  $(u, v)$ -مسیر می‌گویند. یک **دور**<sup>۳۲</sup> گشت بسته‌ای به طول حداقل یک است که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری دیگری نداریم. یک دور  $n$  رأسی را با  $C_n$  نشان می‌دهیم.

<sup>۱۹</sup> Induced subgraph

<sup>۲۰</sup> Loop

<sup>۲۱</sup> Parallel

<sup>۲۲</sup> Multi

<sup>۲۳</sup> Simple graph

<sup>۲۴</sup> Trivial graph

<sup>۲۵</sup> Nontrivial

<sup>۲۶</sup> Complete graph

<sup>۲۷</sup> Bipartite graph

<sup>۲۸</sup> Complement

<sup>۲۹</sup> Planar graph

<sup>۳۰</sup> Walk

<sup>۳۱</sup> Path

<sup>۳۲</sup> Cycle

**تعریف ۱۳.۲.۱.** وتر<sup>۳۳</sup> یالی است که دو رأس غیر مجاور از دور را به هم وصل می کند.

**تعریف ۱۴.۲.۱.** **گراف وتري**<sup>۳۴</sup> گرافی است که هر دور به طول چهار یا بیشتر از آن شامل وتر باشد.

**تعریف ۱۵.۲.۱.** گراف  $G$  را **گراف منتظم**<sup>۳۵</sup> گوییم هرگاه درجه تمام رئوس با هم برابر باشند. اگر درجه تمام رئوس  $k$  باشد، آن گاه گراف را  $k$ -منتظم نامیم.

**تعریف ۱۶.۲.۱.** گراف  $G$  **همبند**<sup>۳۶</sup> نامیده می شود هرگاه به ازای هر دو رأس متمایز  $u$  و  $v$  مسیری<sup>۳۷</sup> از  $u$  به  $v$  موجود باشد (یا یک  $(u, v)$ -مسیر موجود باشد). در غیر این صورت  $G$  را **ناهمبند**<sup>۳۸</sup> گوییم.

**تعریف ۱۷.۲.۱.** گراف همبند و فاقد دور را **درخت**<sup>۳۹</sup> می نامیم. یک **درخت ریشه دار**<sup>۴۰</sup> درختی است که یک رأس آن از بقیه رئوس متمایز شده باشد. رأس متمایز شده **ریشه درخت**<sup>۴۱</sup> نامیده می شود. اگر  $T$  یک درخت ریشه دار باشد، آن گاه زیردرخت ریشه دار در رأس  $v$  را با نماد  $T_v$  نمایش می دهیم. اگر  $u \in N_{T_v}(v)$ ، گوییم  $u$  **فرزند**<sup>۴۲</sup>  $v$  و  $v$  **پدر**<sup>۴۳</sup>  $u$  است.

**تعریف ۱۸.۲.۱.** منظور از  $k$  بار **زیر تقسیم کردن**<sup>۴۴</sup> یال  $uv$  در یک گراف، جایگزینی یال  $uv$  با مسیر  $ux_1 \dots x_kv$  است.

**تعریف ۱۹.۲.۱.** منظور از **ستاره**<sup>۴۵</sup>  $S_n$ ، گراف دوبخشی کامل  $K_{1,n}$  است. رأس درجه  $n$  در ستاره  $S_n$ ، **رأس مرکزی**<sup>۴۶</sup> نامیده می شود. یک **ستاره دوگانه**<sup>۴۷</sup> درختی با دقیقاً دو رأس غیر برگ است که این دو رأس نیز **رأس های مرکزی ستاره دوگانه**<sup>۴۸</sup> نامیده می شوند. یک ستاره دوگانه با رأس های مرکزی از درجه  $m$  و  $n$  را به صورت  $S_{m,n}$  نمایش می دهیم.

**تعریف ۲۰.۲.۱.** درختی که از زیرتقسیم کردن حداکثر  $t-1$  یال از یک ستاره  $K_{1,t}$  به دست می آید را **درخت اسپایدر**<sup>۴۹</sup> می نامند.

**تعریف ۲۱.۲.۱.** یک **خوشه**<sup>۵۰</sup> در یک گراف، مجموعه ای از رئوس است که زیرگراف القا شده روی آن گراف کامل باشد. یک **گراف تقسیم**<sup>۵۱</sup> گرافی است که بتوان مجموعه رئوس آن را به یک مجموعه مستقل  $I$  و یک خوشه  $C$  افراز کرد.

<sup>۳۳</sup> Chordal

<sup>۳۴</sup> Chordal Graph

<sup>۳۵</sup> Regular graph

<sup>۳۶</sup> Connected

<sup>۳۷</sup> Path

<sup>۳۸</sup> Disconnected

<sup>۳۹</sup> Tree

<sup>۴۰</sup> Rooted tree

<sup>۴۱</sup> Root of the tree

<sup>۴۲</sup> Child

<sup>۴۳</sup> Father

<sup>۴۴</sup> Subdivision

<sup>۴۵</sup> Star

<sup>۴۶</sup> Central vertex

<sup>۴۷</sup> Double star

<sup>۴۸</sup> Central vertices of double Star

<sup>۴۹</sup> Spider tree

<sup>۵۰</sup> Clique

<sup>۵۱</sup> Split graph

**تعریف ۲۲.۲.۱.** فاصله<sup>۵۲</sup> دو رأس  $u$  و  $v$  در گراف  $G$ ،  $d_G(u, v)$  برابر با اندازه کوتاه‌ترین مسیر بین  $u$  و  $v$  است. اگر هیچ مسیری بین دو رأس  $u$  و  $v$  موجود نباشد آن‌گاه می‌گوییم  $d_G(u, v) = \infty$ .

**تعریف ۲۳.۲.۱.** قطر<sup>۵۳</sup> گراف  $G$  عبارت است از

$$\text{diam}(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\}.$$

**تعریف ۲۴.۲.۱.** مجموعه  $A \subseteq V(G)$  را یک **مجموعه بسته‌بندی**<sup>۵۴</sup> گوییم هرگاه برای هر دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  از آن  $N[x] \cap N[y] = \emptyset$ .

**تعریف ۲۵.۲.۱.** فرض کنید  $G$  یک گراف باشد. گراف بدست آمده از افزودن یک رأس آویزان به هر رأس  $G$  را **تاج گراف**<sup>۵۵</sup>  $G$  می‌نامیم و آن را با  $\text{cor}(G)$  نشان می‌دهیم.

**تعریف ۲۶.۲.۱.** فرض کنید زوج  $G = (V, E)$  گرافی همبند و بدون جهت باشد و  $r \geq 1$  عددی صحیح باشد. به ازای هر رأس  $v \in V$ ، **گوی**<sup>۵۶</sup> به شعاع  $r$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B_r(v) = \{u \in V : d(u, v) \leq r\}.$$

**تعریف ۲۷.۲.۱.** اگر  $x, y \in V(G)$  و  $d(x, y) \leq r$  باشد، آن‌گاه گوییم رئوس  $x$  و  $y$ ، **پوشش**<sup>۵۷</sup> همدیگرند و اگر ابهامی در مقدار  $r$  نباشد گوییم  $x$  و  $y$  پوشش همدیگرند.

مجموعه  $r$ -پوششی برای  $Y \subseteq V(G)$  است هرگاه به ازای هر رأس  $y \in Y$  حداقل یک رأس مانند  $x \in X$  موجود باشد به طوری که  $x, y$  پوشش  $r$  باشد.

**تعریف ۲۸.۲.۱.** فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف باشد. مجموعه  $S \subseteq V$  را یک **مجموعه‌ی احاطه‌گر**<sup>۵۸</sup> می‌نامیم، هرگاه برای هر رأس  $v \in V$ ،  $|N[v] \cap S| \geq 1$ . کمترین اندازه‌ی یک مجموعه‌ی احاطه‌گر در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف  $G$  را **عدد احاطه‌گری** گراف  $G$  نامیده و با  $\gamma(G)$  نشان داده می‌شود. به یک مجموعه‌ی احاطه‌گر  $G$  با اندازه‌ی  $\gamma(G)$  یک  **$\gamma(G)$ -مجموعه گفته می‌شود.**

**تعریف ۲۹.۲.۱.** مجموعه احاطه‌گر  $C$  از گراف  $G$  یک **کد  $r$ -احاطه‌گر مکانی**<sup>۵۹</sup> نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو رأس متمایز  $u$  و  $v$  از  $V - C$ ،  $B_r(v) \cap C \neq B_r(u) \cap C$ . کد  $1$ -احاطه‌گری مکانی را به اختصار **کد احاطه‌گر مکانی**<sup>۶۰</sup> می‌نامند. کمترین اندازه‌ی یک کد احاطه‌گر مکانی در بین تمام کدهای احاطه‌گر مکانی گراف  $G$  را **عدد احاطه‌گری مکانی**<sup>۶۱</sup> آن گراف نامیده و با  $\gamma_L(G)$  نشان داده می‌شود. به یک کد احاطه‌گر مکانی  $G$  با اندازه‌ی  $\gamma_L(G)$  یک  **$\gamma_L(G)$ -مجموعه گفته می‌شود.**

<sup>۵۲</sup> Distance  
<sup>۵۳</sup> Diameter  
<sup>۵۴</sup> Packing set  
<sup>۵۵</sup> Corona  
<sup>۵۶</sup> Ball  
<sup>۵۷</sup>  $r$ -cover

<sup>۵۸</sup> dominating set  
<sup>۵۹</sup> Locating dominating code  
<sup>۶۰</sup> Locating dominating code  
<sup>۶۱</sup> Locating domination Number

یکی از مفاهیم دقیقاً وابسته به کدهای احاطه‌گری مکانی، کدهای شناسایی می‌باشند.

**تعریف ۳۰.۲.۱.** مجموعه‌ی احاطه‌گر  $C$  یک  $r$ -شناسایی<sup>۶۲</sup> می‌نامند هرگاه برای هر دو رأس متمایز  $u$  و  $v$  از  $V$ ،  $B_r(v) \cap C \neq B_r(u) \cap C$ . کد ۱-شناسایی را به اختصار **کد شناسایی**<sup>۶۳</sup> می‌نامند. مینیمم اندازه‌ی یک کد شناسایی در بین تمام کدهای شناسایی گراف  $G$  با  $M(G)$  نشان داده می‌شود. به یک کد شناسایی  $G$  با اندازه‌ی  $M(G)$  یک  $M(G)$ -مجموعه گفته می‌شود. اگر گراف  $G$  دارای حداقل یک کد شناسایی باشد، آن‌گاه گراف  $G$  را قابل شناسایی<sup>۶۴</sup> گوئیم. توجه کنید اگر دو رأس  $u$  و  $v$  از  $V(G)$  وجود داشته باشند، به طوری که  $N[u] = N[v]$ ، آن‌گاه  $G$  قابل شناسایی نیست.

## ۳.۱ کاربرد کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی

در این بخش به برخی از کاربردهای عملی کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی اشاره می‌کنیم. کاربردهای این مسأله را به دو دسته کاربردهای تئوری و کاربردهای حقیقی تقسیم می‌کنیم. منظور از کاربرد تئوری در واقع استفاده از  $M(G)$  و  $\gamma_L(G)$  برای تخمین اندازه دیگر پارامترها در گراف می‌باشد. برای این منظور، ارتباط  $M(G)$  و  $\gamma_L(G)$  یک گراف  $G$  را با  $\gamma(G)$  بررسی می‌کنیم. منظور از کاربردهای عملی نیز به آن دسته از کاربردها اطلاق می‌شود که به استفاده از کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی در حل برخی از مسائل موجود در دنیای حقیقی اشاره می‌کنند.

### ۱.۳.۱ ارتباط $M(G)$ و $\gamma_L(G)$ با $\gamma(G)$

در این بخش رابطه کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی را با مجموعه احاطه‌گر بررسی می‌کنیم. اگر  $C$  یک کد شناسایی یا کد احاطه‌گر مکانی برای گراف  $G$  باشد، آن‌گاه به وضوح  $C$  یک مجموعه احاطه‌گر برای آن گراف نیز است. بنابراین همواره برای هر گراف  $G$ ،  $\gamma(G) \leq M(G)$  و  $\gamma(G) \leq \gamma_L(G)$  و بلیدیا<sup>۶۵</sup> و همکاران گراف‌هایی که برای آن‌ها تساوی برقرار است را بررسی کردند و به نتایج زیر رسیدند.

**قضیه ۱.۳.۱.** [۳۳] فرض کنید گراف  $G = (V, E)$  یک جنگل باشد. در این صورت  $\gamma(G) = M(G)$  می‌باشد اگر و تنها اگر بتوان  $V(G)$  را به دو مجموعه  $C$  و  $F$  چنان تقسیم‌بندی کرد به طوری که:

۱: هر جزء  $C$  یک کرنا از اندازه حداقل ۶ باشد.

<sup>۶۲</sup>r-identifying code

<sup>۶۳</sup>Identifying code

<sup>۶۴</sup>Identifiable

۲: زیرمجموعه  $I \subseteq F$  به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که همسایه‌های بسته رئوس  $I$  دو به دو مجزا باشند و بین رئوس مجموعه  $I$  و رئوس مجموعه  $C$  یالی وجود نداشته باشد.

۳: هر رأس از  $N(I)$  همسایه‌ای در  $S(C)$  داشته باشد ولی بین برگ‌های  $C$  همسایه‌ای نداشته باشد. همچنین هر رأس  $F - (I \cup N(I))$  حداقل دو همسایه در  $S(C)$  و حداکثر یک همسایه بین برگ‌های  $C$  داشته باشد.

به علاوه، اگر چنین ساختاری وجود داشته باشد آن‌گاه  $I \cup S(C)$  یک کد شناسایی با کوچکترین اندازه برای  $G$  است.

برای توصیف درخت‌هایی مانند  $T$  که  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$ ، خانواده  $\tau$  را معرفی می‌کنیم. گوییم  $T \in \tau$  هرگاه  $T$  از دنباله  $T_1, T_2, \dots, T_k$  به‌دست آمده باشد به طوری که  $T_1 = P_1 = xy$  و  $T_k = T$  است. همچنین اگر  $k \geq 2$ ، آن‌گاه می‌توان  $T_{i+1}$  را با اعمال یکی از عملگرهای  $\tau_1, \tau_2$  و  $\tau_3$  در زیر به‌دست آورد.

$\tau_1$ : رأس پشتیبان  $z$  در  $T_i$  را انتخاب و یک مسیر  $u-v$  را با یال  $uz$  به آن وصل می‌کند.

$\tau_2$ : یک ستاره تقسیم شده  $H = SS_p$ ، که  $p \geq 2$  و رأس مرکزی آن  $a$  است را به رأس دلخواه  $b$  در  $T_i$  با یال  $ab$  وصل می‌کند.

$\tau_3$ : یک رأس  $c$  از  $T_i$  که در  $\gamma_L(T_i)$  قرار دارد انتخاب و یک مسیر  $u-v-w$  را با یال  $uc$  به درخت وصل می‌کند.

**قضیه ۲.۳.۱.** [۳۳] فرض کنیم  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  باشد. در این صورت  $\gamma_L(T) = \gamma(T)$  اگر و فقط اگر  $T \in \tau$ .

## ۲.۳.۱ کاربردهای حقیقی

### سیستم‌های چند پردازنده

از کاربردهای کدهای شناسایی تشخیص و عیب‌یابی سیستم‌هایی است که داری چند پردازنده هستند [۳۲، ۱۲۶].

کارپوسکی و همکاران [۱۲۶]، کدهای شناسایی را برای مدل کردن فرایند تشخیص خطا در سیستم‌های چند پردازنده تعریف کرده‌اند. در این سیستم‌ها ممکن است تعدادی از پردازنده‌ها به نحوی که به هدف سیستم وابسته است خراب شوند. هدف ما تشخیص و جایگزین کردن این پردازنده‌هاست به صورتی که سیستم درست عمل کند. فرض می‌کنیم که سخت‌افزارهای ما از کیفیتی برخوردارند که در هر زمان حداکثر  $l$  تا از پردازنده‌ها معیوب هستند که  $l$  یک مقدار ثابت است و نیز فرض می‌کنیم که هر پردازنده  $p_j$  در این سیستم می‌تواند برنامه  $test(P_j)$  را اجرا کند که وضعیت خود این پردازنده و تمام پردازنده‌های مجاورش،  $N(p_j)$  را بررسی می‌کند. این

برنامه تنها اطلاعات دودوئی برمی گرداند، یعنی اگر  $p_j$  یا یکی از پردازنده‌های مجاورش معیوب باشد صفر و در غیر این صورت یک را می‌فرستد. این اطلاعات به یک کنترل کننده مرکزی برگردانده می‌شود که آن را به عنوان بخشی از سیستم تلقی نمی‌کنیم. توجه کنید که این برنامه هویت پردازنده معیوب را آشکار نمی‌کند. اگر خروجی  $test(P_j)$  یک باشد تنها چیزی که می‌توانیم بگوییم این است که  $P_j$  و یا یکی از پردازنده‌های مجاورش معیوب هستند. ما علاقه‌مندیم که زیرمجموعه‌ای از پردازش‌گرها مانند  $C$  بسازیم که:

- (۱). اگر تمام پردازنده‌های  $C$  صفر برگردانند، آن‌گاه هیچ پردازشگری در سیستم خراب نباشد.
- (۲). اگر لااقل یک و حداکثر  $l$  تا از پردازش‌گرها به درستی کار نکنند، کنترل کننده مرکزی بتواند آن‌ها را با استفاده از  $C$  مکان‌یابی کند.

فرض کنیم سیستم دارای  $k$  پردازشگر  $p_1, \dots, p_k$  باشد. سیستم چند پردازنده را به عنوان یک گراف  $G = (V, E)$  که در آن پردازشگرها رأس‌های گراف هستند و و بین دو رأس  $p_i$  و  $p_j$  یال وجود دارد هرگاه پردازشگر  $p_i$  با پردازشگر  $p_j$  در سیستم ارتباط داشته باشد [۳۹]. حالا یک کد شناسایی برای گراف  $G$  مشخص می‌کنیم به طوری که هر پردازشگر با مجموعه‌ای منحصر به فرد از کدکلمه‌ها پوشش داده شود. هر کدکلمه را یک سیستم نظاره‌گر در نظر می‌گیریم. هر سیستم نظاره‌گر خودش و همسایه‌هایش را می‌تواند بررسی کند. در صورتی که خودش و یا حداقل یکی از همسایه‌هایش معیوب باشد، یک را ارسال می‌کند و در غیر این صورت صفر را ارسال می‌کند. توجه کنید کل بیت‌های دریافتی از سیستم به تعداد سیستم‌های نظاره‌گر می‌باشد. در این صورت با توجه به بیت‌های دریافتی به آسانی تشخیص داده خواهد شد که کدام پردازنده معیوب است.

## شبکه‌های حسگر اضطراری

کاربرد دیگری از این مسئله در ری ۶۶ و همکاران [۱۶۴] آمده است که تعمیمی از کدهای احاطه‌گر مکانی است که در کالبرن و همکارانش [۶۴] آورده شده است. سیستم‌های تشخیص مکان ۶۷ برای کاربردهای مختلفی پیشنهاد و پیاده‌سازی شده‌اند. برای کاربردهای بیرونی، ماهواره‌ها بر اساس سیستم GPS ۶۸ استفاده می‌شوند [۱۰۸]. GPS می‌تواند مکان را با تقریبی در حدود چند متر مشخص کند. اما انسدادها ۶۹، بازتاب‌ها ۷۰ و اثرات چند مسیری، مفید بودن GPS را در محیط‌های درونی محدود کرده است. سیستم‌های تشخیص مکان درونی برای مواقعی که سودمندی GPS محدود شده است طراحی شده‌اند. این سیستم‌ها در سه گروه مادون قرمز ۷۱، فراصوت ۷۲ و رادیو ۷۳ دسته‌بندی می‌شوند. هر یک از این سیستم‌ها برای مقاصد خود به خوبی کار می‌کنند، اما کیفیت حیاتی و لازم برای شبکه‌های اضطراری را نمی‌توانند تأمین کنند. کارایی یک سیستم مکان یاب می‌تواند با

۶۶ S.Ray

۶۷ Location detection system

۶۸ Global Positioning System

۶۹ Occlusions

۷۰ Reflections

۷۱ Infrared

۷۲ Ultrasound

۷۳ Radio



صحت<sup>۷۴</sup> و وضوح<sup>۷۵</sup> آن مشخص شود. صحت سیستم با احتمال اینکه ناحیه‌ای که هدف در آن حضور دارد به درستی تعیین شده باشد، سنجیده می‌شود. وضوح سیستم، کوتاه‌ترین فاصله بین اهداف مشخص شده در یک ناحیه که قابل تشخیص هستند را انعکاس می‌دهد. به طور کلی صحت سیستم می‌تواند با وضوح جایگزین شود یا برعکس. در زمینه سیستم‌های پاسخ اضطراری، صحت بسیار مهم‌تر از وضوح می‌باشد. برای مثال، به منظور تعیین مکان یک پرسنل به خطر افتاده، معمولاً داشتن طبقه و اتاق کافی است. از طرف دیگر فرستادن گروه نجات به یک ناحیه اشتباه در موقعیت اضطراری مرگبار است. بنابراین به جای مکان‌یابی پیوسته، این سیستم ناحیه پوششی را به نواحی قابل مکان‌یابی تقسیم می‌کند و یک نقطه در این ناحیه را به عنوان مکان هدف گزارش می‌دهد.

شبکه‌های حسگر اضطراری بر پایه‌ی کدهای شناسایی به صورت زیر طراحی می‌شوند که ابتدا مجموعه‌ای از نقاط برای یک ناحیه داده شده انتخاب می‌شوند، سپس بر اساس اتصالات رادیویی بین نقاط، حسگرهای فرستنده بر روی یک زیرمجموعه از این نقاط که به وسیله کد شناسایی متناظر با آن مشخص می‌شوند، واقع می‌گردند. این جایگذاری تضمین می‌کند که هر نقطه به وسیله یک مجموعه یکتا از فرستنده‌ها پوشش داده می‌شود. بنابراین ناظر می‌تواند موقعیت خودش را بر اساس زیرمجموعه منحصر به فرد از کدهای شناسایی که دریافت می‌کند، تعیین نماید.

به عنوان مثال شکل ۱.۱ نقشه ساده یک طبقه ساختمانی، اتصالات رادیویی و در نهایت گراف بدست آمده برای یک طبقه از ساختمان را نشان می‌دهد. با اطلاعات اتصالی بین هر جفت از نقاط، هدف ما تعیین یک سیستم با استفاده از کمترین تعداد فرستنده‌ها می‌باشد، به طوری که یک ناظر بتواند موقعیت خود را در هر یک از نقاط دریافت کند. برای این منظور چهار فرستنده بیسیم در نقاط  $a, b, c, d$  قرار می‌دهیم که هر فرستنده به طور متناوب و در فواصل معین یک مجموعه شناسایی یکتا می‌فرستد. اگر مجموعه شناسایی هر نقطه یکتا باشد، آن‌گاه اهداف می‌توانند به صورت صحیح در این نقاط واقع شوند. در این فصل ابتدا چند مورد از پارامترهای وابسته به کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی و سپس چند مورد از کران‌های بالا و پایین از این پارامترها را بیان می‌کنیم.

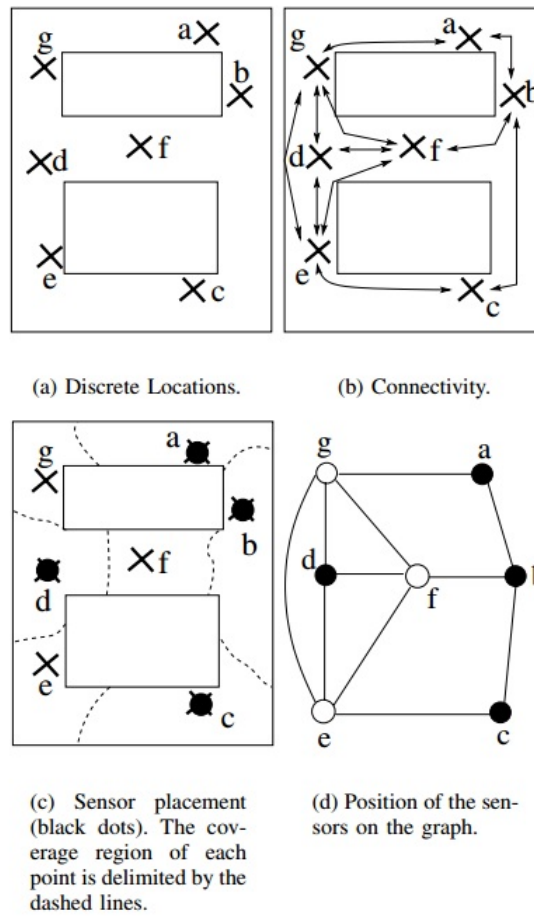
## ۴.۱ پارامترهای وابسته به کدهای شناسایی و احاطه‌گر

### مکانی

برای کاربردهای خاص روی شبکه‌ها یا موارد دیگر نیاز هست که کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی با شرایط ویژه استفاده شود. به همین دلیل پارامترهای خاصی وابسته به کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی روی گراف‌ها معرفی شده است. در این بخش ما به چند مورد از این پارامترها که در این رساله استفاده می‌شود، اشاره می‌کنیم.

<sup>۷۴</sup> Correctness

<sup>۷۵</sup> Resolution



شکل ۱.۱: کاربرد کدهای شناسایی در مکان یابی حسگرها در یک ساختمان

هاینس<sup>۷۶</sup>، هنینگ<sup>۷۷</sup> و هاوارد<sup>۷۸</sup> در [۱۰۰] مجموعه احاطه گر تفاضلی کلی<sup>۷۹</sup> و کد احاطه گر مکانی کلی<sup>۸۰</sup> را معرفی کردند. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به مراجع [۵۹، ۱۵۴، ۶۱، ۵۸، ۱۰۵، ۱۰۶] رجوع شود.

**تعریف ۱.۴.۱.** کد شناسایی  $C$  را مجموعه احاطه گر تفاضلی کلی گوئیم هرگاه زیرگراف  $G[C]$  دارای رأس منفرد نباشد. مینیمم اندازه‌ی یک مجموعه احاطه گر تفاضلی کلی بین تمام مجموعه‌های احاطه گر تفاضلی در گراف  $G$  را عدد احاطه گر تفاضلی کلی<sup>۸۱</sup> آن گراف نامیده و با  $\gamma_t^D(G)$  نشان داده می‌شود. به یک مجموعه احاطه گر تفاضلی کلی  $G$  با اندازه‌ی  $\gamma_t^D(G)$  یک مجموعه گفته می‌شود.

**تعریف ۲.۴.۱.** یک کد احاطه گر مکانی  $C$  را کد احاطه گر مکانی کلی گوئیم هرگاه زیرگراف  $G[C]$  دارای رأس منفرد نباشد. مینیمم اندازه‌ی یک کد احاطه گر مکانی کلی در گراف  $G$  را

<sup>۷۶</sup>Haynes

<sup>۷۷</sup>Henning

<sup>۷۸</sup>Howard

<sup>۷۹</sup>Differential total dominating set

<sup>۸۰</sup>Locating total dominating code

<sup>۸۱</sup>Differential total domination number

عدد احاطه‌گری مکانی کلی<sup>۸۲</sup> آن گراف نامیده و با  $\gamma_t^L(G)$  نشان داده می‌شود. به یک کد احاطه‌گر مکانی  $G$  با اندازه‌ی  $\gamma_t^L(G)$  یک  $\gamma_t^L(G)$ -مجموعه گفته می‌شود.

## ۵.۱ سختی مسائل کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی

همان‌طور که در بخش قبل ذکر شد، مسأله کوچک‌ترین کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی دارای کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف هستند. این مطلب از جمله دلایلی است که ما را به حل این مسأله ترغیب می‌کند. در این بخش، سختی حل مسأله کوچک‌ترین این کدها را بررسی می‌کنیم. در حقیقت قصد داریم به این پرسش پاسخ دهیم که سختی محاسبه عدد شناسایی و احاطه‌گر مکانی یک گراف دلخواه چقدر است. نظریه پیچیدگی محاسباتی شاخه‌ای از نظریه محاسبات، ریاضی و علوم کامپیوتر است که به بررسی دشواری حل مسائل به‌صورت الگوریتمی می‌پردازد. بسیاری از مسائل مورد علاقه ما مسائل بهینه‌سازی هستند. بررسی سختی حل یک مسأله به‌طور مستقیم در مسائل بهینه‌سازی به کار نمی‌رود بلکه در مسائل تصمیم‌گیری که پاسخ آن‌ها بله یا خیر (به‌طور رسمی صفر یا یک) است به کار می‌رود. بنابراین، نشان دادن اینکه مسأله‌ای سخت است یا خیر ما را به ناحیه مسائل تصمیم‌گیری محدود می‌کند. ما معمولاً می‌توانیم یک مسأله بهینه‌سازی را با محدود کردن مقدار بهینه به شکل یک مسأله تصمیم‌گیری درآوریم. به‌عنوان مثال در مسأله کوچک‌ترین کدهای شناسایی، گراف  $G$  و مقدار  $k$  به‌عنوان ورودی تعیین می‌شود و مسأله تصمیم‌گیری به این شکل بیان می‌شود: ”آیا کد شناسایی در  $G$  از اندازه کم‌تر یا مساوی  $k$  وجود دارد؟“. به‌طور کلی، مسائل تصمیم‌گیری با توجه به مرتبه زمانی حل خود به چهار کلاس تقسیم می‌شوند. دسته‌ای از آن‌ها مسائلی هستند که برای آن‌ها الگوریتمی با مرتبه زمانی چندجمله‌ای موجود می‌باشد. این مسائل به کلاس  $P$  مخفف Polynomial تعلق دارند. لازم به ذکر است که الگوریتم زمانی چندجمله‌ای الگوریتمی است که در بدترین حالت، پیچیدگی زمانی آن تابع چندجمله‌ای از اندازه ورودی باشد. کلاس  $NP$  مخفف Polynomial non-deterministic مجموعه مسائل تصمیم‌گیری است که توسط الگوریتم‌های زمانی چندجمله‌ای و غیرقطعی قابل حل هستند. بدیهی است که کلاس  $NP$  زیرکلاس  $P$  است. مهم‌ترین سؤال که برای این کلاس‌ها در این نظریه وجود دارد این است که آیا  $NP = P$ . این باور گسترده وجود دارد که این تساوی نمی‌تواند درست باشد. یک مسأله  $NP$ -سخت<sup>۸۳</sup> است اگر یک الگوریتم زمانی چندجمله‌ای برای این مسأله قابل تبدیل به یک الگوریتم زمانی چندجمله‌ای برای هر یک از مسائل کلاس  $NP$  شود. همچنین، یک مسأله  $NP$ -کامل<sup>۸۴</sup> است اگر متعلق به خانواده  $NP$  باشد و در عین حال  $NP$ -سخت نیز باشد. کلاس  $NP$ -کامل زیرکلاس کلاس‌های  $NP$  و  $NP$ -سخت است. در واقع کلاس  $NP$ -کامل فصل مشترک کلاس‌های  $NP$  و  $NP$ -سخت را تشکیل

<sup>۸۲</sup> Locating total domination number

<sup>۸۴</sup> NP-complete

<sup>۸۳</sup> NP-hard

می دهد.

مسئله  $NP$  – کامل اولین بار توسط کوک<sup>۸۵</sup> در سال ۱۹۷۱ مطرح شد [۶۵]. در این مقاله کوک ثابت کرد که مسئله صدق پذیری<sup>۸۶</sup> یک مسئله  $NP$  – کامل است. در سال ۱۹۷۲ کارپ<sup>۸۷</sup> در [۱۲۵] بیست و یک مسئله از مسائل ترکیبیاتی را در رده مسائل  $NP$  – کامل قرار داد. برای نشان دادن اینکه آیا یک مسئله  $NP$  – کامل است یا نه از مفهوم کلیدی کاهش<sup>۸۸</sup> استفاده می کنیم.

### توضیح در مورد مفهوم کاهش

ایده ی نشان دادن اینکه یک مسئله سخت تر یا آسان تر از مسئله ی دیگری نیست حتی زمانی که هر دو مسئله، مسئله ی تصمیم گیری باشند نیز به کار می رود. ما از این ایده تقریباً برای اثبات تمامی مسائل  $NP$  – کامل استفاده می کنیم. اجازه دهید یک مسئله ی تصمیم گیری مانند  $A$  را در نظر بگیریم که می خواهیم آن را در پیچیدگی زمانی چندجمله ای  $O(n^k)$  حل کنیم. ورودی را به یک مسئله ی خاص به عنوان «نمونه ای» از این مسئله فراخوانی می کنیم. به عنوان مثال در مسئله ی مسیر، یک نمونه می تواند یک گراف خاص  $G$  باشد با دو رأس خاص  $u$  و  $v$  از  $G$  و مقداری مشخص برای پارامتر  $k$ . حال فرض می کنیم که یک مسئله ی تصمیم گیری دیگری داریم با نام  $B$  و میدانیم که این مسئله راه حلی در پیچیدگی زمانی چندجمله ای دارد. در نهایت فرض می کنیم رویه ای داریم که هر یک از نمونه های  $a$  از مسئله  $A$  را به نمونه های  $b$  از مسئله  $B$  با خصوصیات زیر تبدیل می کند یا «کاهش می دهد». عملیات کاهش دارای پیچیدگی زمانی چندجمله ای است. جواب های هر دو مسئله یکسان است؛ یعنی جواب مسئله  $a$  «بلی» است اگر و فقط اگر جواب مسئله  $b$  «بلی» باشد. این رویه را الگوریتم کاهشی با پیچیدگی زمانی چندجمله ای می نامیم که روشی را برای حل مسئله  $A$  در پیچیدگی زمانی چندجمله ای فراهم می کند. پس کلاً سه مرحله داریم:

- نمونه ای  $a$  از مسئله  $A$  را با استفاده از «الگوریتم کاهشی» با پیچیدگی زمانی چندجمله ای به نمونه ای  $b$  از مسئله  $B$  تغییر شکل می دهیم.
- الگوریتم کاهشی را بر روی نمونه ای  $b$  از مسئله  $B$  اجرا می کنیم.
- از جوابی که برای  $b$  به دست آورده ایم به عنوان جوابی برای مسئله  $a$  استفاده می کنیم. تا زمانی که هر یک از این مراحل دارای پیچیدگی زمانی چندجمله ای است هر سه مرحله باهم نیز دارای پیچیدگی زمانی چندجمله ای خواهد بود و می توانیم بگوییم که راهی با پیچیدگی زمانی چندجمله ای برای تصمیم گیری روی مسئله  $a$  پیدا کرده ایم. به عبارت دیگر با «کاهش» مسئله  $A$  به مسئله  $B$ ، ما از سادگی  $B$  برای اثبات سادگی  $A$  استفاده کرده ایم.

در ادامه نمونه هایی از الگوریتم کاهشی که برای  $NP$  – کامل بودن مسائل کدهای شناسایی و احاطه گر مکانی استفاده شده است را ذکر می کنیم. در سال ۲۰۱۵ فوکود<sup>۸۹</sup> دو الگوریتم کاهشی برای کاهش مسائل کدهای شناسایی و احاطه گر مکانی به مسئله رأس های پوششی به صورت

<sup>۸۵</sup>Cook

<sup>۸۶</sup>Satisfiability

<sup>۸۷</sup>Karp

<sup>۸۸</sup>Reduction

<sup>۸۹</sup>Foucaud

زیر ارائه داد [۸۸].

• **الگوریتم کاهش‌ی ۱.** فرض کنید  $G$  یک گراف دلخواه از مرتبه  $n \geq 2$  است. هر یال از گراف  $G$  را تقسیم می‌کنیم و سپس به هر رأس جدید یک رأس اضافه می‌کنیم. گراف بدست آمده را  $G'$  می‌نامیم.

مشابه به قبل یک الگوریتم کاهش‌ی برای کاهش مسأله کدهای احاطه‌گر مکانی به مجموعه پوشش رأسی در [۸۸] به صورت زیر ارائه شده است.

• **الگوریتم کاهش‌ی ۲.** فرض کنید  $G$  یک گراف دلخواه از مرتبه  $n \geq 2$  و برای هر یال  $e = xy \in E(G)$  گرافی  $G_e$  باشد که از دور  $C_e = e_1 e_2 e_3 e_4 e_1$  با اضافه کردن رأس  $v$  و یال‌های  $ue_1$  و  $ue_4$  بدست می‌آید. در این صورت گراف  $G''$  از گراف  $G$  با افزودن  $G_e$  و یال‌های  $xe_1$  و  $ye_4$  برای هر یال  $e = xy \in E(G)$  و حذف همه یال‌های  $G$  بدست می‌آید.

در [۸۸] نشان داده شده است که اگر  $N$  یک مجموعه پوششی برای گراف  $G$  باشد، آن‌گاه  $G'$  دارای یک کد شناسایی از اندازه حداکثر  $|N| + |E(G)|$  و  $G''$  دارای یک کد احاطه‌گر مکانی از اندازه حداکثر  $|N| + 2|E(G)|$  می‌باشد. همچنین ثابت کردند اگر  $C$  یک کد شناسایی برای گراف  $G'$  باشد، آن‌گاه گراف  $G$  دارای یک مجموعه پوششی رأسی از اندازه حداکثر  $|C| - |E(G)|$ ، و اگر  $C$  یک کد احاطه‌گر مکانی برای گراف  $G''$  باشد، آن‌گاه گراف  $G$  دارای یک مجموعه پوششی رأسی از اندازه حداکثر  $|C| - 2|E(G)|$  است.

در سال ۱۹۷۶ گری و همکارانش<sup>۹۰</sup> در [۹۴] ثابت کردند که مسأله ترنسورسال حتی برای گراف‌های مسطح با ماکزیمم درجه سه،  $NP$  - کامل است. بنابراین از الگوریتم‌های کاهش‌ی ۱ و ۲ قضیه‌های زیر نتیجه می‌شود.

**قضیه ۱.۵.۱. [۸۸]** مسأله کوچکترین کدهای شناسایی حتی برای گراف‌های مسطح با ماکزیمم درجه ۳ نیز  $NP$  - کامل است.

**قضیه ۲.۵.۱. [۸۸]** مسأله کوچکترین کدهای احاطه‌گر مکانی حتی برای گراف‌های مسطح با ماکزیمم درجه ۳ نیز  $NP$  - کامل است.

همچنین با استفاده از الگوریتم کاهش‌ی در [۸۸] برای تعدادی از خانواده‌ها از گراف‌ها مثل گراف‌های دوبخشی وتری<sup>۹۱</sup>، مسائل کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی  $NP$  - کامل است. در جدول ۱.۱ پیچیدگی مسائل کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی با مجموعه احاطه‌گر برای خانواده‌هایی از گراف‌ها مقایسه شده است.

<sup>۹۰</sup>Garey. et. al

<sup>۹۱</sup>Chordal bipartite graphs

جدول ۱.۱: مقایسه پیچیدگی مسائل کدهای شناسایی و احاطه گر مکانی با مجموعه احاطه گر

graph class	Id Code	Loc-Dom Code	Dominating Set
bipartite	NP-c [۵۳]	NP-c [۵۳]	NP-c [۴۰، ۳۱]
chordal bipartite	NP-c [۸۸]	NP-c [۸۸]	NP-c [؟]
planar max. degree ۳	NP-c [۱۷]	NP-c [۸۸]	NP-c [۱۷۴، ۹۳]
planar bipartite max. degree ۳	NP-c [۸۸]	NP-c [۸۸]	NP-c [۱۷۴]
(planar) line	NP-c [۸۹]	OPEN	NP-c [۱۷۵]
planar bipartite unit disk	NP-c [۱۵۲]	NP-c [۱۵۲]	NP-c [۶۲]
bounded tree-width/ clique-width	P [۱۵۰]	P [۱۵۰]	P [۶۶، ۶۷]
line of bounded tree-width	P [۸۹]	P [۸۹]	P [۶۷]
split	NP-c [۹۱]	NP-c [۸۸]	NP-c [۳۱]
undirected path	NP-c [۹۱]	OPEN	NP-c [۳۷]
interval, directed path	NP-c [۹۱]	OPEN	P [۳۷]
strongly chordal	NP-c [۹۱]	OPEN	P [۸۴]
permutation	OPEN	OPEN	P [۸۵]
AT-free, DSP	NP-c [۹۱]	NP-c [۸۸]	P [۱۲۸]
co-bipartite	NP-c [۸۸]	NP-c [۸۸]	P [۱۲۸]
(planar) SC $\setminus$	P [۸۸]	P [۸۸]	NP-c [۸۸]
(planar) SC $\cup$	NP-c [۸۸]	P [۸۸]	P [۸۸]

## فصل ۲

# برخی کران‌های موجود برای کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی

پیدا کردن کدهای شناسایی و احاطه‌گر مکانی با کمترین اندازه یکی از مسائل ترکیبیاتی است که در رده مسائل  $NP$ -کامل قرار می‌گیرد. بنابراین، یکی از مسائل اساسی در نظریه گراف، به دست آوردن کران‌هایی برای  $M(G)$  و  $\gamma_L(G)$  یک گراف براساس اطلاعات داده شده از گراف است. با توجه به کاربردهای متعددی که برای این مسأله وجود دارد، این مسأله توجه ویژه‌ای را در دهه‌های اخیر به خود اختصاص داده است. همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد، طیف وسیعی از کاربردهای این کدها در زمینه‌های مختلف حقیقی است. بنابراین، از بین کران‌های موجود، آن دسته از کران‌هایی که قابل محاسبه هستند جالب توجهند. تعداد زیادی کران‌های بالا و پایین قابل محاسبه انتشار داده شده‌اند که در این فصل به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم. هدف این کران‌ها، تخمین اندازه این پارامترها است.

در این فصل، به‌طور مختصر به برخی از تلاش‌هایی که در راستای محاسبه  $M(G)$ ،  $\gamma_L(G)$ ،  $\gamma_t^D(G)$  و  $\gamma_t^L(G)$  یک گراف  $G$  انجام شده است اشاره می‌کنیم و به ذکر چند کران می‌پردازیم. کران‌های این فصل را به دو دسته کران‌های عمومی<sup>۱</sup> (بخش ۱.۲) و کران‌های ویژه<sup>۲</sup> (بخش ۲.۲) تقسیم می‌کنیم.

---

<sup>۱</sup>General bounds

<sup>۲</sup>Specific bounds

## ۱.۲ کران‌های عمومی

### کدهای شناسایی

#### کران پایین

فرض کنید  $G$  یک گراف از مرتبه  $n$  و  $C$  یک کد شناسایی برای آن باشد. این حقیقت که به هر یک از  $n$  رأس گراف یک زیرمجموعه ناتهی از  $C$  متناظر می‌شود، نتیجه می‌دهد که  $n \leq 2^{|C|} - 1$ . با استفاده از این نتیجه کارپوسکی<sup>۳</sup> و همکاران در [۱۲۶] کران پایین زیر را بر اساس مرتبه گراف  $G$  برای  $M(G)$  ارائه دادند.

**قضیه ۱.۱.۲.** [۱۲۶] فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف همبند بدون جهت با  $n$  رأس و قابل شناسایی باشد. اگر مجموعه  $C \subseteq V$  یک کد شناسایی باشد، آن‌گاه  $|C| \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$ .

گراف‌هایی که در تساوی کران پایین ارائه شده در قضیه ۱.۱.۲ صدق می‌کنند، در [۱۵۱] به صورت زیر مشخص شدند.

فرض کنید  $n \geq 1$  و  $p = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ . همچنین فرض کنید  $H$  گرافی قابل شناسایی روی  $P$  رأس  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  باشد. گراف  $\mathcal{G}(H)$  از گراف  $H$  روی  $n$  رأس ساخته می‌شود، به طوری که مجموعه  $C = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  یک کد شناسایی برای  $\mathcal{G}(H)$  باشد. گراف  $\mathcal{G}(H)$  گراف بهینه<sup>۴</sup> نامیده می‌شود. گراف  $\mathcal{G}(H)$  به صورت زیر ساخته می‌شود:

(۱) به هر رأس  $x_j$  از گراف  $H$  بردار  $P$ -تایی  $v(x_j)$  از صفر و یک‌ها را نسبت می‌دهیم، به طوری که اگر  $x_i \in N[x_j]$ ، آن‌گاه  $v(x_j)_i = 1$  و در غیراین صورت  $v(x_j)_i = 0$ . مجموعه  $\mathcal{V}$  را به صورت  $\mathcal{V} = \{v(x_j) | j = 1, \dots, p\}$  در نظر بگیرید. چون گراف  $H$  قابل شناسایی است، مجموعه  $\mathcal{V}$  دقیقاً  $p$  رأس دارد و شامل بردار  $(0, 0, \dots, 0)$  نیست.

(۲) فرض کنید  $\mathcal{W}$  یک زیرمجموعه  $(n-p)$ -عضوی از مجموعه  $(\mathcal{V} \cup \{0, 1, \dots, p\})^n - \{0, 1\}^n$  است. برای هر رأس  $w \in \mathcal{W}$ ، رأس جدید  $y_w$  را به گراف  $\mathcal{G}(H)$  اضافه می‌کنیم به طوری که

$$N(y_w) = \{x_i | w_i = 1\}.$$

(۳) می‌توانیم بین رأس‌های  $y_w$  برای  $w \in \mathcal{W}$  یال اضافه کنیم.

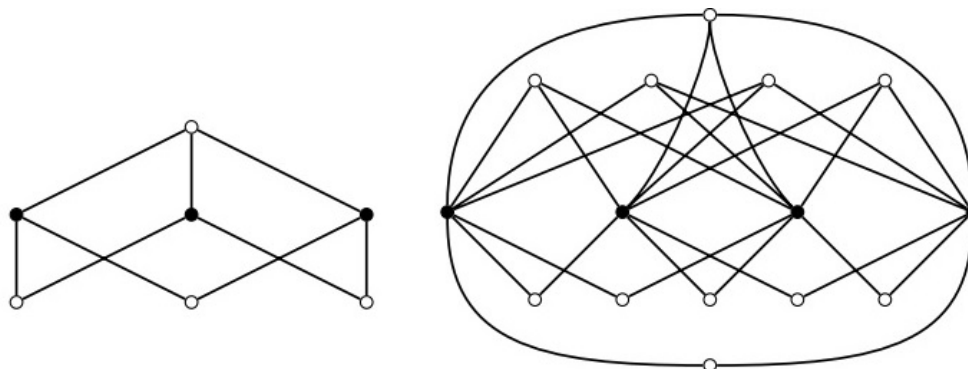
**قضیه ۲.۱.۲.** [۱۵۱] فرض کنید  $H$  گرافی با  $P = \lceil \log_2(n+1) \rceil$  رأس باشد. در این صورت  $\mathcal{G}(H)$  دارای  $n$  رأس است و  $M(\mathcal{G}(H)) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ . همچنین فرض کنید  $G$  گرافی از مرتبه  $n$  با  $M(G)$  مجموعه  $C$  باشد و  $M(G) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ . قرار دهید  $H = G[C]$ . در این صورت  $G = \mathcal{G}(H)$ .

<sup>۳</sup>Karpovsky

<sup>۴</sup>Optimal graph



در قضیه ۲.۱.۲ ساختار گراف‌هایی که در تساوی کران ارائه شده در قضیه ۱.۱.۲ صدق می‌کنند، مشخص شده است. مشاهده می‌کنیم اگر  $G[C]$  و  $G[V-C]$  یال نداشته باشند، آن‌گاه یک گراف دوبخشی است. همچنین اگر  $G[C]$  یال نداشته باشد و  $G[V-C]$  گرافی کامل باشد، آن‌گاه  $G$  یک گراف تقسیم است. در شکل ۱.۲ دو گراف دوبخشی که در تساوی کران بالای ارائه شده در قضیه ۱.۱.۲ صدق میکنند، نشان داده شده است.



شکل ۱.۲: دو گراف که کران قضیه ۱.۱.۲ برای آن‌ها قابل دستیابی است. رأس‌های با رنگ سیاه متعلق به کد شناسایی بهینه هر گراف می‌باشند.

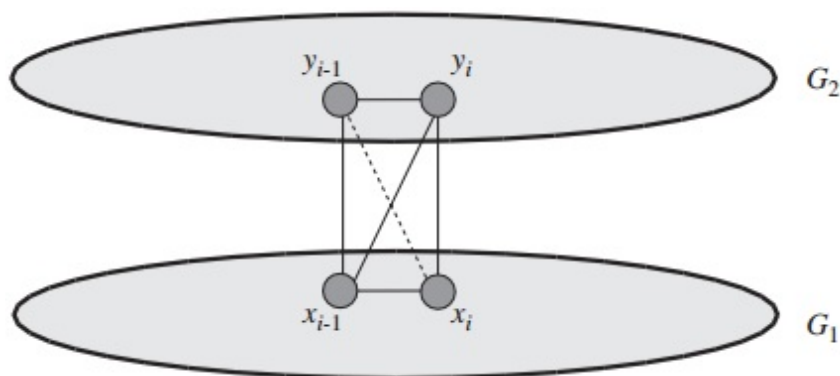
## کران بالا

کارون<sup>۵</sup> و همکاران در [۴۴] یک کران بالا بر اساس مرتبه گراف برای عدد شناسایی گراف به‌دست آوردند.

**قضیه ۳.۱.۲.** [۴۴] فرض کنید  $G$  یک گراف قابل شناسایی از مرتبه  $n$  باشد. اگر  $G$  حداقل یک یال داشته باشد، آن‌گاه  $M(G) \leq n - 1$ . همچنین برای هر  $n \geq 3$  گراف  $G$  از مرتبه  $n$  با  $M(G) = n - 1$  وجود دارد.

قضیه ۳.۱.۲ برای گراف‌های نامتناهی برقرار نیست. به عنوان مثال فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  دو کپی از گراف کامل نامتناهی روی رأس‌های  $Z$  باشند. رأس  $y_i \in G_1$  را به رأس  $x_j \in G_2$  وصل می‌کنیم، اگر و تنها اگر  $i \geq j$ . در این صورت گراف  $G$  به‌دست می‌آید که تنها کد شناسایی آن مجموعه  $V(G)$  است. در واقع برای هر  $i \in Z$ ،  $N(y_i) = N(y_{i-1}) \cup \{x_i\}$ ، پس می‌توان فرض کرد که  $x_i \in C$  و به طریق مشابه می‌توان نشان داد که  $y_i \in C$ . گراف  $G$  در شکل ۲.۲ نشان داده شده است.

<sup>۵</sup>Charon



شکل ۲.۲: گراف نامتناهی  $G$  که تنها کد شناسایی آن مجموعه رأس‌های این گراف است.

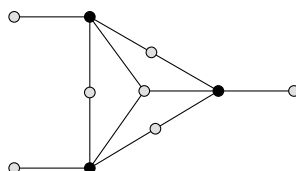
## کدهای احاطه‌گر مکانی

### کران پایین

فرض کنید  $G$  یک گراف از مرتبه  $n$  و  $C$  یک کد احاطه‌گر مکانی برای آن باشد. این حقیقت که به هر یک از  $n - |V(C)|$  رأس یک زیرمجموعه ناتهی از  $C$  متناظر می‌شود، نتیجه می‌دهد که  $n \leq 2^{|C|} + |C| - 1$ . با استفاده از این نتیجه کارون و همکاران در [۴۴] کران پایین زیر را برای  $\gamma_L(G)$  به دست آوردند.

**قضیه ۴.۱.۲.** [۴۴] فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف همبند بدون جهت با  $n$  رأس باشد. اگر مجموعه  $C \subseteq V$  یک کد احاطه‌گر مکانی برای گراف  $G$  باشد، آن‌گاه  $n \leq 2^{|C|} + |C| - 1$ .

در شکل ۳.۲ یک گراف که در تساوی کران ارائه شده در قضیه ۵.۱.۲ صدق می‌کنند، نشان داده شده است.



شکل ۳.۲: یک گراف که در تساوی کران ارائه شده در قضیه ۵.۱.۲ صدق می‌کند. رأس‌های با رنگ سیاه متعلق به کد احاطه‌گر مکانی بهینه گراف می‌باشند.

## کران بالا

با توجه به این حقیقت که هر کد شناسایی یک کد احاطه‌گر مکانی نیز می‌باشد، کران بالای زیر برای عدد احاطه‌گر مکانی یک گراف به دست می‌آید.

**قضیه ۵.۱.۲.** [۴۴] اگر  $G$  یک گراف همبند از مرتبه  $n$  باشد، آن‌گاه  $\gamma_L(G) \leq n - 1$ .

یک مثال از گراف‌هایی که در کران قضیه ۵.۱.۲ صدق میکنند، گراف کامل  $n$  راسی است.

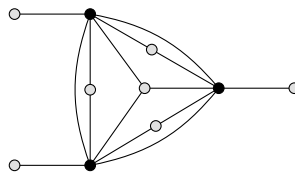
## کدهای احاطه‌گر کلی مکانی

### کران پایین

هنینگ<sup>۶</sup> و جعفری راد<sup>۷</sup> کران پایین زیر را برای کد احاطه‌گر مکانی کلی به دست آوردند.

**قضیه ۶.۱.۲.** [۱۰۵] فرض کنید  $G$  یک گراف همبند از مرتبه  $n \geq 2$  باشد. اگر  $\gamma_t^L(G) = a$ ، آن‌گاه  $n \leq 2^a + a - 1$ .

یک مثال از گراف‌هایی که کران ارائه شده در قضیه ۶.۱.۲ برای آن‌ها قابل دستیابی است، در شکل ۴.۲ نشان داده شده است. با استفاده از قضیه ۶.۱.۲ نتیجه زیر به دست می‌آید.



شکل ۴.۲: یک گراف که کران ارائه شده در قضیه ۵.۱.۲ برای آن قابل دستیابی است. رأس‌های با رنگ سیاه متعلق به کد احاطه‌گر کلی مکانی بهینه گراف می‌باشند.

**نتیجه ۱.۱.۲.** [۱۰۵] اگر  $G$  یک گراف همبند از مرتبه  $n \geq 2$  باشد، آن‌گاه  $\gamma_t^L(G) \geq \lfloor \log_2^n \rfloor$ . کران پایین زیر برای عدد احاطه‌گری کلی مکانی یک گراف بر اساس قطر آن در [۱۰۵] ارائه شده است.

**قضیه ۷.۱.۲.** اگر  $G$  یک گراف همبند از مرتبه  $n \geq 2$  باشد، آن‌گاه

$$\gamma_t^L(G) \geq \frac{\text{diam}(G) + 1}{2}.$$

برای قابل دستیابی بودن کران فوق کافی است گراف  $G$  را مسیر  $P_n$  در نظر بگیرید به طوری که  $n$  مضربی از ۴ باشد، در این صورت  $\text{diam}(G) = n - 1$  و  $\gamma_t^L(G) \geq \frac{n}{4}$ . بنابراین

$$\gamma_t^L(G) = \frac{\text{diam}(G) + 1}{2}.$$

<sup>۶</sup>Henning

<sup>۷</sup>Jafari Rad

## کران بالا

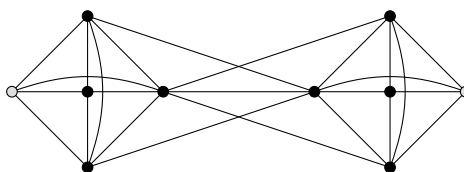
هنینگ<sup>۸</sup> و جعفری راد<sup>۹</sup> بر اساس مرتبه گراف، کمترین درجه و قطر گراف چند کران بالا برای کد احاطه‌گر مکانی کلی به صورت زیر به دست آوردند.

**قضیه ۸.۱.۲ [۱۰۵].** اگر  $G$  یک گراف همبند از مرتبه  $n \geq 3$  باشد، آن گاه  $\gamma_t^L(G) \leq n - 1$  و تساوی برقرار است، اگر و تنها اگر  $G$  ستاره یا گرافی کامل باشد.

**قضیه ۹.۱.۲ [۱۰۵].** اگر  $G$  یک گراف همبند دوبخشی از مرتبه  $n \geq 3$  با  $\delta(G) = \delta \geq 2$ ، آن گاه  $\gamma_t^L(G) \leq n - 2$  و تساوی برقرار است، اگر و تنها اگر  $G$  دور  $C_\delta$  یا گراف  $K_{\delta, n-\delta}$  باشد.

**قضیه ۱۰.۱.۲ [۱۰۵].** اگر  $G$  یک گراف همبند از مرتبه  $n \geq 3$  با کمترین درجه حداقل ۳ و  $diam(G) = d \geq 3$ ، آن گاه  $\gamma_t^L(G) \leq n - \lfloor \frac{d}{3} \rfloor - 1$ .

در شکل ۵.۲ یک گراف که در تساوی کران ارائه شده در قضیه ۱۰.۱.۲ صدق می‌کند، نشان داده شده است.



شکل ۵.۲: یک گراف که کران ارائه شده در قضیه ۱۰.۱.۲ برای آن قابل دستیابی است. رأس‌های با رنگ سیاه متعلق به کد احاطه‌گر مکانی بهینه گراف می‌باشند.

## ۲.۲ کران‌های ویژه

**قضیه ۱.۲.۲ [۱۶۹].** فرض کنید  $P_n$  و  $C_n$  به ترتیب مسیر و دور از مرتبه  $n$  باشند، در این صورت داریم:

$$M(P_n) = \begin{cases} \frac{n+1}{3} & \text{if } n \geq 1 \text{ is odd,} \\ \frac{n}{3} + 1 & \text{if } n \geq 4 \text{ is even,} \end{cases}$$

و

$$M(C_n) = \begin{cases} \frac{n+3}{3} & \text{if } n \geq 7 \text{ is odd,} \\ \frac{n}{3} & \text{if } n \geq 6 \text{ is even.} \end{cases}$$

در این بخش کران‌های بالا و پایین ارائه شده برای گراف‌های ویژه به خصوص درخت‌ها را بیان می‌کنیم.

<sup>۸</sup>Henning

<sup>۹</sup>Jafari Rad

## کدهای شناسایی

کارن و همکاران در [۲۹] کران پایین زیر را برای کدهای شناسایی بر اساس مرتبه درخت به دست آوردند.

**قضیه ۲.۲.۲.** [۲۹] فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 3$  باشد. آن گاه

$$\frac{3(n+1)}{7} \leq M(T),$$

و این کران قابل دستیابی است.

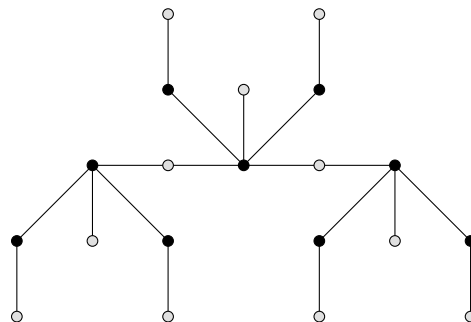
بلیدیا و چلالی برای کدهای شناسایی کران پایینی به صورت زیر ارائه دادند. کران ارائه شده در قضیه ۷.۲.۲، کران قضیه ۲.۲.۲ را برای همه درخت‌ها بهبود می‌بخشد.

**قضیه ۳.۲.۲.** [۳۳] فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 4$  باشد. آن گاه

$$\frac{3(n+l-s+1)}{7} \leq M(T),$$

و این کران قابل دستیابی است.

در شکل ۶.۲ یک گراف که در تساوی کران ارائه شده در قضیه ۷.۲.۲ صدق می‌کند، نشان داده شده است. رأس‌های با رنگ سیاه یک کد شناسایی با اندازه  $\frac{3(n+l-s+1)}{7}$  برای این گراف می‌باشند.



شکل ۶.۲: یک گراف که کران ارائه شده در قضیه ۷.۲.۲ برای آن قابل دستیابی است.

در جدول ۱.۲ کران‌های پایین و بالای  $M(G)$  به دست آمده برای برخی گراف‌ها با ذکر مرجع آمده است.

جدول ۱.۲: کران‌هایی برای پارامتر  $M(G)$  برای خانواده‌ای از گراف‌ها.

graph class	Lower bound	Upper bound
line	$\frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{n}$ [۸۷]	$n-1$ [۹۸, ۲۸]
interval	$\sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4}$ [۸۷]	$n-1$ [۹۸, ۲۸]
unit interval	$\frac{n+1}{2}$ [۸۷]	$n-1$ [۹۸, ۲۸]
planar	$\frac{n+1}{\sqrt{3}}$ [۱۷۲]	$n-1$ [۹۸, ۲۸]
series-parallel	$\frac{n+3}{4}$ [۱۷۲]	$n-1$ [۹۸, ۲۸]
outerplanar	$\frac{2n+3}{\sqrt{3}}$ [۱۷۲]	$n-1$ [۹۸, ۲۸]
girth $\delta$ , $\delta \geq 2$	Open	$\frac{\delta}{\sqrt{3}}n$ [۲۴]
max. deg. $\Delta$	$\frac{2n}{\Delta+2}$ [۱۲۶]	$n - \frac{n}{103\Delta(\Delta+1)^2}$ [۸۷]
$\Delta$ -regular	$\frac{2n}{\Delta+2}$ [۱۲۶]	$n - \frac{n}{103\Delta}$ [۸۷]
$K_3$ -free, max. deg. $\Delta$	$\frac{2n}{\Delta+2}$ [۱۲۶]	$n - \frac{n}{\Delta + \frac{3\Delta}{\ln\Delta - 1}}$ [۸۷]
bipartite, max. deg. $\Delta$	$\frac{2n}{\Delta+2}$ [۱۲۶]	$n - \frac{n}{\Delta+9}$ [۸۷]
planar $K_3$ -free, max. deg. $\Delta$	$\max\{\frac{2n}{\Delta+2}, \frac{n+1}{10}\}$ [۱۷۲, ۱۲۶]	$n - \frac{n}{\Delta+9}$ [۸۷]
cubic	Open	$\frac{31}{45}n$ [۲۴]
girth $\delta$	Open	$\frac{3(\ln\delta + \ln\ln\delta + 1) + \frac{\ln\ln\delta}{\ln\delta} + \frac{1}{\ln\delta}}{2\delta}$ [۸۷]

## کدهای احاطه‌گر مکانی

### کران پایین

اسلاتر<sup>۱۰</sup> در [۱۷۰] کران پایین زیر را بر اساس مرتبه درخت برای کدهای احاطه‌گر مکانی ارائه داد.

قضیه ۴.۲.۲. [۱۷۰] فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 3$  باشد، آن‌گاه  $\frac{n}{3} \leq \gamma_L(T)$  و این کران قابل دستیابی است.

بلیدیا<sup>۱۱</sup> و چلالی<sup>۱۲</sup> قضیه زیر را به دست آوردند که در واقع بهبود قضیه ۴.۲.۲ می‌باشد.

قضیه ۵.۲.۲. [۲۳] فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 3$  باشد، آن‌گاه

$$\frac{n+l-s+1}{3} \leq \gamma_L(T),$$

و این کران قابل دستیابی است.

برای قابل دستیابی بودن کران فوق کافی مسیر  $P_5$  را در نظر بگیرید. به راحتی می‌توان مشاهده کرد که مسیر  $P_5$  کوچکترین درختی است که در تساوی این کران صدق می‌کند.

<sup>۱۰</sup>Slater

<sup>۱۱</sup>Blidia

<sup>۱۲</sup>Chellali

سویل<sup>۱۳</sup> و اسلاتر کران پایین ارائه شده در قضیه ۵.۲.۲ را به صورت زیر بهبود بخشیدند. همچنین تمام درخت‌هایی که در این کران صدق می‌کنند، مشخص شده است.

قضیه ۶.۲.۲. [۱۴۹] فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 3$  باشد، آن‌گاه

$$\lceil \frac{n + 2(l - s) + 1}{3} \rceil \leq \gamma_L(T).$$

## کران بالا

خانواده‌ی  $\mathcal{F}$  از درخت‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم یک درخت  $T$  در  $F$  قرار دارد اگر از دنباله  $T_1, T_2, \dots, T_k = T$ ،  $K \geq 1$  از درختها به دست آید، به طوری که  $T_1$  مسیر  $P_3 = xyt$  یا  $P_4$  باشد و اگر  $k \geq 2$  و  $i < k$ ، آن‌گاه  $T_{i+1}$  با اعمال یکی از عملگرهای تعریف شده در زیر از درخت  $T_i$  به دست آید.

اگر  $T_1 = P_3$ ، قرار دهید  $D(T_1) = \{x, y\}$  و اگر  $T_1 = P_4$ ، قرار دهید  $D(T_1) = S(T_1)$ .

• عملگر  $\mathcal{F}_1$ :

رأس جدید  $w$  را با یک یال به رأس پشتیبانی از درخت  $T_i$  وصل کنید. قرار دهید

$$D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{w\}$$

• عملگر  $\mathcal{F}_2$ :

مسیر  $P_2 = uv$  را با یال  $uz$  به یک رأس پشتیبان  $z$  در  $T_i$  متصل کنید. قرار دهید

$$D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{u\}$$

• عملگر  $\mathcal{F}_3$ :

فرض کنید  $b'$  برگ مجاور رأسی پشتیبان قوی در درخت  $T_i$  باشد. یک ستاره تقسیم شده  $H$  از مرتبه حداقل ۵ با رأس مرکزی  $a$  را به درخت  $T_i$  با یال  $ab'$  اضافه کنید. قرار دهید

$$D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup S(H)$$

• عملگر  $\mathcal{F}_4$ :

فرض کنید  $f$  برگ مجاور یک رأس پشتیبان قوی در درخت  $T_i$  باشد. مسیر  $P_3 = bcd$  و  $p \geq 0$  مسیر  $P_4 = u_j v_j$  را با افزودن یال‌های  $df$  و  $u_j f$  برای هر  $j$  به درخت  $T_i$  اضافه کنید. قرار دهید

$$D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{c, u_1, \dots, u_p\}$$

• عملگر  $\mathcal{F}_5$ :

فرض کنید  $y \in V(T_i) - S(T_i)$  و  $\gamma_L(T_i \setminus y) = \gamma_L(T_i)$ . مسیر  $P_4 = abcd$  و  $p \geq 0$  مسیر  $P_4 = u_j v_j$  را با یال‌های  $dy$  و  $u_j d$  برای هر  $j$  به درخت  $T_i$  اضافه کنید. قرار دهید

$$D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{b, d, u_1, \dots, u_p\}$$

بلیدیا و همکاران کران بالای زیر را برای کدهای احاطه‌گر مکانی روی درختان ارائه دادند.

قضیه ۷.۲.۲. [۲۳] اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  باشد، آن‌گاه

$$\gamma_L(T) \leq \frac{n + l - s}{2}.$$

به‌علاوه تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $T \in \mathcal{F}$ .

در [۲۴] کران بالای زیر برای  $\gamma_L(G)$  به‌دست آمده است.

قضیه ۸.۲.۲. [۲۴] فرض کنید  $G$  گرافی از مرتبه  $n$ ، کمر حداقل ۵ و کمترین درجه حداقل ۲ باشد. در این صورت،

$$\gamma_L(G) \leq \frac{n}{3}.$$

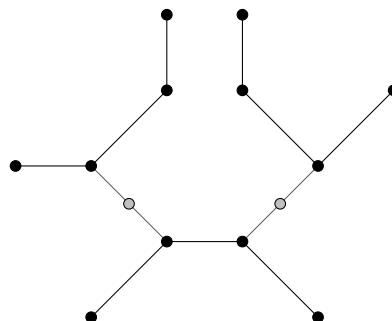
## کدهای احاطه‌گر کلی مکانی

قضیه ۹.۲.۲. [۱۶۹] فرض کنید  $P_n$  و  $C_n$  به ترتیب مسیر و دور از مرتبه  $n \geq 3$  باشند، در این صورت داریم:

$$\gamma_L(C_n) = \gamma_L(P_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil.$$

## کران پایین

فرض کنید  $\mathcal{T}_1$  خانواده‌ای از گراف‌ها باشد که بتوان آن‌ها را از  $k$  کیپی متمایز از  $P_4$  با اضافه کردن  $k-1$  یال جدید بین رأس‌های پشتیبان و تقسیم دقیقاً یک بار هر یال جدید به‌طوری که گراف همبند شود، به‌دست آورد. در شکل ۷.۲ مثالی از خانواده‌ی  $\mathcal{T}_1$  نشان داده شده است.



شکل ۷.۲: مثالی از خانواده‌ی  $\mathcal{T}_1$ .

هاینس<sup>۱۴</sup> و همکاران در [۱۰۰] برای کدهای احاطه‌گر مکانی در یک درخت کران پایین زیر را بر اساس مرتبه درخت ارائه دادند.

قضیه ۱۰.۲.۲. [۱۰۰] اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  باشد، آن‌گاه

$$\gamma_t^L(T) \geq \frac{2}{5}(n+1)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $T \in \mathcal{T}_1$ .

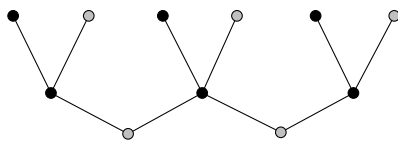


فرض کنید  $\mathcal{T}_2$  خانواده‌ای از درخت‌های  $T$  باشد که از هر درخت دلخواه  $T'$  به صورت زیر به دست می‌آید.

(۱) حداقل دو برگ به هر رأس درخت  $T'$  افزوده شود.

(۲) در صورتی که  $T'$  درختی نابديهی باشد هر یال از  $T'$  تقسیم شود.

مثالی از خانواده‌ی  $\mathcal{T}_2$  در شکل ۸.۲ نشان داده شده که از مسیر  $P_3$  به دست آمده است. رأس‌های با رنگ سیاه یک کد احاطه‌گر کلی مکانی برای درخت از اندازه  $\frac{n + 2(l-s) + 1}{3}$  می‌باشند.



شکل ۸.۲: مثالی از خانواده‌ی  $\mathcal{T}_2$ .

هاینس<sup>۱۵</sup> و همکاران در [۱۰۰] برای کدهای احاطه‌گر مکانی در یک درخت کران پایین زیر را بر اساس مرتبه درخت و تعداد رئوس پشتیبان و برگ‌های آن به دست آوردند.

**قضیه ۱۱.۲.۲.** [۱۰۰] اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  باشد، آن‌گاه

$$\gamma_t^L(T) \geq \frac{n + 2(l-s) + 1}{3}$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $T \in \mathcal{T}_2$ .

فرض کنید  $\mathcal{F}'$  خانواده‌ای از گراف‌ها باشد که بتوان آن‌ها را از  $r$  کپی همبند شود، به دست آورد.

در شکل ۹.۲ مثالی از خانواده‌ی  $\mathcal{F}'$  نشان داده شده که از ۲ کپی متمایز از  $P_4$  و ۲ کپی متمایز از  $P_3$  با اضافه کردن ۳ یال جدید بین رأس‌های پشتیبان و تقسیم دقیقاً یک بار هر یال جدید به دست می‌آید. یال‌ها و رأس‌های جدید با رنگ روشن مشخص شده‌اند.

چلالی کران‌های پایین ارائه شده در قضیه ۱۰.۲.۲ را برای همه درخت‌ها به صورت زیر بهبود بخشید.

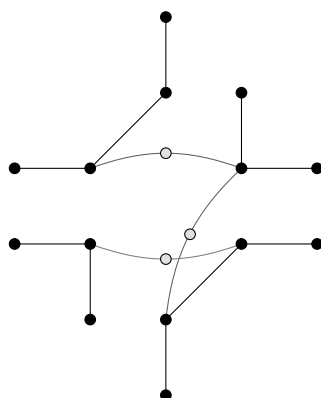
**قضیه ۱۲.۲.۲.** [۵۹] فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  با  $l$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد. آن‌گاه

$$\gamma_t^L(T) \geq \frac{2(n+l-s+1)}{5},$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $T = P_4$  یا  $T \in \mathcal{F}'$  باشد.

توجه کنید اگر  $n \geq 4l - 4s$ ، آن‌گاه کران ارائه شده در قضیه ۱۲.۲.۲ از کران به دست آمده

در قضیه ۱۱.۲.۲ بهتر است.



شکل ۹.۲: مثالی از خانواده  $\mathcal{F}$ .

چلالی در [۵۹] کران پایین دیگری برای کدهای احاطه‌گر کلی مکانی برای درخت‌ها بر اساس مرتبه و تعداد رئوس پشتیبان یک درخت ارائه کرد.

**قضیه ۱۳.۲.۲.** [۵۹] فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  و  $s$  رأس پشتیبان باشد. آن‌گاه

$$\gamma_t^L(T) \geq \frac{n+2-s}{2}.$$

به آسانی می‌توان دید که قضیه ۱۳.۲.۲ کران ارائه شده در قضیه ۱۲.۲.۲ را در صورتی که  $n > 4l + s - 6$  باشد، بهبود می‌بخشد.

چن<sup>۱۶</sup> و همکاران کران پایین زیر را برای کدهای احاطه‌گر مکانی کلی به صورت زیر به دست آوردند.

**قضیه ۱۴.۲.۲.** [۶۱] فرض کنید  $T$  یک درخت با مرتبه  $n \geq 3$ ،  $l$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد، آن‌گاه

$$\gamma_t^L(T) \geq \frac{n+l+1}{2} - s,$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $T \in \mathcal{T}_2$ .

## کران بالا

چن و همکاران کران بالای زیر را برای کدهای احاطه‌گر مکانی کلی به صورت زیر به دست آوردند.

آن‌ها به منظور مشخص کردن همه درخت‌هایی که در کران ارائه شده صدق می‌کنند، خانواده‌ای از درختان برچسب‌دار به نام  $\Gamma$  را به صورت زیر معرفی کردند. برای هر درخت  $T \in \Gamma$  هر رأس  $v \in V(T)$  دارای برچسب  $S(v) \in \{A, B, C, D\}$  باشد، که وضعیت<sup>۱۷</sup> آن رأس می‌باشد.

<sup>۱۶</sup>Chen

<sup>۱۷</sup>Status

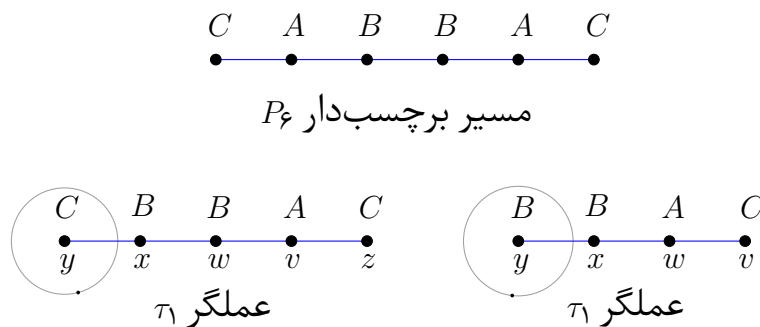
فرض کنید  $\Gamma$  خانواده‌ای از درختان برچسب‌دار  $T = T_k$  باشد، که به صورت زیر ساخته می‌شوند. فرض کنید  $T_0$  مسیر  $P_6$  باشد، به طوری که هر دو برگ آن دارای وضعیت  $C$ ، دو رأس پشتیبان آن دارای وضعیت  $A$  و دیگر رأس‌های آن دارای وضعیت  $B$  باشند. برای  $k \geq 1$ ، درخت  $T_k$  از درخت  $T_{k-1}$  با یکی از عملگرهای زیر به دست می‌آید.

• عملگر  $\tau_1$ :

اگر  $y \in V(T_{k-1})$  و  $S(y) = C$  و  $d_{T_{k-1}}(y) = 1$  باشد، آن گاه مسیر  $Q = x - w - v - z$  را با یال  $xy$  به درخت  $T_{k-1}$  اضافه کنید و قرار دهید  $S(x) = S(w) = D$ ،  $S(v) = A$  و  $S(z) = C$  باشد.

• عملگر  $\tau_2$ :

اگر  $y \in V(T_{k-1})$  و  $S(y) = B$  باشد، آن گاه مسیر  $Q = x - w - v$  را با یال  $xy$  به درخت  $T_{k-1}$  اضافه کنید و قرار دهید  $S(x) = B$ ،  $S(w) = A$  و  $S(v) = C$  باشد. دو عملگر  $\tau_1$  و  $\tau_2$  در شکل ۱۰.۲ نشان داده شدند.



شکل ۱۰.۲: عملگرهای  $\tau_1$  و  $\tau_2$ .

قضیه ۱۵.۲.۲. [۶۱] فرض کنید  $T$  یک درخت با مرتبه  $n \geq 3$  و  $l$  برگ باشد، آن گاه

$$\gamma_t^L(T) \leq \frac{n+l}{2}$$

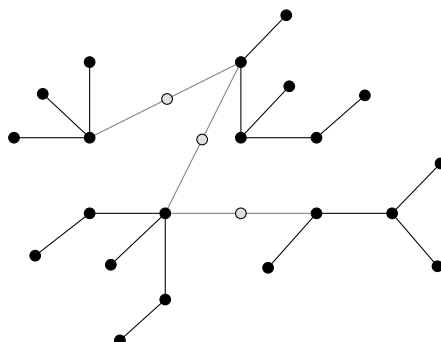
و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $T \in \Gamma$ .

## مجموعه احاطه‌گر تفاضلی کلی

### کران پایین

فرض کنید  $\mathcal{G}$  خانواده‌ای از گراف‌ها باشد که بتوان آن‌ها را از  $r$  کپی متمایز از یک کرونای  $P_r$ ، یک ستاره دوگانه  $S_{r,1}$  و یک ستاره  $k_{1,3}$  با اضافه کردن  $r-1$  یال جدید بین رأس‌های پشتیبان و تقسیم دقیقاً یک بار هر یال جدید به طوری که گراف همبند شود، بتوان به دست آورد. در شکل ۱۱.۲ مثالی از خانواده‌ی  $\mathcal{G}$  نشان داده شده که از یک کرونای  $P_r$ ، یک ستاره دوگانه

$S_{2,1}$  و یک ستاره  $k_{1,3}$  به‌دست آمده است. یال‌ها و رأس‌های جدید با رنگ روشن مشخص شده‌اند. چلالی برای مجموعه‌های احاطه‌گر تفاضلی کلی کران پایینی در [۵۹] به‌صورت زیر



شکل ۱۱.۲: مثالی از خانواده‌ی  $\mathcal{G}$ .

ارائه داد.

**قضیه ۱۶.۲.۲.** [۵۹] اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 4$  با  $l$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد، آن‌گاه

$$\frac{3(n+l-s+1)}{7} \leq \gamma_t^D(T),$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $T \in \mathcal{G}$ .

قرار دهید  $\{T \text{ درختی از مرتبه } n \geq 2 \text{ و } \Delta(T) \leq 3\} = \mathcal{T}_{\Delta \leq 3}$ . برای هر درخت  $T$  به‌طوری‌که  $T \in \mathcal{T}_{\Delta \geq 3}$ ، درخت  $T'$  به‌صورت زیر ساخته می‌شود. ابتدا هر یال  $e = ab \in E(T)$  با مسیر  $P_4 = v_1 v_2 v_3 v_4$  جایگزین می‌شود به‌طوری‌که  $v_1 = a$  و  $v_4 = b$ . درخت جدید به‌دست آمده  $T_1$  نامیده می‌شود. حال سه مرحله زیر بر روی درخت  $T'$  انجام می‌شود.

**• مرحله (۱)**

فرض کنید  $v \in V(T)$ ،  $\deg_T(v) = 3$  و  $N_T(v) = \{u_1, u_2, u_3\}$ . رأس  $v$  را با مسیر  $P_3 = v_1 v_2 v_3$  جایگزین کنید و مجموعه یال‌های جدید  $M = \{v_1 u_i, v_2 u_j, v_3 u_k\}$  که  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  می‌باشد، را اضافه کنید. قرار دهید  $D_v = \{v_1, v_2, v_3\}$ . با انجام این گام برای هر رأس  $v \in V(T)$  با  $\deg_T(v) = 3$ ، درخت  $T_2$  به‌دست می‌آید. قرار دهید  $D_2 = \bigcup_{v \in V(T), \deg_T(v)=3} D_v$ .

**• مرحله (۲)**

فرض کنید  $v \in V(T)$ ،  $\deg_T(v) = 2$  و  $N_{T_2}(v) = \{u_1, u_2\}$ . در درخت  $T_2$  هر رأس  $v$  را با مسیر  $P_4 = v_1 v_2 v_3 v_4$  جایگزین کنید و مجموعه یال‌های جدید  $M = \{v_1 u_i, v_2 u_j\}$  که  $\{i, j\} = \{1, 2, 3\}$  می‌باشد، را اضافه کنید. قرار دهید  $D_v = \{v_1, v_2, v_3\}$ . با انجام این گام برای هر رأس  $v \in V(T)$  با  $\deg_T(v) = 2$ ، درخت  $T_3$  به‌دست می‌آید. قرار دهید  $D_3 = \bigcup_{v \in V(T), \deg_T(v)=2} D_v$ .

• مرحله ۳

فرض کنید  $v \in V(T)$ ،  $\deg_T(v) = 1$  و  $N_{T'}(v) = \{u\}$ . در این صورت دقیقاً یکی از عملگرهای زیر را روی  $v$  استفاده می‌کنیم.

(۱) رأس  $v$  را با ستاره دوگانه  $S_{2,1}$  با مجموعه رئوس  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$  که  $u_3$  و  $u_4$  رئوس پشتیبان می‌باشند و  $N(u_3) = \{u_1, u_2\}$ . در این صورت یال جدید  $uu_1$  را اضافه می‌کنیم و قرار می‌دهیم،  $D_v = \{u_1, u_3, u_4\}$

(۲) رأس  $v$  را با ستاره  $S_4$  با مجموعه رئوس  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  که  $w_4$  رأس پشتیبان می‌باشند و  $N(u_3) = \{u_1, u_2\}$ . در این صورت یال جدید  $uu_1$  را اضافه می‌کنیم و قرار می‌دهیم،  $D_v = \{w_1, w_2, w_4\}$

با انجام دقیقاً یکی از این دو مرحله برای هر رأس  $v \in V(T)$  با  $\deg_T(v) = 1$  در درخت  $T_3$ ، درخت  $T'$  به دست می‌آید. قرار دهید  $D_4 = \bigcup_{v \in V(T), \deg_T(v)=1} D_v$ .

فرض کنید  $T' \in \mathcal{T}_{\Delta(T) \leq 3}$  مجموعه‌ی همه درخت‌های  $T'$  باشد که از یک درخت  $T \in \mathcal{T}_{\Delta(T) \leq 3}$  به صورت بالا به دست می‌آید. قرار دهید  $D_{T'} = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ .

فرض کنید  $\eta = \{cor(P_3)\} \cup \{S_{2,1}\} \cup \{S_4\} \cup T'_{\Delta(T) \leq 3}$  و  $D = S(cor(P_3)) \cup S(S_{2,1}) \cup S(S_4) \cup \eta$  و  $(\bigcup_{T'} D_{T'})$ .

فرض کنید  $\zeta$  خانواده‌ای از گراف‌ها باشد که بتوان آن‌ها را از  $t$  کپی متمایز از درخت‌های  $\eta$  با اضافه کردن  $t - 1$  یال جدید بین رأس‌های  $D$  و تقسیم دقیقاً یک بار هر یال جدید به طوری که گراف همبند شود، بتوان به دست آورد. وینجی نینگ<sup>۱۸</sup> و همکاران در [۱۵۴] دو کران پایین زیر را برای مجموعه‌های احاطه‌گر تفاضلی به دست آوردند.

**قضیه ۱۷.۲.۲.** [۱۵۴] اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 4$  با  $l$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد، آن‌گاه

$$\frac{6}{11}(n + 1 + \frac{l}{2} - s) \leq \gamma_t^D(T),$$

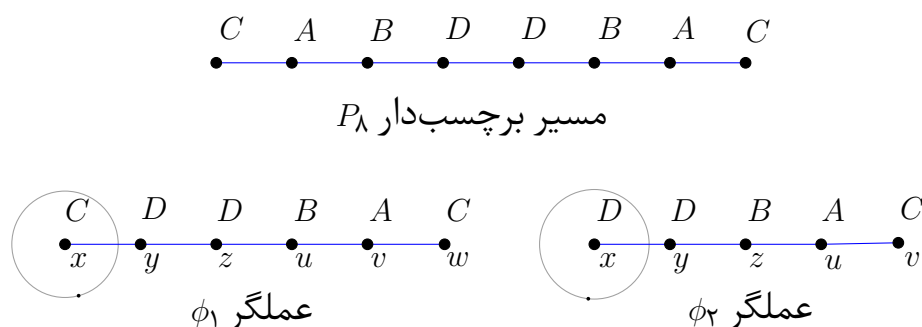
و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $T \in \zeta$ .

به آسانی می‌توان دید که اگر  $n \geq \frac{(3s + 4l - 3)}{3}$ ، آن‌گاه کران ارائه شده در قضیه ۱۷.۲.۲ کران قضیه ۱۳.۲.۲ را بهبود می‌بخشد.

فرض کنید  $\xi_1$  خانواده‌ای از درخت‌ها از مرتبه  $n$  و قطر  $d$  باشند که از مسیر  $P = x_1 x_2 \dots x_{d+1}$  با اضافه کردن  $n - d - 1$  رأس جدید به طوری که هر رأس جدید فقط مجاور رئوس مجموعه  $\bigcup_{i=1}^{(d+1)/5} \{x_{5i-2}\}$  باشد و درخت دارای رأس پشتیبان قوی نباشد، به دست آید.

**قضیه ۱۸.۲.۲.** [۱۵۴] اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 3$  با قطر  $d$  باشد، آن‌گاه  $\gamma_t^D(T) \geq \frac{3(d+1)}{5}$  و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $T \in \xi_1$ .

<sup>۱۸</sup>Wenjie Ning



شکل ۱۲.۲: عملگرهای  $\phi_1$  و  $\phi_2$ .

### کران بالا

هاینس و همکاران در [۱۰۰] برای مجموعه‌های احاطه‌گر تفاضلی در یک درخت کران بالای زیر را بر اساس مرتبه و تعداد رئوس پیشتیبان آن درخت ارائه دادند.

قضیه ۱۹.۲.۲. [۱۰۰] اگر  $T \neq P_n$  درختی از مرتبه  $n \geq 4$  با رأس پشتیبان باشد، آن‌گاه

$$\gamma_t^D(T) \leq n - s.$$

وینجی نینگ<sup>۱۹</sup> و همکاران در [۱۵۴] دو کران بالا به صورت زیر برای مجموعه‌های احاطه‌گری تفاضلی کلی ارائه دادند. آن‌ها خانواده‌ای از درختان برچسب‌دار به نام  $\mathcal{F}$  را به صورت زیر معرفی کردند. برای هر درخت  $T \in \mathcal{F}$  هر رأس  $v \in V(T)$  دارای برچسب  $S(v) \in \{A, B, C, D\}$  باشد، که وضعیت<sup>۲۰</sup> آن رأس می‌باشد. فرض کنید  $\mathcal{F}$  خانواده‌ای از درختان برچسب‌دار  $T = T_k$  باشد، که به صورت زیر ساخته می‌شوند. درخت  $T_0$  را مسیر هشت رأسی  $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8$  در نظر بگیرید. قرار دهید  $S(x_1) = S(x_8) = C$ ،  $S(x_2) = S(x_7) = A$ ،  $S(x_3) = S(x_6) = B$  و  $S(x_4) = S(x_5) = D$ . برای  $k \geq 1$ ، درخت  $T_k$  از درخت  $T_{k-1}$  با یکی از عملگرهای زیر به دست می‌آید.

$\phi_1$ : اگر  $S(x) = C$ ،  $x \in V(T_{k-1})$  و  $d_{T_{k-1}}(x) = 1$  باشد، آن‌گاه مسیر  $Q = y - z - u - v - w$  را با یال  $xy$  به درخت  $T_{k-1}$  اضافه کنید و قرار دهید  $S(y) = D$ ،  $S(z) = D$ ،  $S(u) = B$ ،  $S(v) = C$  و  $S(w) = A$  باشد.

$\phi_2$ : اگر  $S(x) = D$  و  $x \in V(T_{k-1})$  باشد، آن‌گاه مسیر  $Q = y - z - u - v$  را با یال  $xy$  به درخت  $T_{k-1}$  اضافه کنید و قرار دهید  $S(y) = D$ ،  $S(z) = B$ ،  $S(u) = A$ ،  $S(v) = C$  باشد.

دو عملگر  $\phi_1$  و  $\phi_2$  در شکل ۱۲.۲ نشان داده شدند.

<sup>۱۹</sup> Wenjie Ning

<sup>۲۰</sup> Status

قضیه ۲۰.۲.۲. [۱۵۴] اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 3$  با  $l$  برگ باشد، آن‌گاه

$$\gamma_t^D(T) \leq \frac{3n + 3l}{5}.$$

تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر  $T \in P_4$  یا  $T \in \mathcal{F}$ .

به آسانی می‌توان دید اگر  $2n > 3l + 5s$ ، آن‌گاه کران ارائه شده در قضیه ۲۰.۲.۲ از کران قضیه ۱۹.۲.۲ بهتر است.

قضیه ۲۱.۲.۲. [۱۵۴] اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 3$  با قطر  $d$  باشد، آن‌گاه  $\gamma_t^D(T) \leq n - \frac{2(d-2)}{5}$  می‌باشد. به علاوه تساوی برقرار است اگر و فقط اگر  $T = P_n$  به طوری که  $n \equiv 3 \pmod{5}$  باشد.

هاینس و همکاران نشان دادند که برای هر درخت  $T$  بین  $\gamma_t^D(T)$  و  $\gamma_t^L(T)$  رابطه زیر برقرار است.

قضیه ۲۲.۲.۲. [۱۰۰] برای هر درخت  $T$  داریم:

$$\gamma_t^L(T) \leq \gamma_t^D(T) \leq \frac{3}{4} \gamma_t^L(T),$$

و این کران‌ها قابل دستیابی هستند.

برای تساوی کران‌های ارائه شده در قضیه فوق کافی است مسیر  $P_5$  و مسیر  $P_4$  را به ترتیب برای کران بالا و پایین در نظر بگیرید.





## فصل ۳

# کران‌هایی برای کدهای شناسایی روی درختان

### ۱.۳ مقدمه

در این فصل یک کران بالا و یک کران پایین قابل محاسبه برای کوچکترین کدهای شناسایی و همچنین یک کران بالا برای مجموعه‌های احاطه‌گر تفاضلی کلی یک درخت براساس مرتبه، تعداد برگ‌ها و تعداد رئوس پشتیبان درخت ارائه می‌دهیم. سپس تمامی درخت‌هایی را که در تساوی این کران‌ها صدق می‌کنند، مشخص می‌کنیم. این کران‌ها برخی از کران‌های قبلی، به‌عنوان مثال کران‌های ارائه شده در قضایای ۲.۲.۲، ۷.۲.۲، ۳.۱.۲، ۱۹.۲.۲ و ۲۰.۲.۲ را بهبود می‌دهند. برای این منظور، ابتدا در بخش ۲.۳ کران‌های جدید خود را برای کوچکترین کدهای شناسایی و مجموعه‌های احاطه‌گر تفاضلی در درخت‌ها ارائه خواهیم داد. سپس در بخش‌های ۳.۳، ۴.۳ و ۵.۳ به اثبات نتایج خود می‌پردازیم.

### ۲.۳ نتایج اصلی

در بخش‌های بعدی قضایای زیر را اثبات خواهیم کرد.

**قضیه ۱.۲.۳.** اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 4$  با  $s$  رأس پشتیبان باشد، آن‌گاه

$$M(T) \geq \frac{2n - s + 3}{4}.$$

تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر  $T = P_3$  یا  $T = cor(P_3)$  باشد.

با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد که قضیه ۱.۲.۳ کران ارائه شده در قضیه ۲.۲.۲ را برای درخت‌هایی که  $2n \geq 7s - 9$  بهبود می‌دهد. همچنین اگر  $12l - 5s \geq 2n + 9$ ، آن‌گاه قضیه ۱.۲.۳ کران ارائه شده در قضیه ۷.۲.۲ را بهبود خواهد داد.

در بخش ۴.۳، کران بالای جدیدی برای کدهای شناسایی درخت‌ها بدست می‌آوریم و همه درخت‌هایی که در تساوی این کران صدق می‌کنند را مشخص می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا مشاهده ۱.۳.۴ را بیان می‌کنیم.

**مشاهده ۱.۲.۳.** هر مجموعه احاطه‌گر کلی تفاضلی در یک گراف، یک کد شناسایی برای آن گراف نیز می‌باشد.

نینگ و همکاران در قضیه ۲۰.۲.۲ نشان دادند اگر یک درخت از مرتبه  $n \geq 3$  با  $l$  برگ باشد، آن‌گاه  $\gamma_t^D(T) \leq \frac{3(n+l)}{5}$ . فرض کنید  $G$  یک گراف دلخواه باشد. طبق مشاهده ۱.۳.۴،  $M(G) \leq \gamma_t^D(G)$ . اکنون از قضیه ۲۰.۲.۲ نتیجه زیر را به دست می‌آوریم.

**نتیجه ۱.۲.۳.** اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 3$  با  $l$  برگ باشد، آن‌گاه

$$M(T) \leq \frac{3(n+l)}{5}.$$

در ادامه، ما قضیه زیر را اثبات خواهیم کرد. در حقیقت قصد داریم نتیجه ۱.۲.۳ را برای همه درخت‌ها بهبود دهیم.

**قضیه ۲.۲.۳.** فرض کنید  $T$  درختی از مرتبه  $n$  با  $l$  برگ باشد. در این صورت

$$M(T) \leq \frac{3n + 2l - 1}{5}.$$

تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر  $T = P_4$ .

وینجی نینگ<sup>۱</sup> و همکاران در [۱۵۴] نشان دادند برای یک درخت  $T$  از مرتبه  $n \geq 3$  با  $l$  برگ،  $\gamma_t^D(T) \leq \frac{3n + 3l}{5}$ . ما این کران را برای همه درخت‌ها با  $l$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان به‌طوری که  $l > s$ ، بهبود می‌دهیم.

فرض کنید  $\mathcal{F}$  خانواده‌ای از درختان برچسب‌دار  $T = T_k$  باشد، که به‌صورت زیر ساخته می‌شوند. درخت  $T_0$  را مسیر هشت رأسی  $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8$  در نظر بگیرید. قرار دهید  $S(x_1) = C$ ،  $S(x_8) = C$ ،  $S(x_2) = S(x_7) = A$ ،  $S(x_3) = S(x_6) = B$ ،  $S(x_4) = S(x_5) = D$ . برای  $k \geq 1$ ،

<sup>۱</sup>Wenjie Ning

درخت  $T_k$  از درخت  $T_{k-1}$  با یکی از عملگرهای زیر بدست می‌آید.  
**عملگر  $\phi_1$ :** اگر  $S(x) = C$ ،  $x \in V(T_{k-1})$  و  $d_{T_{k-1}}(x) = 1$  باشد، آن گاه مسیر  $yzuvw$  را با یال  $xy$  به درخت  $T_{k-1}$  اضافه کنید و قرار دهید  $S(y) = D$ ،  $S(z) = D$ ،  $S(u) = B$ ،  $S(v) = A$  و  $S(w) = C$  باشد.

**عملگر  $\phi_2$ :** اگر  $S(x) = D$  و  $x \in V(T_{k-1})$  باشد، آن گاه مسیر  $yzuv$  را با یال  $xy$  به درخت  $T_{k-1}$  اضافه کنید و قرار دهید  $S(y) = D$ ،  $S(z) = B$ ،  $S(u) = A$  و  $S(v) = C$  باشد.

**قضیه ۳.۲.۳.** اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 4$  با  $\ell$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد، آن گاه

$$\gamma_t^D(T) \leq \frac{3n + 2\ell + s}{5}.$$

تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر  $T \in \mathcal{F}$ .

به آسانی می‌توان دید اگر  $n > 3\ell + s$ ، آن گاه کران ارائه شده در قضیه ۳.۲.۳ از کران قضیه ۱۹.۲.۲ بهتر است.

## ۳.۳ اثبات قضیه ۱.۲.۳

در این بخش ابتدا لم زیر که در اثبات قضیه ۱.۲.۳ استفاده می‌شود، را ارائه می‌دهیم.

**لم ۱.۳.۳.** فرض کنید  $T$  یک درخت و  $C$  یک  $M(T)$ -مجموعه باشد. اگر برای هر رأس پشتیبان  $x \in S(T)$ ،  $L_x$  مجموعه‌ی همه برگ‌های مجاور  $x$  و خود رأس  $x$  باشد، آن گاه  $C$  شامل حداکثر یک رأس از  $L_x$  نمی‌باشد. همچنین  $C$  شامل حداقل  $|L(T)|$  رأس از مجموعه  $L(T) \cup S(T)$  است.

برهان. با برهان خلف فرض کنید دو رأس  $u \neq x$  و  $v$  از  $L_x$  وجود دارند که عضو  $C$  نمی‌باشند. اگر  $v = x$ ، آن گاه  $N(u) \cap C = \emptyset$ ، که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم  $v \neq x$ . در این صورت  $N(u) \cap C = N(v) \cap C$ ، که باز هم تناقض است. بنابراین برای هر رأس پشتیبان  $x \in S(T)$ ،  $C$  شامل حداکثر یک رأس از  $L_x$  نمی‌باشد. از طرف دیگر برای هر دو رأس پشتیبان دلخواه  $x$  و  $y$  مجموعه‌های  $L_x$  و  $L_y$  متمایز هستند، بنابراین  $C$  شامل حداقل  $|L(T)|$  رأس از مجموعه  $L(T) \cup S(T)$  است.  $\square$

## اثبات قضیه ۱.۲.۳

با استقرا روی مرتبه  $n$  قضیه را اثبات می‌کنیم. اگر  $3 \leq n \leq 5$ ، آن گاه به آسانی می‌توان دید که  $M(T) \geq \frac{2n - s + 3}{4}$  و تساوی نیز برقرار است، اگر و تنها اگر  $T = P_3$ . این نتایج برای گام پایه استقرا کافی هستند. فرض کنید حکم برای هر درخت  $T'$  از مرتبه  $n' < n$  برقرار باشد.

اکنون فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 6$  باشد. فرض کنید  $C$  یک  $M(T)$  - مجموعه شامل کمترین برگ ممکن از  $T$  باشد. فرض کنید  $u, v \in V - C$  و  $uv \in E(T)$  باشد.  $T_u$  و  $T_v$  را مؤلفه‌هایی از  $T - uv$  با  $u \in V(T_u)$  و  $v \in V(T_v)$  در نظر بگیرید. در این صورت  $|V(T_u)| \geq 3$  و همچنین  $|V(T_v)| \geq 3$ . چون  $u \notin C$ ، مجموعه  $C \cap V(T_u)$  یک کد شناسایی برای درخت  $T_u$  و همچنین مجموعه  $C \cap V(T_v)$  یک کد شناسایی برای درخت  $T_v$  می‌باشد. طبق فرض استقرا نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} |C| &= |C \cap V(T_u)| + |C \cap V(T_v)| \\ &\geq \frac{(2|V(T_u)| - |S(T_u)|) + 3}{4} + \frac{(2|V(T_v)| - |S(T_v)|) + 3}{4} \\ &\geq \frac{(2n - (s + 2) + 6)}{4} \\ &> \frac{(2n - s + 3)}{4}. \end{aligned}$$

بنابراین در ادامه فرض می‌کنیم که  $V - C$  یک مجموعه مستقل است. اکنون فرض کنید که رأس  $w \in V - C$  وجود دارد به طوری که  $\deg(w) \geq 3$ . قرار دهید  $\{x, y, z\} \subseteq N(w)$ . به وضوح،  $\{x, y, z\} \subseteq C$ . فرض کنید  $T_x$  و  $T_w$  مؤلفه‌هایی از  $T - xw$  باشند به طوری که  $x \in V(T_x)$  و  $w \in V(T_w)$ . طبق فرض استقرا نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} |C| &= |C \cap T_x| + |C \cap T_w| \\ &\geq \frac{(2|V(T_x)| - |S(T_x)|) + 3}{4} + \frac{2|V(T_w)| - |S(T_w)| + 3}{4} \\ &\geq \frac{(2n - (s + 1) + 6)}{4} \\ &> \frac{(2n - s + 3)}{4}. \end{aligned}$$

بنابراین در ادامه فرض می‌کنیم که هر رأس از  $V - C$  دارای درجه حداکثر ۲ می‌باشد. فرض کنید گراف  $T[C]$  همبند باشد. در این صورت برای هر رأس  $w \in V - C$ ،  $\deg(w) = 1$  و لذا  $V - (L \cup S) \subseteq C$ . طبق لم ۱.۳.۳، مجموعه  $C$  شامل حداقل  $|L|$  رأس از  $L \cup S$  می‌باشد. بنابراین،

$$\begin{aligned} |C| &\geq |V - (L \cup S)| + |C \cap (L \cup S)| \\ &\geq |V - (L \cup S)| + |L| \\ &= n - s. \end{aligned}$$

اگر  $l \geq 4$  باشد، آن‌گاه  $3s + 4 \leq 3s + l \leq 2l + 2s \leq 2n$ ، در این صورت،  $M(T) \geq n -$  اگر  $l > s$ ، پس حکم نتیجه می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم  $l \leq 3$ . اگر  $l > s$ ، آن‌گاه  $2n \geq 2l + 2s > 3s + l \geq 3s + 2$  و لذا  $2n \geq 3s + 3$ . چون  $3s + 3$  فرد می‌باشد،  $2n \geq 3s + 4$  و لذا  $M(T) \geq n - s > \frac{2n - s + 3}{4}$  پس در این حالت نیز حکم نتیجه می‌شود.

بنابراین ما می‌توانیم فرض کنیم  $l = s$ . اگر  $n > l + s$ ، به طریق مشابه می‌توان نشان داد که  $M(T) \geq n - s > \frac{2n-s+3}{4}$ . بنابراین فرض می‌کنیم که  $n = l + s$ . اگر  $l = 2$ ، آن‌گاه  $T = P_4$  و  $M(T) = 3 > \frac{2n-s+3}{4}$ . لذا فرض می‌کنیم  $l = 3$ . در این صورت  $T = cor(P_4)$  و  $M(T) = 3 = \frac{2n-s+3}{4}$ .

اکنون فرض کنید گراف  $T[C]$  ناهمبند باشد. همچنین فرض کنید  $C_1$  بزرگترین مؤلفه گراف  $T[C]$  باشد. اگر  $|C_1| = 1$ ، آن‌گاه  $C$  مجموعه‌ای مستقل  $L \subseteq C$ ، و برای هر رأس  $w \in V - C$ ،  $\deg(w) = 2$ . نشان می‌دهیم  $n = 2|C| - 1$ . فرض کنید  $T^*$  گرافی با مجموعه رؤس  $C$  باشد به طوری که  $uv \in E(T^*)$  اگر و تنها اگر رأس  $w \in V - C$  با  $w \in N_T(u) \cap N_T(v) = \{w\}$  وجود داشته باشد. در این صورت  $|E(T^*)| = |V - C|$  از ساختار  $T^*$  و این حقیقت که  $T$  یک درخت است، نتیجه می‌شود که  $T^*$  نیز یک درخت است. بنابراین،

$$\begin{aligned} n &= |C| + |V - C| = |C| + |E(T^*)| \\ &= |C| + |C| - 1 \\ &= 2|C| - 1. \end{aligned}$$

چون  $T$  یک گراف ساده نیست، نتیجه می‌گیریم که  $|C| = \frac{n+1}{2} < \frac{2n-s+3}{4}$  و لذا حکم نتیجه می‌شود.

بنابراین فرض می‌کنیم  $|C_1| \geq 2$ . به وضوح  $|C_1| \geq 3$ . فرض کنید  $v \in C_1$  به طوری که  $N(v) - C_1 \neq \emptyset$  و  $w \in N(v) - C_1$ . چون  $w$  رأسی از  $V - C$  می‌باشد، درجه  $w$  برابر با ۲ است. قرار دهید  $N(w) = \{u, v\}$ . چون  $T(C_1)$  همبند است، نتیجه می‌شود که  $u \notin C_1$ . فرض کنید  $\deg(v) = 2$ . قرار دهید  $T' = T - wu$  و فرض کنید  $T_u$  و  $T_w$  دو مؤلفه از جنگل  $T - wu$  باشند به طوری که  $w \in V(T_w)$  و  $u \in V(T_u)$ . به وضوح  $C \cap T_w$  یک کد شناسایی برای درخت  $T_w$  و  $C \cap T_u$  یک کد شناسایی برای درخت  $T_u$  می‌باشد. طبق فرض استقرا،

$$\begin{aligned} |C| &= |C \cap T_w| + |C \cap T_u| \\ &\geq \frac{2|V(T_w)| - |S(T_w)| + 3}{4} + \frac{2|V(T_u)| - |S(T_u)| + 3}{4} \\ &> \frac{2n-s+3}{4}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم  $\deg(v) \geq 3$ . فرض کنید  $N(u) \cap C \neq \emptyset$ . اگر  $\deg(u) = 2$ ، آن‌گاه مشابه قبل با در نظر گرفتن  $T' = T - wv$ ، نتیجه می‌شود که  $M(T) < \frac{2n-s+3}{4}$ . لذا فرض کنید  $\deg(u) \geq 3$ . همچنین فرض کنید  $T_u$  و  $T_v$  مؤلفه‌های از  $T - w$  باشد که  $v \in V(T_v)$  و  $u \in V(T_u)$ . مثل قبل  $C \cap T_v$  یک کد شناسایی برای  $T_v$  و  $C \cap T_u$  یک کد شناسایی برای  $T_u$

می‌باشد. طبق فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned} |C| &= |C \cap T_u| + |C \cap T_v| \\ &\geq \frac{2|V(T_u)| - |S(T_u)| + 3}{4} + \frac{2|V(T_v)| - |S(T_v)| + 3}{4} \\ &\geq \frac{2n - s + 6}{4} \\ &> \frac{2n - s + 3}{4}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم  $N(u) \cap C = \emptyset$ . فرض کنید  $T_u$  و  $T_v$  مؤلفه‌های  $T - w$  باشند که  $u \in V(T_u)$  و  $u \in V(T_v)$ . در این صورت  $C \cap V(T_u)$  یک کد شناسایی برای  $T_u$  و  $C \cap V(T_v)$  یک کد شناسایی برای  $T_v$  می‌باشد. اگر  $|V(T_u)| = 1$ ، آن‌گاه مجموعه  $C' = (C - u) \cup \{w\}$  یک  $M(T)$  - مجموعه می‌باشد با  $|L \cap C'| < |L \cap C|$  که با انتخاب  $C$  در تناقض است. بنابراین  $|V(T_u)| \geq 2$  و لذا نتیجه می‌شود که  $|V(T_u)| \geq 3$ . اگر  $T_u$  یک مسیر باشد، آن‌گاه از قضیه ۱.۲.۲ نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} M(T) &= |C \cap V(T_u)| + |C \cap V(T_v)| \\ &\geq M(T_u) + |C_v| \\ &\geq \frac{n_u + 1}{2} + \frac{2n_v - s_v + 3}{4} \\ &> \frac{2n_u - s_u + 3}{4} + \frac{2n_v - s_v + 3}{4} \\ &= \frac{(2(n_u + n_v) - (s_u + s_v) + 6)}{4} \\ &= \frac{(2(n - 1) - (s + 1) + 6)}{4} = \frac{(2n - s + 3)}{4}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم  $T_u$  مسیر نیست. فرض کنید  $u' \in T_u$  به طوری که  $\deg(u') \geq 3$  و هر رأس درونی از مسیر  $(u, u')$  - مسیر دارای درجه ۲ باشد. فرض کنید  $d = d(u, u')$  و  $P$  مسیر  $(u, u')$  - مسیر باشد. قرار دهید  $P = x_0 x_1 \dots x_d$  که در آن  $x_0 = u$  و  $x_d = u'$ . فرض کنید  $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$  وجود داشته باشد به طوری که  $|N(x_i) \cap C| = 1$ . بدون کاستن شدن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم  $x_{i-1} \in N(x_i) \cap (V - C)$ . در این صورت مشابه قبل با قرار دادن  $T' = T - x_{i-1} x_i$  حکم نتیجه می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم برای هر  $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$   $N(x_i) \cap C = \emptyset$ . مستقل بودن  $V - C$  به همراه این حقیقت که  $u \in C$ ، نتیجه می‌دهد که برای  $x_j \in C$ ،  $j = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  همچنین چون  $x_d = u' \in C$ ، نتیجه می‌گیریم که  $d$  عددی زوج است. بنابراین  $|C \cap (V(P) - \{u'\})| = \frac{d}{2}$ . فرض کنید  $T_u$  و  $T_v$  دو مؤلفه از  $(T - (P) \cup \{w\}) \cup \{u'\}$  باشند به طوری که  $u \in V(T_u)$  و  $v \in V(T_v)$ ، مشابه قبل،  $C \cap V(T_v)$  یک کد شناسایی برای  $T_v$

و  $C \cap V(T_u)$  یک کد شناسایی برای  $T'_u$  می‌باشد. طبق فرض استقرا،

$$\begin{aligned} |C| &= |C \cap T'_u| + |C \cap T_u| + \frac{d}{2} \\ &\geq \frac{2|V(T'_u)| - |S(T'_u)| + 3}{4} + \frac{2|V(T_v)| - |S(T_v)| + 3}{4} + \frac{d}{2} \\ &= \frac{2(n-d-1) - s + 6}{4} + \frac{d}{2} \\ &> \frac{2n - s + 3}{4}. \end{aligned}$$

بنابراین، اثبات کامل می‌شود.

### ۴.۳ اثبات قضیه ۲.۲.۳

در این بخش ابتدا چند لم مفید و کاربردی که برای اثبات قضیه ۲.۲.۳ از آن‌ها استفاده خواهیم کرد، بیان می‌کنیم.

**لم ۱.۴.۳.** فرض کنید  $T$  از درخت  $T'$  با مرتبه  $n' \geq 3$  با افزودن یک برگ به آن بدست آمده باشد، در این صورت  $M(T) \leq M(T') + 1$ .

**برهان.** فرض کنید  $T'$  یک درخت از مرتبه  $n' \geq 3$  باشد و درخت  $T$  از  $T'$  با افزودن رأس  $w$  به  $T'$  با یال  $wv$  بدست آمده باشد. همچنین فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. اگر  $v \notin C'$ ، آنگاه  $C' \cup \{w\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است و لذا  $M(T) \leq M(T') + 1$ .  
بنابراین فرض می‌کنیم که  $v \in C'$ . اگر  $N_{T'}(v) \cap C' \neq \emptyset$ ، آنگاه  $C' \cup \{w\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است و لذا نتیجه برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که  $N_{T'}(v) \cap C' = \emptyset$ .  
قرار دهید  $u \in N_{T'}(v)$ . در این صورت  $C' \cup \{u\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  می‌باشد. بنابراین  $M(T) \leq M(T') + 1$ .  $\square$

**لم ۲.۴.۳.** فرض کنید  $T^*$  یک درخت اسپایدر با رأس مرکزی  $w$  باشد، به طوری که  $\deg(w) \geq 2$ . همچنین فرض کنید  $T$  درختی باشد که از درخت دلخواه  $T'$  و  $T^*$  با متصل کردن رأس  $v \in V(T')$  به  $w$  بدست آمده است. قرار دهید  $T'' = T' - v$ . اگر  $\deg(v) \geq 3$  و  $M(T') \leq$   
 $M(T) < \frac{3n(T'') + 2\ell(T'') - 1}{5}$  یا  $\deg(v) = 2$  و  $M(T'') \leq \frac{3n(T') + 2\ell(T') - 1}{5}$  آنگاه  $M(T) < \frac{3n(T) + 2\ell(T) - 1}{5}$ .

**برهان.** هر رأس از  $N_{T^*}(w)$  یک برگ با یک رأس پشتیبان از درجه دو است. فرض کنید  $r_1$  و  $r_2$  تعداد برگ‌هایی از  $T^*$  به ترتیب با فاصله یک و دو از  $w$  باشند. فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. اگر  $\deg(v) \geq 3$ ، آنگاه  $C = C' \cup N_{T^*}[w]$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$

می باشد. چون  $n' = n - 2r_2 - r_1 - 1$  و  $\ell' = \ell - r_1 - r_2$  نتیجه می گیریم که،

$$\begin{aligned} M(T) &\leq M(T') + r_2 + r_1 + 1 \\ &\leq \frac{3n' + 2\ell' - 1}{5} + r_2 + r_1 + 1 \\ &< \frac{3n + 2\ell - 1}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می کنیم که  $\deg(v) = 2$ . اگر  $C''$  یک  $M(T'')$  - مجموعه باشد، آنگاه  $C = C' \cup N_{T^*}[w]$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. حال چون  $n'' = n - 2r_2 - r_1 - 2$  و  $\ell'' \leq \ell - r_1 - r_2 + 1$  داریم:

$$\begin{aligned} M(T) &\leq M(T'') + r_2 + r_1 + 1 \\ &\leq \frac{3n'' + 2\ell'' - 1}{5} + r_2 + r_1 + 1 \\ &< \frac{3n + 2\ell - 1}{5}. \end{aligned}$$

□

**لم ۳.۴.۳.** فرض کنید  $T'$  یک درخت دلخواه باشد و  $v \in V(T')$  به طوری که  $\deg(v) \geq 2$ . فرض کنید  $T$  درختی باشد که از درخت  $T'$  با متصل کردن رأس  $v$  به برگ  $w$  از مسیر  $P_3$  بدست آمده است. اگر  $M(T') \leq \frac{3n(T') + 2\ell(T') - 1}{5}$ ، آنگاه  $M(T) < \frac{3n(T) + 2\ell(T) - 1}{5}$ .

برهان. فرض کنید درخت  $T$  از درخت  $T'$  با متصل کردن رأس  $v \in V(T')$  به برگ  $w$  از مسیر  $wzy : P_3$  بدست آمده باشد. همچنین فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$  - مجموعه باشد. اگر  $v \in C'$ ، آنگاه  $C' \cup \{w, z\}$  و در غیر این صورت  $C' \cup \{z, y\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. بنابراین،

$$\begin{aligned} M(T) &\leq M(T') + 2 \\ &\leq \frac{3n(T') + 2\ell(T') - 1}{5} + 2 \\ &< \frac{3(n-3) + 2(\ell-1) - 1}{5} + 2 \\ &< \frac{3n + 2\ell - 1}{5}. \end{aligned}$$

□

### اثبات قضیه ۲.۲.۳

با استقرا روی مرتبه  $n$  از درخت  $T$  قضیه را اثبات می کنیم. گام پایه استقرا برای  $n = 3$  و  $n = 4$  واضح است. فرض کنید برای هر درخت  $T'$  از مرتبه  $n' < n$  با  $\ell'$  برگ،  $M(T') \leq \frac{3n' + 2\ell' - 1}{5}$ . حال فرض کنید  $T$  درختی از مرتبه  $n > 4$  است. فرض کنید  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی باشد.



همچنین فرض کنید  $v$  رأس پشتیبان قوی از  $T$  و  $u$  برگ مجاور  $v$  باشد. قرار دهید  $T' = T - v$ . طبق لم ۱.۴.۳،  $M(T) \leq M(T') + 1$ . بنابراین از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} M(T) &\leq M(T') + 1 \\ &\leq \frac{3n' + 2\ell' - 1}{5} + 1 \\ &= \frac{3(n-1) + 2(\ell-1) - 1}{5} \\ &= \frac{3n + 2\ell - 1}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین در ادامه ما فرض می‌کنیم که نتیجه زیر برقرار است.

**حقیقت ۱.۴.۳.**  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی نیست.

فرض کنید  $d = \text{diam}(T)$ . چون  $n > 4$ ، حقیقت ۱.۴.۳ نتیجه می‌دهد  $d \geq 4$ . درخت  $T$  را در رأس  $x_0$  از مسیر قطری  $x_0 x_1 \dots x_d$  ریشه‌دار می‌کنیم. طبق حقیقت ۱.۴.۳،  $\deg(x_{d-1}) = 2$ .

فرض کنید  $d = 4$ . در این صورت  $\deg(x_3) = 2$ . اگر  $\deg(x_2) = 2$ ، آنگاه  $T = P_5$  و  $M(T) = 3 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}$ . بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_2) > 2$ . اگر  $x_2$  یک رأس پشتیبان باشد، آنگاه طبق ۱.۴.۳،  $T$  دارای  $\deg(x_2) - 1$  رأس پشتیبان از درجه دو است. در این صورت  $N[x_2] - \ell$  یک کد شناسایی برای  $T$  می‌باشد. همچنین چون  $n = 2\deg(x_2)$  و  $\ell = \deg(x_2)$ ، نتیجه می‌گیریم که،

$$M(T) \leq \deg(x_2) < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}.$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $x_2$  رأس پشتیبان نیست. در این صورت  $T$  دارای  $\deg(x_2)$  رأس پشتیبان از درجه دو می‌باشد و  $N[x_2]$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. از طرفی  $n = 2\deg(x_2) + 1$  و  $\ell = \deg(x_2)$ ، لذا نتیجه می‌شود که،

$$M(T) \leq \deg(x_2) + 1 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}.$$

حال فرض کنید  $d = 5$ . در این صورت  $\deg(x_4) = 2$ . فرض کنید که  $\deg(x_3) = 2$ . اگر  $\deg(x_2) = 2$ ، آنگاه  $T = P_6$  و  $M(T) = 4 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}$ . بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_2) > 2$ . چون  $d = 5$ ، از حقیقت ۱.۴.۳ نتیجه می‌گیریم که هر رأس از  $N(x_2) - \{x_3\}$  یک برگ یا یک رأس پشتیبان از درجه دو است. فرض کنید که  $x_2$  یک رأس پشتیبان باشد. طبق حقیقت ۱.۴.۳، دقیقاً یک برگ مجاور  $x_2$  وجود دارد. در این صورت  $S(T) \cup \{x_3\}$  یک کد شناسایی برای  $T$  است و چون  $n = 2\deg(x_2) + 1$  و  $\ell = \deg(x_2)$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$M(T) \leq |S(T)| + 1 = \deg(x_2) + 1 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}.$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $x_2$  یک رأس پشتیبان نیست. در این صورت  $n = 2 \deg(x_2) + 2$ ،  
 $\ell = \deg(x_2)$  و  $S(T) \cup \{x_2, x_3\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  می‌باشد. بنابراین،

$$M(T) \leq |S(T)| + 2 = \deg(x_2) + 2 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}.$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_3) \geq 3$  و به طور مشابه  $\deg(x_2) \geq 3$ . بوضوح هر فرزند از  $x_3$  یک برگ با رأسی پشتیبان از درجه دو است. فرض کنید  $r_1$  و  $r_2$  تعداد برگ‌هایی از درخت  $T_{x_3}$  به ترتیب در فاصله یک و دو از  $x_3$  باشند. در این صورت  $r_2 \geq 1$  و  $\deg(x_3) = r_1 + r_2 + 1$ . قرار دهید  $T' = T - T_{x_3}$ . در این صورت  $n' = n - r_1 - 2r_2 - 1$  و  $\ell' = \ell - r_1 - r_2$ . اگر  $C'$  یک  $M(T')$  - مجموعه باشد، آنگاه  $C = C' \cup N_{T_{x_3}}[x_3]$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. حال از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} M(T) &\leq M(T') + r_2 + r_1 + 1 \\ &\leq \frac{3n' + 2\ell' - 1}{5} + r_2 + r_1 + 1 \\ &= \frac{3n + 2\ell - 3r_2 + 1}{5} \\ &< \frac{3n + 2\ell - 1}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $d \geq 6$ .

فرض کنید  $\deg(x_{d-2}) \geq 3$ ، در این صورت  $T_{x_{d-2}}$  یک درخت اسپایدر است. طبق فرض استقرا و لم ۲.۴.۳ نتیجه می‌گیریم که،  $M(T) < \frac{3n(T) + 2\ell(T) - 1}{5}$ . بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_{d-2}) = 2$ . اگر  $\deg(x_{d-3}) \geq 3$ ، آنگاه از فرض استقرا و لم ۳.۴.۳، نتیجه می‌شود که  $M(T) < \frac{3n(T) + 2\ell(T) - 1}{5}$ . بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_{d-3}) = 2$ . حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

**حالت ۱.**  $\deg(x_{d-4}) \geq 3$ .

فرض کنید  $y_0$  برگی از  $T_{x_{d-4}} - \{x_d, x_{d-1}, x_{d-2}, x_{d-3}\}$  در فاصله ماکزیمم از  $x_{d-4}$  باشد و  $y_0 y_1 \dots y_q x_{d-4}$  کوتاه‌ترین مسیر از  $y_0$  به  $x_{d-4}$  باشد. بوضوح  $q \leq 3$ .

فرض کنید  $q = 3$ . چون  $y_0$  با  $x_d$  نقش یکسانی دارند، می‌توانیم فرض کنیم برای  $i = 1, 2, 3$ ،  $\deg(y_i) = 2$ . با توجه به حقیقت ۱.۴.۳، لم ۲.۴.۳ و ۳.۴.۳ می‌توانیم فرض کنیم که  $T_{x_{d-4}}$  دارای برگ با فاصله ۳ از  $x_{d-4}$  نیست. فرض کنید  $b$  برگی از  $T_{x_{d-4}}$  در فاصله دو از  $x_{d-4}$  باشد و  $a$  رأس پشتیبان مجاور  $b$  باشد. طبق ۱.۴.۳،  $\deg(a) = 2$ . قرار دهید  $T' = T - \{x_d, x_{d-1}, x_{d-2}, x_{d-3}\}$ . فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$  - مجموعه باشد. بوضوح  $x_{d-4} \in C$  و لذا  $C' \cup \{x_d, x_{d-2}\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که،

$$M(T) \leq |C'| + 2 \leq \frac{3(n-4) + 2(\ell-1) - 1}{5} < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}.$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $T_{x_{d-4}}$  دارای برگ در فاصله دو از  $x_{d-4}$  نیست. فرض کنید  $r_1$  و  $r_4$  به ترتیب تعداد برگ‌هایی از درخت  $T_{x_{d-4}}$  در فاصله یک و چهار از  $x_{d-4}$  باشند. در این صورت  $r_4 \geq 2$  و حقیقت ۱.۴.۳ نتیجه می‌دهد که  $r_1 \leq 1$ . فرض کنید مجموعه  $A$  مجموعه همه رأس‌هایی از  $T_{x_{d-4}}$  در فاصله دو یا چهار از  $x_{d-4}$  باشد. ابتدا فرض می‌کنیم  $r_1 = 1$ . قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-4}}$ . اگر  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد، آنگاه  $\{x_{d-3}, x_{d-4}\} \cup A \cup C'$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. در این صورت از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} M(T) &\leq M(T') + |A| + 2 \\ &\leq \frac{3(n - 4r_4 - 2) + 2(\ell - r_4) - 1}{5} + 2r_4 + 2 \\ &= \frac{(3n + 2\ell - 2) - 4r_4 - 3r_1 + 7}{5} \\ &< \frac{3n + 2\ell - 1}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $r_1 = 0$ . اگر  $\deg(x_{d-5}) \geq 2$ ، آنگاه با در نظر گرفتن  $T' = T - T_{x_{d-4}}$  نتیجه برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_{d-5}) = 2$ . قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-5}}$ . فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. در این صورت  $\{x_{d-3}, x_{d-4}\} \cup (C' \cup A)$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. بنابراین،

$$\begin{aligned} M(T) &\leq M(T') + |A| + 2 \\ &\leq \frac{3(n - 4r_4 - 2) + 2(\ell - r_4 + 1) - 1}{5} + 2r_4 + 2 \\ &= \frac{(3n + 2\ell - 2) - 4r_4 + 6}{5} \\ &< \frac{3n + 2\ell - 1}{5}. \end{aligned}$$

حال فرض کنید  $q = 2$ . از حقیقت ۱.۴.۳ نتیجه می‌شود که  $\deg(y_1) = 2$ . اگر  $\deg(y_2) \geq 3$ ، آنگاه از فرض استقرا و لم ۲.۴.۳ نتیجه می‌گیریم که  $M(T) < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}$ . بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(y_2) = 2$ . در این صورت طبق فرض استقرا و لم ۳.۴.۳،  $M(T) < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}$ .

حال فرض کنید  $q = 1$ . طبق ۱.۴.۳،  $\deg(y_1) = 2$ . قرار دهید  $\{x_d, x_{d-1}, x_{d-2}, x_{d-3}\}$ . فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. در این صورت بوضوح  $x_{d-4} \in C'$  و  $\{x_d, x_{d-2}\} \cup C'$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. بنابراین

$$M(T) \leq M(T') + 2 \leq \frac{3(n - 4) + 2(\ell - 1) - 1}{5} + 2 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}.$$

حال برای اثبات قضیه در این حالت، کافی است فرض کنیم  $q = 0$ . طبق حقیقت ۱.۴.۳،  $x_{d-4}$  یک رأس پشتیبان ضعیف است. همچنین  $\deg(x_{d-4}) = 3$ . فرض کنید  $\deg(x_{d-5}) \geq 3$ . قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-4}}$ . در این صورت  $n' = n(T') \geq 6$ ،  $n' = n - 6$  و  $\ell' = \ell(T') = \ell - 2$ .

فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. در این صورت  $C' \cup \{x_{d-1}, x_{d-2}, x_{d-3}, x_{d-4}\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است و لذا طبق فرض استقرا،

$$M(T) \leq M(T') + 4 \leq \frac{3n' + 2\ell' - 1}{5} + 4 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}.$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_{d-5}) = 2$ . اگر  $d = 6$ ، آنگاه  $T$  درختی است که از مسیر  $P_6 : x_0 x_1 \dots x_6$  با اضافه کردن یک برگ به رأس  $x_2$  بدست می‌آید. در این صورت  $M(T) = 5 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}$ . بنابراین فرض می‌کنیم که  $d \geq 7$ .

فرض کنید  $\deg(x_{d-6}) = 2$ . اگر  $d = 7$ ، آنگاه  $T$  درختی است که از مسیر  $P_7 : x_0 x_1 \dots x_7$  با اضافه کردن یک برگ به  $x_0$  بدست می‌آید. در این صورت  $M(T) \leq 6 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}$ . اگر  $d = 8$ ، آنگاه  $\deg(x_2) = 2$  و لذا  $T$  با اضافه کردن یک برگ به  $x_4$  از مسیر  $P_8 = x_0 x_1 \dots x_7$  بدست می‌آید. در این صورت  $M(T) \leq 6 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}$ . بنابراین فرض می‌کنیم که  $d \geq 9$ . همچنین فرض کنید  $T' = T - T_{x_{d-6}}$  و  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. در این صورت  $C' \cup \{x_{d-1}, x_{d-2}, x_{d-3}, x_{d-4}, x_{d-5}\}$  یک کد شناسایی برای  $T$  است. با توجه به اینکه  $n(T') = n - 8$  و  $L(T') \leq \ell - 1$  از فرض استقرا نتیجه می‌شود که،

$$M(T) \leq M(T') + 5 \leq \frac{3n(T') + 2\ell(T') - 1}{5} + 4 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}.$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_{d-6}) \geq 3$ . قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-6}}$ . در این صورت  $n(T') = n - 7$  و  $\ell(T') = \ell - 2$ . فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. اگر  $x_{d-6} \in C'$ ، آنگاه  $C' \cup \{x_d, x_{d-2}, x_{d-4}, x_{d-5}\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. بنابراین طبق فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که،

$$M(T) \leq M(T') + 4 \leq \frac{3n(T') + 2\ell(T') - 1}{5} + 4 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}.$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $x_{d-6} \notin C'$ . پس دارای فرزند پشتیبان از درجه دو نیست. فرض کنید  $y'_0$  برگی از  $T_{x_{d-6}} - \{y_0, x_d, x_{d-1}, \dots, x_{d-5}\}$  در فاصله ماکزیمم از  $x_{d-6}$  باشد و همچنین  $y'_0 y'_1 \dots y'_t x_{d-6}$  کوتاه‌ترین مسیر از  $y'_0$  به  $x_{d-6}$  باشد. بوضوح  $t \leq 5$  و چون  $x_{d-6}$  دارای فرزند پشتیبان از درجه دو نیست،  $t \neq 1$ . بنابراین  $2 \leq t \leq 5$ .

فرض کنید  $t = 5$ . چون  $y'_0$  نقش یکسانی با  $x_d$  دارد، می‌توانیم فرض کنیم که برای  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$   $\deg(y'_i) = 2$  و  $y'_4$  یک رأس پشتیبان از درجه سه است. قرار دهید  $T' = T - T_{y'_5}$ . فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. قرار دهید  $X = \{x_d, x_{d-1}, x_{d-2}, x_{d-3}, x_{d-4}, x_{d-5}\}$ . اگر  $x_{d-6} \notin C'$ ، آنگاه بوضوح  $|C' \cup X \cup \{y_0\}| \geq 5$  در این صورت  $C'' = (C' - (X \cup \{y_0\})) \cup \{y_0\}$  یک  $M(T')$ -مجموعه می‌باشد. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که  $x_{d-6} \in C'$ . در این صورت  $C' \cup \{y'_1, y'_2, y'_3, y'_4\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است.

طبق فرض استقرا داریم،

$$\begin{aligned} M(T) &\leq M(T') + 4 \\ &\leq \frac{3n(T') + 2\ell(T') - 1}{5} + 4 \\ &\leq \frac{3(n-7) + 2(\ell-2) - 1}{5} + 4 \\ &< \frac{3n + 2\ell - 1}{5}. \end{aligned}$$

حال فرض کنید  $t = 4$ . طبق حقیقت ۱.۴.۳ و لم‌های ۲.۴.۳ و ۳.۴.۳، می‌توانیم فرض کنیم که  $\deg(y'_1) = \deg(y'_2) = \deg(y'_3) = 2$ . فرض کنید  $\deg(y'_4) = 2$ . قرار دهید  $T' = T - T_{y'_4}$ . فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. در این صورت  $\{y'_1, y'_2, y'_3\} \cup C'$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. طبق فرض استقرا داریم،

$$\begin{aligned} M(T) &\leq M(T') + 3 \\ &\leq \frac{3n(T') + 2\ell(T') - 1}{5} + 3 \\ &= \frac{3(n-5) + 2(\ell-1) - 1}{5} + 3 \\ &< \frac{3n + 2\ell - 1}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(y'_4) \geq 3$ . با توجه به لم‌های ۲.۴.۳ و ۳.۴.۳ می‌توانیم فرض کنیم که هیچ برگی از  $T_{y'_4}$  در فاصله ۳ از  $y'_4$  وجود ندارد. بنابراین هر برگ از  $T_{y'_4}$  در فاصله ۱، ۲ یا ۴ از  $y'_4$  است. فرض کنید برای  $i = 1, 2, 4$  تعداد برگ‌های درخت  $T_{y'_4}$  با فاصله  $i$  از  $y'_4$  باشد. بوضوح  $r_1 \leq 1$ . همچنین توجه کنید که برای هر برگ  $x$  از  $T_{y'_4}$  در فاصله ۲ یا ۴ از  $y'_4$ ، هر رأس درونی  $w$  از مسیر  $x$  به  $y'_4$  دارای درجه دو می‌باشد. فرض کنید  $A$  مجموعه همه رأس‌هایی از  $T_{y'_4}$  در فاصله ۲ یا ۴ از  $y'_4$  باشد. قرار دهید  $T' = T - T_{y'_4}$ . فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. در این صورت  $\{y'_1, y'_2, y'_3\} \cup A \cup C'$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. بنابراین طبق فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} M(T) &\leq M(T') + |A| + 2 \\ &= M(T') + 2r_4 + r_2 + 2 \\ &\leq \frac{3n(T') + 2\ell(T') - 1}{5} + 2r_4 + 2 \\ &\leq \frac{3(n-4r_4 - 2r_2 - r_1 - 1) + 2(\ell - r_4 - r_2 - r_1) - 1}{5} + 2r_4 + r_2 + r_1 + 1 \\ &\leq \frac{3n + 2\ell - 1 + (-4r_4 - 2r_2 - 5r_1 + 7)}{5} \\ &< \frac{3n + 2\ell - 1}{5}. \end{aligned}$$

حال فرض کنید که  $t = 3$ . با توجه به حقیقت ۱.۴.۳ و لم‌های ۲.۴.۳ و ۳.۴.۳ می‌توانیم فرض کنیم که  $\deg(y'_1) = \deg(y'_2) = \deg(y'_3) = 2$ . قرار دهید  $T' = T - T_{y'_1}$ . فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. قرار دهید  $X = \{x_d, x_{d-1}, x_{d-2}, x_{d-3}, x_{d-4}, x_{d-5}\}$ . اگر  $C' \notin x_{d-6}$ ، آنگاه بوضوح  $|C' \cup X \cup \{y_0\}| \geq 5$ . در این صورت  $C'' = (C' - (X \cup \{y_0\})) \cup$  یک  $M(T')$ -مجموعه است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که  $x_{d-6} \in C'$ . در این صورت  $C = C' \cup \{y'_0, y'_1\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} M(T) &\leq M(T') + 2 \\ &\leq \frac{3(n-4) + 2(\ell-1) - 1}{5} + 2 \\ &< \frac{3n + 2\ell - 1}{5}. \end{aligned}$$

حال فرض کنید  $t = 2$ . با توجه به حقیقت ۱.۴.۳، می‌توانیم فرض کنیم  $\deg(y'_1) = 2$ . در این صورت حکم مسأله از فرض استقرا و لم‌های ۲.۴.۳ و ۳.۴.۳ نتیجه می‌شود. چون در قبل نشان دادیم که  $t \neq 1$ ، فرض می‌کنیم  $t = 0$ . طبق حقیقت ۱.۴.۳،  $x_{d-6}$  رأسی پشتیبان از درجه ۳ است. قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-6}}$ . اگر  $n(T') = 1$ ، آنگاه  $n = 10$  و  $M(T) = 6 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}$ . اگر  $n(T') = 2$ ، آنگاه  $n = 11$  و  $\{x_d, x_{d-2}, x_{d-4}, x_{d-5}, x_{d-6}, y'_0\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است و لذا  $M(T) = 6 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}$ . بنابراین فرض می‌کنیم که  $n(T') \geq 3$ . فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. در این صورت

$$C' \cup \{x_d, x_{d-2}, x_{d-4}, x_{d-5}, x_{d-6}\}$$

یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که،

$$M(T) \leq M(T') + 5 \leq \frac{3n(T') + 2\ell(T') - 1}{5} + 4 < \frac{3n + 2\ell - 1}{5}.$$

بنابراین اثبات قضیه در حالت ۱ کامل می‌شود.

**حالت ۲.**  $\deg(x_{d-4}) = 2$ .

فرض کنید  $\deg(x_{d-5}) \geq 3$ . قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-4}}$ . فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. در این صورت  $C' \cup \{x_{d-1}, x_{d-2}, x_{d-3}\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. از فرض استقرا داریم،

$$M(T) \leq M(T') + 3 \leq \frac{3(n-5) + 2(\ell-1) - 1}{5} + 3 < \frac{3n + 2\ell - 2}{5}.$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_{d-5}) = 2$ .

حال فرض کنید که  $\deg(x_{d-6}) \geq 3$ . فرض کنید  $y''$  برگی از درخت  $T_{x_{d-6}} - \{x_d, x_{d-1}, \dots, x_{d-5}\}$

در فاصله ماکزیمم از  $x_{d-6}$  باشد و  $y''_0 y''_1 \dots y''_t x_{d-6}$  کوتاه‌ترین مسیر از  $y''_0$  به  $x_{d-6}$  باشد. بوضوح  $t \leq 5$ . با استدلال مشابه قبل می‌توانیم فرض کنیم  $t \in \{0, 3, 5\}$  و برای  $i = 0, 3, 5$   $\deg(y''_i) = 2, 1, 2, \dots, t-1$  فرض کنید که  $A$  مجموعه همه رئوس با فاصله زوج از  $x_{d-6}$  در درخت  $T_{x_{d-6}}$  باشد. قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-6}}$ . فرض کنید  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. در این صورت  $C' \cup A \cup \{x_{d-6}, x_{d-5}\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. فرض کنید برای  $i \in \{1, 4, 6\}$  تعداد برگ‌هایی از  $T_{x_{d-6}}$  در فاصله  $i$  از  $x_{d-6}$  باشد. در این صورت طبق فرض استقرا داریم،

$$\begin{aligned} M(T) &\leq M(T') + |A| + 2 \\ &= M(T') + 3r_6 + 2r_4 + 2 \\ &\leq \frac{3(n - 6r_6 - 4r_4 - r_1 - 1) + 2(\ell - r_6 - r_4 - r_1 + 1) - 1}{5} + 3r_6 + 2r_4 + 2 \\ &< \frac{3n + 2\ell - 2}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین ما می‌توانیم فرض کنیم که  $\deg(x_{d-6}) = 2$ . اگر  $T = P_\lambda$  یا  $T = P_9$ ، آنگاه  $M(T) = \frac{3n + 2\ell - 1}{5}$ . بنابراین  $n > 9$ . فرض کنید  $T' = T - T_{x_{d-6}}$  و  $C'$  یک  $M(T')$ -مجموعه باشد. اگر  $x_{d-7} \in C'$ ، آنگاه  $C' \cup \{x_{d-1}, x_{d-2}, x_{d-3}, x_{d-5}\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است و در غیر این صورت  $C' \cup \{x_d, x_{d-2}, x_{d-4}, x_{d-6}\}$  یک کد شناسایی برای درخت  $T$  است. بنابراین طبق فرض استقرا،

$$M(T) \leq M(T') + 4 \leq \frac{3(n-7) + 2\ell - 1}{5} + 4 < \frac{3n + 2\ell - 2}{5}.$$

بنابراین همواره برای هر درخت  $T$  از مرتبه  $n \geq 3$  با  $\ell$  برگ،  $M(T) < \frac{3n + 2\ell - 2}{5}$ . اکنون ما اثبات قسمت تساوی قضیه را ارائه می‌دهیم. فرض کنید  $T$  درختی از مرتبه  $n \geq 3$  و  $M(T) = \frac{3n + 2\ell - 2}{5}$  نشان می‌دهیم که  $\text{diam}(T) \leq 3$ . فرض کنید  $\text{diam}(T) \geq 4$ . اگر  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی نداشته باشد، مثل قبل نتیجه می‌گیریم که  $M(T) < \frac{3n + 2\ell - 2}{5}$  که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی است. فرض کنید  $T'$  درختی باشد که از درخت  $T$  با حذف  $l_v - 1$  برگ از هر رأس پشتیبان  $v \in S(T)$  بدست آمده باشد. پس  $T'$  دارای رأس پشتیبان قوی نیست و لذا مثل قبل داریم،

$$M(T') < \frac{3n(T') + 2\ell(T') - 1}{5} = \frac{3(n - l + s) + 2s - 1}{5}.$$

از لم ۱.۴.۳ نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} M(T) &\leq M(T') + l - s \\ &< \frac{3(n - l + s) + 2s - 1}{5} + l - s \\ &= \frac{3n + 2\ell - 2}{5} \end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین  $\text{diam}(T) \leq 3$ . اگر  $\text{diam}(T) = 2$ ، آنگاه  $T$  ستاره است و لذا  $M(T) = n - 1 < \frac{3n + 2\ell - 2}{5}$  که تناقض است. بنابراین  $\text{diam}(T) = 3$ . در این صورت  $T$  یک ستاره دوگانه است. حال از این که  $M(T) = \frac{3n + 2\ell - 2}{5}$  به راحتی نتیجه می‌شود  $T = P_4$ . طرف عکس قضیه واضح است.

### ۵.۳ اثبات قضیه ۳.۲.۳

این بخش را با لم زیر شروع می‌کنیم.

لم ۱.۵.۳. [۱۵۴] هر درخت  $T \in \mathcal{F}$  دارای یک  $\gamma_t^D(T)$  - مجموعه می‌باشد که شامل همه برگ‌ها و رئوس پشتیبان است.

اکنون قضیه ۳.۲.۳ را اثبات می‌کنیم. فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 4$  با  $\ell$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد. با استقراء روی مرتبه  $n$  از  $T$  نشان می‌دهیم که  $\gamma_t^D(T) \leq \frac{3n + 2\ell + s}{5}$ . اگر  $n = 4$ ، آن‌گاه  $T \in \{P_4, k_{1,3}\}$  به وضوح  $\gamma_t^D(T) < \frac{3n + 2\ell + s}{5}$ . این نتایج برای گام پایه استقراء کافی می‌باشند. فرض کنید برای هر درخت  $T'$  از مرتبه  $n' < n$  با  $\ell'$  برگ و  $s'$  رأس پشتیبان  $\gamma_t^D(T') \leq \frac{3n' + 2\ell' + s'}{5}$ . حال فرض کنید  $T$  درختی از مرتبه  $n > 4$  با  $\ell$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد. اگر  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی نباشد، آن‌گاه  $\ell = s$  و حکم از قضیه ۲۰.۲.۲ نتیجه گرفته می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم که  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی باشد. فرض کنید  $u$  رأس پشتیبان قوی از  $T$  و  $v$  برگ مجاور  $u$  باشد. قرار دهید  $T' = T - v$  در این صورت  $n' \geq 4$  و  $\gamma_t^D(T) \leq \gamma_t^D(T') + 1$  از فرض استقراء نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_t^D(T) &\leq \gamma_t^D(T') + 1 \\ &\leq \frac{3n' + 2\ell' + s'}{5} + 1 \\ &= \frac{3(n-1) + 2(\ell-1) + s}{5} + 1 \\ &= \frac{3n + 2\ell + s}{5}. \end{aligned}$$

حال برای اثبات قسمت تساوی فرض کنید  $\gamma_t^D(T) = \frac{3n + 2\ell + s}{5}$ . نشان می‌دهیم که  $\ell = s$ . فرض کنید  $\ell > s$ . اگر  $T'$  درختی باشد که از درخت  $T$  با حذف  $\ell_x - 1$  برگ از هر رأس پشتیبان  $x \in S(T)$  به دست آمده باشد، آن‌گاه  $n' = n(T') = n - \ell + s$  و  $L(T') = S(T') = S(T)$ . طبق



قسمت اول قضیه

$$\begin{aligned}\gamma_t^D(T') &\leq \frac{\mathfrak{V}n' + \mathfrak{V}\ell' + s'}{\mathfrak{H}} \\ &= \frac{\mathfrak{V}(n - \ell + s) + \mathfrak{V}s}{\mathfrak{H}} \\ &= \frac{\mathfrak{V}n - \mathfrak{V}\ell + \mathfrak{E}s}{\mathfrak{H}}.\end{aligned}$$

اگر

$$\begin{aligned}\gamma_t^D(T') &< \frac{\mathfrak{V}n' + \mathfrak{V}\ell' + s'}{\mathfrak{H}} \\ &= \frac{\mathfrak{V}n - \mathfrak{V}\ell + \mathfrak{E}s}{\mathfrak{H}},\end{aligned}$$

آن‌گاه

$$\begin{aligned}\gamma_t^D(T) &\leq \gamma_t^D(T') + \ell - s \\ &< \frac{\mathfrak{V}n - \mathfrak{V}\ell + \mathfrak{E}s}{\mathfrak{H}} + \ell - s \\ &< \frac{\mathfrak{V}n + \mathfrak{V}\ell + s}{\mathfrak{H}},\end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین  $\gamma_t^D(T') = \frac{\mathfrak{V}(n - \ell + s) + \mathfrak{V}s}{\mathfrak{H}} = \frac{\mathfrak{V}(n' + \ell')}{\mathfrak{H}}$  از قضیه ۲.۲.۲، نتیجه می‌گیریم که  $T' \in \mathcal{F}$ . طبق لم ۱.۵.۳،  $T'$  دارای یک  $\gamma_t^D(T')$ -مجموعه  $S$  می‌باشد که شامل همه برگ‌ها و رأس‌های پشتیبان است. قرار دهید  $y \in L(T) - L(T')$ . در این صورت  $(S \cup (L(T) - L(T'))) - \{y\}$  یک مجموعه احاطه‌گر تفاضلی کلی برای درخت  $T$  می‌باشد و لذا

$$\begin{aligned}\gamma_t^D(T) &\leq \gamma_t^D(T') + \ell - s - 1 \\ &= \frac{(\mathfrak{V}(n - \ell + s) + \mathfrak{V}s) + \mathfrak{H}(\ell - s - 1)}{\mathfrak{H}} \\ &< \frac{\mathfrak{V}n + \mathfrak{V}\ell + s}{\mathfrak{H}},\end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین  $\ell = s$  و لذا  $\gamma_t^D(T) = \frac{\mathfrak{V}n + \mathfrak{V}\ell}{\mathfrak{H}}$  از قضیه ۲.۲.۲، نتیجه می‌شود که  $T \in \mathcal{F}$ . طرف عکس قضیه واضح است.



# فصل ۴

## کران‌هایی برای کداحاطه‌گر مکانی

### ۱.۴ مقدمه

در این فصل یک کران بالا برای عدد احاطه‌گر مکانی درخت‌ها بر اساس مرتبه و تعداد برگ‌های گراف و یک کران پایین برای عدد احاطه‌گر مکانی کلی درخت‌ها بر اساس مرتبه، تعداد رئوس پشتیبان و تعداد برگ‌های درخت ارائه می‌دهیم. سپس تمام درختانی که در تساوی این کران‌ها صدق می‌کنند را مشخص می‌کنیم. این کران‌ها برخی از کران‌های قبلی را، به‌عنوان مثال کران‌های ارائه شده در قضایای ۷.۲.۲، ۱۲.۲.۲، ۱۳.۲.۲ و ۱۴.۲.۲ بهبود می‌دهند. برای این منظور، ابتدا در بخش ۲.۴، کران‌های جدید خود را برای کدهای احاطه‌گر مکانی و احاطه‌گر مکانی کلی در درخت‌ها ارائه خواهیم. سپس در بخش‌های ۳.۴ و ۴.۴ به اثبات نتایج خود می‌پردازیم.

### ۲.۴ نتایج اصلی

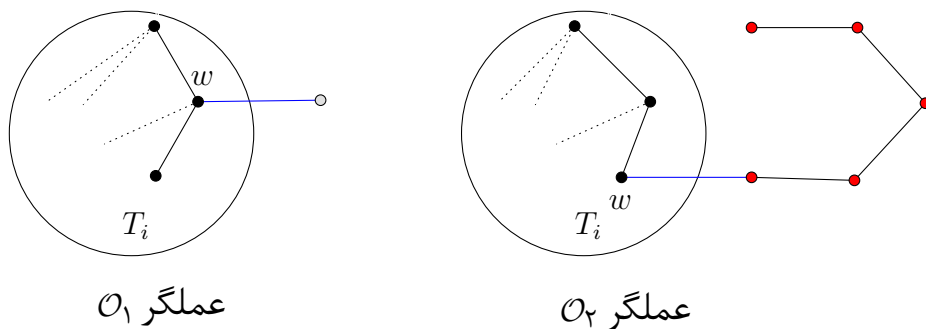
بلیدیا و همکاران در قضیه ۷.۲.۲ نشان دادند اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  باشد، آن‌گاه  $\gamma_L(T) \leq \frac{n+l-s}{4}$ . ما این کران را برای درخت‌هایی با  $n > l + 5s - 4$  بهبود خواهیم داد. برای این منظور ابتدا خانواده‌ای از درخت‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید  $\mathcal{T}$  خانواده‌ای از درخت‌های  $T$  باشد که از دنباله‌ای از درخت‌های  $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots, T$

( $k \geq 1$ ) بدست می‌آید به طوری که  $T_1 = P_3$  و  $T_{i+1}$  از  $T_i$  برای  $1 \leq i \leq k-1$  به صورت بازگشتی با یکی از عملگرهای زیر بدست می‌آید.

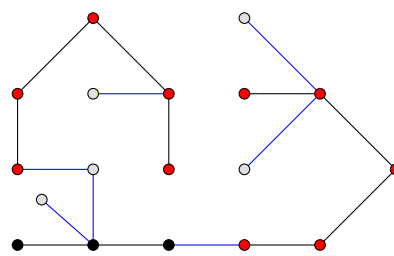
**عملگر  $O_1$ :** فرض کنید  $w$  راسی پشتیبان از درخت  $T_i$  باشد. در این صورت صورت  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با اضافه کردن برگ  $w$  به بدست می‌آید.

**عملگر  $O_2$ :** فرض کنید  $w$  برگ  $w$  از درخت  $T_i$  باشد. در این صورت درخت  $T_{i+1}$  از درخت  $T_i$  با اضافه کردن مسیر  $P_5$  به آن و وصل کردن  $w$  به برگ  $w$  از  $P_5$  بدست می‌آید.

عملگرهای  $O_1$  و  $O_2$  در شکل ۱.۴ نشان داده شده‌اند. همچنین مثالی از خانواده‌ی  $\mathcal{T}$  در شکل ۲.۴ نشان داده شده است که در آن راس‌های با رنگ سفید و رنگ قرمز راس‌هایی هستند که به ترتیب از عملگر  $O_1$  و  $O_2$  به درخت اولیه که راس‌هایش با رنگ سیاه مشخص شدند، اضافه شدند. همچنین همه یال‌های جدید با رنگ آبی مشخص شدند.



شکل ۱.۴: عملگرهای  $O_1$  و  $O_2$ .



شکل ۲.۴: مثالی از خانواده‌ی  $\mathcal{T}$ .

**قضیه ۱.۲.۴.** فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  با  $l$  برگ باشد. در این صورت

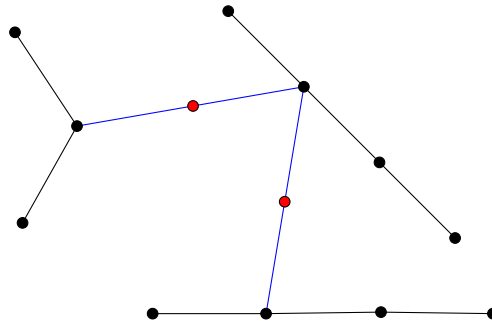
$$\gamma_L(T) \leq \frac{2n + 3l - 2}{5}.$$

تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر  $T \in \mathcal{T}$  باشد.

در بخش ۴.۴، کران پایین جدیدی برای کدهای احاطه‌گر مکانی کلی درخت‌ها بدست می‌آوریم و همه درخت‌هایی که در تساوی این کران صدق می‌کنند را مشخص می‌کنیم. برای این منظور ابتدا خانواده‌ای از درخت‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنید  $\zeta = \{P_3\} \cup \{P_{\ell_k} | k \geq 1\}$  و  $S^k$  یک  $\gamma_t^L(P_{\ell_k})$  مجموعه برای  $k \geq 1$  باشد. قرار دهید  $S = S(P_3) \cup (\bigcup_{k \geq 1} S^k)$ . خانواده  $\xi$  از درختان را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. درخت  $T$  متعلق به خانواده  $\xi$  است اگر و تنها اگر  $T$  را بتوان به صورت زیر به دست آورد.

۱. ابتدا  $t$  کپی متمایز از درخت‌ها در خانواده  $\zeta$  را در نظر بگیرید.
  ۲.  $t - 1$  یال جدید را به این  $t$  درخت اضافه کنید به طوری که یال‌های جدید فقط بین رئوس پشتیبان باشند و گراف بدست آمده همبند باشد.
  ۳. هر یال جدید اضافه شده را دقیقاً یکبار تقسیم کنید.
- در شکل ۳.۴ مثالی خانواده‌ای  $\xi$  نشان داده شده است.



شکل ۳.۴: مثالی از خانواده‌ی  $\xi$ .

**قضیه ۲.۲.۴.** اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  با  $l$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد، آن‌گاه،

$$\gamma_t^L \geq \frac{n + \frac{l}{4} - s + 1}{4}.$$

تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر  $T \in \xi$ .

توجه کنید که با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد که قضیه ۲.۲.۴، قضیه ۱۲.۲.۲ را برای هر درخت با  $n \geq \frac{3}{4}l + S - 1$ ، قضیه ۱۳.۲.۲ را برای همه درخت‌ها و قضیه ۱۴.۲.۲ را برای هر درخت با  $l \leq 2S$ ، بهبود می‌بخشد. همچنین اگر  $l \geq 3$  باشد، آن‌گاه طبق قضیه ۲.۲.۴،  $\gamma_t^L(T_i) \geq \frac{(n + \frac{l}{4} - S + 1)}{4} > \frac{(n + 2 - S)}{4}$ ، بنابراین به آسانی با استفاده از قضیه ۲.۲.۴ می‌توان درخت‌هایی را که در تساوی کران ارائه شده در قضیه ۱۳.۲.۲ صدق می‌کنند، مشخص کرد.

**نتیجه ۱.۲.۴.** اگر  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  باشد، آن‌گاه  $\gamma_t^L(T) = \frac{1}{4}(n + 2 - S)$  اگر و تنها اگر برای عدد صحیح  $k \geq 1$ ،  $T = P_{\ell_k}$ .

### ۳.۴ اثبات قضیه ۱.۲.۴

در این بخش ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر  $T \in \mathcal{T}$  از مرتبه  $n \geq 3$  و  $l$  برگ، همواره داریم

$$\gamma_L(T) = \frac{2n + 3l - 2}{5}$$

**مشاهده ۱.۳.۴.** اگر درخت  $T$  از درخت  $T'$  با اضافه کردن یک برگ یا یک مسیر  $P_2$  به درخت  $T'$  بدست آید، آن گاه  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 1$ .

بیلیدیا و همکاران در [۳۳] لم زیر را اثبات کردند.

**لم ۱.۳.۴.** اگر  $T$  درختی از مرتبه  $n \geq 3$  باشد، آن گاه  $\gamma_L(T)$  - مجموعه  $S$  وجود دارد به طوری که:  
 (۱) اگر  $x$  یک رأس پشتیبان و  $l_x$  تعداد برگ‌های مجاور رأس  $x$  باشد، آن گاه  $S$  شامل  $x$  و حداقل  $l_x - 1$  برگ مجاور رأس  $x$  می‌باشد.  
 (۲) اگر برای مسیر  $abcd$  در درخت  $T$ ،  $\deg(a) = 1$ ،  $\deg(b) = \deg(c) = 2$  و  $\deg(d) > 1$ ، آن گاه  $S \cap \{a, b, c, d\} = \{b, d\}$ .

**لم ۲.۳.۴.** اگر  $\gamma_L(T_i) = \frac{2n(T_i) + 3l(T_i) - 2}{5}$  باشد و  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با عملگر  $\mathcal{O}_1$  یا  $\mathcal{O}_2$  حاصل شود، آنگاه،

$$\gamma_L(T_{i+1}) = \frac{2n(T_{i+1}) + 3l(T_{i+1}) - 2}{5}.$$

برهان. فرض کنید  $\gamma_L(T_i) = \frac{2n_i + 3l_i - 2}{5}$  که  $n_i = n(T_i)$  و  $l_i = L(T_i)$  می‌باشند. فرض کنید  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با عملگر  $\mathcal{O}_1$  بدست آمده باشد به طوری که  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با اضافه کردن برگ  $v$  به رأس پشتیبان  $w$  از  $T_i$  حاصل شده باشد. با توجه به مشاهده ۱.۳.۴،  $\gamma_L(T_{i+1}) \leq \gamma_L(T_i) + 1$ . مجموعه  $S$  را یک  $\gamma_L(T_{i+1})$  - مجموعه در نظر بگیرید که در شرایط لم ۱.۳.۴ صدق می‌کند. در این صورت  $w \in S$  و بدون کاسته شدن از کلیت ما می‌توانیم فرض کنیم که  $v$  نیز عضوی از مجموعه  $S$  است. بنابراین  $S - \{v\}$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای درخت  $T_i$  می‌باشد و لذا  $\gamma_L(T_{i+1}) = \gamma_L(T_i) + 1$  با توجه به قبل نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_L(T_i) \leq \gamma_L(T_{i+1}) - 1$ .

حال فرض کنید  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با عملگر  $\mathcal{O}_2$  با اضافه کردن برگ  $v$  از درخت  $T_i$  به برگ  $a$  از مسیر  $abcde : P_5$  بدست آمده باشد. اگر  $S$  یک  $\gamma_L(T_i)$  - مجموعه باشد، آن گاه  $S \cup \{b, d\}$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای درخت  $T_{i+1}$  می‌باشد، لذا  $\gamma_L(T_{i+1}) = \gamma_L(T_i) + 2$  می‌باشد. فرض کنید  $D$  یک  $\gamma_L(T_{i+1})$  - مجموعه باشد که در شرایط لم ۱.۳.۴ صدق می‌کند. در این صورت  $S \cap \{b, c, d, e\} = \{b, d\}$ . اگر  $a \notin D$ ، آن گاه  $D - \{b, d\}$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای درخت  $T_i$  می‌باشد و در غیر این صورت  $(D - \{a, b, d\}) \cup \{v\}$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای

درخت  $T_i$  است، بنابراین  $\gamma_L(T_{i+1}) = \gamma_L(T_i) + 2$  در این صورت

$$\begin{aligned} \gamma_L(T_{i+1}) &= \gamma_L(T_i) + 2 \\ &= \frac{2n(T_i) + 3l(T_i) - 2}{5} + 2 \\ &= \frac{2n(T_i) + 3l(T_i) - 2}{5} \\ &= \frac{2n(T_{i+1}) + 3l(T_{i+1}) - 2}{5}. \end{aligned}$$

□

با استفاده از استقرا روی عملگرهای استفاده شده برای ساختن  $T \in \mathcal{T}$  و همچنین لم ۲.۳.۴، نتیجه زیر بدست می‌آید.

لم ۳.۳.۴. برای هر درخت  $T \in \mathcal{T}$  از مرتبه  $n \geq 3$  و  $l$  برگ،

$$\gamma_L(T) = \frac{2n + 3l - 2}{5}.$$

## اثبات قضیه ۱.۲.۴

ابتدا با استفاده از استقرا روی مرتبه  $n$  از درخت  $T$ ، نشان می‌دهیم که  $\gamma_L(T) \leq \frac{2n+3l-2}{5}$ .  
گام اول استقرا برای  $n = 2$  و  $n = 3$  واضح است. فرض کنید برای هر درخت غیربدیهی  $T'$  از مرتبه  $n$  و  $n' < n$  و  $l'$  برگ،  $\gamma_L(T') \leq \frac{2n'+3l'-2}{5}$ . حال فرض کنید  $T$  درختی از مرتبه  $n \geq 4$  باشد. فرض کنید  $T$  دارای رأس پشتیبانی قوی باشد. رأس  $v$  را رأس پشتیبانی قوی  $T$  و  $u$  را برگی مجاور  $v$  در نظر بگیرید. قرار دهید  $T' = T - u$ . با توجه به مشاهده ۱.۳.۴،  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 1$  از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_L(T) &\leq \gamma_L(T') + 1 \\ &\leq \frac{(2n'(T_i) + 3l'(T_i) - 2)}{5} + 1 \\ &= \frac{(2(n-1) + 3(l-1) - 2)}{5} + 1 \\ &= \frac{(2n + 3l - 2)}{5}. \end{aligned}$$

حال فرض کنید  $T$  دارای  $e = uv$  باشد، به طوری که  $\deg(u) \geq 3$  و  $\deg(v) \geq 3$  باشد.  $T_1$  و  $T_2$  را در دو مؤلفه از  $T - e$  در نظر بگیرید که  $u \in V(T_1)$  و  $v \in V(T_2)$  باشد. با توجه به فرض

$$\begin{aligned} \gamma_L(T) &\leq \gamma_L(T_1) + \gamma_L(T_2) \\ &\leq \frac{2n(T_1) + 3l(T_1) - 2}{5} + \frac{2n(T_2) + 3l(T_2) - 2}{5} \\ &= \frac{2n + 3l - 4}{5} \\ &< \frac{2n + 3l - 2}{5} \end{aligned}$$

بنابراین در ادامه ما می‌توانیم فرض کنیم حقایق زیر برقرار هستند.  
**حقیقت ۱.**  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی نمی‌باشد.

**حقیقت ۲.** برای هر یال  $e = uv$  از درخت  $T$ ،  $\deg(u) \leq 2$  یا  $\deg(v) \leq 2$ .

فرض کنید  $d = \text{diam}(T)$  باشد. با توجه به حقیقت ۱،  $d \geq 3$ . اگر  $d = 3$  باشد، آنگاه  $T = P_4$  و  $\gamma_L(T) = 2 < \frac{2n + 3l - 2}{5}$ . بنابراین فرض می‌کنیم که  $d \geq 4$ . درخت  $T$  را در رأس  $x_0$  ریشه‌دار می‌کنیم. فرض کنید  $x_0 x_1 \dots x_d$  یک مسیر قطری از  $T$  باشد. با توجه به حقیقت ۱،  $\deg(x_{d-1}) = \deg(x_1) = 2$  می‌باشد. فرض کنید  $d = 4$ . اگر  $\deg(x_2) = 2$  باشد، آن‌گاه  $T = P_5$  و  $\gamma_L(T) = 2 < \frac{2n + 3l - 2}{5}$ . بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_2) > 2$ . اگر  $x_2$  یک رأس پشتیبان باشد، آن‌گاه  $T$  دارای  $\deg(x_2) - 1$  رأس پشتیبانی از درجه دو است. در این صورت  $N(x_2)$  یک مجموعه احاطه‌گری مکانی برای درخت  $T$  می‌باشد و چون  $n = 2 \deg(x_2)$  و  $l = \deg(x_2)$ ، نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_L(T) \leq \deg(x_2) < \frac{2n + 3l - 2}{5}$ . بنابراین فرض می‌کنیم که  $x_2$  یک رأس پشتیبان نیست. در این صورت  $T$  دارای  $\deg(x_2)$  رأس پشتیبان می‌باشد و لذا  $N(x_2)$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای درخت  $T$  است. چون  $n = 2 \deg(x_2) + 1$  و  $l = \deg(x_2)$ ، رابطه  $\gamma_L(T) \leq \deg(x_2) < \frac{2n + 3l - 2}{5}$  نتیجه گرفته می‌شود. حال فرض کنید  $d = 5$  باشد. با توجه به حقیقت ۱، می‌توانیم فرض کنیم که  $\deg(x_3) = 2$  می‌باشد اگر  $\deg(x_2) = 2$  باشد، آن‌گاه  $T = P_6$  و لذا  $\gamma_L(T) = 3 < \frac{2n + 3l - 2}{5}$ . بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_2) > 2$ . چون  $d = 5$  می‌باشد، از حقیقت ۱، نتیجه می‌گیریم که هر رأس از  $N(x_2) - \{x_3\}$  یک برگ یا یک رأس پشتیبانی از درجه دو است. فرض کنید که  $x_2$  یک رأس پشتیبان باشد. با توجه به حقیقت ۱، دقیقاً یک برگ مجاور  $x_2$  وجود دارد. در این صورت  $S(T)$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای درخت  $T$  می‌باشد. با توجه به اینکه  $n = 2 \deg(x_2) + 2$  و  $l = \deg(x_2)$ ، نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_L(T) &\leq |S(T)| + 1 = \deg(x_2) + 1 \\ &< \frac{2n + 3l - 2}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $d \geq 6$ . اگر  $\deg(x_2) \leq 3$ ، قرار دهید  $T' = T - \{x_d, x_{d-1}\}$  از



مشاهده ۱.۳.۴ و فرض استقراء نتیجه می شود که،

$$\begin{aligned} \gamma_L(T) &\leq \gamma_L(T') + 1 \\ &\leq \frac{2(n-2) + 3(l-1) - 2}{5} + 1 \\ &< \frac{2n + 3l - 2}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می کنیم که  $\deg(x_{d-2}) = 2$ . فرض کنید  $x_{d-3}$  یک رأس پشتیبان باشد و  $u$  تنها برگ مجاور  $x_{d-3}$  باشد. قرار دهید  $T' = T - \{x_d, x_{d-1}, x_{d-2}\}$ . با توجه به اینکه  $x_{d-3}$  یک رأس پشتیبان در درخت  $T'$  می باشد، طبق لم ۱.۳.۴، یک  $-\gamma_L(T')$  مجموعه  $D$  شامل  $x_{d-3}$  وجود دارد. در این صورت  $D \cup \{x_{d-1}\}$  یک مجموعه احاطه گر مکانی برای درخت  $T$  است و لذا  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 1$  بنابراین از فرض استقرا نتیجه می گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_L(T) &\leq \gamma_L(T') + 1 \\ &\leq \frac{2(n-2) + 3(l-1) - 2}{5} + 1 \\ &< \frac{2n + 3l - 2}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می کنیم  $x_{d-3}$  یک رأس پشتیبان نیست. فرض کنید برگ  $y$  از درخت  $T_{x_{d-3}}$  وجود داشته باشد، به طوری که  $d(y, x_{d-3}) = 2$  و پدر  $y$  باشد. با توجه به حقیقت  $d(u) = 2$ ، قرار دهید  $T' = T - \{x, y\}$  از مشاهده ۱.۳.۴ و فرض استقرا نتیجه می شود که،

$$\begin{aligned} \gamma_L(T) &\leq \gamma_L(T') + 1 \\ &\leq \frac{2(n-2) + 3(l-1) - 2}{5} + 1 \\ &< \frac{2n + 3l - 2}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین در ادامه فرض می کنیم که هر برگ از درخت  $T_{x_{d-3}}$  در فاصله سه از رأس  $x_{d-3}$  می باشد. چون هر چنین برگی نقش یکسانی با  $x_d$  دارد، پس هر رأس درونی از کوتاهترین مسیر از این برگ تا  $x_{d-3}$  دارای درجه دو است. فرض کنید برای  $k \geq 2$ ،  $\deg(x_{d-3}) = k + 1$ . با توجه به حقیقت  $\deg(x_{d-4}) = 2$ ، قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-4}}$ . طبق فرض استقرا،  $\gamma_L(T') \leq \frac{2n' + 3l' - 2}{5}$ . فرض کنید که  $S$  یک  $-\gamma_L(T')$  مجموعه و  $U$  مجموعه همه رئوس با فاصله دو از  $x_{d-3}$  درخت  $T_{x_{d-4}}$  باشد. در این صورت  $S \cup \{x_{d-3}\} \cup U$  یک مجموعه احاطه گر مکانی برای درخت  $T$  است.

چون  $k \geq 2$  می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_L(T) &\leq \gamma_L(T') + k + 1 \\ &\leq \frac{2n' + 3l' - 2}{5} + k + 1 \\ &\leq \frac{2n + 3l - 2 - 4k + 4}{5} \\ &\leq \frac{2n + 3l - 2}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_{d-3}) = 2$  می‌باشد. فرض کنید  $\deg(x_{d-4}) \geq 3$ . قرار دهید  $T' = T - \{x_d, x_{d-1}, x_{d-2}, x_{d-3}\}$ . فرض کنید  $D$  یک  $-\gamma_L(T')$  مجموعه باشد. در این صورت  $D \cup \{x_{d-2}, x_{d-1}\}$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای درخت  $T$  است و لذا  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 2$ . طبق فرض استقراء نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_L(T) &\leq \gamma_L(T') + 2 \\ &\leq \frac{2n(T') + 3l(T') - 2}{5} + 2 \\ &\leq \frac{2(n-2) + 3(l-1) - 2}{5} + 2 \\ &< \frac{2n + 3l - 2}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_{d-4}) = 2$ . قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-4}}$ . از فرض استقراء داریم،  $\gamma_L(T') \leq \frac{(2n' + 3l' - 2)}{5}$ . فرض کنید  $S$  یک  $-\gamma_L(T')$  مجموعه باشد. در این صورت  $S \cup \{x_{d-3}, x_{d-1}\}$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای درخت  $T$  است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_L(T) &\leq \gamma_L(T') + 2 \\ &\leq \frac{2(n-5) + 3l - 2}{5} + 2 \\ &= \frac{2n + 3l - 2}{5}. \end{aligned}$$

در ادامه درخت‌هایی را که در تساوی کران فوق صدق می‌کنند، مشخص می‌کنیم. با استفاده از استقراء روی مرتبه  $n$  از درخت  $T$  با  $l$  برگ و  $\gamma_L(T) = \frac{2n+3l-2}{5}$  نشان می‌دهیم که  $T \in \mathcal{T}$ . چون  $P_3 \in \mathcal{T}$  گام اول واضح است. فرض کنید هر درخت  $T'$  از مرتبه  $n' < n$  با  $l'$  برگ و  $\gamma_L(T') = \frac{2n'+3l'-2}{5}$  عضوی از خانواده  $\mathcal{T}$  باشد. فرض کنید  $n = n(T) \geq 4$ . اگر  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی  $u$  باشد و  $v$  برگ مجاور  $u$  باشد. قرار دهید  $T' = T - v$ . با استفاده از

مشاهده ۱.۳.۴ نتیجه می‌گیریم که،  $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 1$ . بنابراین،

$$\begin{aligned} \gamma_L(T') &= \gamma_L(T) - 1 \\ &= \frac{2n + 3l - 2}{5} \\ &= \frac{2(n-1) + 3(l-1) - 2}{5} \\ &= \frac{2n(T') + 3l(T') - 2}{5}. \end{aligned}$$

طبق فرض استقراء  $T'$  عضوی از خانواده‌ی  $\mathcal{T}$  است. در این صورت درخت  $T$  از  $T'$  با عملگر  $\mathcal{O}_1$  بدست می‌آید و لذا  $T$  نیز عضوی از خانواده‌ی  $\mathcal{T}$  است. بنابراین در ادامه فرض می‌کنیم که  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی نیست. فرض کنید  $x_0, x_1, \dots, x_d$  یک مسیر قطری از درخت  $T$  باشد، درخت  $T$  را در برگ  $x_0$  ریشه‌دار می‌کنیم. با توجه به اثبات قسمت اول قضیه، نتیجه می‌گیریم که،  $d \geq 6$  و  $\deg(x_{d-2}) = \deg(x_{d-3}) = \deg(x_{d-4}) = 2$  چون  $\gamma_L(P_V) = 3 < \frac{2n(P_V) + 3P_V - 2}{5}$ ، نتیجه می‌گیریم که  $d \geq 7$ .

فرض کنید  $\deg(x_{d-5}) \geq 3$ . قرار دهید،  $T' = T - \{x_d, x_{d-1}, x_{d-2}, x_{d-3}, x_{d-4}\}$ . فرض کنید  $D$  یک  $-\gamma_L(T')$  مجموعه باشد. در این صورت  $D \cup \{x_{d-3}, x_{d-1}\}$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای درخت  $T$  است و لذا  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 2$ . با استفاده از قسمت اول قضیه نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_L(T) &\leq \gamma_L(T') + 2 \\ &\leq \frac{2n(T') + 3l(T') - 2}{5} + 2 \\ &\leq \frac{2(n-2) + 3(l-1) - 2}{5} + 2 \\ &< \frac{2n + 3l - 2}{5}, \end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین درجه  $x_{d-5}$  برابر ۲ است.

قرار دهید  $T^* = T - \{x_d, x_{d-1}, x_{d-2}, x_{d-3}, x_{d-4}\}$ . اگر  $D^*$  یک  $-\gamma_L(T^*)$  مجموعه باشد، آن‌گاه  $D^* \cup \{x_{d-3}, x_{d-1}\}$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای درخت  $T$  می‌باشد. بنابراین  $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T^*) + 2$ . با توجه به لم ۱.۳.۴،  $-\gamma_L(T)$  مجموعه  $D$  وجود دارد به طوری که

$$D \cap \{x_{d-3}, x_{d-2}, x_{d-1}, x_d\} = \{x_{d-3}, x_{d-1}\}$$

اگر  $x_{d-4} \in D$ ، آن‌گاه  $\{x_{d-5}\} \cup (D - \{x_{d-3}, x_{d-1}, x_d\})$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای درخت  $T^*$  می‌باشد و در غیر این صورت،  $D - \{x_{d-3}, x_{d-1}\}$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای درخت  $T^*$  است. پس  $\gamma_L(T^*) \leq \gamma_L(T) - 2$  و بنا به قبل نتیجه می‌شود که،  $\gamma_L(T^*) = \gamma_L(T) + 2$ .

بنابراین،

$$\begin{aligned}\gamma_L(T^*) &= \gamma_L(T) - 2 \\ &= \frac{2n + 3l - 2}{5} - 2 \\ &= \frac{2(n - 5) + 3l - 2}{5} \\ &= \frac{2n(T^*) + 3l(T^*) - 2}{5}.\end{aligned}$$

طبق فرض استقراء،  $T^* \in \mathcal{T}$ . در این صورت  $T$  از  $T^*$  با عملگر  $\mathcal{O}_2$  بدست می‌آید، پس  $T \in \mathcal{T}$ . طرف عکس قضیه از لم ۳.۳.۴ نتیجه می‌شود.

## ۴.۴ اثبات قضیه ۲.۲.۴

فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  با  $l$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد. همچنین فرض کنید  $D$  یک  $\gamma_L^T(T) -$  مجموعه باشد به طوری که  $|L(T) \cap D|$  مینیمم باشد. قرار دهید:  $B = \{v \notin D : N(v) \cap D = \emptyset\}$  و  $C = \{v \notin D : |N(v) \cap D| \geq 2\}$ . در این صورت  $V(T) = D \cup B \cup C$  باشد. فرض کنید  $Q_1 = D - (L(T) \cup S(T))$ ،  $Q_2 = B - L(T)$  و  $w$  تعداد مؤلفه‌های  $T[D]$  باشد. در این صورت  $D = (L(T) \cap D) \cup S \cup Q_1$ . با توجه به مینیمالیتی  $|L(T) \cap D|$ ، می‌توانیم فرض کنیم که،  $|L(T) \cap B| = s$  و  $|L(T) \cap D| = l - s$ . فرض کنید  $|[D, B \cup C]|$  تعداد یال‌هایی از درخت  $T$  باشد که یک سر آن‌ها در  $D$  و سر دیگر در  $B \cup C$  باشد. به وضوح  $|[D, B \cup C]| \geq |B| + 2|C| = 2n - 2|D| - |B|$  و همچنین  $|[D, B \cup C]| = n - 1 - |E(T[D])| - |E(T[Q_2 \cup C])|$ . بنابراین نتیجه می‌گیریم،

$$n - 1 - |E(T[D])| - |E(T[Q_2 \cup C])| \geq 2n - 2|D| - |B|.$$

**ادعا ۱.**  $|E(T[Q_2 \cup C])| \geq \frac{|Q_2|}{2}$  و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $K_1 + \frac{|Q_2|}{2} K_2 \cong |C| K_1$  و  $T[Q_2 \cup C]$  یک مجموعه مستقل در  $T[Q_2 \cup C]$  باشد.

**اثبات ادعای ۱.** چون برای هر  $v \in Q_2$ ،  $\deg(v) \geq 2$  می‌باشد،  $N(v) \cap (C \cup Q_2) \neq \emptyset$ . بنابراین

$$\begin{aligned}|E(T[Q_2 \cup C])| &= \frac{1}{2} \sum_{v \in Q_2 \cup C} \deg_{T[Q_2 \cup C]}(v) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{v \in Q_2} \deg_{T[Q_2 \cup C]}(v) \\ &\geq \frac{|Q_2|}{2}.\end{aligned}$$

فرض کنید که تساوی برقرار باشد، در این صورت

$$\frac{1}{2} \sum_{v \in Q_2 \cup C} \deg_{T[Q_2 \cup C]}(v) = \frac{1}{2} \sum_{v \in Q_2} \deg_{T[Q_2 \cup C]}(v) = \frac{|Q_2|}{2}.$$

بنابراین برای هر رأس  $v \in C$ ،  $\deg_{T[Q_2 \cup C]}(v) = 0$  و برای هر رأس  $v \in Q_2$ ،  $\deg_{T[Q_2 \cup C]}(v) = 1$  می‌باشد. در این صورت نتیجه می‌گیریم که،  $T[Q_2 \cup C] \cong \frac{|Q_2|}{4}K_2 + |C|K_1$  و همچنین  $C$  در  $T[Q_2 \cup C]$  یک مجموعه مستقل می‌باشد. طرف عکس ادعا واضح است.

**ادعا ۲.**  $|E(T[Q_2 \cup C])| \geq \frac{|D|}{4}$  و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $T[D] \cong \frac{|D|}{4}K_2$ . **اثبات ادعای ۲.** چون  $D$  یک مجموعه احاطه‌گر کلی برای درخت  $T$ ، می‌باشد، هر مؤلفه از  $T[D]$  دارای حداقل دو رأس می‌باشد. بنابراین  $w \leq \frac{|D|}{4}$  پس نتیجه می‌گیریم که،

$$|E(T[D])| = |D| - w \geq |D| - \frac{|D|}{4} = \frac{3|D|}{4}.$$

به‌علاوه، تساوی  $|E(T[D])| = \frac{|D|}{4}$  برقرار است اگر و تنها اگر  $T[D] \cong \frac{|D|}{4}K_2$ . از ادعای ۱ نتیجه می‌گیریم که،  $n - 1 - \frac{|D|}{4} - \frac{|Q_2|}{4} - |B| \leq n - 2|D| - |B| \leq n - 1 - \frac{|D|}{4} - \frac{|Q_2|}{4}$ . بنابراین  $|B| = |Q_2| + |B \cap L(T)|$ ، نتیجه می‌گیریم که،

$$n + 1 - \frac{|Q_2|}{4} - |B \cap L(T)| = n + 1 - \frac{|Q_2|}{4} - S \leq \frac{3|D|}{4}.$$

به وضوح هر رأس از  $D$  مجاور حداکثر یک رأس از  $Q_2$  است. اگر  $u \in D \cap (L(T) \cup S(T))$  مینیمالیتی  $D$  نتیجه می‌دهد که،  $Q_2 \cap N(u) = \emptyset$ . بنابراین

$$|Q_2| \leq |D| - |L(T) \cap D \cup S(T)| = |D| - L.$$

از روابط بالا نتیجه می‌شود که،  $|D|(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}) \leq n + 1 + \frac{L}{4} - S$ . بنابراین،

$$\gamma_t^L(T) \geq \frac{1}{4}(n + \frac{L}{4} - S + 1).$$

لذا اثبات این قسمت از قضیه کامل می‌شود.

حال فرض کنید که،  $\gamma_t^L(T) = \frac{1}{4}(n + \frac{L}{4} - S + 1)$ . در این صورت از اثبات قسمت اول قضیه نتیجه می‌گیریم که،

$$\bullet |E(T[Q_2 \cup C])| \cong \frac{|Q_2|}{4}K_2 + |C|K_1$$

•  $C$  یک مجموعه مستقل در  $T[Q_2 \cup C]$  است.

$$\bullet |N(v) \cap D| = 2, v \in C$$

$$\bullet |Q_2| = |D| - L \text{ و } T[D] \cong \frac{|D|}{4}K_2$$

رابطه‌ی  $|Q_1| = |D| - l$ ، نتیجه می‌دهد که  $|Q_1| = |Q_2|$ . اگر  $|Q_1| = |Q_2| = 0$ ، آن‌گاه  $D \subseteq L(T) \cup S(T)$ . چون  $|Q_2| = 0$  و  $T[D] = \frac{|D|}{4}K_2$ ، برای هر مؤلفه  $C$  از  $T[D \cup B]$ ،  $\gamma_t^L(C') = 2$  بنابراین  $C' = P_3$  یا  $C' = P_4$ . همچنین این حقیقت که هر رأس در  $C'$  مجاور دقیقاً دو رأس در  $D$  می‌باشد، نتیجه می‌دهد که  $T \in \xi$ . حال فرض کنید  $|Q_1| = |Q_2| \neq 0$ . اگر  $T_1, T_2, \dots, T_{w_1}$  مؤلفه‌های  $T[D \cup B]$  باشند، آن‌گاه به وضوح  $D \cap V(T_i)$  یک مجموعه احاطه‌گر

مکانی از درخت  $T_i$  برای  $i = 1, 2, \dots, w_1$  می‌باشد. بنابراین،

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \left( n + \frac{L}{\gamma} - S + 1 \right) = |D| &= \sum_{i=1}^{w_1} |D \cap V(T_i)| \\ &\geq \sum_{i=1}^{w_1} \gamma_t^L(T_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^{w_1} \frac{1}{\gamma} \left( |V(T_i)| + \frac{L(i)}{\gamma} - S(T_i) + 1 \right) \\ &= \left( n - (w_1 - 1) \frac{L}{\gamma} - S + w_1 \right) \\ &= \left( n + \frac{L}{\gamma} - S + 1 \right). \end{aligned}$$

پس برای هر  $i = 1, 2, \dots, w_1$ ،  $\sum_{i=1}^{w_1} \gamma_t^L(T_i) = \sum_{i=1}^{w_1} \frac{1}{\gamma} \left( |V(T_i)| + \frac{L(i)}{\gamma} - S(T_i) + 1 \right)$ . اگر مؤلفه  $T_i$  وجود داشته باشد به طوری که  $V(T_i) \cap Q_2 = \emptyset$ ، آن‌گاه مثل قبل نتیجه می‌گیریم که  $T_i \in \{P_3, P_4\}$ . حال فرض کنیم که برای مؤلفه  $T_i$ ،  $V(T_i) \cap Q_2 \neq \emptyset$ . نشان می‌دهیم که عدد صحیح  $k$  وجود دارد به طوری که  $T_i$  یک مسیر از مرتبه  $4k$  است. فرض کنید  $v \in V(T_i)$  و  $\deg_{T_i}(v) \geq 3$ . قرار دهید  $\{x, y, z\} \subseteq N(v)$ . فرض کنید  $v \in D$  در این صورت از  $T[D] \cong \frac{|D|}{\gamma} K_2$ ، نتیجه می‌گیریم که  $\{y, z\} \subseteq B$ . بنابراین  $N(y) \cap D = N(z) \cap D = \{v\}$  که یک تناقض است. بنابراین  $v \notin D$  و لذا  $v \in B$  می‌باشد. با توجه به این که  $T[Q_2 \cup C] \cong \frac{|Q_2|}{\gamma} K_2 + |C| K_1$ ، می‌توانیم فرض کنیم که  $\{y, z\} \subseteq D$ . در این صورت  $|N(y) \cap D| \geq 2$  که با  $v \in B$  در تناقض است. بنابراین  $\deg_{T_i}(v) \leq 2$ ، پس  $T_i$  یک مسیر است. چون  $V(T_i) \cap Q_2 \neq \emptyset$ ،  $|V(T_i)| \geq 5$  و بنابراین  $l = s = 2$ . در این صورت  $\gamma_t^L(T_i) = \frac{|V(T_i)|}{\gamma}$  و لذا از قضیه ۹.۲.۲ نتیجه می‌گیریم که  $T_i$  یک مسیر از مرتبه  $4k$  برای یک عدد صحیح  $k$  می‌باشد. بنابراین برای  $i = 1, 2, \dots, w_1$  نتیجه می‌شود که  $T_i \in \zeta$ . از این که هر رأس  $C$  مجاور دقیقاً دو رأس  $D$  می‌باشد. نتیجه می‌گیریم که  $T \in \xi$ . اثبات عکس قضیه واضح است.

# فصل ۵

## احاطه‌گری رومی مکانی در گراف‌ها

### ۱.۵ مقدمه

برای گراف  $G$ ، فرض کنید  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  یک تابع و  $(V_0, V_1, V_2)$  یک افراز مرتب از  $V(G)$  القا شده توسط  $f$  باشد به طوری که برای  $i = 0, 1, 2$ ،  $V_i = \{v \in V(G) \mid f(v) = i\}$ . یک تناظر یک به یک بین تابع  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  و افراز مرتب  $(V_0, V_1, V_2)$  از مجموعه  $V(G)$  وجود دارد. بنابراین، برای سادگی می‌نویسیم  $f = (V_0, V_1, V_2)$ . تابع  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  تابع **احاطه‌گر رومی**<sup>۱</sup> نامیده می‌شود هرگاه هر رأس  $u$  که  $f(u) = 0$  با حداقل یک رأس  $v$  که  $f(v) = 2$  مجاور باشد. وزن<sup>۲</sup> یک تابع احاطه‌گر رومی  $f$  برابر با مقدار  $\sum_{v \in V(G)} f(v)$  است و با  $f(V(G))$  یا  $w(f)$  نشان داده می‌شود. **عدد احاطه‌گر رومی**<sup>۳</sup> گراف  $G$ ،  $\gamma_R(G)$  کم‌ترین وزن بین تمام توابع احاطه‌گر رومی در گراف  $G$  است. یک تابع  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  را  $\gamma_R(G)$ -**تابع** گویند، هرگاه  $f(V(G)) = \gamma_R(G)$ . گراف  $G$  را **گراف رومی**<sup>۴</sup> گویند هرگاه  $\gamma_R(G) = 2$ .

در این فصل، مفهوم احاطه‌گری رومی را به احاطه‌گری رومی مکانی تعمیم می‌دهیم. تابع احاطه‌گر رومی  $f = (V_0, V_1, V_2)$ ، **تابع احاطه‌گر رومی مکانی**<sup>۵</sup> نامیده می‌شود هرگاه برای هر رأس  $u$  که  $f(u) = 0$  مجموعه‌ی  $N(u) \cap V_2$  منحصر به فرد باشد. یا به عبارت دیگر برای هر دو رأس  $u$  و  $v$  از  $V_0$ ،  $N(u) \cap V_2 \neq N(v) \cap V_2$ . وزن یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی  $f$  برابر با مقدار

<sup>۱</sup>Roman dominating function

<sup>۲</sup>Weight

<sup>۳</sup>Roman domination number

<sup>۴</sup>Roman graph

<sup>۵</sup>Locating Roman dominating function

۶ عدد احاطه‌گر رومی مکانی است و با  $f(V(G))$  یا  $w(f)$  نشان داده می‌شود.  $\sum_{v \in V(G)} f(v)$  کم‌ترین وزن بین تمام توابع احاطه‌گر رومی مکانی در گراف  $G$  است. یک تابع  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  را  $\gamma_R^L(G)$ -تابع می‌نامیم، هرگاه  $f(V(G)) = \gamma_R^L(G)$ . گراف  $G$  را **گراف رومی مکانی<sup>۷</sup>** گوییم، هرگاه  $\gamma_R^L(G) = 2\gamma_L(G)$ .

اگر یال  $e$  از گراف  $G$  حذف شود عدد احاطه‌گر رومی مکانی می‌تواند افزایش پیدا کند و یا بدون تغییر باقی بماند. به‌عنوان مثال. اگر  $G = P_5$ ، آن‌گاه  $\gamma_R^L(G) = 4$  و برای هر یال  $e$  از  $E(G)$ ،  $\gamma_R^L(G - e) = 5$  و اگر  $G = P_3$ ، آن‌گاه برای هر یال  $e \in E(G)$ ،  $\gamma_R^L(G - e) = 3$ . یک گراف  $G$  را **احاطه‌گر رومی مکانی یال بحرانی<sup>۸</sup>** یا فقط  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی گوییم هرگاه برای هر  $e \in E(G)$ ،  $\gamma_R^L(G) < \gamma_R^L(G - e)$ .

لم زیر که برای اثبات نتایج بعدی مفید خواهد بود، نتیجه ساده‌ای از تعریف تابع احاطه‌گر رومی مکانی می‌باشد.

**لم ۱.۱.۵.** فرض کنید  $f = (v_0, v_1, v_2)$  یک  $\gamma_R^L(G)$ -تابع باشد. در این صورت،  
 •  $V_1 \cup V_2$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای  $G$  است.  
 •  $V_2$  یک  $\gamma_L(G[V_0 \cup V_2])$ -مجموعه است.

به آسانی می‌توان دید که عدد احاطه‌گر رومی مکانی یک گراف ناهمبند برابر با مجموع عدد احاطه‌گر رومی مکانی مؤلفه‌های آن می‌باشد. بنابراین در این فصل گراف‌ها را همبند در نظر می‌گیریم.

در بخش ۲.۵ نشان می‌دهیم که مسئله عدد احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف‌های دوبخشی و وتری یک مسئله  $NP$  می‌باشد. همچنین ما چند کران بالا برای عدد احاطه‌گر رومی مکانی ارائه می‌دهیم و گراف‌هایی که در این کران‌ها صدق می‌کنند را دسته‌بندی می‌کنیم. در بخش ۴.۵ ارتباط عدد احاطه‌گر رومی مکانی با عدد احاطه‌گر رومی و عدد احاطه‌گر مکانی هر گراف را بررسی می‌کنیم. در بخش ۵.۵ همه گراف‌های  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی را مشخص می‌کنیم.

## ۲.۵ پیچیدگی عدد احاطه‌گر رومی مکانی

در این بخش نشان می‌دهیم که مسأله احاطه‌گری رومی مکانی برای گراف‌های دوبخشی و وتری  $NP$ -کامل است. مسأله تصمیم‌گیری زیر را در نظر بگیرید.

### مسأله احاطه‌گری رومی مکانی

**نمونه:** گراف  $G = (V, E)$  و عدد صحیح  $k$ .

**سوال:** آیا  $G$  دارای تابع احاطه‌گر رومی مکانی از اندازه حداکثر  $k$  است؟

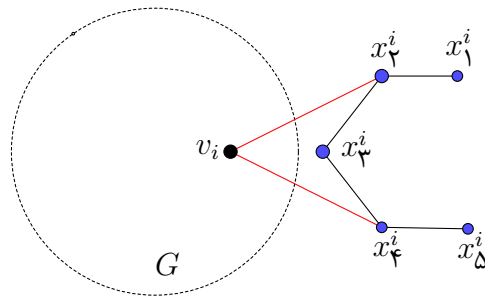
ما برای اثبات  $NP$ -کامل بودن مسأله از مسأله احاطه‌گری رومی زیر استفاده می‌کنیم که

<sup>۶</sup> Locating Roman domination number

<sup>۸</sup> Locating Roman edge critica

<sup>۷</sup> Locating Roman graph





شکل ۱.۵: ساختار گراف  $H$  در قضیه ۲.۲.۵.

می‌دانیم یک مسأله  $NP$  - کامل است.

### مسأله احاطه‌گری رومی

نمونه: گراف  $G = (V, E)$  و عدد صحیح  $k$ .

سوال: آیا  $G$  دارای تابع احاطه‌گر رومی از اندازه حداکثر  $k$  است؟

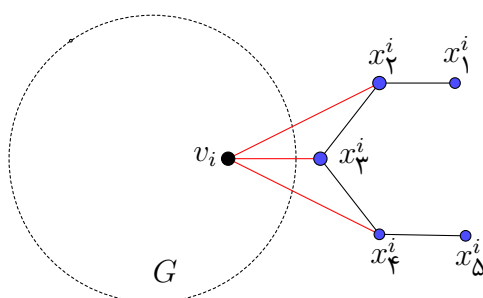
لیو و چنگ در [۱۴۸] پیچیدگی مسأله احاطه‌گر رومی را بررسی کردند و قضیه زیر را بدست آوردند.

قضیه ۱.۲.۵. [۱۴۸] مسأله احاطه‌گر رومی برای گراف‌های دوبخشی و وتری  $NP$  - کامل است.

قضیه ۲.۲.۵. مسأله احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف‌های دوبخشی  $NP$  - کامل است.

برهان. فرض کنید  $G$  گرافی دوبخشی با مجموعه رئوس  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  است. گراف  $H$  را از گراف  $G$  با وصل کردن هر رأس  $v_i$  از  $G$  به رئوس پشتیبان  $x_1^i$  و  $x_2^i$  از یک مسیر  $P_5: x_1^i x_2^i x_3^i x_4^i x_5^i$  بدست می‌آوریم. شکل ۱.۵ را ببینید. توجه کنید که  $|V(H)| = 6|V(G)|$ . هر  $\gamma_R(G)$  - تابع را با دادن وزن ۲ به  $x_1^i$  و  $x_2^i$  و وزن صفر به  $x_3^i, x_4^i$  و  $x_5^i$  می‌توان به یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی توسیع داد. بنابراین  $\gamma_R^L(H) \leq \gamma_R(G) + 4n$ . فرض کنید  $f$  یک  $\gamma_R^L(H)$  - تابع باشد. به‌وضوح برای هر  $i = 1, 2, \dots, n$ ،  $4 \leq f(x_1^i) + f(x_2^i) + \dots + f(x_5^i) \leq 5$ ، اگر برای یک  $i$ ،  $f(x_1^i) + f(x_2^i) + \dots + f(x_5^i) = 5$ ، آن‌گاه می‌توانیم فرض کنیم که  $f(v_i) = 0$ . در این صورت می‌توان  $f(x_1^i)$  و  $f(x_2^i)$  را به ۲،  $f(x_3^i)$ ،  $f(x_4^i)$  و  $f(x_5^i)$  را به ۰ و  $f(v_i)$  را به ۱ تغییر داد. بنابراین ما می‌توانیم فرض کنیم که برای هر  $i = 1, 2, \dots, n$ ،  $f(x_1^i) + f(x_2^i) + f(x_3^i) + f(x_4^i) + f(x_5^i) = 4$ ،  $f(x_3^i) = 0$  و  $f(x_4^i) = f(x_5^i) = 2$ ، در این صورت به‌وضوح  $f|_{V(G)}$  یک تابع احاطه‌گر رومی برای گراف  $G$  از وزن  $\gamma_R^L(H) - 4n$  می‌باشد. بنابراین  $\gamma_R^L(H) = \gamma_R(4) + 4n$ . پس  $NP$  - کامل بودن مسأله احاطه‌گر رومی مکانی از  $NP$  - کامل بودن مسأله احاطه‌گر رومی نتیجه می‌شود.  $\square$

قضیه ۳.۲.۵. مسأله احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف‌های وتری  $NP$  - کامل است.



شکل ۲.۵: ساختار گراف \$H\$ در قضیه ۳.۲.۵.

برهان. فرض کنید \$G\$ یک گراف وتتری با مجموعه رئوس \$v(G) = \{V\_1, \dots, V\_n\}\$ باشد و گراف \$H\$ از گراف \$G\$ با وصل کردن هر رأس \$v\_i\$ از \$G\$ به رئوس \$x\_2^i, x\_3^i, x\_4^i\$ از یک مسیر \$P\_5 = x\_1^i x\_2^i x\_3^i x\_4^i x\_5^i\$ بدست می‌آید. شکل ۲.۵ را ببینید. مشابه با اثبات قضیه ۲.۲.۵ می‌توان نشان داد که  $\gamma_R^L(H) = \gamma_R(G) + 4n$ . بنابراین  $NP$  - کامل بودن مسأله احاطه‌گر رومی مکانی در گراف‌های وتتری از  $NP$  - کامل بودن مسأله احاطه‌گر رومی مکانی در این گراف‌ها نتیجه می‌شود.  $\square$

### ۳.۵ کران‌هایی برای عدد احاطه‌گر رومی مکانی

قضیه ۱.۳.۵. اگر \$G\$ یک گراف باشد، آن‌گاه

$$\gamma_R^L(G) = \min\{2\gamma_L(G - S) + |S| : S \text{ یک مجموعه مستقل است}\}.$$

برهان. فرض کنید \$f = (V\_0, V\_1, V\_2)\$ یک \$\gamma\_R^L(G)\$ - تابع باشد، به طوری که \$|V\_2|\$ ماکسیمم است. در این صورت \$V\_1\$ یک مجموعه مستقل است. فرض کنید \$G - V\_1\$ گراف به دست آمده از \$G\$ با حذف همه رأس‌های \$V\_1\$ باشد. از لم ۱.۱.۵ نتیجه می‌شود که \$V\_2\$ یک \$\gamma\_L(G - V\_1)\$ - مجموعه است. بنابراین

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(G) &= 2|V_2| + |V_1| = 2\gamma_L(G - V_1) + |V_1| \\ &\geq \min\{2\gamma_L(G - S) + |S| : S \text{ یک مجموعه مستقل است}\}. \end{aligned}$$

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید \$S\$ یک مجموعه مستقل باشد، که \$2\gamma\_L(G - S) + |S|\$ مینیمم است و همچنین فرض کنید \$S'\$ یک \$\gamma\_L(G - S)\$ - مجموعه باشد. در این صورت تابع \$(V - (S \cap S'), S, S')\$ یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای \$G\$ می‌باشد و بنابراین

$$\gamma_R^L(G) \leq 2|S'| + |S| = \min\{2\gamma_L(G - S) + |S| : S \text{ یک مجموعه مستقل است}\}.$$

$\square$

گزاره ۱.۳.۵. اگر  $G$  گرافی احاطه‌گر رومی مکانی از مرتبه  $n \geq 2$  باشد، آن‌گاه،

$$\gamma_R^L(G) \geq \lfloor 2 \log_2^n \rfloor,$$

و کران فوق قابل دستیابی است.

برهان. فرض کنید  $G$  یک گراف احاطه‌گر رومی مکانی باشد. طبق گزاره ۴.۴.۵،  $\gamma_R^L(G)$  - تابع  $f = (V_0, V_1, V_2)$  وجود دارد که  $|V_1| = 0$ . به وضوح برای هر  $v \in V_0$ ،  $N(v) \cap V_2 \neq \emptyset$ . چون  $V_2$  دارای حداکثر  $2^{|V_2|} - 1$  زیر مجموعه ناتهی است و همچنین برای هر دو رأس  $u, v \in V_0$   $N(u) \cap V_2 \neq N(v) \cap V_2$  نتیجه می‌گیریم که،  $n - |V_2| = |V_0| \leq 2^{|V_2|} - 1$ . بنابراین

$$n \leq 2^{|V_2|} + |V_2| - 1 < 2^{|V_2|} + 2^{|V_2|} = 2^{|V_2|+1}.$$

پس  $|V_2| > \log_2^n - 1$  و در نتیجه،

$$\gamma_R^L(G) = 2^{|V_2|} \geq \lfloor 2 \log_2^n \rfloor.$$

□ اگر  $G = P_n$ ، آن‌گاه  $\gamma_R^L(G) = 4 = \lfloor 2 \log_2^n \rfloor$  و لذا کران قابل دستیابی است.

گزاره ۲.۳.۵. اگر  $G$  یک گراف احاطه‌گر رومی مکانی با ماکسیمم درجه  $\Delta \geq 2$  باشد، آن‌گاه،

$$\gamma_R^L(G) \geq \frac{4n}{3 + \Delta}.$$

به علاوه این کران قابل دستیابی است.

برهان. فرض کنید  $G$  یک گراف احاطه‌گر رومی مکانی باشد. با توجه به گزاره ۴.۴.۵،  $\gamma_R^L(G)$  - تابع  $f = (V_0, V_1, V_2)$  وجود دارد به طوری که  $V_1 = \emptyset$ . برای نشان دادن  $\frac{4n}{3 + \Delta} \leq \gamma_R^L(G)$ ، تعداد یال‌های بین دو مجموعه  $V_0$  و  $V_2$  را می‌شماریم. فرض کنید  $||V_0, V_2||$  تعداد یال‌های بین دو مجموعه  $V_0$  و  $V_2$  است. مجموعه رئوسی از  $V_0$  که مجاور دقیقاً یک رأس از  $V_2$  می‌باشد را با  $L$  نشان می‌دهیم. همچنین مجموعه رئوسی از  $V_0$  که مجاور حداقل دو رأس از  $V_2$  می‌باشد را با  $T$  نشان می‌دهیم. فرض کنید  $|L| = l$ ، در این صورت  $|T| = n - |V_2| - 1$ . این حقیقت که  $V_2$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی می‌باشد، نتیجه می‌دهد  $l \leq |V_2|$ . بنابراین،

$$\begin{aligned} ||V_0, V_2|| &\geq |L| + 2|T| \\ &= l + 2(n - |V_2| - 1) \\ &= 2n - 2|V_2| - l \\ &= 2n - 3|V_2|. \end{aligned}$$

از طرفی  $||V_2, V_0|| \leq |V_2| \Delta$ . بنابراین  $2n - 3|V_2| \leq |V_2| \Delta$  و لذا،

$$\gamma_R^L(G) = 2^{|V_2|} \geq \frac{4n}{3 + \Delta}.$$

□ برای قابل دستیابی بودن کران، قرار دهید  $G = P_5$ .

قضیه ۲.۳.۵. برای هر گراف  $G$ ,

$$|\gamma_R^L(G) - \gamma_R^L(\bar{G})| \leq 1.$$

برهان. فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(G)$ -تابع است. اگر برای هر  $x \in V_0$ ،  $|N_G(x) \cap V_2| \leq |V_2|$ ، آن‌گاه برای هر  $x \in V_0$ ،  $N_{\bar{G}}(x) \cap V_2 \neq \emptyset$ . بنابراین  $f$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای  $\bar{G}$  می‌باشد. برای هر دو رأس  $x, y \in V_0$

$$N_{\bar{G}}(x) \cap V_2 = V_2 - N_G(x) \neq V_2 - N_G(y) = N_{\bar{G}}(y) \cap V_2.$$

بنابراین  $f$  یک تابع احاطه‌گر مکانی برای گراف  $\bar{G}$  می‌باشد، لذا  $\gamma_R^L(\bar{G}) \leq \gamma_R^L(G)$ . حال فرض کنید رأس  $x, y \in V_0$  وجود داشته باشد به طوری که  $|N_G(x) \cap V_2| = |V_2|$ . چون  $f$  یک  $\gamma_R^L(G)$ -تابع است،  $x$  تنها رأس با این خاصیت است. قرار دهید  $H = \bar{G} - x$ . در این صورت  $f|_{V(H)}$  یک تابع احاطه‌گر مکانی برای  $H$  است. همچنین تابع  $g$  روی  $V(\bar{G})$  با ضابطه‌ی  $g(x) = 1$  و برای  $a \neq x$  یک  $g(u) = f(u)$  تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای  $\bar{G}$  می‌باشد. بنابراین  $\gamma_R^L(\bar{G}) \leq \gamma_R^L(G) + 1$  و به طریق مشابه می‌توان نتیجه گرفت که  $\gamma_R^L(G) \leq \gamma_R^L(\bar{G}) + 1$  و لذا اثبات قضیه کامل است.  $\square$

با استفاده از قضیه ۲.۳.۵ نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۱.۳.۵. برای هر گراف  $G$  از مرتبه  $n \geq 2$ ,

$$2\gamma_R^L(G) - 1 \leq \gamma_R^L(G) + \gamma_R^L(\bar{G}) \leq 2\gamma_R^L(G) + 1.$$

## عدد احاطه‌گر رومی مکانی برای مسیرها و دورها

در این بخش عدد احاطه‌گر رومی مکانی دورها و مسیرها را بدست می‌آوریم. در ابتدا لم زیر که برای اثبات قضیه اصلی بسیار مفید می‌باشد را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۳.۵. فرض کنید  $H$  گرافی باشد که از گراف  $G$  با وصل کردن رأسی از  $G$  به برگی از مسیر  $P_8$  بدست می‌آید، در این صورت،  $\gamma_R^L(H) = \gamma_R^L(G) + 4$ .

برهان. فرض کنید  $G$  یک گراف و  $u \in V(G)$  همچنین فرض کنید  $H$  از گراف  $G$  با متصل کردن  $u$  به برگ  $v_8$  از مسیر  $P_8: v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8$  بدست آمده باشد. هر  $\gamma_R^L(G)$ -تابع را می‌توان با دادن وزن ۲ به  $v_2, v_4$  و وزن صفر به  $v_1, v_3, v_5$  و  $v_7$  به یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی از  $H$  توسیع داد. بنابراین  $\gamma_R^L(H) \leq \gamma_R^L(G) + 4$ . حال فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(G)$ -تابع باشد. فرض کنید که  $f(v_8) = 0$ . در این صورت  $f(v_8) + f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) + f(v_4) \geq 4$ . حال فرض کنید تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای  $G$  می‌باشد. بنابراین  $\gamma_R^L(G) \leq \gamma_R^L(H) - 4$ . حال فرض کنید  $f(v_8) \neq 0$ . در این صورت  $f(v_8) + f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) + f(v_4) + f(v_5) \geq 5$  و تابع  $g$  با ضابطه  $g(u) = 1$  و برای هر رأس  $x \neq u$ ،  $g(x) = f(x)$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای  $G$  می‌باشد و لذا  $\gamma_R^L(G) \leq \gamma_R^L(H) - 4$ . بنابراین نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_R^L(H) = \gamma_R^L(G) + 4$ .  $\square$

قضیه ۳.۳.۵. اگر  $P_n$  و  $C_n$  به ترتیب دور و مسیر از مرتبه  $n \geq 3$  باشند، آن‌گاه

$$\gamma_R^L(P_n) = \gamma_R^L(C_n) = \lceil 4n/5 \rceil$$

برهان. با استفاده از لم ۱.۳.۵ و استقرا روی مرتبه  $n$  به آسانی می‌توان نشان داد  $\gamma_R^L(P_n) = \lceil 4n/5 \rceil$ . برای اثبات گزاره کافی است نشان دهیم که  $\gamma_R^L(P_n) = \gamma_R^L(C_n)$ . چون هر  $\gamma_R^L(P_n) - \gamma_R^L(C_n) \leq$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای  $C_n$  نیز می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_R^L(C_n) \leq \gamma_R^L(P_n)$ . حال فرض کنید که  $f$  یک  $\gamma_R^L(C_n) - \gamma_R^L(P_n)$  تابع باشد. اگر برای هر یال  $uv$  از  $C_n$ ،  $\{f(u), f(v)\} = \{0, 2\}$  باشد، آن‌گاه  $\gamma_R^L(P_n) = n \geq \lceil \frac{4n}{5} \rceil = \gamma_R^L(C_n)$ . بنابراین فرض می‌کنیم که یال  $uv$  وجود دارد به طوری که  $\{f(u), f(v)\} \neq \{0, 2\}$ . در این صورت  $f$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای  $P_n = C_n - uv$  می‌باشد و لذا  $\gamma_R^L(P_n) = \lceil 4n/5 \rceil \leq \gamma_R^L(C_n)$ . بنابراین نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_R^L(C_n) = \gamma_R^L(P_n) = \lceil 4n/5 \rceil$ .  $\square$

## ۴.۵ ارتباط عدد احاطه‌گر رومی مکانی با پارامترهای دیگر

در این بخش ما رابطه بین عدد احاطه‌گر رومی و عدد احاطه‌گر مکانی را با عدد احاطه‌گر رومی مکانی بررسی می‌کنیم.

### ارتباط عدد احاطه‌گر رومی مکانی با عدد احاطه‌گر رومی

گزاره ۱.۴.۵. فرض کنید  $G$  یک گراف همبند از مرتبه  $n \geq 2$  باشد، آن‌گاه

$$\gamma_R(G) \leq \gamma_R^L(G) \leq \frac{\Delta+1}{4} \gamma_R(G).$$

برهان. چون هر تابع احاطه‌گر رومی مکانی یک تابع احاطه‌گر رومی می‌باشد، کران پایین همواره برقرار است. برای اثبات کران بالا فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R(G)$  تابع باشد به طوری که  $V_2 \neq \emptyset$ . برای هر رأس  $v \in V_2$  به  $|p_n(v, V_0)| - 1$  از رئوس  $pn(v, V_0)$  وزن ۱ می‌دهیم. در این صورت تابع جدید یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای  $G$  می‌باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(G) &\leq W(f) \leq \gamma_R(G) + (\Delta - 1)|V_2| \\ &\leq \gamma_R(G) + (\Delta - 1) \frac{\gamma_R(G)}{4} \\ &= \frac{\Delta + 1}{4} \gamma_R(G). \end{aligned}$$

$\square$

قضیه ۱.۴.۵. اگر  $\gamma_R^L(G) = \frac{\Delta+1}{4} \gamma_R(G)$ ، آنگاه  $G$  یک گراف رومی از مرتبه  $n = \gamma(G)(1 + \Delta(G))$  باشد و همچنین  $diam(G) \leq 3$  می‌باشد و  $\gamma_R^L(G) = n$  یا

برهان. فرض کنید  $\gamma_R^L(G) = \frac{\Delta+1}{\Delta} \gamma_R(G)$  و  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R(G) -$  تابع باشد به طوری که  $V_2 \neq \emptyset$ . از اثبات گزاره ۱.۴.۵ نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_R(G) + (\Delta - 1)|V_2| = \frac{\Delta+1}{\Delta} \gamma_R(G)$  ، لذا  $|V_1| = \emptyset$  و همچنین برای هر رأس  $v \in V_2$  ،  $|pn(v, V_0)| = \Delta$  و  $n = |v_2|(1 + \Delta(G))$  ، بنابراین  $G$  یک گراف رومی است. بنابراین  $|V_2| = \gamma(G)$  و لذا  $n = \gamma(G)(1 + \Delta(G))$  و همچنین  $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$  . در این صورت  $\gamma_R^L(G) = \frac{\Delta+1}{\Delta} \gamma_R(G) = n$  اکنون فرض کنید  $diam(G) \geq 4$  و  $x_4, x_3, x_2, x_1, x_0$  پنج رأس متوالی از یک مسیر قطری در گراف  $G$  می‌باشد. در این صورت  $h = (\{x_0, x_2, x_4\}, V(G) - \{x_4, x_3, x_2, x_1, x_0\}, \{x_1, x_3\})$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی از  $G$  با وزن  $n - 1$  می‌باشد که یک تناقض است. بنابراین  $diam(G) \leq 3$  .  $\square$

**لم ۱.۴.۵.** فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  باشد. در این صورت  $\gamma_R^L(T) = \frac{\Delta+1}{\Delta} \gamma_R(T)$  اگر و تنها اگر  $T$  یک ستاره باشد.

برهان. فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  و  $\gamma_R^L(T) = \frac{\Delta+1}{\Delta} \gamma_R(T)$  باشد. طبق قضیه ۱.۴.۵ ،  $diam(T) \leq 3$  و  $\gamma_R^L(T) = n$  ، فرض کنید  $diam(T) = 3$  ، در این صورت  $T$  یک ستاره دوگانه  $S_{a,b}$  است. فرض کنید  $a \geq b$  . اگر  $b \geq 3$  ، آنگاه  $\gamma_R(T) = 4$  ، بنابراین  $n = \gamma_R^L(T) = \frac{\Delta+1}{\Delta} \gamma_R(T)$  و لذا  $a = \frac{n-2}{\Delta}$  و  $b = \frac{n+2}{\Delta}$  که با  $b \geq a$  در تناقض است. بنابراین  $b = 2$  . اگر  $a = 2$  ، آنگاه  $T = P_4$  و لذا  $\gamma_R^L(T) = \frac{\Delta+1}{\Delta} \gamma_R(T) = 4 \neq \gamma_R^L(T) = 4$  ، که یک تناقض است. بنابراین  $diam(T) \leq 2$  و لذا  $T$  یک ستاره است. طرف عکس واضح است.  $\square$

### درختان $T$ با $\gamma_R^L(T) = \gamma_R(T)$

در این بخش همه درختان  $T$  با  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R(T)$  را مشخص می‌کنیم.

**لم ۲.۴.۵.** فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n > 2$  باشد و همچنین  $f = (v_0, v_1, v_2)$  یک  $\gamma_R^L(T) -$  تابع باشد به طوری که  $|V_2|$  ماکسیمم است. در این صورت اگر  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R(T)$  ، آن‌گاه

$$(1) \quad |V_1| = 0 .$$

(۲) رأس پشتیبان قوی ندارد.

(۳) هیچ دو رأس پشتیبانی از درخت  $T$  مجاور نیستند.

(۴) رأس  $v$  پشتیبان است اگر و تنها اگر  $f(v) = 2$  .

(۵) هر رأس در  $v(T)$  یک برگ، یک رأس پشتیبان و یا دارای دقیقاً دو رأس مجاور پشتیبان می‌باشد.

(۶) برای هر رأس  $v \in V(T)$  ،  $\gamma_R(T - v) \leq \gamma_R(T)$  .

برهان. فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n > 2$  ،  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R(T)$  و  $f$  یک  $\gamma_R^L(T)$  تابع باشد به طوری که  $|V_2|$  ماکسیمم است.

(۱). به کمک برهان خلف نشان می‌دهیم که  $|V_1| = 0$  . فرض کنید  $|V_1| > 0$  . قرار دهید  $v \in V_1$  .

چون  $|V_2|$  ماکسیمم هست،  $N(v) \subseteq V_0$ . قرار دهید  $a \in N(v)$ . فرض کنید  $|N(u) \cap V_2| = 1$  و  $N(u) \cap V_2 = \{w\}$ . در این صورت  $pn(w, V_0) = \{u\}$  و تابع  $g: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  با ضابطه  $g(u) = 2$ ،  $g(v) = g(w) = 0$  و اگر  $g(x) = f(x)$ ،  $x \notin \{w, u, x\}$  یک تابع احاطه گر رومی برای درخت  $T$  با وزن کمتر از  $1 - \gamma_R(T)$  می باشد، که یک تناقض است. بنابراین فرض می کنیم که  $|N(u) \cap V_2| \geq 2$ . قرار دهید  $\{y, w\} \subseteq N(u) \cap V_2$ . فرض کنید  $pn(w, v_0) = \{w_0\}$  و  $pn(y, v_0) = \{y_0\}$ . در این صورت تابع  $g: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  با ضابطه  $g(u) = 2$ ،  $g(v) = 0$ ،  $g(w) = g(y) = 0$  و اگر  $g(x) = f(x)$ ،  $x \notin \{w, v, u, y, y_0, w_0\}$  یک تابع احاطه گر رومی برای درخت  $T$  با وزن کمتر از  $1 - \gamma_R(T)$  می باشد، که یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

(۲). فرض کنید راس پشتیبان قوی  $x$  وجود دارد و  $x_1$  و  $x_2$  دو برگ مجاور از آن باشند. اگر  $x \in V_0$  آن گاه طبق قسمت (۱)،  $\{x_1, x_2\} \subseteq V_2$  در این صورت با تغییر وزن راس  $x$  به ۲ و رئوس  $x_1$  و  $x_2$  به صفر یک تابع احاطه گر رومی برای درخت  $T$  با وزن کمتر از  $\gamma_R(T)$  به دست می آید، که یک تناقض است. بنابراین  $f(x) = 2$  در این صورت حداقل یکی از رئوس  $x_1$  یا  $x_2$  دارای وزن ۱ می باشند، که طبق قسمت (۱)، یک تناقض است. بنابراین درخت  $T$  دارای راس پشتیبان قوی نیست.

(۳). فرض کنید  $u$  و  $v$  دو راس پشتیبان مجاور باشند. همچنین فرض کنید  $u_1$  برگ مجاور  $u$  و  $v_1$  برگ مجاور  $v$  باشد. طبق قسمت (۱)،  $f(u) = 2$  و  $f(u_1) = 0$  یا  $f(u_1) = 2$  و  $f(u) = 0$  و به همین ترتیب  $f(v) = 2$  و  $f(v_1) = 0$  یا  $f(v_1) = 2$  و  $f(v) = 0$ . در این صورت تابع  $g: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  با ضابطه  $g(u) = 2$ ،  $g(u_1) = g(v) = 0$ ،  $g(v_1) = 1$  و برای  $x \notin \{u, v, u_1, v_1\}$ ،  $g(x) = f(x)$  یک تابع احاطه گر رومی برای درخت  $T$  است. اما وزن  $g$  از  $\gamma_R(T)$  کمتر است، که این یک تناقض است. بنابراین هیچ دو راس پشتیبانی از  $T$  مجاور نیستند.

(۴). فرض کنید  $v$  یک راس پشتیبان باشد و  $f(v) \neq 2$ . طبق قسمت (۲) یک برگ منحصر به فرد  $w$  مجاور  $v$  وجود دارد. همچنین طبق قسمت (۱)،  $f(v) = 0$  و  $f(w) = 2$ . قرار دهید  $u \in N(v) - \{w\}$  اگر  $f(u) = 2$  آن گاه با تغییر وزن  $w$  به ۱ تابع احاطه گر رومی جدید با وزن کمتر از  $\gamma_R(T)$  به دست می آید که یک تناقض است. بنابراین  $f(u) = 0$ . در این صورت راس  $u_1 \in N(u)$  وجود دارد به طوری که  $f(u_1) = 2$ . اگر  $pn(u_1, V_0) = \{u\}$ ، آن گاه با تغییر وزن  $v$  به ۲،  $u$  و  $w$  به صفر و  $u_1$  به ۱ یک تابع احاطه گر رومی جدید با وزن کمتر از  $\gamma_R(T)$  به دست می آید که یک تناقض است. بنابراین فرض می کنیم که  $pn(u_1, V_0) \neq \{u\}$ . قرار دهید  $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq N(u) \cap V_2$ . بوضوح برای  $i = 1, 2, \dots, k$ ،  $|pn(u_i, V_0)| = 1$ . قرار دهید  $pn(u_i, v_0) = \{u'_i\}$ . در این صورت تابع  $g$  با ضابطه  $g(u) = 2$ ،  $g(u_i) = g(v) = 0$  و  $g(w) = g(u'_i) = 1$  یک تابع احاطه گر رومی برای  $T$  از وزن کمتر از  $\gamma_R(T)$  است. که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می گیریم که  $f(v) = 2$ . حال فرض کنید  $f(v) = 2$ . نشان می دهیم که  $v$  یک راس پشتیبان می باشد. فرض کنید  $v$  راسی پشتیبان نباشد. قرار دهید  $pn(v, V_0) = \{x\}$  و  $u \in N(x) - \{v\}$ . بوضوح  $f(u) = 0$  و لذا راس  $u_1 \in N(u)$  وجود دارد به طوری که  $f(u_1) = 2$ .

اگر  $pn(u_1, V_0) = \{u\}$ . آن‌گاه با تغییر وزن  $x$  به  $2$ ،  $v$  و  $u$  به صفر و  $u_1$  به  $1$  یک تابع احاطه‌گر رومی برای درخت  $T$  با وزن کمتر از  $\gamma_R(T)$  به دست می‌آید، که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که  $pn(u_1, V_0) \neq \{u\}$ . قرار دهید  $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq N(u) \cap V_2$ . بوضوح برای  $i = 1, 2, \dots, k$  داریم،  $|pn(u_i, V_0)| = 1$ . برای  $i = 1, 2, \dots, k$  قرار دهید  $\{u'_i\}$ . در این صورت تابع  $g$  روی  $V(T)$  با ضابطه‌ی  $g(u) = 2$ ،  $g(x) = g(u_i) = 0$ ،  $g(v) = g(u'_i) = 1$  برای  $i = 1, 2, \dots, k$  یک تابع احاطه‌گر رومی با وزن کمتر از  $\gamma_R(T)$  می‌باشد، که یک تناقض است. بنابراین  $v$  یک رأس پشتیبان است.

(۵). اگر  $v$  رأس پشتیبان و یا برگ نباشد، آن‌گاه طبق قسمت (۴)،  $f(v) = 0$ . بنابراین  $v$  مجاور حداقل یک رأس پشتیبان می‌باشد. از طرف دیگر چون همسایه خصوصی هر رأس پشتیبان برگ مجاور خودش می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که  $v$  دارای مجاور حداقل دو رأس پشتیبان می‌باشد. فرض کنید  $v$  مجاور حداقل ۳ رأس پشتیبان  $a_1, a_2, a_3$  است. همچنین فرض کنید  $a'_i$  برگ مجاور رأس پشتیبان  $a_i$  برای  $i = 1, 2, 3$  می‌باشد. طبق قسمت ۴، برای  $i = 1, 2, 3$ ،  $f(a'_i) = 0$  و  $f(a_i) = 2$  در این صورت تابع  $g$  با ضابطه  $g(v) = 2$  و برای  $i = 1, 2, 3$ ،  $g(a_i) = 0$  و  $g(a'_i) = 1$  و برای  $u \notin \{v, a_i, a'_i : i = 1, 2, 3\}$ ،  $g(u) = f(u)$ ، یک تابع احاطه‌گر رومی با وزن کمتر از  $\gamma_R(T)$  است، که یک تناقض می‌باشد. بنابراین  $v$  مجاور دقیقاً دو رأس پشتیبان می‌باشد.

(۶). فرض کنید  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R(T)$ ،  $v \in V(T)$  و  $f$  یک  $-\gamma_R^L(T)$  تابع باشد. اگر  $f(v) \in \{0, 1\}$ ، آن‌گاه به وضوح نتیجه برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم  $f(v) = 2$ . قرار دهید  $pn(v, V_0) = \{u\}$ . تابع  $g : V(T - v) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  با ضابطه  $g(u) = 1$  و اگر  $w \notin u$ ،  $g(w) = f(w)$

یک تابع احاطه‌گر رومی برای گراف  $T - v$  است. بنابراین  $\gamma_R(T - v) \leq w(g) = \gamma_R(T) - 1$ . و لذا نتیجه برقرار است.  $\square$

در ادامه ما درخت‌های  $T$  با  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R(T)$  را دسته بندی می‌کنیم. برای این منظور عملگر زیر را تعریف می‌کنیم.

عملگر  $\mathcal{O}$ . فرض کنید  $T_1$  و  $T_2$  دو درخت باشند به طوری که برای  $i = 1, 2$ ،  $\gamma_R^L(T_i) = \gamma_R(T_i)$ . همچنین فرض کنید  $x \in V(T_1)$ ،  $y \in V(T_2)$  و برای  $i = 1, 2$ ،  $f_i$  یک  $-\gamma_R^L(T_i)$  تابع باشد به طوری که  $f_1(x) = f_2(y) = 0$ . در این صورت درخت  $T = T_1 \mathcal{O} T_2$  درختی است که از  $T_1$  و  $T_2$  با متصل کردن  $x$  به  $y$  بدست می‌آید.

**تعریف ۱.۴.۵.** برای دو کلاس از درختان  $A$  و  $B$  مجموعه  $AOB$  به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$AOB = \{T_1 \mathcal{O} T_2 : T_1 \in A, T_2 \in B\}.$$

**لم ۳.۴.۵.** : فرض کنید  $T_1$  و  $T_2$  دو درخت باشند. اگر برای  $i = 1, 2$ ،  $\gamma_R^L(T_i) = \gamma_R(T_i)$ ، آن‌گاه  $\gamma_R^L(T_1 \mathcal{O} T_2) = \gamma_R(T_1 \mathcal{O} T_2)$ .



برهان. فرض کنید درخت  $T_1 \circ T_2$  از درخت  $T_1$  و  $T_2$  با وصل کردن  $x \in V(T_1)$  به  $y \in V(T_2)$  بدست آمده باشد. ابتدا نشان دهیم که  $\gamma_R^L(T_1 \circ T_2) = \gamma_R(T_1 \circ T_2)$ . اگر  $f_1$  یک  $-\gamma_R^L(T_1)$  تابع و  $f_2$  یک  $-\gamma_R^L(T_2)$  تابع باشد، آن گاه تابع  $g$  با ضابطه  $g(a) = f_1(a)$  برای  $a \in V(T_1)$  و  $g(a) = f_2(a)$  برای  $a \in V(T_2)$  یک تابع احاطه گر رومی مکانی برای درخت  $T = T_1 \circ T_2$  می باشد. بنابراین  $\gamma_R^L(T_1 \circ T_2) \leq \gamma_R^L(T_1) + \gamma_R^L(T_2)$ . اکنون فرض کنید  $h = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $-\gamma_R^L(T_1 \circ T_2)$  تابع باشد. اگر  $\{h(x), h(y)\} \neq \{0, 2\}$ . آن گاه  $h|_{V(T_1)}$  و  $h|_{V(T_2)}$  دو تابع احاطه گر رومی مکانی به ترتیب برای  $T_1$  و  $T_2$  می باشند. در این صورت  $h|_{V(T_1)} + h|_{V(T_2)} = \gamma_R^L(T_1) + \gamma_R^L(T_2) \leq \gamma_R^L(T_1 \circ T_2)$ . بنابراین فرض می کنیم که  $\{h(x), h(y)\} = \{0, 2\}$ . بدون از دست دادن کلیت فرض کنید  $h(x) = 2$  و  $h(y) = 0$ . اگر  $N(y) \cap V_2 \neq \{x\}$ ، آن گاه  $h|_{V(T_1)}$  و  $h|_{V(T_2)}$  دو تابع احاطه گر رومی به ترتیب برای درخت های  $T_1$  و  $T_2$  می باشد. در این صورت  $\gamma_R(T_1) + \gamma_R(T_2) \leq w(f_1) + w(g_1) = \gamma_R(T_1 \circ T_2)$ . بنابراین فرض می کنیم که  $N(y) \cap V_2 = \{x\}$ . در این صورت تابع  $f_1$  روی  $V(T_1)$  با ضابطه  $f_1(x) = 1$  و اگر  $u \in V(T_1) - \{x\}$   $f_1(u) = h(u)$  یک تابع احاطه گر رومی برای درخت  $T_1$  می باشد و لذا  $\gamma_R(T_1) \leq w(f_1)$ . به طریق مشابه تابع  $g_1$  با ضابطه  $g_1(y) = 1$  و اگر  $u \in V(T_2) - y$   $g_1(u) = h(u)$  یک تابع احاطه گر رومی برای درخت  $T_2$  می باشد، پس  $\gamma_R(T_1) \leq w(g_1)$  در این صورت،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T_1) + \gamma_R^L(T_2) &= \gamma_R(T_1) + \gamma_R(T_2) \\ &\leq w(f_1) + w(g_1) \\ &= w(h) = \gamma_R^L(T_1 \circ T_2). \end{aligned}$$

بنابراین همواره  $\gamma_R^L(T_1 \circ T_2) = \gamma_R^L(T_1) + \gamma_R^L(T_2)$ . برای کامل کردن اثبات کافی است نشان دهیم که  $\gamma_R(T_1 \circ T_2) = \gamma_R(T_1) + \gamma_R(T_2)$ . بوضوح  $\gamma_R(T_1 \circ T_2) \leq \gamma_R(T_1) + \gamma_R(T_2)$ . حال فرض کنید  $h = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $-\gamma_R(T_1 \circ T_2)$  تابع باشد، به طوری که  $|V_2|$  ماکسیمم است. اگر  $\{h(x), h(y)\} \neq \{0, 2\}$ ، آن گاه  $h|_{V(T_1)}$  و  $h|_{V(T_2)}$  دو تابع احاطه گر رومی به ترتیب برای درخت های  $T_1$  و  $T_2$  می باشند. بنابراین  $\gamma_R(T_1 \circ T_2) \leq \gamma_R(T_1) + \gamma_R(T_2)$  و  $\gamma_R(T_1 \circ T_2) = \gamma_R(T_1) + \gamma_R(T_2)$ . بنابراین فرض می کنیم که  $\{h(x), h(y)\} \neq \{0, 2\}$ . بدون از دست دادن کلیت فرض کنید  $h(x) = 2$  و  $h(y) = 0$ . به وضوح  $h|_{V(T_1)}$  یک تابع احاطه گر رومی برای درخت  $T_1$  می باشد.

**ادعا ۱.**  $\gamma_R(T_2) \leq w(h|_{V(T_2)})$ .

**اثبات ادعای ۱.** اگر  $N(y) \cap V_2 \neq \{x\}$ ، آن گاه  $h|_{V(T_2)}$  یک تابع احاطه گر رومی برای درخت  $T_2$  می باشد، لذا  $\gamma_R(T_2) \leq w(h|_{V(T_2)})$ . بنابراین فرض می کنیم که  $N(y) \cap V_2 = \{x\}$ . چون  $\gamma_R^L(T_2) = \gamma_R(T_2)$ ، قسمت (۵) لم ۲.۴.۵ نتیجه می دهد که  $y$  دارای دقیقاً دو رأس مجاور پشتیبان  $y_1$  و  $y_2$  است. فرض کنید برگ  $y_1$  مجاور به  $y_1$  و برگ  $y_2$  مجاور به  $y_2$  باشد. چون  $N(y) \cap V_2 = \{x\}$ ، پس  $h(y_1) = h(y_2) = 0$  و همچنین ما می توانیم فرض کنیم که  $h(y_1') = h(y_2')$

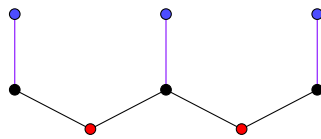
$h(y'_1) = 1$ . در این صورت رأس  $w \in N(y_1)$  وجود دارد به طوری که  $h(w_1) = 2$ . از قسمت (۳) لم ۲.۴.۵ نتیجه می‌شود که  $w_1$  برگ یا رأس پشتیبان نیست. همچنین از قسمت (۵) لم ۲.۴.۵ نتیجه می‌شود که  $w_1$  مجاور دقیقاً دو رأس پشتیبان می‌باشد. فرض کنید  $z_1 \in N(w) - \{y_1\}$  رأسی پشتیبان باشد و  $z'_1$  برگ مجاور  $z_1$  باشد. به وضوح  $h(y_1) + h(y'_1) + h(w_1) + h(z_1) + h(z'_1) \geq 4$ . تابع  $h_1$  روی  $T_2$  با ضابطه‌ی ۲  $h_1(y_1) = h(z_1) = 2$ ،  $h_1(w_1) = h_1(y'_1) = h(z'_1) = 0$ ، اگر  $h_1$  یک تابع احاطه‌گر رومی برای درخت  $T_2$  باشد، آن‌گاه  $w(h_1) \leq w(h|_{V(T_2)})$ . به وضوح  $w(h_1) \leq w(h|_{V(T_2)})$  و لذا نتیجه برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که  $h_1$  یک تابع احاطه‌گر رومی برای درخت  $T_2$  نباشد. در این صورت رأس  $u \in N(w_1)$  وجود دارد به طوری که  $h_1(u) = 0$  و  $N(u) \cap V_1^{h_1} = \emptyset$ . فرض کنید  $u_1, u_2, \dots, u_k$  رأس‌هایی باشند به طوری که برای  $1 \leq i \leq k$ ،  $h_1(u_i) = 0$  و  $N(u_i) \cap V_1^{h_1} = \emptyset$ . به وضوح  $h_1$  یک تابع احاطه‌گر رومی برای گراف  $T_2 - \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  است. برای  $i = 1, 2, \dots, k$ ، فرض کنید  $T^i$  مؤلفه‌ای از  $T_2 - u_i w_1$  باشد که شامل  $u_i$  است. نشان می‌دهیم که برای هر  $i = 1, 2, \dots, k$ ، تابع احاطه‌گر رومی  $h^{T^i}$  روی  $T^i$  از وزن حداکثر  $w(h|_{V(T^i)})$  وجود دارد. برای سادگی اثبات فرض کنید  $i = 1$ . چون  $\gamma_R(T_2) \leq w(h|_{V(T_2)})$ ، از لم ۲.۴.۵ قسمت (۵) نتیجه می‌گیریم که  $u_1$  دارای دقیقاً دو مجاور پشتیبان  $u_1^1$  و  $u_1^2$  است. فرض کنید  $u_1^1$  برگ مجاور  $u_1^1$  و  $u_1^2$  برگ مجاور  $u_1^2$  باشد. به وضوح  $h_1(u_1^1) = h_1(u_1^2) = 0$  و می‌توانیم فرض کنیم که  $h_1(u_1^1) = h_1(u_1^2) = 1$ . در این صورت رأس  $v_1 \in N(u_1^1)$  وجود دارد به طوری که  $h_1(v_1) = 2$ . طبق قسمت (۳) لم ۲.۴.۵ برگ یا رأس پشتیبان نیست. همچنین با توجه قسمت (۵) لم ۲.۴.۵  $v_1$  مجاور دقیقاً دو رأس پشتیبان می‌باشد. فرض کنید  $z_1^1 \in N(v_1) - \{u_1^1\}$  یک رأس پشتیبان باشد و  $z_1^2$  برگ مجاور به  $z_1^1$  باشد. به وضوح  $h_1(u_1^1) + h_1(u_1^2) + h_1(v_1) + h_1(z_1^1) + h_1(z_1^2) \geq 4$ . فرض کنید  $h_1^1$  تابعی روی  $T^1$  با ضابطه‌ی  $h_1^1(u) = h_1^1(z_1^1) = 2$ ،  $h_1^1(u_1^1) = h_1^1(u_1^2) = h_1^1(v_1) = h_1^1(z_1^2) = 0$ ، اگر  $h_1^1(u) = h_1^1(z_1^2) = 2$  باشد به وضوح،  $w(h_1^1) \leq w(h|_{V(T^1)})$ . اگر  $h_1^1$  یک تابع احاطه‌گر رومی برای  $T^1$  نباشد، این روند را ادامه می‌دهیم. بعد از تکرار متناهی این روند یک تابع احاطه‌گر رومی  $h^{u_1}$  برای  $T^1$  با  $w(h^{u_1}) \leq w(h|_{V(T^1)})$  بدست می‌آوریم. اکنون تابع  $h^*$  روی  $T_2$  با ضابطه‌ی  $h^*(u) = h^{u_1}(u)$  اگر  $u \in V(T_i)$  برای  $i = 1, 2, \dots, k$  و در غیر این صورت  $h^*(u) = h_1(u)$  را تعریف می‌کنیم. در این صورت  $h^*$  یک تابع احاطه‌گر رومی برای  $T_2$  با  $w(h^*) \leq w(h|_{V(T_2)})$  است. بنابراین ادعا ثابت می‌شود.

حال نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_R(T_1) + \gamma_R(T_2) &\leq w(h|_{V(T_1)}) + w(h^*|_{V(T_2)}) \\ &\leq w(h|_{V(T_1)}) + w(h|_{V(T_2)}) \\ &= w(h) = \gamma_R(T_1 \circ T_2). \end{aligned}$$

□

بنابراین  $\gamma_R(T_1 \circ T_2) = \gamma_R(T_1) + \gamma_R(T_2)$



شکل ۳.۵: مثالی از خانواده‌ی  $\mathcal{F}_\circ$ .

در ادامه هدف ما مشخص کردن همه درخت‌هایی است که عدد احاطه‌گر رومی و عدد احاطه‌گر رومی مکانی آن‌ها با هم برابر است. برای این منظور خانواده‌ای از درختان را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنید  $\mathcal{F}_\circ$  خانواده‌ای از درختان  $T$  باشد که درخت  $T$  از  $cor(T')$  با تقسیم دقیقاً یک بار هر یال  $T'$ ، به طوری که  $T'$  از مرتبه حداقل ۲ باشد، به دست آید. شکل ۳.۵ مثالی از خانواده‌ی  $\mathcal{F}_\circ$  می‌باشد که از مسر  $P_3$  بدست آمده است. برای  $k \geq 1$  قرار دهید  $\mathcal{F}_k = \bigcup_{i=0}^{k-1} \mathcal{F}_i \circ \mathcal{F}_{k-1}$  و  $\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$ .

**قضیه ۲.۴.۵.** فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 3$  باشد. در این صورت  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R(T)$  اگر و تنها اگر  $T \in \mathcal{F}$ .

برهان. با استفاده از استقرا روی مرتبه  $n$  از درخت  $T \in \mathcal{F}$  نشان می‌دهیم که  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R(T)$ . درخت  $P_\Delta$  کوچکترین درخت در خانواده  $\mathcal{F}_\circ$  می‌باشد. به آسانی می‌توان دید که  $\gamma_R^L(P_\Delta) = \gamma_R(P_\Delta)$ . این نتیجه برای گام پایه استقرا کافی است. فرض کنید حکم برای هر درخت  $T' \in \mathcal{F}$  از مرتبه  $n' < n$  برقرار است. همچنین فرض کنید  $T \in \mathcal{F}$  از مرتبه  $n$  باشد. فرض کنید که  $T \in \mathcal{F}_\circ$ . برای هر رأس پشتیان  $x \in S(T)$  فرض کنید  $x'$  برگ مجاور  $x$  باشد. تابع  $h = (V - S(T), \emptyset, S(T))$  یک تابع احاطه‌گر رومی و همچنین یک تابع احاطه‌گر مکانی برای درخت  $T$  می‌باشد. بنابراین،  $\gamma_R(T) \leq 2|S(T)|$  و  $\gamma_R^L(T) \leq 2|S(T)|$ . فرض کنید  $f$  یک تابع  $-\gamma_R(T)$  تابع باشد. به وضوح برای هر  $x \in S(T)$ ،  $f(x) + f(x') \geq 1$ . اگر  $f(x) + f(x') = 1$  آن‌گاه  $f(x) = 0$ ،  $f(x') = 1$  و رأس  $y \in N(x)$  وجود دارد به طوری که  $f(y) = 2$ . با توجه به روش ساختن خانواده  $\mathcal{F}_\circ$ ،  $\deg(y) = 2$ . قرار دهید  $y_1 \in N(y) - \{x\}$ . در این صورت  $y_1$  یک رأس پشتیبان است. اگر  $f(y_1) \neq 0$ ، آن‌گاه می‌توانیم فرض کنیم  $f(y_1) = 2$ . در این صورت با تغییر وزن رأس‌های  $y$  با صفر و  $x$  با یک، یک تابع احاطه‌گر رومی جدید برای درخت  $T$  با وزن کمتر از  $\gamma_R(T)$  بدست می‌آید، که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که برای هر  $x \in S(T)$ ،  $f(x) + f(x') \geq 2$ . لذا  $\gamma_R(T) \geq 2|S|$  و همچنین  $\gamma_R^L(T) \geq 2|S|$ . بنابراین  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R(T) = 2|S|$ . حال فرض کنید  $T \notin \mathcal{F}_\circ$ . در این صورت دو درخت  $T_1, T_2 \in \mathcal{F}$  وجود دارند که  $T = T_1 \circ T_2$ . طبق فرض استقرا برای  $i = 1, 2$ ،  $\gamma_R^L(T_i) = \gamma_R(T_i)$ . از لم ۳.۴.۵ نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R(T)$ . برای اثبات طرف عکس قضیه از استقرا روی مرتبه  $n$  از درخت  $T$  با  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R(T)$  استفاده می‌کنیم. توجه کنید که کوچکترین درخت  $T$  از مرتبه

با  $n \geq 3$   $\gamma_R^L(T) = \gamma_R(T)$  می‌باشد که عضوی از خانواده‌ی  $\mathcal{F}$  می‌باشد. این نتیجه برای گام پایه استقرای کافی است. فرض کنید هر درخت  $T'$  از مرتبه  $n' < n$  با  $\gamma_R^L(T') = \gamma_R(T')$  عضوی از خانواده‌ی  $\mathcal{F}$  باشد. همچنین فرض کنید  $T$  درختی از مرتبه  $n$  باشد به طوری که  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R(T)$ . فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $-\gamma_R^L(T)$  تابع باشد که  $|V_2|$  ماکسیمم است. طبق قسمت (۱) لم ۲.۴.۵،  $|V_1| = 0$ . فرض کنید یال  $xy \in E(T)$  وجود داشته به طوری که  $f(x) = f(y) = 0$ . فرض کنید  $T_x$  و  $T_y$  دو مؤلفه از  $T - xy$  باشند که به شامل  $x$  و  $y$  می‌باشد. در این صورت  $f|_{T_x}$  یک تابع احاطه‌گر رومی و یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای  $T_x$  است و همچنین  $f|_{T_y}$  یک تابع احاطه‌گر رومی و یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای درخت  $T_y$  می‌باشد. بنابراین  $\gamma_R^L(T) = w(f|_{(T_x)}) + w(f|_{(T_y)}) = \gamma_R^L(T_x) + \gamma_R^L(T_y)$ . چون همواره  $\gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T_x) + \gamma_R^L(T_y)$ ، نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T_x) + \gamma_R^L(T_y)$ . بنابراین  $\gamma_R^L(T_x) = w(f|_{(T_x)})$ ،  $\gamma_R^L(T_y) = w(f|_{(T_y)})$ . به طریق مشابه  $\gamma_R(T_x) = w(f|_{(T_x)})$  و  $\gamma_R(T_y) = w(f|_{(T_y)})$ . بنابراین نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_R^L(T_x) = \gamma_R(T_x)$  و  $\gamma_R^L(T_y) = \gamma_R(T_y)$ . طبق فرض استقرای  $T_x, T_y \in \mathcal{F}$ . به علاوه  $f|_{T_x}$  یک  $-\gamma_R^L(T_x)$  تابع می‌باشد که  $x$  دارای وزن صفر و همچنین  $f|_{T_y}$  یک  $-\gamma_R^L(T_y)$  تابع است که  $y$  دارای وزن صفر است. بنابراین درخت  $T$  از  $T_x$  و  $T_y$  با عملگر  $\circ$  بدست می‌آید و لذا  $T \in \mathcal{F}$ . حال فرض کنید برای هر یال  $xy \in E(T)$ ، نشان می‌دهیم که برای هر  $w \in V_0 - L(T)$ ،  $\deg(w) = 2$ . قرار دهید  $w \in V_0 - L(T)$ . فرض کنید  $\deg(w) \geq 3$ . طبق قسمت (۵) لم ۲.۴.۵،  $w$  مجاور دقیقاً دو رأس پشتیبان  $u$  و  $v$  است. فرض کنید  $u'$  برگ مجاور  $u$  و  $v'$  برگ مجاور  $v$  باشد. طبق قسمت (۴) لم ۲.۴.۵،  $f(u) = f(v) = 2$ . قرار دهید  $z \in N(w) - \{u, v\}$ . در این صورت  $f(z) = 2$ . به وضوح می‌توانیم فرض کنیم رأس  $z' \in N(z)$  وجود دارد به طوری که  $f(z')$  و  $N(z') \cap V_2 = \{z\}$ . بنابراین  $f(z') = f(u') = f(v') = 0$ . در این صورت تابع  $g$  روی  $V(T)$  با ضابطه‌ی  $g(w) = 2$ ، اگر  $a \in \{u, v, z\}$ ،  $g(a) = 0$ ، اگر  $g(a) = 1$ ، اگر  $a \in \{u', v', z'\}$  و در غیر این صورت  $g(a) = f(a)$  یک تابع احاطه‌گر رومی با وزن کمتر از  $\gamma_R(T)$  است، که یک تناقض می‌باشد. بنابراین برای هر  $w \in V_0 - L(T)$ ،  $\deg(w) = 2$ . با توجه به ساختن خانواده‌ی  $\mathcal{F}$ ، نتیجه می‌گیریم که  $T \in \mathcal{F}$ .  $\square$

## ارتباط عدد احاطه‌گر مکانی با عدد احاطه‌گر رومی مکانی

در این بخش رابطه‌ی عدد احاطه‌گری مکانی را با عدد احاطه‌گر رومی مکانی بررسی می‌کنیم. این بخش را با مشاهده زیر شروع می‌کنیم.

**ملاحظه ۱.۴.۵.** برای هر گراف  $G$  رابطه زیر برقرار است:

$$\gamma_L(G) \leq \gamma_R^L(G) \leq 2\gamma_L(G).$$

**گزاره ۲.۴.۵.** برای هر گراف  $G$  از مرتبه  $n$ ، اگر  $\gamma_R^L(G) = \gamma_L(G)$ ، اگر و تنها اگر  $G = \overline{K_n}$ .

برهان. فرض کنید  $\gamma_L(G) = \gamma_R^L(G)$  و  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(G) -$  تابع باشد، به طوری که  $|V_2|$  ماکسیمم است. به وضوح  $V_1 \cup V_2$  یک کد احاطه گر مکانی برای گراف  $G$  است. از رابطه  $\gamma_R^L(G) = \gamma_L(G)$  نتیجه می گیریم که،

$$|V_1| + 2|V_2| = \gamma_R^L(G) = \gamma_L(G) \leq |V_1| + |V_2|.$$

بنابراین  $|V_2| = 0$  و لذا  $|V_0| = 0$ . در این صورت  $|V_1| = |V| = n$ .  $\gamma_L(G) = |V_1| = |V| = n$ . با توجه به انتخاب  $f$ ،  $G$  نمی تواند یال داشته باشد، پس  $G = \overline{K_n}$ . طرف عکس واضح است.  $\square$

**گزاره ۳.۴.۵.** برای هر گراف  $G$  از مرتبه  $n \geq 2$ ،  $\gamma_R^L(G) = \gamma_L(G) + 1$ ، اگر و تنها اگر  $G$  یک گراف کامل یا یک ستاره باشد.

برهان. فرض کنید  $G$  یک گراف از مرتبه  $n \geq 2$  و  $\gamma_R^L(G) = \gamma_L(G) + 1$ . نشان می دهیم که  $\gamma_L(G) = n - 1$ . فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(G) -$  تابع است. به وضوح  $V_1 \cup V_2$  یک مجموعه احاطه گر مکانی برای  $G$  است و لذا  $\gamma_L(G) \leq |V_1| + |V_2|$ . در این صورت،  $\gamma_R^L(G) = \gamma_L(G) + 1 = |V_1| + 2|V_2| \leq |V_1| + |V_2| + |V_2|$ . بنابراین  $|V_2| \leq 1$ . اگر  $|V_2| = 1$ ، آن گاه  $|V_0| = 1$  و  $|V_1| = n - 2$ . بنابراین  $\gamma_R^L(G) = n$  و لذا  $\gamma_L(G) = n - 1$ . بنابراین فرض می کنیم  $|V_2| = 0$ . در این صورت  $|V_0| = 0$ ،  $|V_1| = n$  و لذا  $\gamma_R^L(G) = n$  و  $\gamma_L(G) = n - 1$ . فرض کنید  $diam(G) \geq 3$  و برای  $a, d \in V(G)$ ،  $diam(a, d) = 3$ . همچنین فرض کنید  $abcd$  یک مسیر بین دو رأس  $a$  و  $d$  باشد. در این صورت  $V(G) - \{a, d\}$  یک مجموعه احاطه گر مکانی برای  $G$  می باشد. بنابراین  $\gamma_L(G) \leq n - 2$  که یک تناقض است. نتیجه می گیریم که  $diam(G) \leq 2$ . اگر  $diam(G) = 1$ ، آن گاه  $G$  یک گراف کامل است و نتیجه برقرار است. حال فرض کنید  $diam(G) = 2$ . فرض کنید  $b$  دارای بیشترین درجه در گراف  $G$  باشد. اگر  $deg(b) = 2$ ، آن گاه  $G = P_3$  و حکم برقرار است. بنابراین فرض می کنیم  $deg(b) \geq 3$ . نشان می دهیم که هر رأس از  $N(b)$  یک برگ است. فرض کنید  $abc$  مسیر قطری از گراف  $G$  باشد. همچنین فرض کنید  $deg(a) \geq 2$ . قرار دهید  $x \in N(a) - \{b\}$ . در این صورت  $V(G) - \{x, c\}$  یک مجموعه احاطه گر مکانی برای گراف  $G$  می باشد، که یک تناقض است. بنابراین  $deg(a) = 1$  و به طریق مشابه،  $deg(c) = 1$ . همچنین برای هر  $w \in N(b) - \{a, c\}$ ، چون  $w$  همان نقش  $c$  را دارد،  $deg(w) = 1$ . بنابراین  $G$  یک ستاره است. طرف عکس گزاره واضح است.  $\square$

**تعریف ۲.۴.۵.** گراف  $G$  را یک گراف احاطه گر رومی مکانی گوئیم هرگاه  $\gamma_R^L(G) = 2\gamma_L(G)$ .

در ادامه ما گراف های احاطه گر رومی مکانی را مشخص می کنیم.

**قضیه ۳.۴.۵.** گراف  $G$  احاطه گر رومی مکانی است، اگر و تنها اگر برای هر زیر مجموعه مستقل  $S$  از رئوس،  $\gamma_L(G) \leq \gamma_L(G - S) + \frac{|S|}{2}$ .

برهان. فرض کنید  $G$  یک گراف احاطه گر رومی مکانی باشد. طبق قضیه ۱.۳.۵، برای هر زیر مجموعه مستقل  $S$  از رئوس،  $\gamma_L(G) \leq \gamma_L(G - S) + \frac{|S|}{2}$ . برای اثبات عکس قضیه، فرض

کنید برای هر زیر مجموعه مستقل  $S$  از رئوس  $\frac{|S|}{2}$   $\gamma_L(G) \leq \gamma_L(G - S) + \frac{|S|}{2}$ . بنابراین برای هر زیر مجموعه مستقل  $S$  از رئوس،  $2\gamma_L(G) \leq 2\gamma_L(G - S) + |S|$  و لذا طبق قضیه ۱.۳.۵  $2\gamma_L(G) \leq \gamma_R^L(G)$ . با توجه به اینکه همواره  $\gamma_R^L(G) \leq 2\gamma_L(G)$ ، لذا  $\gamma_R^L(G) = 2\gamma_L(G)$ . بنابراین  $G$  یک گراف احاطه‌گر رومی مکانی است. □

**گزاره ۴.۴.۵.** گراف  $G$ ، گرانی احاطه‌گر رومی مکانی است، اگر و تنها اگر  $\gamma_R^L(G) = 2\gamma_L(G)$  تابع  $f$  تابع وجود داشته باشد به طوری که  $|V_1| = 0$ .

برهان. فرض کنید  $G$  یک گراف احاطه‌گر رومی مکانی و  $S$  یک  $\gamma_L(G)$  مجموعه باشد. در این صورت  $f = (V(G) - S, \emptyset, S)$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف  $G$  است. چون  $w(f) = 2|S| = 2\gamma_L(G) = \gamma_R^L(G)$  پس  $f$  یک  $\gamma_R^L(G)$  تابع با  $|V_1| = 0$  است. برای اثبات عکس گزاره فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(G)$  تابع باشد که  $|V_1| = 0$ . در این صورت  $\gamma_R^L(G) = 2|V_2|$ . از طرف دیگر چون  $V_2$  یک مجموعه احاطه‌گر مکانی برای  $G$  است، نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_L(G) \leq |V_2| = \frac{\gamma_R^L(G)}{2}$ . از ملاحظه ۱.۴.۵ نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_R^L(G) = 2\gamma_L(G)$  و لذا  $G$  یک گراف احاطه‌گر رومی مکانی است. □

## ۵.۵ گراف‌های احاطه‌گر رومی مکانی یال بحرانی

یکی از سؤالات اساسی برای تعداد زیادی از پارامترهای گراف، بحرانی بودن آن پارامتر است. این مسأله که یک پارامتر از گراف با حذف یا افزودن رأس یا یال، افزایش یا کاهش پیدا می‌کند، برای تعداد زیادی از پارامترهای گراف بررسی شده است. این مفهوم را بحرانی می‌نامند. بحرانی بودن بسیاری از پارامترهای وابسته به احاطه‌گری مثل احاطه‌گری، احاطه‌گری کلی، احاطه‌گری روی، احاطه‌گری مکانی کلی بررسی شده است. برای مطالعه بیشتر در زمینه بحرانی بودن پارامترها به مراجع [۳۸، ۶۰، ۱۶۶، ۹۷، ۹۹، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۱۰] رجوع شود. در این بخش ما این مفهوم را برای عدد احاطه‌گر رومی مکانی بررسی می‌کنیم. در این بخش ابتدا برخی از خواص گراف‌های  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی را بیان می‌کنیم و در ادامه همه گراف‌های  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی را مشخص می‌کنیم.

**لم ۱.۵.۵.** برای هر یال  $e = xy$  در گراف  $G$ ،

$$\gamma_R^L(G - e) \leq \gamma_R^L(G) + 1.$$

برهان. فرض کنید  $e = xy$  و  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(G)$  تابع باشد. اگر  $V_2 \cap \{x, y\} = \emptyset$  یا  $\{x, y\} \subseteq V_2 \cup V_1$  آن‌گاه  $f$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف  $G - e$  است و لذا حکم برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که  $x \in V_0$  و  $y \in V_2$ . در این صورت تابع  $g$  با ضابطه‌ی  $g(y) = 1$  و اگر  $u \neq y$   $g(u) = f(u)$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف  $G - e$  است و لذا  $\gamma_R^L(G - e) \leq \gamma_R^L(G) + 1$ . □

نتیجه ۱.۵.۵. برای هر یال  $e$  از گراف  $\gamma_R^L(G)$  - یال بحرانی  $G$ ،

$$\gamma_R^L(G - e) = \gamma_R^L(G) + 1.$$

لم ۲.۵.۵. فرض کنید  $G$  یک گراف همبند  $\gamma_R^L$  - یال بحرانی از مرتبه  $n \geq 3$  باشد و همچنین  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(G)$  - تابع دلخواه باشد. در این صورت موارد زیر برقرار هستند:

(a)  $V_0$  و  $V_2$  مجموعه‌های مستقل هستند و  $|V_1| = 0$ .

(b) هر رأس پشتیبان ضعیف است.

(c) برای هر رأس  $v$  با  $f(v) = 2$ ،  $|eP_n(v, V_2)| = 1$ .

(d) رأس  $v$  پشتیبان است اگر و تنها اگر  $f(v) = 2$ .

برهان. (a) اگر یال  $e$  در  $G[V_2]$  یا  $G[V_0]$  وجود داشته باشد، آن‌گاه  $f$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف  $G - e$  نیز می‌باشد. بنابراین  $\gamma_R^L(G - e) \leq \gamma_R^L(G)$ ، که یک تناقض است. بنابراین  $V_0$  و  $V_2$  مجموعه‌هایی مستقل می‌باشند. حال فرض کنید رأس  $v$  از  $G$  وجود دارد به طوری که  $f(v) = 1$  و  $x \in N(v)$ . در این صورت  $f$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف  $G - xv$  است و لذا  $\gamma_R^L(G - xv) \leq w(f) = \gamma_R^L(G)$ ، که یک تناقض است. بنابراین  $|V_1| = 0$ .

(b) فرض کنید که  $v$  یک رأس پشتیبان قوی باشد و  $u, w$  دو برگ مجاور  $v$  باشند. طبق قسمت (a)،  $v \in V_0 \cup V_2$ . اگر  $v \in V_2$ ، آن‌گاه طبق قسمت (a)،  $\{u, w\} \subseteq V_0$ ، که با  $\gamma_R^L(G)$  - تابع بودن  $f$  در تناقض است. حال فرض کنید  $v \in V_0$ . در این صورت طبق قسمت (a)،  $\{u, w\} \subseteq V_2$  و لذا تابع  $f$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف  $G - uv$  می‌باشد. بنابراین  $\gamma_R^L(G - uv) \leq \gamma_R^L(G)$ ، که یک تناقض است. پس  $v$  یک رأس پشتیبان ضعیف است.

(c) فرض کنید  $v \in V_2$ . چون  $f$  یک  $\gamma_R^L(G)$  - تابع است، نتیجه می‌گیریم که  $|pn(v, V_2)| \leq 1$ . فرض کنید  $u \in N(v)$ . قسمت (a) نتیجه می‌دهد که  $f(u) = 0$ . اگر  $|pn(v, V_2)| = 0$ ، آن‌گاه رأس  $w \in V_2$  وجود دارد به طوری که  $u \in N(w) \cap N(v)$ . در این صورت تابع  $f$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف  $G - uw$  می‌باشد و لذا  $\gamma_R^L(G - uw) \leq \gamma_R^L(G)$ ، که یک تناقض است. بنابراین  $|pn(v, V_2)| = 1$ .

(d) فرض کنید که  $v$  یک رأس پشتیبان و  $u$  برگ مجاور آن باشد. قرار دهید  $w \in N(v) - \{u\}$ . اگر  $f(v) \neq 2$ ، آن‌گاه از قسمت (a) نتیجه می‌شود که  $f(v) = 0$  و  $f(u) = f(w) = 2$ . در این صورت  $f$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف  $G - vw$  است و لذا  $\gamma_R^L(G - vw) \leq \gamma_R^L(G)$ ، که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که  $f(v) = 2$ . حال فرض کنید برای رأس  $v \in V(G)$ ،  $f(v) = 2$ . طبق قسمت (c)،  $|pn(v, V_2)| = 1$ . قرار دهید

،  $w \in N(u) - \{v\}$  و  $\deg(u) > 1$ . اگر  $\deg(u) = 1$  نشان می‌دهیم که  $pn(v, V_2) = \{u\}$  آن‌گاه از قسمت (a) نتیجه می‌شود که  $f(w) = 2$ . در این صورت  $f$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف  $G - uw$  است و لذا  $\gamma_R^L(G - uw) \leq \gamma_R^L(G)$ ، که یک تناقض است. بنابراین  $\deg(u) = 1$  و لذا  $v$  یک رأس پشتیبان است.

□

**قضیه ۱.۵.۵.** فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 3$  باشد. در این صورت  $T$  یک درخت  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی است. اگر و تنها اگر  $\gamma_R^L(T) = \frac{2n+2}{3}$ .

برهان. فرض کنید  $T$  درختی از مرتبه  $n \geq 3$  باشد و  $\gamma_R^L(T) = \frac{2n+2}{3}$ . نشان می‌دهیم که  $T$  یک درخت  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی است. فرض کنید  $e = uv \in E(T)$  و  $\deg(u) \geq \deg(v)$ . اگر  $\deg(v) = 1$ ، آن‌گاه درخت  $T - v$  دارای حداقل دو رأس می‌باشد و لذا طبق قضیه ۲.۲.۶،  $\gamma_R^L(T - v) \geq \frac{2(n-1)+2}{3}$ . بنابراین

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T - e) &= \gamma_R^L(T - v) + 1 \\ &\geq \frac{2(n-1)+2}{3} + 1 \\ &= \frac{2n+3}{3}. \end{aligned}$$

چون  $\gamma_R^L(T - e)$  یک عدد صحیح می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که

$$\gamma_R^L(T - e) \geq \frac{2n+5}{3} = \gamma_R^L(T) + 1$$

و لذا طبق لم ۱.۵.۵،  $\gamma_R^L(T - e) = \gamma_R^L(T) + 1$  حال فرض کنید  $\deg(v) \geq 2$ . فرض کنید  $T_1$  و  $T_2$  دو مؤلفه همبندی از  $T - e$  به ترتیب شامل  $u$  و  $v$  باشند. در این صورت  $\gamma_R^L(T - e) = \gamma_R^L(T_1) + \gamma_R^L(T_2)$ . بنابراین از قضیه ۱.۲.۶، نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T - e) &= \gamma_R^L(T_1) + \gamma_R^L(T_2) \geq \frac{2|V(T_1)|+2}{2} + \frac{2|V(T_2)|+2}{2} \\ &= \frac{2n+4}{3}. \end{aligned}$$

چون  $\gamma_R^L(T - e)$  یک عدد صحیح است و  $2n+2 \leq 3$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$\gamma_R^L(T - e) \geq \frac{2n+5}{3} = \gamma_R^L(T) + 1$$

و لذا طبق لم ۱.۵.۵،  $\gamma_R^L(T - e) = \gamma_R^L(T) + 1$ . بنابراین  $T$  یک درخت  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی است. برای اثبات طرف عکس قضیه فرض کنید  $T$  یک درخت  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی از مرتبه  $n \geq 3$  و  $f$  یک  $\gamma_R^L(T)$ -تابع باشد. قرار دهید  $A = \bigcup_{v \in V_2} pn(v, V_2)$  و  $B = V_0 - A$ . از قسمت (c) لم ۲.۵.۵، نتیجه می‌شود که  $|A| = |V_2|$ . نشان می‌دهیم که  $|B| = |V_2| - 1$ . فرض کنید  $w \in B$  اگر



گراف  $T - uw$  است. بنابراین  $\gamma_R^L(T - uw) \leq \gamma_R^L(T)$ ، که یک تناقض است. بنابراین برای هر رأس  $w \in B$ ،  $|N(w) \cap V_\uparrow| = 2$ . فرض کنید  $T^*$  گرافی از مرتبه  $|V_\uparrow|$  با مجموعه رئوس  $V_\uparrow$  و مجموعه یال‌های  $E(T^*)$  به طوری که برای  $u, v \in V_\uparrow$ ،  $uv \in E(T^*)$  اگر و تنها اگر رأس  $w \in B$  وجود داشته باشد به طوری که  $N_T(u) \cap N_T(v) = \{w\}$ . در این صورت  $|E(T^*)| = |B|$ . چون  $T$  یک درخت است، از روش ساخت  $T^*$  نتیجه می‌شود که  $T^*$  نیز یک درخت است، پس

$$|B| = |E(T^*)| = |V(T^*)| - 1 = |V_\uparrow| - 1.$$

بنابراین

$$n = |V_\circ| + |V_\uparrow| = |A| + |B| + |V_\uparrow| = 3|V_\uparrow| - 1.$$

□

$$\text{و لذا } \gamma_R^L(T) = 2|V_\uparrow| = \frac{2n+2}{3}$$

با استفاده از قضیه‌های ۱.۵.۵ و ۳.۲.۶، نتیجه زیر بدست می‌آید.

**نتیجه ۲.۵.۵.** برای هر درخت  $T$ ، شرایط زیر معادلند:

۱.  $T$  یک درخت  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی است.

$$2. \gamma_R^L(T) = \frac{2n+2}{3}$$

۳.  $T \in \mathcal{T}_\circ$ .

در ادامه ما یک کران پایین قابل دستیابی برای عدد احاطه‌گر رومی مکانی درخت‌های  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی ارائه می‌دهیم.

**گزاره ۱.۵.۵.** اگر  $G$  یک گراف همبند  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی از مرتبه  $n$  با  $m$  یال باشد، آن‌گاه

$$\gamma_R^L(G) = \frac{4n-2m}{3}$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $G \in \mathcal{T}_\circ$ .

برهان. فرض کنید  $G$  یک گراف همبند  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی از مرتبه  $n$  با  $m$  یال باشد و همچنین  $f = (V_\circ, V_1, V_\uparrow)$  یک  $\gamma_R^L(G)$ -تابع باشد. قرار دهید  $A = \{v \in V_\circ \mid |N(v) \cap V_\uparrow| = 1\}$  و  $B = \{v \in V_\circ \mid |N(v) \cap V_\uparrow| \geq 2\}$ . طبق قسمت (a) از لم ۱.۵.۵،  $V_\circ$  و  $V_\uparrow$  دو مجموعه مستقل هستند و  $|V_1| = \circ$ . بنابراین  $|E(G[V_\uparrow \cup V_\circ])| = m = E(G)$ . از طرفی برای هر  $u \in V_\uparrow$ ، طبق قسمت (c) از لم ۱.۵.۵،  $|E(G[V_\uparrow \cup A])| = |V_\uparrow| = |A|$ ، همچنین برای هر  $x \in B$ ،  $\deg(x) \geq 2$  و لذا  $|E(G[V_\uparrow \cup B])| \geq 2|B|$ . بنابراین

$$m = |E(G[V_\uparrow \cup V_\circ])|$$

$$\begin{aligned}
 &= |E(G[V_2 \cup A])| + |E(G[V_2 \cup B])| \\
 &\geq |A| + 2|B| \\
 &= |A| + 2(|V_0| - |A|) \\
 &= 2|V_0| - |A| \\
 &= 2|V_0| - |V_2| \\
 &= 2(n - |V_2|) - |V_2| \\
 &= 2n - 3|V_2| \\
 &= 2n - \frac{3\gamma_R^L(G)}{2}.
 \end{aligned}$$

لذا  $\gamma_R^L(G) \geq \frac{4n - 2m}{3}$

رابطه  $\gamma_R^L(G) \geq \frac{4n - 2m}{3}$  برقرار است اگر و فقط اگر برای هر  $x \in B$ ،  $\deg(x) = 2$ . چون  $G$  یک گراف  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی است، از قسمت (a) لم ۱.۵.۵ نتیجه می‌شود که  $V_0$  و  $V_2$  مجموعه‌هایی مستقل می‌باشند و لذا نتیجه می‌گیریم که  $G$  یک درخت است. بنابراین  $m = n - 1$  و لذا

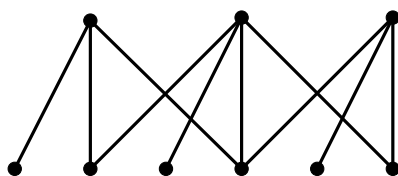
$$\gamma_R^L(G) = \frac{4n - 2m}{3} = \frac{2n + 2}{3},$$

از نتیجه ۲.۵.۵، نتیجه می‌گیریم که  $G \in \mathcal{T}$ . □

### گراف‌های $\gamma_R^L$ -یال بحرانی

در این بخش همه گراف‌های  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی را مشخص می‌کنیم. برای این منظور ابتدا خانواده‌ای از گراف‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنید  $\mathcal{G}$  خانواده‌ای از همه گراف‌های دوبخشی همبند  $G = (X, Y, E)$  از مرتبه  $n \geq 3$  باشد، به طوری که برای هر رأس  $w \in Y$  و هر زیرمجموعه‌ی ناتهی  $X' \subseteq N(w)$ ، رأس  $w' \in Y$  وجود داشته باشد به طوری که  $N(w') = X'$ . در شکل ۴.۵ مثالی از خانواده‌ی  $\mathcal{G}$  نشان داده شده است.



شکل ۴.۵: مثالی از خانواده‌ی  $\mathcal{G}$ .

۳.۵.۵. اگر  $G \in \mathcal{G}$ ، آن‌گاه

$$\gamma_R^L(G) = 2|X|.$$

برهان. فرض کنید  $G = (X, Y, E) \in \mathcal{G}$  و همچنین  $x \in X$  و  $y \in Y$  برگ منحصر به فرد مجاور  $x$  باشد. تابع  $\gamma_R^L(G)$  تابع  $f = (V_0, V_1, V_2)$  را بین همه  $\gamma_R^L(G)$  -تابع‌ها طوری انتخاب می‌کنیم که رأس  $x$  دارای بیشترین وزن باشد. نشان می‌دهیم که  $f(x) = 2$ . فرض کنید  $f(x) \neq 2$ . اگر  $f(x) = 1$ ، آن‌گاه  $f(y) = 1$ . با تغییر وزن برگ  $y$  با مقدار ۰ و تغییر وزن رأس  $x$  با مقدار ۲ یک  $\gamma_R^L(G)$  -تابع جدید بدست می‌آید که با انتخاب  $f$  در تناقض است. بنابراین  $f(x) \neq 1$ . حال فرض کنید  $f(x) = 0$ . در این صورت  $f(y) = 2$  یا  $f(y) = 1$ . اگر  $f(y) = 2$ ، آن‌گاه مثل قبل با تغییر وزن برگ  $y$  با مقدار ۰ و تغییر وزن برگ  $x$  با مقدار ۲ یک  $\gamma_R^L(G)$  -تابع جدیدی بدست می‌آید که با انتخاب تابع  $f$  در تناقض است. بنابراین  $f(y) = 1$ . در این صورت رأس  $u \in N(x)$ ،  $u \neq y$  وجود دارد به طوری که  $f(u) = 2$ ، چون  $f$  یک  $\gamma_R^L(G)$  -تابع است. قرار دهید  $S = N(u) \cap V_0$ . اگر  $S = \{x\}$  آن‌گاه با تغییر وزن رأس  $u$  با مقدار ۰ و تغییر وزن رأس  $x$  با مقدار ۲،  $\gamma_R^L(G)$  -تابع جدید بدست می‌آید که با انتخاب  $f$  در تناقض است. بنابراین  $|S| \geq 2$ . فرض کنید  $|S| = 2$ . قرار دهید  $S = \{x, w\}$ . اگر برگ منحصر به فرد مجاور  $w$  باشد، آن‌گاه به وضوح  $f(v) = 1$ . در این صورت با تغییر وزن رؤس  $u$ ،  $y$  و  $v$  با مقدار ۰ و تغییر وزن رؤس  $x$  و  $w$  با مقدار ۲ یک  $\gamma_R^L(G)$  -تابع جدید بدست می‌آید که با انتخاب  $f$  در تناقض است. بنابراین  $|S| \geq 3$ . در این صورت با توجه به ساختار  $G$  برای هر مجموعه  $S' \subseteq S$ ، رأس منحصر به فرد  $y' \in Y$  وجود دارد به طوری که  $N(y') = S'$ . فرض کنید  $y'$  مجموعه‌ای از همه رأس‌های  $y' \in Y$  باشد به طوری که زیرمجموعه ناتهی  $S' \subseteq S$  وجود دارد به طوری که  $N(y') = S'$ . در این صورت  $|y'| = 2^{|S|} - 1$  و همچنین چون هر رأس  $s$  از  $S$  دارای وزن ۰ است، برای هر  $y' \in Y'$ ،  $f(y') \geq 1$ . حال با تغییر وزن هر رأس  $s$  از  $S$  با مقدار ۲ و تغییر وزن هر رأس  $y'$  از  $Y'$  با مقدار ۰ یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی  $f^*$  برای  $T$  بدست می‌آید. در این صورت

$$\begin{aligned} w(f^*) &= w(f) - \sum_{y' \in Y'} + 2|s| \\ &\leq w(f) - |y'| + 2|s| \\ &= w(f) - 2^{|s|} + 2|s| + 1 \\ &< w(f), \end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین برای هر  $x \in X$ ،  $f(x) = 2$  لذا  $\gamma_R^L(G) = w(f) \geq 2|X|$ . از طرفی تابع  $h = (Y, \emptyset, X)$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف  $G$  است، پس  $\gamma_R^L(G) = w(h) = 2|X|$ . بنابراین نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_R^L(G) = 2|X|$ . □

قضیه ۲.۵.۵. گراف همبند غیربدیهی  $G = (V, E)$  یک گراف  $\gamma_R^L$  -یال بحرانی است. اگر و تنها اگر  $G \in \mathcal{G}$ .

برهان. فرض کنید که  $G = (X, Y, E) \in \mathcal{G}$  یال دلخواه  $e = uv$  که  $u \in X$  و  $v \in Y$ ، را حذف کنید. قرار دهید  $G' = G - e$ . بین همه  $\gamma_R^L(G')$ -تابع‌ها، فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  تابعی باشد که به رأس  $a$  بیشترین وزن را می‌دهد. قرار دهید  $z \in Y - N(u)$ . با یک روش مشابه به روش اثبات لم ۳.۵.۵ می‌توان نشان داد که  $f(z) = 0$  و برای هر رأس  $x \neq u$  در  $X$ ،  $f(x) = 2$ . حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

**حالت ۱:**  $e$  یالی آویزان باشد.

نشان می‌دهیم که  $f(u) = 2$ . با برهان خلف فرض کنید  $f(u) \neq 2$ . اگر  $f(u) = 0$ . آن‌گاه رأس  $y \in N_G(u)$  وجود دارد به طوری که  $f(y) = 2$ . قرار دهید  $S = N_G(y) \cap V_0$ . از این که  $f$  یک  $\gamma_R^L(G')$ -تابع است و برای هر رأس  $z \in Y - N(u)$ ،  $f(z) = 0$ ، نتیجه می‌شود که  $S = \{u\}$ . در این صورت با تغییر وزن  $y$  با مقدار  $0$  و تغییر وزن  $u$  با مقدار  $2$  یک  $\gamma_R^L(G')$ -تابع جدید بدست می‌آید که با انتخاب  $f$  در تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که  $f(u) = 1$ . اگر برای هر رأس  $y \in N(u) - \{v\}$ ،  $f(y) = 0$ ، آن‌گاه  $f$  یک تابع احاطه‌گر رومی نیست، که یک تناقض است. بنابراین حداقل یک رأس  $y \in N(u) - \{v\}$  وجود دارد به طوری که  $f(y) \geq 1$ . در این صورت با تغییر وزن رأس  $y$  با مقدار  $0$  و تغییر وزن رأس  $u$  با مقدار  $2$  یک  $f$  تابع احاطه‌گر رومی مکانی با وزن حداکثر وزن  $f$  بدست می‌آید که با انتخاب  $f$  در تناقض است. بنابراین  $f(u) = 2$  و لذا  $\gamma_R^L(G - v) = w(f) \geq 2|X|$  بنابراین

$$\gamma_R^L(G - e) = \gamma_R^L(G - v) + 1 \geq 2|X| + 1.$$

از لم ۳.۵.۵ و نتیجه ۱.۵.۵، نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_R^L(G - e) = \gamma_R^L(G) + 1$ .  
**حالت ۲:**  $e$  یک یال آویزان نباشد.

مشابه حالت قبل می‌توان نشان داد که  $f(u) = 2$ . فرض کنید  $w \in Y$  و  $N(w) = N(v) - \{u\}$  با توجه به این که  $f$  یک  $\gamma_R^L(G - e)$ -تابع است، نتیجه می‌شود که  $f(w) \neq 0$  یا  $f(v) \neq 0$ . در این صورت

$$\gamma_R^L(G - e) = w(f) \geq \sum_{x \in X} f(x) + f(v) + f(w) \geq 2|X| + 1.$$

از نتیجه ۱.۵.۵ و لم ۳.۵.۵ نتیجه می‌شود که  $\gamma_R^L(G - e) = \gamma_R^L(G) + 1$ . بنابراین  $G$  یک گراف  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی است. حال فرض کنید  $G$  یک گراف  $\gamma_R^L$ -یال بحرانی باشد و همچنین  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(G)$ -تابع باشد. در این صورت طبق لم ۲.۵.۵،  $G$  یک گراف دوبخشی با دو بخش  $X = V_2$  و  $Y = V_0$  می‌باشد. حال برای اثبات طرف عکس قضیه کافی است نشان دهیم که برای هر رأس  $u \in V_0$  و هر زیرمجموعه ناتهی  $S \subseteq N(u)$ ، رأس منحصر به فرد  $v \in V_0$  وجود دارد به طوری که  $N(v) \cap V_2 = S$ . فرض کنید  $u \in V_0$ ،  $N(u) = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  و  $S \subseteq N(u)$ . اگر  $|S| = k$  آن‌گاه چون  $f$  یک  $\gamma_R^L(G)$ -تابع است،  $u$  یک رأس منحصر به فرد با  $N(u) = S$  است. حال فرض کنید  $|S| = k - 1$ . همچنین فرض کنید رأس  $v \in V_0$  به طوری که

فرض کنید  $S' \subseteq V_*$  به طوری که  $S \subseteq S'$  و وجود ندارد.  $N(u) \cap V_* = S$

$$|S'| = \min\{|R| : S \subseteq R \text{ \& } \exists w \in V_* \text{ s.t } N(w) = R\}.$$

فرض کنید  $S - S'$  برای  $v_i \in S - S'$  و  $1 \leq i \leq k$  و همچنین برای رأس  $y \in V_*$   $N(y) \cap V_* = S'$ . در این صورت  $f$  یک تابع احاطه‌گر رومی مکانی برای گراف  $G - yv_i$  می‌باشد و لذا  $\gamma_R^L(G - yv_i) \leq \gamma_R^L(G)$  که یک تناقض است. بنابراین برای هر رأس  $u \in V_*$  و برای هر زیرمجموعه ناتهی  $S \subseteq N(u)$ . رأس  $v \in V_*$  وجود دارد به طوری که  $N(v) = S$  و لذا  $G \in \mathcal{G}$ .  $\square$

توجه کنید که گراف ناهمبند  $G$ ،  $\gamma_R^L$  - یال بحرانی است، اگر و تنها اگر هر مؤلفه از  $G$  گرافی  $\gamma_R^L$  - یال بحرانی باشد. بنابراین نتیجه زیر برقرار است.

**نتیجه ۳.۵.۵.** یک گراف ناتهی  $G = (V, E)$  گرافی  $\gamma_R^L$  - یال بحرانی است اگر و تنها اگر  $G$  اجتماعی از مجموعه‌های مستقل و گراف‌هایی از خانواده  $G$  باشد.



# فصل ۶

## کران‌هایی برای عدد احاطه‌گر رومی مکانی در درخت‌ها

### ۱.۶ مقدمه

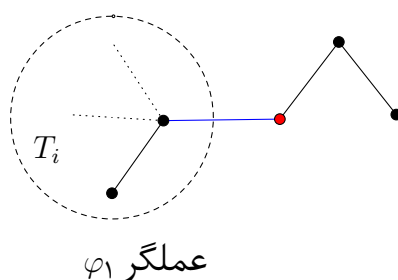
در این فصل کران‌های بالا و پایین برای عدد احاطه‌گر رومی مکانی در درخت‌ها بر اساس مرتبه، تعداد رئوس پشتیبان و تعداد برگ‌های یک درخت ارائه می‌دهیم. سپس تمام درختانی که در تساوی این کران‌ها صدق می‌کنند را مشخص می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا در در بخش ۲.۶ کران‌های خود را برای عدد احاطه‌گر رومی مکانی درخت‌ها ارائه خواهیم. سپس در بخش‌های ۳.۶ و ۴.۶ به اثبات نتایج خود می‌پردازیم.

### ۲.۶ نتایج اصلی

بیلیدیا و همکاران در [۳۴] کران پایین زیر را برای کدهای احاطه‌گر مکانی به‌دست آوردند.

قضیه ۱.۲.۶. [۳۴] برای هر درخت  $T$  از مرتبه  $n \geq 2$ ,

$$\gamma_{\ell}(T) \geq \lceil \frac{n+1}{3} \rceil.$$



شکل ۱.۶: عملگر  $\varphi_1$ .

ما یک کران پایین مشابه قضیه ۱.۲.۶ برای عدد احاطه‌گر رومی مکانی درخت‌ها به صورت زیر ارائه می‌دهیم. سپس همه درخت‌هایی که در تساوی کران شده صدق می‌کنند را مشخص می‌کنیم. برای این منظور برای هر عدد صحیح  $r \geq 0$ ، خانواده‌ای از درخت‌های  $T_r$  به صورت زیر ساخته می‌شود:

- فرض کنید  $\mathcal{T}_0$  خانواده‌ای از درختان  $T$  باشد که از دنباله  $T = T_k, \dots, T_2, T_1$  ( $k \geq 1$ ) از درخت‌ها به دست آید به طوری که  $T_1 = P_5$  و برای هر  $1 \leq i \leq k-1$ ، درخت  $T_{i+1}$  از درخت  $T_i$  به صورت بازگشتی عملگر زیر به دست می‌آید.  
عملگر  $\varphi_1$ : یک رأس پشتیبان از درخت  $T_i$  را به برگ‌گی از مسیر  $P_3$  متصل کنید.  
عملگر  $\varphi_1$  در شکل ۱.۶ نشان داده شده است.

- برای  $r \geq 1$ ، فرض کنید  $\mathcal{T}_r$  خانواده‌ای از درخت‌های  $T$  باشد که بتوان درخت  $T$  را از درخت  $T_0 \in \mathcal{T}_0$  با افزودن  $r$  برگ به حداکثر  $r$  رأس پشتیبان از  $T_0$  به دست آورد.

قضیه ۲.۲.۶. اگر  $T$  یک درخت با  $\ell$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد، آن‌گاه

$$\gamma_R^L(T) \geq \frac{2n + (\ell - s) + 2}{3}.$$

قضیه ۳.۲.۶. فرض کنید  $T$  درختی از مرتبه  $n \geq 2$  و دارای  $\ell$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد و در این صورت  $\gamma_R^L(T) = \frac{2n + (\ell - s) + 2}{3}$  اگر و تنها اگر  $T = K_2$  یا برای عدد صحیح  $k \geq 0$ ،  $T \in \mathcal{T}_k$ .

ما در بخش ۴.۶ کران بالای زیر را برای عدد احاطه‌گر رومی مکانی یک درخت ارائه می‌دهیم.

قضیه ۴.۲.۶. فرض کنید  $T$  درختی از مرتبه  $n \geq 2$  با  $\ell$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد در این صورت

$$\gamma_R^L(T) \leq \frac{4n + \ell + s}{5}.$$



**تعریف ۱.۲.۶.** رأس  $w$  از درجه حداقل ۲ از درخت  $T$  را رأس ویژه<sup>۱</sup> می‌نامیم. هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

(۱) اگر برای  $\gamma_R^L(T')$  -تابع،  $f = (V_0, V_1, V_2)$ ،  $f(w) = 2$ ، آن‌گاه  $Pn(w, V_0) \neq \emptyset$ .

(۲) اگر برای  $\gamma_R^L(T')$  -تابع،  $f = (V_0, V_1, V_2)$ ،  $f(w) = 1$ ، آن‌گاه  $N(w) \cap V_2 = \emptyset$ .

در ادامه هدف ما مشخص کردن همه درخت‌هایی است که تساوی کران ارائه شده در قضیه ۲.۲.۶، برای آن‌ها برقرار است. برای این منظور خانواده‌ای از درخت‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

فرض کنید  $\mathcal{T}$  خانواده‌ای از درختان  $T$  باشد که درخت  $T$  را می‌توان از دنباله‌ی

$$T_1, T_2, \dots, T_k = T \quad (k \geq 1)$$

از درخت‌ها به دست آورد به طوری که  $T_1 = P_4$  و برای  $1 \leq i \leq k-1$ ، درخت  $T_{i+1}$  به صورت بازگشتی از  $T_i$  به دست می‌آید.

**عملگر  $O_1$ :** فرض کنید  $w$  رأس پشتیبانی از  $T_i$  است. در این صورت  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با اضافه کردن یک برگ به  $w$  به دست می‌آید.

**عملگر  $O_2$ :** فرض کنید  $w$  یک برگ از درخت  $T_i$  باشد. در این صورت  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با وصل کردن  $w$  به برگی از مسیر  $P_5$  به دست می‌آید.

**عملگر  $O_3$ :** فرض کنید  $w$  رأس ویژه‌ای از درخت  $T_i$  باشد. در این صورت  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با وصل کردن  $w$  به برگی از مسیر  $P_4$  به دست می‌آید.

**عملگر  $O_4$ :** فرض کنید  $w$  رأسی از  $T_i$  با درجه حداقل دو باشد و  $\gamma_R^L(T_i - w) \geq \gamma_R^L(T_i)$  باشد. در این صورت  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با وصل کردن  $w$  به مرکز مسیر  $P_5$  به دست می‌آید. در شکل ۲.۶ می‌توانید عملگرهای  $O_1, O_2, O_3, O_4$  را ببینید.

**قضیه ۵.۲.۶.** فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 2$  با  $\ell$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد. در این صورت  $\gamma_R^L(T) = \frac{4n + \ell + s}{5}$  اگر و تنها اگر  $T = k_{1, n-1}$  یا  $T \in \mathcal{T}$ .

## ۳.۶ کران پایین

این بخش را با لم زیر شروع می‌کنیم.

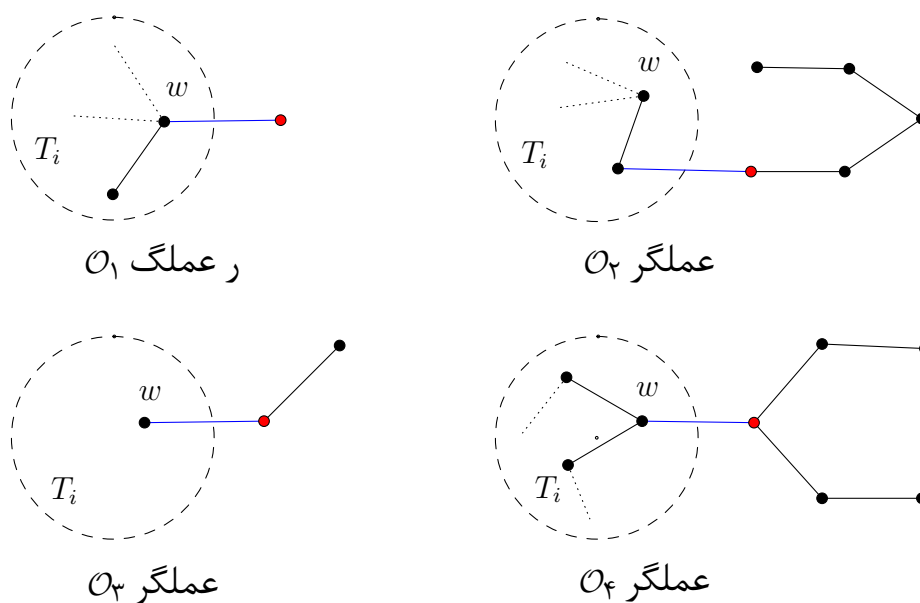
**لم ۱.۳.۶.** فرض کنید  $T$  یک درخت با  $\ell$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد. اگر  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(T)$  -تابع باشد، آن‌گاه  $|V_1| \geq \ell - s$ .

برهان. فرض کنید  $x$  یک رأس پشتیبان باشد. در این صورت به وضوح  $|L(x) \cap V_1| \geq \ell_x - 1$  بنابراین،

$$|V_1| \geq \sum_{x \in S} (\ell_x - 1) = \sum_{x \in S} \ell_x - \sum_{x \in S} 1 = \ell - s.$$

□

<sup>۱</sup>Special Vertex



شکل ۲.۶: عملگرهای  $O_1, O_2, O_3$  و  $O_4$ .

### اثبات قضیه ۲.۲.۶

فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n$  و  $f$  یک  $\gamma_R^L(T)$ -تابع است. همچنین فرض کنید  $T_1, T_2, \dots, T_k$  مؤلفه‌هایی از  $T[V_0 \cup V_1]$  باشند. برای  $i = 1, 2, \dots, k$ ، قرار دهید  $|V(T_i)| = n_i$  و  $D_i = V_1 \cap V(T_i)$  به‌وضوح برای  $i = 1, 2, \dots, k$  یک مجموعه احاطه گرومی مکانی برای  $T_i$  است و لذا  $|D_i| \leq \gamma_L(T_i)$ . طبق قضیه ۱.۲.۶، برای  $i = 1, 2, \dots, k$ ،  $|D_i| \geq \gamma_L(T_i) \geq \frac{n_i + 1}{3}$ . بنابراین،

$$|V_1| = \sum_{i=1}^k |D_i| \geq \sum_{i=1}^k \gamma_L(T_i) \geq \frac{n - |V_1| + k}{3}.$$

از طرف دیگر طبق لم ۱.۳.۶،  $|V_1| = \ell - s$ . بنابراین نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T) &= |V_1| + 2|V_2| \\ &\geq |V_1| + \frac{2(n - |V_1| + k)}{3} \\ &= \frac{2n + |V_1| + 2k}{3} \\ &\geq \frac{2n + (\ell - s) + 2}{3}. \end{aligned}$$

نتیجه ۱.۳.۶. برای هر درخت  $T$  از مرتبه  $n \geq 2$ ،  $\gamma_R^L(T) \geq \frac{2n + 2}{3}$ .

لم زیر نقش اساسی برای اثبات نتایج بعدی در این بخش دارد.

لم ۲.۳.۶. فرض کنید  $T$  یک درخت از مرتبه  $n \geq 3$  و  $\gamma_R^L(T) = \frac{2n+2}{3}$ . در این صورت

$$(1) \text{ برای هر } \gamma_R^L(T) - \text{تابع } f = (V_0, V_1, V_2) \text{، } |V_1| = 0.$$

(۲)  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی نیست.

(۳) اگر  $P : x_0 x_1 \dots x_d$  یک مسیر قطری از  $T$  باشد، آن گاه  $\deg(x_{d-2}) = \deg(x_{d-1}) = 2$  و  $x_{d-3}$  یک رأس پشتیبان است.

(۴) اگر  $P : x_0 x_1 \dots x_d$  یک مسیر قطری از  $T$  باشد و  $T' = T - \{x_d, x_{d-1}, x_{d-2}\}$ ، آن گاه

$$\gamma_R^L(T') = \frac{2|V(T')| + 2}{3}.$$

برهان. (۱) فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(T) - \text{تابع}$  باشد به طوری که  $|V_1| > 0$ . قرار دهید  $v \in V_1$ . اگر  $v$  برگ باشد، آن گاه طبق نتیجه ۱.۳.۶، داریم

$$\frac{2n}{3} \leq \gamma_R^L(T - v) \leq w(f) - 1 = \frac{2n-1}{3},$$

که یک تناقض است. بنابراین  $v$  برگ نیست. فرض کنید  $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots, T_k$  ( $k \geq 2$ )، مؤلفه‌های  $T - \{v\}$  باشند و برای  $i = 1, 2, \dots, k$ ،  $|V(T_i)| = n_i$ . برای  $i = 1, 2, \dots, k$ ، یک تابع  $f|_{V(T_i)}$  احاطه‌گر رومی مکانی است. طبق نتیجه ۱.۳.۶، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{2n+2}{3} &\leq \sum_{i=1}^k \frac{2n_i+2}{3} \\ &\leq \sum_{i=1}^k \gamma_R^L(T_i) \\ &\leq w(f) - 1 \\ &= \frac{2n-1}{3}, \end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین  $|V_1| = 0$ .

(۲) از لم ۱.۳.۶ و قسمت (۱) نتیجه می‌شود که  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی نیست.

(۳) از قسمت (۲) نتیجه می‌شود که  $\deg(x_{d-1}) = 2$ . فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(T) - \text{تابع}$  باشد. با توجه به قسمت (۱) و (۲) می‌توانیم فرض کنیم که برای هر برگ  $u$ ،  $f(u) = 0$  و برای هر رأس پشتیبان  $v$ ،  $f(v) = 2$ . فرض کنید  $\deg(x_{d-2}) \geq 3$ . اگر  $x_{d-2}$  یک رأس پشتیبان باشد، آن گاه با تغییر وزن رأس‌های  $x_d$  و  $x_{d-1}$  با ۱، یک  $\gamma_R^L(T) - \text{تابع}$  جدید به دست می‌آید که با قسمت (۱) در تناقض است. بنابراین  $x_{d-2}$  رأس پشتیبان نیست. در این صورت هر رأس از  $N(x_{d-2}) - \{x_{d-3}\}$  رأس پشتیبانی از درجه دو است. اگر  $\deg(x_{d-2}) \geq 4$ ، آن گاه با تغییر وزن رأس‌های  $x_d$  و  $x_{d-1}$  با ۱، یک  $\gamma_R^L(T) - \text{تابع}$  جدید به دست می‌آید که با قسمت (۱) در تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_{d-2}) = 3$ . مشاهده می‌کنیم که  $f(x_{d-2}) = 0$ .

فرض کنید  $T'$  مؤلفه‌ای از  $T - x_{d-2}x_{d-3}$  باشد که شامل  $x_{d-3}$  است. طبق نتیجه ۱.۳.۶،  
 $\gamma_R^L(T') \geq \frac{2(n-5)+2}{3}$ . چون  $f|_{V(T')}$  یک تابع احاطه‌گر مکانی روی برای درخت  $T'$  است،  
 نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \frac{2(n-5)+2}{3} &\leq \gamma_R^L(T') \\ &\leq w(f|_{V(T')}) \\ &= \gamma_R^L(T) - 4 \\ &= \frac{2n+2}{3} - 4, \end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین  $\deg(x_{d-2}) = 2$ . چون  $f(x_{d-1}) = 2$  است، از قسمت (۱) نتیجه می‌گیریم که  $f(x_{d-2}) = 0$  و لذا  $f(x_{d-3}) = 2$ . فرض کنید  $x_{d-3}$  رأسی پشتیبان نیست. حال فرض کنید  $\deg(x_{d-3}) = 2$ . به‌وضوح می‌توان فرض کرد  $f(x_{d-4}) = 0$ ، زیرا در غیراین صورت با تغییر وزن رأس‌های  $x_d$  و  $x_{d-1}$  با  $\gamma_R^L(T)$  یک تابع جدید به‌دست می‌آید که با قسمت (۱) در تناقض است. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که  $N(x_{d-4}) \cap V_2 = \{x_{d-3}\}$ . بنابراین  $x_{d-4}$  رأس پشتیبان یا مجاور دو رأس پشتیبان نیست. فرض کنید  $T_0, T_1, \dots, T_\ell$  مؤلفه‌هایی از  $T - x_{d-4}$  باشند که  $T_0$  شامل  $x_{d-3}$  است. به‌وضوح برای  $i = 1, 2, \dots, \ell$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای  $T_i$  است و هم‌چنین طبق نتیجه ۱.۳.۶،

$$w(f|_{V(T_i)}) \geq \gamma_R^L(T_i) \geq \frac{2|V(T_i)|+2}{3}.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \frac{2n-8}{3} &\leq \frac{2(n-5)+2\ell}{3} = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2|V(T_i)|+2}{3} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_R^L(T_i) \leq \sum_{i=1}^{\ell} w(f|_{V(T_i)}) \\ &= w(f) - 4 = \frac{2n+2}{3} - 4 \\ &= \frac{2n-10}{3}, \end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین  $\deg(x_{d-3}) \geq 3$ . فرض کنید رأس  $a_1$  برگ‌ی از درخت  $T$  باشد که  $d(x_{d-3}, a_1)$  مینیمم و کوتاه‌ترین مسیر از  $a$  به  $x_{d-3}$  مسیر  $P$  را قطع نکند. به‌وضوح  $d(x_{d-3}, a_1) \in \{2, 3\}$ . فرض کنید  $d(x_{d-3}, a_1) = 2$ . قرار دهید  $b_1 \in N(a_1) \cap N(x_{d-3})$ . در این صورت طبق قسمت (۲)،  $\deg(b_1) = 2$  و لذا با تغییر وزن  $a_1$  و  $b_1$  به  $\gamma_R^L(T)$  یک تابع به‌دست می‌آید، که یک تناقض است. بنابراین  $d(x_{d-3}, a) = 3$ . لذا هر رأس از  $N(x_{d-3}) - \{x_{d-4}\}$  دارای درجه دو و مجاور یک رأس پشتیبان با درجه دو می‌باشد. فرض کنید  $k = \deg(x_{d-3}) - 2$  و  $N(x_{d-3}) - \{x_{d-4}, x_{d-2}\} = \{c_1, \dots, c_k\}$  در این صورت

برای  $i = 1, 2, \dots, k$  مجاور یک رأس پشتیبان  $b_i$  می باشد که  $\deg(b_i) = 2$ . فرض کنید برای  $i = 1, 2, \dots, k$  برگ مجاور  $b_i$  باشد. در این صورت برای  $i = 1, 2, \dots, k$  و  $f(b_i) = 2$  و  $f(a_i) = f(c_i) = 0$ . همچنین ما می توانیم فرض کنیم  $f(x_{d-4}) = 0$ ، زیرا در غیراین صورت با تغییر وزن رئوس  $x_d$  و  $x_{d-1}$  با  $1$ ،  $\gamma_R^L(T)$  تابع جدیدی به دست می آید، که یک تناقض است. همچنین به همین دلیل،  $N(x_{d-4}) \cap V_T = \{x_{d-3}\}$ . بنابراین رأس پشتیبان و یا مجاور یک رأس پشتیبان نیست. فرض کنید  $T_0, T_1, \dots, T_k$  مؤلفه هایی از  $T - x_{d-4}$  باشند که  $T_0$  شامل  $x_{d-3}$  است. به وضوح  $f|_{V(T_i)}$  یک تابع احاطه گر روی مکانی برای درخت  $T_i$  است. طبق نتیجه ۱.۳.۶، برای  $i = 1, 2, \dots, \ell$  داریم:

$$w(f|_{V(T_i)}) \geq \gamma_R^L(T_i) \geq \frac{2|V(T_i)| + 2}{3}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{2n - 6k - 8}{3} &\leq \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(n - 3k - 5) \\ &\leq \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{\ell} |V(T_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2|V(T_i)| + 2}{3} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\ell} w(f|_{V(T_i)}) \\ &= w(f) - 2(k+1) - 2 \\ &= \frac{2n + 2}{3} - 2k - 4 \\ &= \frac{2n - 6k - 10}{3}, \end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین  $x_{d-3}$  رأسی پشتیبان است. (۴) طبق قسمت (۳)،  $\deg(x_{d-1}) = \deg(x_{d-2}) = 2$  و  $x_{d-3}$  یک رأس پشتیبان است. فرض کنید  $f$  یک  $\gamma_R^L(T)$  تابع است. نشان دادیم که  $|V_1| = 0$ ،  $f(x_d) = f(x_{d-2}) = 0$  و  $f(x_{d-1}) = 2$ . بنابراین  $f|_{T'}$  یک تابع احاطه گر روی مکانی برای درخت  $T'$  است. طبق نتیجه ۱.۳.۶، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{2|V(T')| + 2}{3} &\leq \gamma_R^L(T') \leq w(f|_{T'}) \\ &= \gamma_R^L(T) - 2 \\ &= \frac{2n + 2}{3} - 2 \\ &= \frac{2|V(T')| + 2}{3}, \end{aligned}$$

□

$$\gamma_R^L(T') = \frac{2|V(T')| + 2}{3} \text{ بنابراین}$$

### اثبات قضیه ۲.۲.۶

فرض کنید  $k_2 \neq T$  با  $\ell$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد.

ادعا ۱.  $\gamma_R^L(T) = \frac{2n+2}{3}$  اگر و تنها اگر  $T \in \mathcal{T}_0$ .

اثبات ادعا ۱. فرض کنید  $\gamma_R^L(T) = \frac{2n+2}{3}$  با استقراء روی مرتبه  $n$  نشان می‌دهیم که  $T \in \mathcal{T}_0$ .

مسیر  $P_5$  کوچک‌ترین درختی است که در  $\gamma_R^L(T) = \frac{2n+2}{3}$  صدق می‌کند و  $P_5 \in \mathcal{T}_0$ . این نتیجه

برای گام پایه استقراء کافی است. اکنون فرض کنید که هر درخت  $T'$  از مرتبه  $5 < n' < n$

و  $\gamma_R^L(T') = \frac{2n'+2}{3}$  عضوی از خانواده‌ی  $\mathcal{T}_0$  است. فرض کنید  $P : x_0 x_1 \dots x_d$  یک مسیر

قطری از درخت  $T$  است. طبق قسمت (۳) از لم ۲.۳.۶،  $\deg(x_{d-1}) = \deg(x_{d-2}) = 2$  و  $\deg(x_{d-3})$

یک رأس پشتیبان است. قرار دهید  $T_1 = T - \{x_d, x_{d-1}, x_{d-2}\}$  طبق قسمت (۴) لم ۲.۳.۶،

$\gamma_R^L(T_1) = \frac{2|V(T_1)|+2}{3}$  پس  $T_1 \in \mathcal{T}_0$ . بنابراین  $T$  از  $T_1$  با عملگر  $\varphi_1$  به‌دست آمده است و لذا

$T \in \mathcal{T}_0$ . برای اثبات عکس ادعا کافی است نشان دهیم که اگر  $\gamma_R^L(T_i) = \frac{2|V(T_i)|+2}{3}$  و  $T_{i+1}$

از  $T_i$  با عملگر  $\varphi_1$  به‌دست آمده باشد. آن‌گاه  $\gamma_R^L(T_{i+1}) = \frac{2|V(T_{i+1})|+2}{3}$ . در این صورت با

استفاده از تعداد عملگرهای استفاده شده برای ساختن  $T \in \mathcal{T}_0$  نتیجه به‌دست می‌آید. فرض

کنید  $\gamma_R^L(T_{i+1}) = \frac{2|V(T_{i+1})|+2}{3}$  و  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با متصل کردن رأس پشتیبان  $v \in V(T_i)$  به

برگ  $x$  از مسیر  $P : xyz$  به‌دست آمده است.

فرض کنید  $f$  یک  $\gamma_R^L(T)$ -تابع باشد. طبق قسمت‌های (۱) و (۲) از لم ۲.۳.۶، می‌توانیم فرض

کنیم که  $f(v) = 2$ . در این صورت تابع  $g : V(T_{i+1}) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  با ضابطه‌ی  $g(x) = g(z) = 0$

$g(y) = 2$  و برای  $u \in V(T_i)$ ،  $g(u) = f(u)$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T_{i+1}$

است. حال از نتیجه ۱.۳.۶، داریم

$$\begin{aligned} \frac{2|V(T_{i+1})|+2}{3} &\leq \gamma_R^L(T_{i+1}) \leq w(g) \\ &= \gamma_R^L(T) + 2 \\ &= \frac{2|V(T_i)|+2}{3} + 2 \\ &= \frac{2|V(T_{i+1})|+2}{3}. \end{aligned}$$

بنابراین  $\gamma_R^L(T_{i+1}) = \frac{2|V(T_{i+1})|+2}{3}$

ادعا ۲. فرض کنید  $s \neq \ell$ . در این صورت  $\gamma_R^L(T) = \frac{2n + (\ell - s) + 2}{3}$  اگر و تنها اگر وجود

داشته باشد  $k \geq 1$  به‌طوری‌که  $T \in \mathcal{T}_k$ .

اثبات ادعای ۲. فرض کنید که  $\gamma_R^L(T) = \frac{2n + (\ell - s) + 2}{3}$  و  $\ell \neq s$ .

هم‌چنین فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(T)$ -تابع باشد. طبق لم ۱.۳.۶، برای هر رأس

پشتیبان  $x$ ، حداقل  $\ell_x - 1$  از برگ‌های مجاورش دارای وزن ۱ هستند. فرض کنید  $T'$  درختی

باشد که از درخت  $T$  با حذف  $\ell_x - 1$  برگ  $u$  از هر رأس پشتیبان  $x$ ، با  $f(u) = 1$  به‌دست آمده

است. در این صورت  $f|_{T'}$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T'$  است و لذا

$$\gamma_R^L(T') \leq \gamma_R^L(T) - (\ell - s) = \frac{2(n + (\ell - s) + 2)}{3} = \frac{2|V(T')| + 2}{3}.$$

طبق نتیجه ۱.۳.۶،  $\gamma_R^L(T') = \frac{2|V(T')| + 2}{3}$ . حال از ادعای ۱، نتیجه می‌شود که  $T' \in \mathcal{T}_0$  و لذا  $T \in \mathcal{T}_k$  که  $k = \ell - s$ . برای اثبات قسمت عکس ادعا فرض کنید برای یک  $k \geq 1$ ،  $T \in \mathcal{T}_k$ . بنابراین  $T$  از یک درخت  $T' \in \mathcal{T}_0$  با اضافه کردن  $k$  برگ به حداکثر  $k$  رأس پشتیبان از  $T'$  به دست آمده است. طبق ادعای ۱،  $\gamma_R^L(T') = \frac{2|V(T')| + 2}{3}$ . فرض کنید  $f'$  یک  $\gamma_R^L(T)$ -تابع است. تابع  $f'$  را به یک تابع احاطه‌گر روی مکانی با دادن وزن ۱ به هر رأس از  $V(T) - V(T')$  تعمیم می‌دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T) &\leq \gamma_R^L(T') + \ell - s = \frac{2|V(T')| + 2}{3} + \ell - s \\ &= \frac{2(|V(T')| + \ell - s) + \ell - s + 2}{3} \\ &= \frac{2|V(T')| + (\ell - s) + 2}{3}. \end{aligned}$$

در این صورت قضیه ۲.۲.۶، نتیجه می‌دهد که  $\gamma_R^L(T) = \frac{2n + (\ell - s) + 2}{3}$ . اثبات قضیه از ادعای ۱ و ۲ نتیجه می‌شود.

## ۴.۶ کران بالا

این بخش را با دو لم زیر شروع می‌کنیم.

لم ۱.۴.۶. اگر  $T'$  یک درخت باشد و درخت  $T$  از درخت  $T'$  با متصل کردن یک برگ از  $T'$  به برگ  $P_5$  از  $P_5$  به دست آمده باشد، آن گاه  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R^L(T') + 4$ .

برهان. فرض کنید  $T$  از درخت  $T'$  با متصل کردن برگ  $v$  از  $T'$  به برگ  $a$  از مسیر  $P_5 = abcde$  به دست آمده است. اگر  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(T')$ -تابع باشد، آن گاه تابع

$$g = (V_0 \cup \{a, c, e\}, V_1, V_2 \cup \{b, d\})$$

یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت است. بنابراین  $\gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T') + 4$ . فرض کنید  $h = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(T)$ -تابع باشد. اگر  $a \notin V_2$ ، آن گاه

$$h(a) + h(b) + h(c) + h(d) + h(e) = 4,$$

و  $h|_{V(T')}$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T'$  است. بنابراین  $\gamma_R^L(T') \leq \gamma_R^L(T) - 4$  و در نتیجه

$$\gamma_R^L(T) = \gamma_R^L(T') + 4$$

حال فرض کنید  $a \in V_T$ . در این صورت  $h(a) + h(b) + h(c) + h(d) + h(e) = 5$ .

بنابراین  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R^L(T') + 4$  و لذا  $\gamma_R^L(T') \leq w(h|_{V(T')}) + 1 = \gamma_R^L(T) - 4$  □

به‌طریق مشابه می‌توان لم زیر را نیز اثبات کرد.

**لم ۲.۴.۶.** فرض کنید  $T'$  یک درخت باشد و  $w \in V(T')$  به‌طوری‌که  $\deg(w) \geq 2$  و اگر  $T$  از  $T'$  با متصل کردن رأس  $w$  به مرکز مسیر  $P_9$  به‌دست آمده باشد، آن‌گاه  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R^L(T') + 8$ .

### اثبات قضیه ۴.۲.۶

با استفاده از استقراء روی مرتبه  $n$  از درخت  $T$  قضیه را اثبات می‌کنیم. گام پایه برای  $n \leq 4$  واضح است. حال فرض کنید برای هر درخت  $T'$  از مرتبه  $n' < n$  با  $i$  برگ و  $s'$  رأس پشتیبان،  $\gamma_R^L(T') \leq \frac{4n' + \ell' + s'}{5}$ . هم‌چنین فرض کنید  $T$  درختی از مرتبه  $n \geq 5$  با  $\ell$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد. فرض کنید  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی  $v$  و  $u$  یک برگ مجاور  $v$  است. قرار دهید  $T' = T - u$ . به‌وضوح  $\gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T') + 1$ . طبق فرض استقراء داریم:

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T) &\leq \gamma_R^L(T') + 1 \\ &\leq \frac{4n' + \ell' + s'}{5} + 1 \\ &= \frac{4(n-1) + (\ell-1) + s}{5} + 1 \\ &= \frac{4n + \ell + s}{5}. \end{aligned}$$

حال فرض کنید  $e = uv \in E(T)$  به‌طوری‌که  $\deg(u) \geq 3$  و  $\deg(v) \geq 3$ . هم‌چنین فرض کنید  $T_1$  و  $T_2$  دو مؤلفه از  $T - e$  به‌ترتیب شامل  $u$  و  $v$  باشند. فرض کنید برای  $i = 1, 2$ ، درخت  $T_i$  از مرتبه  $n_i$  با  $\ell_i$  برگ و  $s_i$  رأس پشتیبان باشد. طبق فرض استقراء داریم:

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T) &\leq \gamma_R^L(T_1) + \gamma_R^L(T_2) \\ &\leq \frac{4n_1 + \ell_1 + s_1}{5} + \frac{4n_2 + \ell_2 + s_2}{5} \\ &= \frac{4n + \ell + s}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین در ادامه می‌توان فرض کرد ادعاهای زیر درست هستند.

**ادعا ۱.**  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی نیست.

**ادعا ۲.** برای هر یال  $e = uv$  از  $T$ ،  $\deg(u) \leq 2$  یا  $\deg(v) \leq 2$ .

درخت  $T$  را در برگ  $x_0$  از مسیر قطری  $x_0 x_1 \dots x_d$  ریشه‌دار می‌کنیم. طبق ادعای ۱،  $d \geq 3$ . اگر  $d = 3$ ، آن‌گاه  $T$  یک ستاره دوگانه است و لذا  $\gamma_R^L(T) = \frac{4n + \ell + s}{5}$ . بنابراین فرض می‌کنیم



که  $d \geq 4$ . طبق ادعای ۱،  $\deg(x_{d-1}) = 2$ . فرض کنید  $\deg(x_{d-2}) \geq 3$ . حال فرض کنید  $x_{d-2}$  یک رأس پشتیبان و  $u$  برگ مجاور  $x_{d-2}$  باشد. قرار دهید  $T' = T - u$ . طبق فرض استقراء،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T) &\leq \gamma_R^L(T') + 1 \\ &\leq \frac{4(n-1) + (\ell-1) + (s-1)}{5} + 1 \\ &< \frac{4n + \ell + s}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $x_{d-2}$  رأس پشتیبان نیست. فرض کنید  $u$  فرزندی از  $x_{d-2}$  غیر از  $x_{d-1}$  باشد. طبق ادعای ۱،  $\deg(u) = 2$ . فرض کنید  $v$  فرزند  $u$  باشد و  $T' = T - \{u, v\}$  طبق فرض استقراء،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T) &\leq \gamma_R^L(T') + 2 \\ &\leq \frac{4(n-2) + (\ell-1) + (s-1)}{5} + 2 \\ &= \frac{4n + \ell + s}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_{d-2}) = 2$ . حال فرض کنید که  $\deg(x_{d-3}) \geq 3$ . فرض کنید  $x_{d-3}$  یک رأس پشتیبان باشد و  $u$  برگ منحصر به فرد مجاور آن باشد. قرار دهید  $T' = T - u$ . طبق فرض استقراء نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T) &\leq \gamma_R^L(T') + 1 \\ &\leq \frac{4(n-1) + (\ell-1) + (s-1)}{5} + 1 < \frac{4n + \ell + s}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $x_{d-3}$  رأسی پشتیبان نیست. حال فرض کنید  $u$  فرزندی از  $x_{d-3}$  غیر از  $x_{d-2}$  باشد. فرض کنید  $u$  یک رأس پشتیبان است. طبق ادعای ۲،  $\deg(u) = 2$ . فرض کنید  $v$  فرزندی از  $u$  باشد. قرار دهید  $T' = T - \{u, v\}$ . طبق فرض استقراء،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T) &\leq \gamma_R^L(T') + 2 \\ &\leq \frac{4(n-2) + (\ell-1) + (s-1)}{5} + 2 \\ &= \frac{4n + \ell + s}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $u$  یک رأس پشتیبان نیست. بنابراین طبق ادعای ۱، هر فرزند  $u$  یک رأس پشتیبان از درجه ۲ است. چون  $\deg(x_{d-3}) \geq 3$ ، نتیجه می‌گیریم که  $d \geq 6$  و لذا  $x_{d-5} \neq x_0$ . قرار دهید  $\deg(x_{d-3}) = k + 1$ . طبق ادعای ۲،  $\deg(x_{d-4}) = 2$ . قرار دهید  $T' = T - \deg(x_{d-4})$ . فرض کنید  $T'$  دارای  $n'$  رأس،  $\ell'$  برگ و  $s'$  رأس پشتیبان باشد. طبق فرض استقراء  $\gamma_R^L(T') \leq \frac{4n' + \ell' + s'}{5}$ . فرض کنید  $f$  یک  $\gamma_R^L(T')$ -تابع باشد. در این صورت

توسیع  $f$  با دادن وزن ۲ به  $x_{d-3}$  و هر رأس از  $T_{x_{d-4}}$  با فاصله دو از  $x_{d-3}$  و  $\circ$  به بقیه رئوس  $T_{x_{d-4}}$ ، یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت می‌باشد. بنابراین

$$\gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T') + 2k + 2.$$

چون  $1 \leq \ell' \leq \ell - k + 1$ ،  $s' \leq s - k + 1$  و  $n' = n - 3k - 2$  نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T) &\leq \gamma_R^L(T') + 2k + 2 \\ &\leq \frac{4n' + \ell' + s'}{5} + 2k + 2 \\ &\leq \frac{4n + \ell + s - 4k + 4}{5} \\ &\leq \frac{4n + \ell + s}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_{d-3}) = 2$ .

حال فرض کنید که  $\deg(x_{d-4}) \geq 3$ . مثل قبل می‌توانیم فرض کنیم  $x_{d-4}$  یک رأس پشتیبان نیست و همچنین مجاور رأس پشتیبان از درجه دو نیز نمی‌باشد. طبق ادعای ۲،  $\deg(x_{d-5}) = 2$  و هر فرزند  $x_{d-4}$  از درجه ۲ است. اگر برگ  $u \neq x_d$  از درخت  $T_{x_{d-5}}$  با فاصله چهار از  $x_{d-4}$  وجود داشته باشد، آن‌گاه هر رأس درونی از مسیر  $u$  به  $x_{d-4}$  دارای درجه دو است. زیرا  $u$  و  $x_d$  نقش یکسانی دارند. بنابراین هر برگ  $u$  از  $T_{x_{d-5}}$  در فاصله ۳ یا ۴ از  $x_{d-4}$  است و هر رأس درونی از مسیر  $u$  به  $x_{d-4}$  از درجه ۲ است. فرض کنید  $k_1$  و  $k_2$  تعداد برگ‌های  $T_{x_{d-5}}$  به ترتیب از فاصله چهار و سه از  $T_{x_{d-4}}$  باشند. در این صورت  $\deg(x_{d-4}) = k_1 + k_2 + 1$ . از این که  $\deg(x_{d-4}) \geq 3$ ، نتیجه می‌شود که  $d \geq 7$  و لذا  $x_{d-6} \neq x_{\circ}$ . قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-5}}$ .

فرض کنید  $T'$  دارای  $n'$  رأس،  $s'$  رأس پشتیبان و  $\ell'$  برگ باشد. طبق فرض استقراء  $\gamma_R^L(T') \leq \frac{4n' + \ell' + s'}{5}$ . فرض کنید  $f$  یک  $\gamma_R^L(T')$ -تابع باشد. در این صورت توسیع  $f$  با دادن وزن ۲ به  $x_{d-4}$  و هر رأس از  $T_{x_{d-5}}$  با فاصله سه از  $x_{d-4}$ ، وزن ۱ به هر رأس از  $T_{x_{d-5}}$  با فاصله چهار از  $x_{d-4}$  و وزن  $\circ$  به رئوس دیگر از  $T_{x_{d-5}}$ ، یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T$  می‌باشد. چون  $1 \leq \ell' \leq \ell - k_1 - k_2 + 1$ ،  $s' \leq s - k_1 - k_2 + 1$  و  $n' = n - 4k - 3k_2 - 2$ ، نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T) &\leq \gamma_R^L(T') + 3k_1 + 2k_2 + 2 \\ &\leq \frac{4n' + \ell' + s'}{5} + 3k_1 + 2k_2 + 2 \\ &\leq \frac{4n + \ell + s - 3k_1 - 4k_2 + 4}{5} \\ &< \frac{4n + \ell + s}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که  $\deg(x_{d-4}) = 2$ . قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-5}}$ . فرض کنید  $T'$  دارای  $n'$  رأس،  $\ell'$  برگ  $s'$  رأس پشتیبان باشد. طبق فرض استقراء  $\gamma_R^L(T') \leq \frac{4n' + \ell' + s'}{5}$ . فرض

کنید  $f$  یک  $\gamma_R^L(T')$ -تابع است. در این صورت توسیع  $f$  با دادن وزن ۲ به  $x_{d-3}$  و  $x_{d-1}$  و وزن ۰ به  $x_d$  و  $x_{d-4}$ ،  $x_{d-2}$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T$  است. چون  $s' \leq s$ ،  $\ell' \leq \ell$  و  $n' = n - 5$ ، نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T) &\leq \gamma_R^L(T') + 4 \\ &\leq \frac{4n' + \ell' + s'}{5} + 4 \\ &\leq \frac{4n + \ell + s}{5}. \end{aligned}$$

به دست می‌آید.

لم ۳.۴.۶. اگر  $\gamma_R^L(T_i) = \frac{4n(T_i) + \ell(T_i) + s(T_i)}{5}$  و  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با یکی از عملگرهای  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$  و  $\mathcal{O}_4$  به دست آمده باشد، آن‌گاه

$$\gamma_R^L(T_{i+1}) = \frac{4n(T_{i+1}) + \ell(T_{i+1}) + s(T_{i+1})}{5}.$$

برهان. فرض کنید  $\gamma_R^L(T_i) = \frac{4n_i + \ell_i + s_i}{5}$  که  $n_i = n(T_i)$ ،  $\ell_i = \ell(T_i)$  و  $s_i = s(T_i)$  از  $T_i$  با عملگر  $\mathcal{O}_1$  به دست آمده است. فرض کنید  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با اضافه کردن برگ  $v$  به رأس پشتیبان  $w$  از  $T_i$  به دست آمده باشد. در این صورت  $\gamma_R^L(T_{i+1}) \leq \gamma_R^L(T_i) + 1$ . فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(T_{i+1})$ -تابع باشد. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که  $f(v) = 1$ . در این صورت تابع  $f = (V_0, V_1 - \{v\}, V_2)$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی از درخت  $T_i$  است و لذا  $\gamma_R^L(T_i) \leq \gamma_R^L(T_{i+1}) - 1$ . بنابراین  $\gamma_R^L(T_{i+1}) = \gamma_R^L(T_i) + 1$ . در این صورت نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T_{i+1}) &= \gamma_R^L(T_i) + 1 \\ &= \frac{4n_i + \ell_i + s_i}{5} + 1 \\ &= \frac{4(n_i + 1) + (\ell_i + 1) + s_i}{5} \\ &= \frac{4n(T_{i+1}) + \ell(T_{i+1}) + s(T_{i+1})}{5}. \end{aligned}$$

حال فرض کنید  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با عملگر  $\mathcal{O}_2$  به دست آمده باشد. طبق لم ۱.۴.۶،  $\gamma_R^L(T_{i+1}) = \gamma_R^L(T_i) + 4$  بنابراین

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T_{i+1}) &= \frac{4n_i + \ell_i + s_i}{5} + 4 \\ &= \frac{4(n_i + 5) + \ell_i + s_i}{5} \\ &= \frac{4n(T_{i+1}) + \ell(T_{i+1}) + s(T_{i+1})}{5}. \end{aligned}$$

حال فرض کنید  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با عملگر  $\mathcal{O}_3$  به دست آمده باشد. فرض کنید  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با اضافه کردن رأس ویژه  $v$  از  $T_i$  به برگ  $a$  از مسیر  $ab$  :  $P_2$  به دست آمده است. نشان می‌دهیم که

$\gamma_R^L(T_{i+1}) = \gamma_R^L(T_i) + 2$ . فرض کنید  $h$  یک  $\gamma_R^L(T_{i+1}) = \gamma_R^L(T_i) + 1$  فرض کنید  $h$  یک  $-\gamma_R^L(T_{i+1})$  تابع باشد. فرض کنید  $h(a) = 2$ . به‌وضوح می‌توانیم فرض کنیم  $h(b) = 0$ . اگر  $h(v) \neq 0$ ، آن‌گاه  $h|_{V(T_i)}$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T_i$  با وزن کمتر از  $\gamma_R^L(T_i)$  می‌باشد، که یک تناقض است. بنابراین  $h(v) = 0$ . چون  $h$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی است، رأس  $w \in N(v) - \{a\}$  وجود دارد به‌طوری‌که  $h(w) = 2$ . در این‌صورت تابع  $h'$  روی  $V(T')$  با ضابطه‌ی  $h'(v) = 1$  و برای رأس  $x \neq v$  یک  $h'(x) = h(x)$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T_i$  است. به‌وضوح  $h'$  یک  $-\gamma_R^L(T_i)$  تابع می‌باشد، که این یک تناقض است، زیرا  $v$  یک رأس ویژه است. بنابراین  $h(a) \neq 2$ .

اگر  $h(a) = 1$ ، آن‌گاه  $h(b) = 1$ . در این‌صورت با تغییر وزن  $a$  به  $2$  و  $b$  به صفر یک  $-\gamma_R^L(T_{i+1})$  تابع جدید به‌دست می‌آید که مثل قبل به تناقض می‌رسیم. بنابراین  $h(a) = 0$ . اگر  $h(b) = 2$  باشد، آن‌گاه با تغییر وزن  $a$  به  $2$  و  $b$  به صفر یک  $-\gamma_R^L(T_{i+1})$  تابع جدید به‌دست می‌آید که  $a$  دارای وزن  $2$  است، لذا مثل قبل به تناقض می‌رسیم. بنابراین  $h(b) = 1$  و لذا  $h(v) = 2$ . در این‌صورت  $h|_{V(T_i)}$  یک  $-\gamma_R^L(T_{i+1})$  تابع است که  $P_n(v, V_0) = \emptyset$ . که یک تناقض است زیرا  $v$  یک رأس ویژه است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که  $\gamma_R^L(T_{i+1}) = \gamma_R^L(T_i) + 2$ . در این‌صورت

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T_{i+1}) &= \gamma_R^L(T_i) + 2 \\ &= \frac{4(n_i + 2) + (\ell_i + 1) + (s_i + 1)}{5} + 2 \\ &= \frac{4n(T_{i+1}) + \ell(T_{i+1}) + s(T_{i+1})}{5}. \end{aligned}$$

در آخر فرض می‌کنیم که  $T_{i+1}$  از  $T_i$  با عملگر  $O_4$  به‌دست آمده باشد. طبق لم ۲.۴.۶،

$$\gamma_R^L(T_{i+1}) = \gamma_R^L(T_i) + 8.$$

در این‌صورت،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T_{i+1}) &= \gamma_R^L(T_i) + 8 \\ &= \frac{4n_i + \ell_i + s_i}{5} + 8 \\ &= \frac{4(n_i + 9) + (\ell_i + 2) + (s_i + 2)}{5} \\ &= \frac{4n(T_{i+1}) + \ell(T_{i+1}) + s(T_{i+1})}{5}. \end{aligned}$$

□

لم ۴.۴.۶. فرض کنید  $T \in \mathcal{T}$  از مرتبه  $n$  با  $\ell$  برگ و  $s$  رأس پشتیبان باشد. در این‌صورت

$$\gamma_R^L(T) = \frac{4n + \ell + s}{5}.$$

برهان. با استفاده از لم ۲.۴.۶ و استقراء روی تعداد عملگرهای استفاده شده در ساخت  $T$ ، قضیه اثبات می‌شود. □

## اثبات قضیه ۵.۲.۶

با استفاده از استقراء روی مرتبه  $n$  از یک درخت  $T \neq k_{1,n-1}$  با  $\ell$  برگ،  $s$  رأس پشتیبان و  $\gamma_R^L(T) = \frac{4n+\ell+s}{5}$  نشان می‌دهیم که  $T \in \mathcal{T}$ . برای گام پایه استقراء، قرار دهید  $T = P_4$ . به‌وضوح  $P_4 \in \mathcal{T}$ . این نتیجه برای گام پایه استقراء کافی است. فرض کنید هر درخت  $T'$  از مرتبه  $n' < n$  با  $\ell'$  برگ،  $s'$  رأس پشتیبان و  $\gamma_R^L(T') = \frac{4n'+\ell'+s'}{5}$  عضوی از خانواده‌ی  $\mathcal{T}$  باشد. فرض کنید  $n = n(T) \geq 5$ . فرض کنید  $u$  رأس پشتیبانی از  $T$  باشد به‌طوری‌که  $\deg(u) \geq 3$ . همچنین فرض کنید  $v$  برگ مجاور رأس  $u$  باشد. قرار دهید  $T' = T - v$ . به‌وضوح،  $\gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T') + 1$  اگر  $u$  رأس پشتیبان قوی نباشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T) &\leq \gamma_R^L(T') + 1 \\ &\leq \frac{4(n-1) + (\ell-1) + (s-1)}{5} + 1 \\ &< \frac{4n+\ell+s}{5}, \end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین  $u$  یک رأس پشتیبان قوی است. در این صورت داریم،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T') &\leq \gamma_R^L(T) - 1 \\ &= \frac{4n+\ell+s}{5} - 1 \\ &= \frac{4(n-1) + (\ell-1) + s}{5} \\ &= \frac{4n'+\ell'+s'}{5}. \end{aligned}$$

طبق فرض استقراء،  $T' \in \mathcal{T}$ . بنابراین  $T$  از  $T'$  با عملگر  $\mathcal{O}_1$  به‌دست آمده است و لذا  $T \in \mathcal{T}$ . بنابراین در ادامه‌ی اثبات فرض می‌کنیم که ادعای زیر درست است.

**ادعا ۱.** هر رأس پشتیبان  $T$  از درجه ۲ است.

حال درخت  $T$  را در رأس  $x_0$  از مسیر قطری  $x_0 x_1 \dots x_d$  ریشه‌دار می‌کنیم. چون  $n > 4$  و  $T$  دارای رأس پشتیبان قوی نیست، نتیجه می‌گیریم که  $d \geq 4$ . به‌وضوح  $\deg(x_1) = \deg(x_{d-1}) = 2$ . فرض کنید  $d = 4$ . اگر  $\deg(x_2) = 2$ ، آن‌گاه  $T = P_5$  و  $\gamma_R^L(T) < \frac{4n+\ell+s}{5}$ ، که یک تناقض است. بنابراین  $\deg(x_2) > 2$ . طبق ادعای ۱،  $x_2$  رأس پشتیبان نیست. در این صورت  $T$  دارای  $\deg(x_2)$  رأس پشتیبان از درجه دو می‌باشد و به‌علاوه  $(L(T) \cup \{x_2\}, \emptyset, S(T))$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای  $T$  است. حال چون  $n = 2s + 1$  و  $L = s$ ، پس  $\gamma_R^L(T) \leq 2s < \frac{4n+\ell+s}{5}$  که یک تناقض است. بنابراین  $d \geq 5$ . نشان می‌دهیم که  $\deg(x_2) = 2$ . فرض کنید  $3 \leq \deg(x_{d-2}) = k + 1$ . طبق ادعای ۱،  $x_{d-2}$  رأس پشتیبان نیست. بنابراین هر فرزند از  $x_{d-2}$  یک رأس پشتیبان از درجه دو می‌باشد. قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-2}}$ . فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$

یک  $\gamma_R^L(T')$ -تابع است. در این صورت تابع

$$h = (V_0 \cup S(T_{x_{d-2}}) \cup \{x_{d-2}\}, V_1, V_2 \cup S(T_{x_{d-2}}))$$

یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T$  است. بنابراین از قضیه ۴.۲.۶ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T') &\leq \gamma_R^L(T') + 2k \\ &\leq \frac{4(n - 2k - 1) + (\ell - k + 1) + (s - k + 1)}{5} + 2k \\ &< \frac{4n + \ell + s}{5}, \end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین  $\deg(x_{d-2}) = 2$ . حال نشان می‌دهیم که  $\deg(x_{d-3}) = 2$ . فرض کنید  $\deg(x_{d-3}) \geq 3$ . طبق ادعای ۱،  $x_{d-3}$  رأس پشتیبان نیست. فرض کنید  $v \neq x_d$  برگگی از  $T_{x_{d-2}}$  با فاصله سه از  $x_{d-3}$  باشد. چون  $v$  و  $x_d$  نقش یکسانی دارند، هر رأس درونی از مسیر  $v$  به  $x_{d-2}$  دارای درجه دو می‌باشد. در این صورت هر فرزند  $x_{d-3}$  یک رأس پشتیبان از درجه دو یا رأسی با درجه دو و مجاور یک رأس پشتیبان از درجه ۲ است. فرض کنید  $k_1, k_2$  تعداد برگ‌های  $T_{x_{d-2}}$  به ترتیب در فاصله سه و دو از  $x_{d-3}$  باشند. توجه کنید که  $\deg(x_{d-2}) = k_1 + k_2 + 1$ . فرض کنید  $\deg(x_{d-4}) \geq 3$ . قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-2}}$  و فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(T')$ -تابع است. اگر  $K_2 = \circ$ ، آن‌گاه تابع

$$h = (V_0 \cup V(T_{x_{d-2}}) - S(T_{x_{d-2}}) \cup \{x_{d-3}\}, V_1, V_2 \cup S(T_{x_{d-2}}) \cup \{x_{d-3}\})$$

یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T$  می‌باشد. از قضیه ۴.۲.۶، نتیجه می‌گیریم که

$$\gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T') + 2k_1 + 2k_2 + 1 < \frac{4n + \ell + s}{5},$$

که یک تناقض است. بنابراین  $\deg(x_{d-4}) = 2$ . فرض کنید  $k_2 = \circ$ . قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-4}}$  و فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(T')$ -تابع باشد. در این صورت تابع

$$h = (V_0 \cup V(T_{x_{d-2}}) - S(T_{x_{d-4}}), V_1, V_2 \cup S(T_{x_{d-2}}))$$

یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای  $T$  است و لذا طبق قضیه ۴.۲.۶،

$$\gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T') + 2k_1 + 2k_2 + 2 < \frac{4n + \ell + s}{5},$$

که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که  $k_2 > \circ$ . قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-3}}$  و فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(T')$ -تابع باشد. فرض کنید  $u$  یک برگ در فاصله دو از  $x_{d-3}$  و  $v$  پدر  $u$  باشد. در این صورت تابع

$$h = (V_0 \cup V(T_{x_{d-2}}) - (S(T_{x_{d-3}} - \{v\}))) \cup \{x_{d-3}, u\}, V_1 \cup \{u\}, V_2 \cup S(T_{x_{d-2}} - \{v\}) \cup \{x_{d-3}\})$$

یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T$  می‌باشد و لذا طبق قضیه ۴.۲.۶،

$$\gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T') + 2k_1 + 2k_2 + 1 < \frac{4n + \ell + s}{5},$$

که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که  $\deg(x_{d-3}) = 2$ . فرض کنید  $\deg(x_{d-4}) = 2$ . اگر  $\deg(x_{d-5}) \geq 3$ . آن‌گاه قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-4}}$  فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(T')$ -تابع است. در این صورت

$$h = (V_0 \cup \{x_d, x_{d-2}, x_{d-4}\}, V_1, V_2 \cup \{x_{d-1}, x_{d-3}\})$$

یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای  $T$  است. بنابراین

$$\gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T') + 4 < \frac{4n + \ell + s}{5},$$

که یک تناقض است. بنابراین  $\deg(x_{d-5}) = 2$ . چون  $\gamma_R^L(P_V) = 6 < \frac{4(7) + 2 + 2}{5}$  نتیجه می‌گیریم که  $T \neq P_V$  و لذا  $\deg(x_{d-6}) \geq 2$ . همچنین رابطه‌ی  $\gamma_R^L(P_\lambda) = 7 < \frac{4(8) + 2 + 2}{5}$  نتیجه می‌دهد که  $\deg(x_{d-7}) \geq 2$ . بنابراین طبق ادعای ۱،  $x_{d-6}$  یک رأس پشتیبان نیست. از لم ۱.۴.۶ نتیجه می‌شود که،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T') &= \gamma_R^L(T) - 4 \\ &= \frac{4n + \ell + s}{5} - 4 \\ &= \frac{4(n - 5) + \ell + s}{5} \\ &= \frac{4n' + \ell' + s'}{5}. \end{aligned}$$

طبق فرض استقرای  $T' \in \mathcal{T}$ . پس  $T$  از  $T'$  با عملگر  $\mathcal{O}_4$  به دست می‌آید و لذا  $T \in \mathcal{T}$ . حال فرض کنید که  $\deg(x_{d-4}) \geq 3$ . با توجه به ادعای ۱،  $x_{d-4}$  یک رأس پشتیبان نیست. فرض کنید برگ  $v$  در فاصله دو از  $x_{d-4}$  و  $u$  پدر  $v$  باشد. به وضوح  $\deg(u) = 2$ . قرار دهید  $T' = T - \{u, v\}$ . نشان می‌دهیم که  $x_{d-4}$  یک رأس ویژه است. فرض کنید  $\gamma_R^L(T')$ -تابع  $f = (V_0, V_1, V_2)$  وجود داشته باشد به طوری که  $f(x_{d-4}) = 2$  و  $Pn(x_{d-4}, V_0) = \emptyset$ . در این صورت  $(V_0 \cup \{u\}, V_1 \cup \{v\}, V_2)$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T$  می‌باشد و لذا

$$\gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T') + 1 < \frac{4n + \ell + s}{5},$$

که یک تناقض است. بنابراین  $\gamma_R^L(T')$ -تابع  $f = (V_0, V_1, V_2)$  با  $f(x_{d-4}) = 2$  و  $Pn(x_{d-4}, V_0) = \emptyset$  وجود ندارد. حال فرض کنید  $\gamma_R^L(T')$  تابع  $f = (V_0, V_1, V_2)$  وجود داشته باشد به طوری که  $f(x_{d-4}) = 1$  و  $N(x_{d-4}) \cap V_2 \neq \emptyset$ . در این صورت

$$(V_0 \cup \{v, x_{d-4}\}, V_1 - \{x_{d-4}\}, V_2 \cup \{u\})$$

یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T$  است و لذا  $\frac{4n + \ell + s}{5} < \gamma_R^L(T') + 1 \leq \gamma_R^L(T)$ ، که یک تناقض است. بنابراین  $x_{d-4}$  یک رأس ویژه از درخت  $T'$  است. به‌وضوح

$$\gamma_R^L(T') + 1 \leq \gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T') + 2.$$

فرض کنید  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R^L(T') + 1$ . همچنین فرض کنید  $h$  یک  $\gamma_R^L(T)$ -تابع باشد. فرض کنید  $h(u) = 2$ . در این صورت می‌توانیم فرض کنیم  $h(v) = 0$ . اگر  $h(x_{d-4}) \neq 0$ ، آن‌گاه  $h|_{V(T')}$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T'$  با وزن کمتر از  $\gamma_R^L(T')$  می‌باشد، که یک تناقض است. بنابراین  $h(x_{d-4}) = 0$ . چون  $h$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی است، پس رأس  $w \in N(x_{d-4}) - \{u\}$  وجود دارد به طوری که  $h(w) = 2$ . در این صورت تابع  $h'$  روی  $V(T')$  با ضابطه‌ی  $h'(x_{d-4}) = 1$  در غیراین صورت  $h'(x) = h(x)$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T'$  است. به‌وضوح  $h'$  یک  $\gamma_R^L(T')$ -تابع می‌باشد. به‌دلیل ویژه بودن رأس  $x_{d-4}$  به تناقض می‌رسیم. بنابراین  $h(u) \neq 2$ . اگر  $h(u) = 1$ ، آن‌گاه  $h(v) = 1$ . در این صورت با تغییر وزن  $u$  به  $2$  و  $v$  به  $0$  مثل قبل به تناقض می‌رسیم. بنابراین  $h(u) = 0$ . اگر  $h(v) = 2$ ، آن‌گاه با تغییر وزن  $v$  به  $0$  و  $u$  به  $2$ ، مثل قبل به تناقض می‌رسیم. بنابراین  $h(v) = 1$  و لذا  $h(x_{d-4}) = 2$ . بنابراین  $h|_{V(T')} = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(T')$ -تابع می‌باشد که  $P_n(x_{d-4}, V_0) = \emptyset$  به‌دلیل ویژه بودن رأس  $x_{d-4}$ ، این یک تناقض است. بنابراین  $\gamma_R^L(T) = \gamma_R^L(T') + 2$ . در این صورت،

$$\begin{aligned} \gamma_R^L(T') &= \gamma_R^L(T) - 2 \\ &= \frac{4n + \ell + s}{5} - 2 \\ &= \frac{4(n-2) + (\ell-1) + (s-1)}{5} \\ &= \frac{4n' + \ell' + s'}{5}. \end{aligned}$$

طبق فرض استقرای،  $T' \in \mathcal{T}$ . بنابراین  $T$  از  $T'$  با عملگر  $\mathcal{O}_3$  به‌دست می‌آید و لذا  $T \in \mathcal{T}$ . حال فرض کنید هر برگ از  $T_{x_{d-4}}$  در فاصله سه یا چهار از  $x_{d-4}$  باشد. اگر برگ  $v$  از  $T_{x_{d-4}}$  در فاصله چهار از  $x_{d-4}$  باشد، چون  $v$  و  $x_d$  نقش یکسانی دارند، آن‌گاه هر رأس درونی از مسیر  $v$  به  $x_{d-4}$  از درجه دو می‌باشد. همچنین طبق ادعای ۱، اگر  $v$  برگ از فاصله سه از  $x_{d-4}$  باشد، آن‌گاه هر رأس درونی از مسیر  $v$  به  $x_{d-4}$  دارای درجه دو می‌باشد. فرض کنید  $k_1$  و  $k_2$  تعداد برگ‌هایی از درخت  $T_{x_{d-4}}$  به ترتیب با فاصله چهار و سه از رأس  $x_{d-4}$  باشند. توجه کنید که  $\deg(x_{d-4}) = k_1 + k_2 + 1$ . فرض کنید  $\deg(x_{d-5}) = 2$ . قرار دهید  $T' = T - T_{x_{d-5}}$ . فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  یک  $\gamma_R^L(T')$ -تابع باشد. همچنین فرض کنید  $W$  مجموعه همه رأس‌هایی از درخت  $T_{x_{d-4}}$  باشند که در فاصله یک یا سه از رأس  $x_{d-4}$  قرار دارند،  $Z$  مجموعه‌ی همه رأس‌هایی از درخت  $T_{x_{d-4}}$  باشد که در فاصله چهار از  $x_{d-4}$  قرار دارند و  $U$  شامل  $x_{d-4}$  و همه رأس‌های با فاصله دو از  $x_{d-4}$  در درخت  $T_{x_{d-4}}$  باشد. در این صورت  $h = (V_0 \cup W, V_1 \cup Z, V_2 \cup U)$



یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T$  است. بنابراین

$$\begin{aligned}\gamma_R^L(T) &\leq \gamma_R^L(T') + 3k_1 + 2k_2 + 2 \\ &< \frac{4n + \ell + s}{5},\end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین،  $\deg(x_{d-5}) \geq 3$ . فرض کنید  $f = (V_0, V_1, V_2)$  و  $T' = T - T_{x_{d-4}}$ . یک  $\gamma_R^L(T')$ -تابع باشد. در این صورت  $h = (V_0 \cup W, V_1 \cup Z, V_2 \cup U)$  که مجموعه‌های  $W$ ،  $Z$  و  $U$  همان مجموعه‌های تعریف شده در قبل هستند، یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T$  است. بنابراین،  $\gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T') + 3k_1 + 2k_2 + 2$ . اگر  $k_2 \neq 0$  یا  $k_1 \geq 3$ ، آن‌گاه  $\gamma_R^L(T) < \frac{4n + \ell + s}{5}$ ، که یک تناقض است. بنابراین  $k_2 = 0$  و  $k_1 = 2$ . طبق لم ۲.۴.۶،  $\gamma_R^L(T) \leq \gamma_R^L(T') + 8$ ، بنابراین،

$$\begin{aligned}\gamma_R^L(T') &= \gamma_R^L(T) - 8 \\ &= \frac{4n + \ell + s}{5} - 8 \\ &= \frac{4(n-9) + (\ell-2) + (s-2)}{5} \\ &= \frac{4n' + \ell' + s'}{5}.\end{aligned}$$

طبق فرض استقراء  $T' \in \mathcal{T}$ . فرض کنید  $\gamma_R^L(T' - x_{d-5}) < \gamma_R^L(T')$ . همچنین فرض کنید  $g$  یک  $\gamma_R^L(T' - x_{d-5})$ -تابع باشد. تابع توسعه  $g$  با دادن وزن ۰ به  $x_{d-5}$  و رأس‌های با فاصله یک یا سه از  $x_{d-4}$  و وزن ۲ به  $x_{d-4}$  و رأس‌های با فاصله ۲ از  $x_{d-4}$  یک تابع احاطه‌گر روی مکانی برای درخت  $T$  می‌باشد. بنابراین،

$$\begin{aligned}\gamma_R^L(T) &\leq \gamma_R^L(T' - x_{d-5}) + 8 \\ &< \gamma_R^L(T') + 8 \\ &= \frac{4n + \ell + s}{5},\end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین  $\gamma_R^L(T' - x_{d-5}) \geq \gamma_R^L(T')$ . پس از  $T$  با عملگر  $\mathcal{O}_4$  به دست آمده و لذا  $T \in \mathcal{T}$ . طرف عکس قضیه از لم ۴.۴.۶، نتیجه می‌شود.



# مراجع

- [1] M. Adabi, E. Ebrahimi Targhi, N. Jafari Rad, M. Saied Moradi, Properties of independent Roman domination in graphs, *Australas. J. Combin.* **52** (2012), 11–18.
- [2] H.A. Ahangar, M.A. Henning, C. Löwenstein, Y. Zhao, V. Samodivkin, Signed Roman domination in graphs, *J. Comb. Optim.* **27** (2014), 241–255.
- [3] H.A. Ahangar, M. A. Henning, V. Samodivkin, I. G. Yero, Total Roman Domination in Graphs. Manuscript (2014).
- [4] P. Alimonti and V. Kann, Some APX-completeness results for cubic graphs, *Theoretical Computer Science*, **237** (1-2) (2000) 123–134 .
- [5] N. Alon and J.H. Spencer, *The probabilistic method*, 3rd edition, Wiley-Interscience, (2008).
- [6] G. Araujo-pardo, C. Balbuena, L. Montejano and J. C. Valenzuela, Partial linear spaces and identifying codes, *Eur. J. Comb*, **32** (2011), 344–351.
- [7] G.R. Argiroffo, S.M. Bianchi and A. K. Wagler, A polyhedral approach to locating-dominating sets in graphs, *Electron Notes Discrete Math*, **50**, (2015) 89–94.
- [8] G.R. Argiroffo, S.M. Bianchi and A. K. Wagler, *On identifying code polyhedra of families of suns*, Proceedings of VIII-th ALIO/EURO Workshop on Applied Combinatorial Optimization, Montevideo, Uruguay, December 2014.
- [9] G.R. Argiroffo, S.M. Bianchi and A. K. Wagler, Polyhedra associated to identifying codes, *Electron. Notes Discrete Math*, **44** (2013), 175–180.
- [10] G.R. Argiroffo, S.M. Bianchi and A. K. Wagler, Progress on the description of identifying code polyhedra for some families of split graphs, *Discrete Optimization*, **22** (2016) 225–240.
- [11] G.R. Argiroffo, S.M. Bianchi and A. K. Wagler, *Study of identifying code polyhedra for some families of split graphs*, Lecture Notes in Computer Science, No. 8596, pp. 13–25, Springer-Verlag, 2014.

- 
- [12] S. Arora and B. Barak, *Computational complexity: a modern approach*, Cambridge University Press, (2009).
- [13] S. Arumugam and V. Mathew, The fractional metric dimension of graphs, *Discrete Mathematics*, **312** (9) (2012), 1584–1590.
- [14] D. Auger, Induced paths in twin-free graphs, *Electron. J. Comb*, **15** (17) (2008).
- [15] D. Auger, Minimal identifying codes in trees and planar graphs with large girth, *Eur. J. Comb*, **31** (5) (2010), 1372–1384.
- [16] D. Auger, I. Charon, I. Honkala, O. Hudry and A. Lobstein, Edge number, minimum degree, maximum independent set, radius and diameter in twin-free graphs, *Advances in Mathematics of Communications*, **3** (1) (2009), 97–114.
- [17] D. Auger, I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Complexity results for identifying codes in planar graphs, *Int. Trans. Oper. Res*, **17** (6) (2010), 691-710.
- [18] D. Auger, I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Maximum size of a minimum watching system and the graphs achieving the bound, *To appear in Discrete Appl. Math*.
- [19] D. Auger, I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, On the existence of a cycle of length at least  $\Upsilon$  in a  $(\Delta, \leq \Upsilon)$ -twin-free graph, *Discussiones Math. Graph Theory* **30** (4) (2010), 591–609.
- [20] D. Auger, I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Watching systems in graphs: an extension of identifying codes, *To appear in Discrete Appl. Math*.
- [21] D. Auger, G. Cohen and S. Mesnager, Sphere coverings and identifying codes, *Designs, Codes and Cryptography*, **70** (2014), 3–7.
- [22] G. Ausiello, P. Crescenzi, G. Gambosi, V. Kann, A. Marchetti-Spaccamela and M. Protasi, *Complexity and approximation*, Springer, (1999).
- [23] L. Babai, On the complexity of canonical labeling of strong regular graphs, *SIAM J. of Computing*, **9** (1980), 212–216.
- [24] C. Balbuena, F. Foucaud, A. Hansberg, Locating-Dominating Sets and Identifying Codes in Graphs of Girth at least  $\Delta$ , *Electron. J. Comb*, **22** (2) (2015), 2–15.
- [25] Y. Ben-haim, S. Gravier, A. Lobstein and J. Moncel, *Adaptive identification in graphs*, *Rapport interne Telecom Paris-2007D012*, Paris, France, 33 pages, September (2007).

- [26] Y. Ben-haim, S. Gravier, A. Lobetein and J. Moncel, Adaptive identification in graphs, *J. Comb. Theory, Ser A*, **115** (2008), 1114–1126.
- [27] Y. Ben-haim, S. Gravier, A. Lobetein and J. Moncel, Adaptive identification in torii in the king lattice, *Electron. J. Comb*, **18** (1) (2011), 1–16.
- [28] N. Bertrand, *Codes identifiants et codes localisateurs-dominateurs sur certains graphes*, Memoire de stage de maîtrise (under O. Hudry’s supervision), ENST, Paris, France, June (2001).
- [29] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, 1-identifying codes on trees, *Australas. J. Combin*, **31** (2005), 21–35.
- [30] T. Y. Berger-Wolf, M. Laifenfeld and A. Trachtenberg, *Identifying codes and the set cover problem*, Proceedings of the 44th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing, Monticello, USA, September (2006).
- [31] A.A. Bertossi, Dominating sets for split and bipartite graphs, *Information Processing Letters*, **19** (198) (1984), 37–40.
- [32] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, identifying and locating-dominating codes on chains and cycles, *European J. Combin*. **25** (2004), 969–987.
- [33] M. Blidia, M. Chellali, Locating-dominating and identifying code in trees, *Australas. J. Combin*, **39** (2007), 219–232.
- [34] M. Blidia, M. Chellali, F. Maffray, J. Moncel and A. Semri, Locating-domination and identifying codes in trees, *Australas. J. Combin*, **39** (2007), 219–232.
- [35] M. Blidia, O. Favaron and R. Lounes, Locating-domination, 2-domination and independence in trees, *Aust. J. Combin*, **42** (2008), 309-319.
- [36] J.A. Bondy ,U.S.R Murty *Graph Theory*. (2008).
- [37] K.S. Booth and H.J. Johnson, Dominating sets in chordal graphs, *SIAM J. of Computing* **11** (1) (1982), 191-199.
- [38] R.C. Brigham, P.Z. Chinn, and R.D. Dutton, Vertex domination-critical graphs, *Networks*, **18** (1988), 173–179.

- 
- [39] K. Chakrabarty, M.G. Karpovsky, and L.B. Levitin, *Fault isolation and diagnosis in multiprocessor system with point-to-point connections*, in *Fault-Tolerant Parallel and Distributed Systems*, D. R. Avresky and D. R. Kaeli, Eds. Norwell, MA: Kluwer, pp. 285-301, (1998).
- [40] G. Chang and G.L. Nemhauser, The k-domination and k-stability problems on sun-free chordal graphs, *SIAM Journal of Algebraic Discrete Methods*, **5** (1984), 332–345.
- [41] I. Charon, G. Cohen, O. Hudry and A. Lobstein, New identifying codes in the binary Hamming space, *Eur. J. Comb*, **31** (2010), 491–501.
- [42] I. Charon, S. Gravier, O. Hudry, A. Lobstein, M. Mollard and J. Moncel, A linear algorithm for minimum 1-identifying codes in oriented trees, *Discrete Appl. Math*, **154** (2006), 1246–1253.
- [43] I. Charon, I. Honkala, O. Hudry and A. Lobstein, *Complexity of identifying and locating problems in graphs*, Rapport interne Telecom Paris- (2001).
- [44] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein. Extremal cardinalities for identifying and locating-dominating codes in graphs, *Discrete Math*. **307** (2007), 356–366.
- [45] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Extremal values for identification, domination and maximum cliques in twin-free graphs, *Ars Combinatoria*, **101** (2011), 161–185.
- [46] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, *Extremal values for the maximum degree in a twin-free graph*, Rapport interne TELECOM ParisTech-2008D007, Paris, France, 17 pages, May (2008).
- [47] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Extremal values for the maximum degree in a twin-free graph, *Ars Combinatoria*, **107** (2012), 257-274.
- [48] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Identifying and locating dominating codes: NP-completeness results for directed graphs, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **IT-48** (2002), 2192–2200.
- [49] I. Charon, I. Honkala, O. Hudry and A. Lobstein, Identifying codes with small radius in some infinite regular graphs, *Electron. J. Comb*, **9** (1) (2002) R11.
- [50] I. Charon, O. Hudry, and A. Lobstein, Identifying codes with small radius in some infinite regular graphs, *Electron. J. Combin.* **9** (1) (2002).

- [51] I. Charon, I. Honkala, O. Hudry and A. Lobstein, Minimum sizes of identifying codes in graphs differing by one edge, *Cryptogr. Commun.*, **6** (2014), 157–170.
- [52] I. Charon, I. Honkala, O. Hudry and A. Lobstein, Minimum sizes of identifying codes in graphs differing by one vertex, *Cryptogr. Commun.*, **5** (2013), 119–136.
- [53] I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, Minimizing the size of an identifying or locating-dominating code in a graph is NP-hard, *Theor. Comput. Sci.* **290** (3) (2003), 2109–2120.
- [54] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, On the structure of identifiable graphs, *Electron. Notes Discrete Math*, **22** (2005), 491–495.
- [55] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Possible cardinalities for identifying codes in graphs, *Australas. J. Combin.*, **32** (2005), 177–195.
- [56] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Possible cardinalities for locating-dominating codes in graphs, *Australas. J. Combin.* **34** (2006), 23–31.
- [57] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, *Minimum sizes of identifying codes in graphs differing by one edge or one vertex*, *Rapport interne Telecom ParisTech-2011D008*, Paris, France, 30 pages, (2011).
- [58] M. Chellali, Locating-total domination critical graphs, *Australas. J. Combin.* **45** (2009), 227–234.
- [59] M. Chellali, On locating and differentiating-total domination in trees, *Discuss. Math. Graph Theory*, **28** (2008), 383–392.
- [60] M. Chellali and N. Jafari Rad, Locating-total domination critical graphs, *Aust. J. Combin.* **45** (2009), 227–234.
- [61] X.G. Chen, M.Y. Sohn, Bounds on the locating-total domination number of a tree, *Discrete Appl. Math*, **159** (2011), 769–773.
- [62] B. N. Clark, C. J. Colbourn and D. S. Johnson, Unit disk graphs, *Discrete Math*, **86** (1-3) (1990), 165–177.
- [63] E.J. Cockayne, Paul A. Dreyer Jr., S.M. Hedetniemi, Stephen T. Hedetniemi, Roman domination in graphs, *Discrete Math*, **278** (2004), 11–22.
- [64] C.J. Colbourn, P.J. Slater, L.K. Stewart, Locating dominating sets in series parallel networks, *Congr. Numer.* **56** (1987), 135–162.

- [65] S.A. Cook. *The complexity of theorem-proving procedures*, In *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 151-158. ACM, (1971).
- [66] B. Courcelle and M. Mosbah, Monadic second-order evaluations on tree-decomposable graphs, *Theoretical Computer Science* **109** (1993), 49-82.
- [67] B. Courcelle. The monadic second-order logic of graphs. I. Recognizable sets of finite graphs, *Information and Computation*, **85** (1) (1990), 12–75.
- [68] W. Dali and M. Blidia, Criticality indices of locating-domination of paths and cycles, *Utilitas Math*, **94** (2014), 199–219.
- [69] W. Dali and M. Blidia, On locating and locating-total domination edge addition critical graphs, *Utilitas Math*, **94** (2014), 303–313.
- [70] M. Daniel, *Codes identifiants*, M’emoire pour le DEA ROCO, Universit’e Joseph Fourier, Grenoble, France, June (2003).
- [71] M. Daniel, S. Gravier and J. Moncel, Identifying codes in some subgraphs of the square lattice, *Theoretical Computer Science*, **319** (2004), 411–421.
- [72] K.M.J. Debontridder, B.V. Halldorsson, M.M. Halldorsson, C.A. J. Hurkens, J.K. Lenstra, R. Ravi and L. Stougie, Approximation algorithms for the test cover problem, *Math. Programming*, **98** (2003), 477–491.
- [73] O. Delmas, S. Gravier, M. Montassier and A. Parreau, On two variations of identifying codes, *Discrete Math* , **311** (2011), 1948–1956.
- [74] R.D. Dutton, and R. Brigham, On global domination critical graphs, *Discrete Math.* **309** (19) (2009), 5894–5897.
- [75] G. Exoo, *Computational results on identifying t-codes*, Preprint, (1999).
- [76] G. Exoo, V. Junnila and T. Laihonen, Locating-dominating codes in cycles, *Australas. J. Combin*, **49** (2011), 177–194.
- [77] G. Exoo, V. Junnila and T. Laihonen, Locating-dominating codes in paths, *Discrete Math* , **311** (2011), 1863–1873.
- [78] G. Exoo, V. Junnila and T. Laihonen, On location-domination of set of vertices in cycles and paths, *Congressus Numerantium*, **202** (2010), 97–112 .



- [79] G. Exoo, V. Junnila and T. Laihonen and S. Ranto, Improved bounds on identifying codes in binary Hamming spaces, *Eur. J. Comb*, **31** (2010), 813–827.
- [80] G. Exoo, T. Laihonen and S. Ranto, Improved upper bounds on binary identifying codes, *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-53** (2007), 4255–4260.
- [81] G. Exoo, V. Junnila, T. Laihonen and S. Ranto, Locating vertices using codes, *Congressus Numerantium*, **191** (2008), 143–159.
- [82] G. Exoo, T. Laihonen and S. Ranto, New bounds on binary identifying codes, *Discrete Appl. Math*, **156** (2008), 2250–2263.
- [83] G. Exoo, V. Junnila, T. Laihonen and S. Ranto, Upper bounds for binary identifying codes, *Advances in Applied Mathematics*, **42** (2009), 277–289.
- [84] M. Farber, Domination, independent domination, and duality in strongly chordal graphs, *Discrete Appl. Math* **7** (1984), 115–130.
- [85] M. Farber and J.M. Keil, Domination in permutation graphs, *Journal of Algorithms*, **6** (1985), 309–321.
- [86] N. Fazlollahi, D. Starobinski and A. Trachtenberg, Connected Identifying Codes for Sensor Network Monitoring, in *Proc. IEEE Wireless Commun. Netw. Conf., Cancun, Mexico*, (2011), 1026-1031.
- [87] F. Foucaud, *Combinatorial and algorithmic aspects of identifying codes in graphs*, PhD thesis, Universit´e Bordeaux 1, France, December 2012. Available online at <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00766138>.
- [88] F. Foucaud, Decision and approximation complexity for identifying codes and locating-dominating sets in restricted graph classes, *J. Discrete Alg.* **31** ( 2015), 48-68.
- [89] F. Foucaud, S. Gravier, R. Naserasr, A. Parreau and P. Valicov, Identifying codes in line graphs, *Journal of Graph Theory*, **73** (4) (2013), 425–448.
- [90] F. Foucaud, M. A. Henning, C. Löwenstein, T. Sass, Locating-dominating sets in twin-free graphs, *Discrete Applied Mathematics* (2016), In press.
- [91] F. Foucaud, G. Mertzios, R. Naserasr, A. Parreau and P. Valicov, Identifying codes in subclasses of perfect graphs, In preparation.

- [92] F. Foucaud and G. Perarnau, Bounds for identifying codes in terms of degree parameters, *Electron. J. Comb*, **19** (2012), P.32.
- [93] M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, W. H. Freeman, (1979).
- [94] M.R. Garey and D.S. Johnson, The rectilinear Steiner tree problem is NP-complete, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **32** (4) (1977), 826–834.
- [95] D. Garijo, A. Gonza'lez, A. Ma'rquez, The difference between the metric dimension and the determining number of a graph, *Applied Mathematics and Computation*, **249** (2014), 487–501.
- [96] M.R. Garey, D.S. Johnson, and L. Stockmeyer, Some simplified npcomplete graph problems, *Theoretical computer science*, **1** (3) (1976), 237–267.
- [97] W. Goddard, T.W. Haynes, M.A. Henning, and L.C. van der Merwe, The diameter of total domination vertex critical graphs, *Discrete Math.* **286** (2004), 255–261.
- [98] S. Gravier and J. Moncel, On graphs having a  $V \setminus \{x\}$  set as an identifying code, *Discrete Math.* **307** (3-5) (2007), 432–434.
- [99] P.J.P. Grobler and C.M. Mynhardt, Secure domination critical graphs, *Discrete Math.* **309** (19) (2009), 5820–5827.
- [100] T.W. Haynes, M.A. Henning, J. Howard, Locating and total dominating sets in trees, *Discrete Appl. Math.* **154** (2006), 1293–1300.
- [101] A. Hansberg, N. Jafari Rad and L. Volkmann, Characterization of Roman domination critical unicyclic graphs, *Utilitas Math*, To appear.
- [102] A. Hansberg, N. Jafari Rad and L. Volkmann, Vertex and edge critical Roman domination in graphs, *Utilitas Math*, To appear.
- [103] T.W. Haynes, S.T. Hederniemi, P.J. Slater, *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, New York, 1997–179.
- [104] T.W. Haynes, S.T. Hederniemi, P.J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, (1998), 287–303.
- [105] M.A. Henning and N. Jafari Rad, Locating-total domination in graphs, *Discrete Appl. Math.* **160** (13-14) (2012), 1986–1993.

- 
- [106] M.A. Henning and C. Lowenstein, Locating-total domination in claw-free cubic graphs, *Discrete Math.* **312** (2012), 3107–3116.
- [107] M.A. Henning and C. Löwenstein, Locating-total domination in claw-free cubic graphs, *Discrete Math.* **312** (2012), 3107–3116.
- [108] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, and J. Collins, *Global Positioning System, Theory and Practice*, Springer-Verlag, 4 edition, (1997).
- [109] H. Iswadi, E.T. Baskoro and R. Simanjuntak, On the metric dimension of corona product of graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, **52** (2) (2011), 155–170.
- [110] N. Jafari Rad, Critical concept for 2-rainbow domination in graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, **51** (2012), 49–60.
- [111] S. Janson and T. Laihonen, An optimal result for codes identifying sets of words, *Proceedings of the 2009 IEEE International Symposium on Information Theory*, (2009), 2547–2551.
- [112] S. Janson and T. Laihonen, On the size of identifying codes in binary hypercubes, *J. Comb. Theory, Ser. A*, **116** (2009), 1087–1096.
- [113] V. Junnila, Adaptive identification of sets of vertices in graphs, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **14** (2012), 69–86.
- [114] V. Junnila, New lower bound for 2-identifying code in the square grid, *Discrete Appl. Math.* **161** (2013), 2042–2051.
- [115] V. Junnila, *On identifying and locating-dominating codes*, Ph. D. Thesis, University of Turku, Finland, (2011).
- [116] V. Junnila, Optimal locating-total dominating sets in strips of height 3, *Discussiones Math. Graph Theory*, **35** (2015), 447–462.
- [117] V. Junnila and T. Laihonen, Identification in  $Z^{\vee}$  using Euclidean balls, *Discrete Appl. Math.* **159** (2011), 335–343.
- [118] V. Junnila and T. Laihonen, Optimal identifying codes in cycles and paths, *Graphs and Combinatorics*, **28** (2012), 469–481.
- [119] V. Junnila and T. Laihonen, Optimal lower bound for 2-identifying codes in the hexagonal grid, *Electron. J. Comb.* **19** (2) (2012), P.38.

- [120] V. Junnila and T. Laihonen, Optimal identification of sets of edges using 2-factors, *Discrete Appl. Math.* **313** (2013), 1636–1647.
- [121] V. Junnila and T. Laihonen, Codes for information retrieval with small uncertainty, *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-60** (2014), 976–985.
- [122] V. Junnila and T. Laihonen, Information retrieval with unambiguous output, *Information and Computation*, **242** (2015), 354–368.
- [123] V. Junnila and T. Laihonen, Information retrieval with varying number of input clues, *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-62** (2016), 625–638.
- [124] V. Junnila and T. Laihonen and A. Parreau, Tolerant identification with Euclidean balls, *Networks*, **61** (2013), 212–225.
- [125] R.M. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, Springer, (1972).
- [126] M.G. Karpovsky, K. Chakrabarty, L. B. Levitin, On a new class of codes for identifying vertices in graphs, *IEEE Transactions on Information Theory*, **44** (1998), 599–611.
- [127] K. Kammerling, L. Volkmann, Roman k-domination in graphs, *J. Korean Math. Soc.* **46** (2009), 309-318.
- [128] D. Kratsch, Domination and total domination on asteroidal triple-free graphs, *Discrete Appl. Math.* **99** (1-3) (200), 111–123.
- [129] P.L. Lai, Paths and cycles identifying vertices in twisted cubes, *Applied Mathematics and Computation*, **259** (2015), 620–627.
- [130] M. Laifenfeld, *Coding for network applications: robust identification and distributed resource allocation*, Ph. D. Thesis, University of Boston, USA, (2007).
- [131] M. Laifenfeld, Localization and identification in networks using robust identifying codes, *Proceedings of Information Theory and Applications Workshop*, ITA (2008), 165–174.
- [132] M. Laifenfeld and A. Trachtenberg, Disjoint identifying-codes for arbitrary graphs, *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Information Theory, Adelaide, Australia, September*, (2005).
- [133] M. Laifenfeld and A. Trachtenberg, Identifying codes and covering problems, *IEEE Transactions on Information Theory*, **54** (9) (2008), 3929–3950.

- [134] M. Laifenfeld, A. Trachtenberg and T. Y. Bergerwolf, *Identifying codes and the set cover problem*, Proceedings of the 44th Annual Allerton Conf. on Communication, Control and Computing, Monticello, USA, September (2006).
- [135] M. Laifenfeld, A. Trachtenberg, R. Cohen and D. Starobinski, *Joint monitoring and routing in wireless sensor networks using robust identifying codes*, *Proceedings of IEEE Broadnets 2007*, Raleigh, USA, pp. 197–206, September (2007).
- [136] T. Laihonen, Sequences of optimal identifying codes, *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-48** (2002), 774–776.
- [137] T. Laihonen, Optimal codes for strong identification, *European Journal of Combinatorics*, **23** (2002), 307–313.
- [138] T. Laihonen, On optimal edge-robust and vertex-robust  $(\setminus, \leq \ell)$ - identifying codes, *SIAM J. on Discrete Math*, **18** (2005), 825–834.
- [139] T. Laihonen, On robust identification in the square and king grids, *Discrete Appl. Math.* **154** (2006), 2499–2510.
- [140] T. Laihonen, Optimal t-edge-robust r-identifying codes in the king lattice, *Graphs and Combinatorics*, **22** (2006), 487–496.
- [141] T. Laihonen, On edge-robust  $(\setminus, \leq \ell)$ -identifying codes in binary Hamming spaces, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **36** (2007), 87–102.
- [142] T. Laihonen, On cages admitting identifying codes, *European Journal of Combinatorics*, **29** (2008), 737–741.
- [143] T. Laihonen, The metric dimension for resolving several objects, *Information Processing Letters*, **116** (11) (2016), 694–700.
- [144] T. Laihonen, Information retrieval and the average number of input clues, *Advances in Mathematics of Communications*, **11** (2017), 203–223.
- [145] T. Laihonen and J. Moncel, On graphs admitting codes identifying sets of vertices, *Australas. J. Combin*, **41** (2008), 81–91.
- [146] T. Laihonen and S. Ranto, Codes identifying sets of vertices, *Lecture Notes in Computer Science*, ( 2227) (2001), 82–91.

- [147] T. Laihonen and S. Ranto, Families of optimal codes for strong identification, *Discrete Appl. Math.* **121** (2002), 203–213.
- [148] Ch.H. Liu, G.J. Chang, Roman domination on strongly chordal graphs, *Journal of Combinatorial Optimization*, **2** (2013), 608–619.
- [149] J. Louis Sewell, Peter J. Slater, A sharp lower bound for locating-dominating sets in trees, *Australasian J. Combinatorics*, **60** (2) (2014), 136-149.
- [150] J. Moncel, *Codes identifiants dans les graphes*, PhD thesis, Universit'e Joseph Fourier Grenoble I, France, (2005).
- [151] J. Moncel, On graphs on  $n$  vertices having an identifying code of cardinality  $\log_2(n + 1)$ , *Discrete Appl. Math.* **154** (14) (2006), 2032–2039.
- H. Muller and A. Brandtadt, The NP-completeness of Steiner Tree and Dominating Set for chordal bipartite graphs, *Theoretical Computer Science*, **53** (1987), 257–265.
- [152] T. Muller and J.S. Sereni, Identifying and locating-dominating codes in (random) geometric networks, *Combinatorics, Probability and Computing*, **18** (6) (2009), 925–952.
- [153] L. Niepel, Locating-paired-dominating sets in square grid, *Discrete Mathematics*, **338** (2015), 1699–1705.
- [154] W. Ning, M. Lu, J. Guo, Bounds on the differentiating-total domination number of a tree, *Discrete Appl. Math.* (2016), In press.
- [155] B.N. Omamalin, S.R. Canoy, Jr., and H.M. Rara, Locating total dominating sets in the join, corona and composition of graphs, *Applied Mathematical Sciences (Ruse)*, **8** (45–48) (2014), 2363–2374.
- [156] M. Pelto, New bounds for  $(r, \leq \Psi)$ -identifying codes in the infinite king grid, *Cryptography and Communications*, **2** (2010), 41–47.
- [157] M. Pelto, On locating-dominating codes for locating large numbers of vertices in the infinite king grid, *Australas. J. Combin.*, **50** (2011), 127–139.
- [158] M. Pelto, On  $(r, \leq \Psi)$ -locating-dominating codes in the infinite king grid, *Advances in Mathematics of Communications*, **6** (2012), 27–38.
- [159] M. Pelto, *On identifying and locating-dominating codes in the infinite king grid*, Ph. D. Thesis, University of Turku, Finland, 133 pages, (2012).

- [160] M. Pelto, Optimal  $(r, \leq \Psi)$ -locating-dominating codes in the infinite king grid, *Discrete Appl. Math.* **161** (2013), 2597–2603.
- [161] M. Pelto, Optimal identifying codes in the infinite  $\Psi$ -dimensional king grid, *Eur. J. Comb.*, **36** (2014), 641–659.
- [162] M. Pelto, Maximum difference about the size of optimal identifying codes in graphs differing by one vertex, *Discrete Math. & Theoretical Computer Science*, **17** (1) (2015), 339–356.
- [163] M. Pelto, On locating-dominating codes in the infinite king grid, *Ars Combinatoria*, **124** (2016), 353–363.
- [164] S. Ray, R. Ungrangsi, F. De Pellegrini, A. Trachtenberg and D. Starobinski, Robust location detection in emergency sensor networks, *J. Graph Theory*, **35** (2000), 21–45.
- [165] C.S. ReVelle, Can you protect the Roman Empire?, *Johns Hopkins Magazine*, **49** (2) (1997).
- [166] C.S. ReVelle, K.E. Rosing, Defendens imperium Romanum: a classical problem in military strategy, *Amer Math. Monthly*, **107** (2000), 585–594.
- [167] P. Roushini Leely Pushpam, T. N. M. Nalini Mai, Edge Roman domination in graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **69** (2009), 175–182.
- [168] S.J. Seo and P.J. Slater, Open neighborhood locating-dominating sets, *Australas. J. Combin.*, **46** (2010), 109–120.
- [169] P.J. Slater, Dominating and reference sets in a graph, *J. Math. Phys. Sci.* **22** (1988). 445–455.
- [170] P.J. Slater, dominating and locating dominating set in acyclic of graphs, *Network*, **17** (1987), 55–64.
- [171] P.J. Slater, Locating dominating sets and locating-dominating sets, *Graph Theory, Combinatorics, and Applications: Proceedings of the 7th Quadrennial International Conference on the Theory and Applications of Graphs*, **2** (1995), 1073–1079.
- [172] P.J. Slater and D. F. Rall, On location-domination numbers for certain classes of graphs, *Congressus Numerantium*, **45** (1984), 97–106.
- [173] I. Stewart, Defend the Roman Empire!, *Sci. Amer.* **281** (6) (1999), 136–139.
- [174] J. Suomela, Answer to the question “Is the dominating set problem restricted to planar bipartite graphs of maximum degree 3 NP-complete?”, <http://cstheory.stackexchange.com/a/2508/> (1930).

- [175] M. Yannakakis and F. Gavril, Edge dominating sets in graphs, *SIAM J. on Applied Math*, **38** (1980), 364–372.



# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Polynomial time algorithm	الگوریتم زمانی چندجمله ای
Locating Roman domination edge critical	احاطه‌گر رومی مکانی یال بحرانی
Cover	پوشش
Roman dominating function	تابع احاطه‌گر رومی
Locating Roman dominating function	تابع احاطه‌گر رومی مکانی
Corona	تاج
Clique	خوشه
Degree	درجه
Tree	درخت
Rooted tree	درخت ریشه‌دار
Cycle	دور
Pendant vertex	رأس آویخته
Support vertex	رأس پشتیبان
Strong support vertex	رأس پشتیبان قوی
Central vertex	رأس مرکزی
Subdivision	زیرتقسیم کردن
Induced subgraph	زیرگراف القایی
Double star	ستاره دوگانه
Multiprocessor systems	سیستم‌های چند پردازنده
Emergency sensor networks	شبکه‌های حسگر اضطراری
Satisfiability	صدق پذیری
Loop	طوقه
Roman domination number	عدد احاطه‌گر رومی
Locating Roman domination number	عدد احاطه‌گر رومی مکانی
Identifiable	قابل شناسایی
Diameter	قطر

Locating dominating code	کد احاطه‌گر مکانی
Identifying code	کد شناسایی
Graph	گراف
Split graph	گراف تقسیم
Bipartite graph	گراف دو بخشی
Roman graph	گراف رومی
Locating Roman graph	گراف رومی مکانی
Simple graph	گراف ساده
Complete graph	گراف کامل
Complement graph	گراف متمم
Planar graph	گراف مسطح
Regular graph	گراف منتظم
Chordal graph	گراف وتری
Connected graph	گراف همبند
Walk	گشت
Dominating set	مجموعه احاطه‌گر
Locating total dominating code	مجموعه احاطه‌گر کلی
Differential total dominating set	مجموعه احاطه‌گر کلی تفاضلی
Path	مسیر
NP-complete problem	مسئله $NP$ - کامل
Disconnected	ناهمبند
Open neighborhood	همسایه باز
Close neighborhood	همسایه بسته
Chordal	وتر
Edge	یال
Pendant edge	یال آویخته

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Bipartite graph	گراف دو بخشی
Central vertex	رأس مرکزی
Chordal	وتر
Chordal graph	گراف وتری
Clique	خوشه
Close neighborhood	همسایه بسته
Complete graph	گراف کامل
Complement graph	گراف متمم
Connected graph	گراف همبند
Corona	تاج
Cover	پوشش
Cycle	دور
Differential total dominating set	مجموعه احاطه‌گر کلی تفاضلی
Degree	درجه
Diameter	قطر
Disconnected	ناهمبند
Dominating set	مجموعه احاطه‌گر
Double star	ستاره دو گانه
Edge	یال
Emergency sensor networks	شبکه‌های حسگر اضطراری
Identifiable	قابل شناسایی
Identifying code	کد شناسایی
Induced subgraph	زیرگراف القایی
Locating dominating code	کد احاطه‌گر مکانی
Locating total dominating code	مجموعه احاطه‌گر کلی
Locating Roman dominating function	تابع احاطه‌گر رومی مکانی

Locating Roman domination edge critical	احاطه‌گر رومی مکانی یال بحرانی
Locating Roman domination number	عدد احاطه‌گر رومی مکانی
Locating Roman graph	گراف رومی مکانی
Loop	طوقه
Multiprocessor systems	سیستم‌های چند پردازنده
NP-complete problem	مسئله $NP$ - کامل
Open neighborhood	همسایه باز
Path	مسیر
Pendant edge	یال آویخته
Pendant vertex	رأس آویخته
Planar graph	گراف مسطح
Polynomial time algorithm	الگوریتم زمانی چندجمله‌ای
Regular graph	گراف منتظم
Roman dominating function	تابع احاطه‌گر رومی
Roman domination number	عدد احاطه‌گر رومی
Roman graph	گراف رومی
Rooted tree	درخت ریشه‌دار
Satisfiability	صدق پذیری
Simple graph	گراف ساده
Strong support vertex	رأس پشتیبان قوی
Split graph	گراف تقسیم
Subdivision	زیرتقسیم کردن
Support vertex	رأس پشتیبان
Tree	درخت
Walk	گشت

## Abstract

A subset  $S$  of vertices in a graph  $G = (V, E)$  is a *dominating set* of  $G$  if every vertex in  $V - S$  has at least a neighbor in  $S$ . A dominating set  $S$  is a *locating-dominating set* of  $G$  if every two vertices  $x, y \in V(G) - S$  satisfy  $N(x) \cap S \neq N(y) \cap S$ . The *locating-domination number*  $\gamma_L(G)$  is the minimum cardinality of a locating-dominating set of  $G$ . A subset  $S$  of vertices in a graph  $G$  is an *identifying code* if for every two vertices  $x$  and  $y$  of  $G$ , the sets  $N[x] \cap S$  and  $N[y] \cap S$  are non-empty and different. The minimum cardinality of an identifying code in  $G$  is denoted by  $M(G)$ . In this thesis, we study the *identifying* and *locating dominating codes* and parameters dependent on these codes of graphs, and state some features, applications and bounds available for those parameters. Then, we improve some of these bounds and present new bounds for trees. Also, we characterize all trees achieving equality for the new bounds. Finally, we extend the Roman dominating function to locating Roman dominating function, and introduce a new parameter called the locating Roman domination number for graphs and study several bounds for this parameter on graphs and trees. Moreover, we compare this parameter with other graph parameters.

**Key Words:** Identifying Code, Locating Dominating Code, Locating Total Dominating Code, Differential Total Dominating Set, Locating Roman Dominating Function.

**2010 Mathematics Subject Classification:** 05C69.



**Shahrood University of Technology**

**Faculty Of Mathematical Sciences**

**PhD Thesis in: Graphs and Combinatorics**

# **Identifying and Locating Dominating Codes**

**By: Hadi Rahbani**

**Supervisor**

**Dr. Nader Jafari Rad**

**Advisor**

**Dr. Seyed Masoud MirRezaei**

**January 2018**